

Dépendance non-monotone : Une application à la relation rendement-volume

David NETO*

RÉSUMÉ. – L'objet de cet article est de proposer une méthodologie pour mesurer la dépendance entre deux variables qui présentent une relation non-monotone. En effet, dans ce contexte, les mesures communément utilisées (comme le coefficient de corrélation) sont incapables de mesurer correctement cette dépendance. Au travers de l'analyse de la relation rendement-volume, nous montrons comment construire et estimer un modèle avec une distribution jointe non-monotone. L'intérêt de l'approche réside dans la représentation paramétrique de la distribution qui facilite l'inférence statistique.

Measuring Nonmonotone Dependence: An Application to Return-Volume Relationship

ABSTRACT. – The purpose of this paper is to provide a flexible parametric methodology to measure nonmonotone relationships between two variables. Indeed, in this context, the Pearson rho measure fails because it is only consistent for linear monotone dependence. Using the well-known return-volume relationship example, we illustrate how to estimate a joint distribution with nonmonotone dependence. Since our approach is parametric, the estimation and inference are easy to perform.

* D. NETO : Département d'Économétrie, Université de Genève, 40 Bd du Pont d'Arve, CH-1211 Genève 4, Suisse. E-mail : david.neto@metri.unige.ch

1 Introduction

Les distributions jointes traditionnellement utilisées pour modéliser les séries financières ont une structure de dépendance monotone. Pourtant, il semblerait que ces distributions ne soient pas adaptées pour l'analyse jointe de certaines variables. En particulier, de nombreux travaux théoriques et empiriques (EPPS, [1975], EPPS et EPPS, [1976], JENNINGS *et al.*, [1981], KARPOFF, [1987], GALLANT *et al.*, [1992], BLUME *et al.*, [1994]), ont montré que la relation entre les rendements boursiers et les volumes de transaction était non-monotone. Il n'est alors pas surprenant que les mesures de dépendance communément utilisées en économétrie (comme le coefficient de corrélation de Pearson) soient incapables de mesurer correctement cette dépendance. Ainsi, les constats empiriques sur la relation rendement-volume rapportent une corrélation nulle entre ces deux variables, ce qui apparaît peu crédible aux yeux de la théorie économique et des faits stylisés.

Du fait de l'incapacité de mesurer correctement cette dépendance, la majorité des travaux qui introduisent les volumes dans la modélisation des rendements boursiers, s'intéressent à la relation volatilité-volume plutôt qu'à celle du couple rendement-volume. En mesurant la volatilité comme la valeur absolue ou le carré des rendements¹, on se ramène à une relation monotone qui rend possible alors l'inférence statistique. Ces travaux se basent en général sur la théorie développée par CLARK [1973]. Cette théorie, fondée sur l'hypothèse dite MDH (pour Mixture Distribution Hypothesis), suppose que le processus sous-jacent de la volatilité est le flux d'informations qui arrive sur le marché. Le caractère non régulier et très versatile de cette variable (latente) serait à l'origine de la dynamique des rendements (en particulier, l'hétéroscédasticité variable au cours du temps, la leptokurticité et/ou l'asymétrie des distributions empiriques, ou encore la persistance de la variance conditionnelle). Le flux d'informations n'étant pas observable, Clark propose d'utiliser les volumes de transaction comme variable instrumentale. En effet, parce que les quantités échangées doivent refléter la perception que les agents ont de l'information, cette variable devrait également être gouvernée par le flux d'informations. Cette théorie est à l'origine de nombreux travaux empiriques cherchant à modéliser conjointement les volumes et les rendements. Parmi ces travaux, nous pouvons citer ceux de EPPS et EPPS [1976], TAUCHEN et PITTS [1983], LAMOUREUX et LASTRAPES [1990, 1994], ANDERSEN [1996], et plus récemment ceux de LIESENFELD [1998, 2001] et WATANABE [2000]². Le principal handicap de l'analyse volumes-volatilité réside dans le fait qu'elle ne donne pas de représentation analytique de la distribution jointe de la relation rendement-volume, a priori non-monotone.

Cette non-monotonie est au centre du modèle théorique de BLUME *et al.* [1994] dont les résultats sont remarquablement similaires aux faits stylisés révélés par GALLANT *et al.* [1992]. Un des principaux résultats du modèle de BLUME *et al.* [1994] est la forme en "V" de la relation rendement-volume. Ils montrent, en outre, que la dispersion autour du "V" tend à s'accroître avec l'homogénéité des croyances des agents sur le marché. Inversement, pour un fort niveau d'asymétrie d'information,

1. Ou encore comme une fonction du carré des rendements (dans le cas d'une modélisation ARCH).

2. Notons par ailleurs que l'hypothèse de Clark a donné lieu à de nombreuses études sur les changements d'échelles telles que celles menées par Müller *et al.* [1990] ou par ANÉ et GEMAN [2001].

la dispersion se resserre (ce qui correspond à une forte dépendance rendement-volume). Dans la mesure où l'asymétrie d'information est connue pour être une des principales sources de liquidité d'un actif financier, il est alors possible de faire le lien avec la relation rendement-volume. Ainsi, une mesure possible du degré de liquidité d'un actif peut être construit sur la base d'une mesure de la dépendance entre le rendement et le volume.

Notons par ailleurs que le modèle de BLUME *et al.* [1994] ne rend pas compte d'un fait souvent rapporté par les travaux cités plus haut. Il s'agit du caractère asymétrique de la relation rendement-volume. Il semblerait, en effet, que la dépendance soit plus forte pour les corrections de prix positives. JENNINGS *et al.* [1981] expliquent ce phénomène par le fait que les positions courtes sont plus coûteuses que les positions longues. TAUCHEN *et al.* [1996] testent empiriquement cette asymétrie dans le cadre d'un modèle dynamique semi-nonparamétrique en estimant les fonctions de réponses du volume aux rendements selon leurs signes. En dépit du fait que cette asymétrie semble exister dans l'absolu, les résultats de TAUCHEN *et al.* [1996] ne la révèlent pas statistiquement significative. Notons toutefois, que la méthode semi-nonparamétrique utilisée par ces auteurs (développée par GALLANT *et al.* [1993]) souffre d'un manque de précision lorsque l'on dispose pas d'un très grand nombre d'observations.

L'objet de cet article est de fournir un modèle bivarié du rendement et du volume dont la distribution jointe est non-monotone. Pour se faire, nous construisons notre méthodologie sur la base des travaux théoriques de SCARSINI et VENETOULIAS [1993]. En utilisant la théorie des copules, ces auteurs montrent comment obtenir une structure de dépendance paramétrique non-monotone. De façon générale, l'approche de SCARSINI et VENETOULIAS [1993] se prête mal à l'estimation, et c'est probablement la raison pour laquelle leurs travaux n'ont pas fait, à notre connaissance, l'objet d'applications et de prolongements. Cependant, dans le cadre de la relation rendement-volume, nous montrons comment il est possible d'estimer un modèle paramétrique muni d'une telle distribution. Cette approche compte certains avantages sur l'analyse de la relation volatilité-volume. En effet, si cette dernière se ramène à une relation monotone en appliquant la fonction carrée (ou la valeur absolue) aux rendements, celle que nous proposons repose sur une transformation de leur fonction de répartition empirique. Notre approche sera alors, de fait, moins sensible aux valeurs extrêmes dans la mesure où la fonction cumulée ne fait intervenir que le rang des réalisations et non leurs valeurs. D'autre part, l'approche proposée permet une représentation analytique et paramétrique de la distribution jointe du couple qui facilitera par la suite l'inférence statistique. De plus, des simulations montreront la capacité de notre modèle à générer naturellement de la dépendance entre les volumes et le carré (ou la valeur absolue) des rendements.

Outre l'apport méthodologique de cet article dans la construction et l'estimation d'une distribution non-monotone, sa principale contribution réside également dans la validation empirique d'un certain nombre de caractères de la relation rendement-volume rapportés par la littérature. Ces caractéristiques sont : (1) la non-monotonie de la dépendance rendement-volume, (2) l'absence de corrélation entre ces deux variables, (3) l'existence d'une corrélation positive entre les volumes et la valeur absolue ou le carré des rendements, et enfin (4) l'asymétrie de la relation selon le sens de la correction des prix.

L'article s'articule de la façon suivante. La section 2 revient sur des éléments théoriques du concept de dépendance. Cette section explique comment construire une structure de dépendance non-monotone dans le cas bivarié. La section 3 s'in-

téresse à la modélisation de la distribution jointe du rendement et des volumes de transaction pour huit actions françaises. Nous décrivons dans un premier temps les données utilisées ainsi que les ajustements nécessaires à l'inférence statistique. Dans un second temps, une distribution (paramétrique) jointe non-monotone est proposée pour décrire la nature de la dépendance entre les rendements et les volumes. La section 4 aura pour objet la méthode d'estimation du modèle. La section 5 sera consacrée aux résultats empiriques. Nous concluons enfin dans la section 6.

2 Notions théoriques

Dans cette section nous donnons quelques définitions du concept de dépendance. On trouvera une littérature théorique complète dans les ouvrages de NELSEN [1998] et de JOE [1997]. Ensuite, nous rappellerons comment SCARSINI et VENETOULIAS [1993] proposent de construire une structure de dépendance non-monotone.

2.1 Dépendance monotone

Considérons la classe de Fréchet des distributions bivariées $\mathcal{H}(F_1, F_2)$ ³. Selon FRÉCHET [1951], pour tout vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de distribution jointe $H(x_1, x_2) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \in \mathcal{H}$, nous avons l'encadrement suivant :

$$(1) \quad H^-(\mathbf{X}) \leq H(\mathbf{X}) \leq H^+(\mathbf{X})$$

où $H^+(\mathbf{X}) = \min(F_1(X_1), F_2(X_2))$ est la borne de Fréchet supérieure et $H^-(\mathbf{X}) = \max(0, F_1(X_1) + F_2(X_2) - 1)$, la borne de Fréchet inférieure. Dans le cas bivarié, les bornes $H^+(\mathbf{X})$ et $H^-(\mathbf{X})$ sont des fonctions de répartition (voir JOE, [1997], pour une démonstration). Considérons maintenant l'ordonnancement de concordance suivant :

DÉFINITION 1 Soient deux distributions H et $H' \in \mathcal{H}(F_1, F_2)$, H' est dit plus concordante (ou plus dépendante sur le quadrant positif) que H si $H'(\mathbf{X}) \geq H(\mathbf{X})$; $\forall \mathbf{X} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Cet ordre de concordance permet la comparaison entre les distributions appartenant à la classe de Fréchet. Une extension pratique de cet ordonnancement est permise par sa propriété d'invariance par transformations strictement croissantes des composantes du vecteur \mathbf{X} . Plus précisément, considérons deux fonctions monotones croissantes g_1 et g_2 , si le vecteur aléatoire (X_1, X_2) est distribué selon la loi H , $(X_1, X_2) \sim H$, et $(g_1(X_1), g_2(X_2))$ selon H' , $(g_1(X_1), g_2(X_2)) \sim H'$, alors H et H'

3. Il s'agit de la classe des distributions bivariées dont les fonctions marginales univariées (continues ou non), notées F_1 et F_2 , sont fixées.

sont dites équivalentes en concordance. Cette extension permet de généraliser la mesure de concordance à une classe quelconque de fonctions de distributions bivariées. Cette extension nécessite l'introduction des fonctions copules pour lesquelles nous rappelons quelques définitions et propriétés dans le cas bidimensionnel.

DÉFINITION 2 Une copule bivariée se définit comme la fonction $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ telle que (i) C croissante sur $[0, 1] \times [0, 1]$ et bornée de la façon suivante $C(u_1, 0) = C(0, u_2) = 0$, (ii) ses marges u vérifient $C(u, 1) = C(1, u) = u$.

Soient deux variables aléatoires X_1 et X_2 de fonctions de distributions marginales F_1 et F_2 , leur distribution jointe H peut s'écrire en terme de copule de la façon suivante :

$$(2) \quad H(X_1, X_2) = C(F_1(X_1), F_2(X_2))$$

En notant $u_1 = F_1(X_1)$ et $u_2 = F_2(X_2)$, l'encadrement (1) reste valide pour la copule C :

$$C^-(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq C^+(u_1, u_2)$$

avec $C^-(u_1, u_2) = C(u_1, 1) + C(1, u_2) - 1 = u_1 + u_2 - 1$ et $C^+(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$.

D'après le théorème de SKLAR [1959], si F_1 et F_2 sont continues alors C est unique :

$$(3) \quad C(u_1, u_2) = H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))$$

Comme pour la notion de concordance, les copules sont invariantes par transformations monotones croissantes des composantes du vecteur (X_1, X_2) , autrement dit la distribution jointe de $(g_1(X_1), g_2(X_2))$ est la même que celle de (X_1, X_2) . Ces deux distributions seront alors munies de la même copule.

La plupart des travaux (théoriques et empiriques) ont recours à des fonctions copules monotones en leurs paramètres (on peut citer la copule gaussienne, celle de Plackett, d'Ali-Mikhail-Haq, de Gumbel, ou encore celle de Student). Cependant, les travaux théoriques de SCARSINI et VENETOULIAS [1993] fournissent une extension de ces fonctions qui permet d'obtenir des distributions à structures de dépendance non-monotones.

2.2 Structure de dépendance non-monotone

Considérons la copule paramétrique monotone C_D de paramètre θ_D associée à une distribution paramétrique bivariée $H(X_1, X_2; \theta)$ dont les marges paramétriques sont notées $F_1(X_1; \theta_1)$ et $F_2(X_2; \theta_2)$. La fonction de densité de probabilité de la copule C_D est donnée par :

$$c_D(u_1, u_2; \theta_D) = \frac{\partial^2 C_D(F_1(X_1; \theta_1), F_2(X_2; \theta_2); \theta_D)}{\partial F_1(X_1; \theta_1) \partial F_2(X_2; \theta_2)}$$

telle que $\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} c_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 1$. SCARSINI et VENETOULIAS [1993] montrent qu'il est possible de construire une structure de dépendance non-monotone, notée c_{ϕ} , à partir de la fonction de densité $c_{\mathcal{D}}$. Si λ désigne la mesure de Lebesgue et $\mathcal{B}([0, 1])$ le Borélien sur $[0, 1]$, et ϕ une fonction telle que $\phi(u) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, non-monotone et telle que $\lambda(A) = \lambda(\phi^{-1}(A))$ pour tout sous-ensemble $A \in \mathcal{B}([0, 1])$, alors une structure de dépendance non-monotone est donnée par :

$$(4) \quad c_{\phi}(u_1^*, u_2; \theta_{\phi}) = c_{\mathcal{D}}(\phi(u_1), u_2; \theta_{\mathcal{D}})$$

La fonction copule non-monotone bivariable associée à la fonction de densité c_{ϕ} s'écrira par conséquent :

$$C_{\phi}(u_1^*, u_2; \theta_{\phi}) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} c_{\mathcal{D}}(\phi(u_1), u_2; \theta_{\mathcal{D}})$$

Notons, comme le montre SCARSINI et VENETOULIAS [1993], que l'on n'a pas forcément $C_{\phi}(u_1^*, u_2; \theta_{\phi}) = C_{\mathcal{D}}(\phi(u_1), u_2; \theta_{\mathcal{D}})$. La fonction de vraisemblance ne faisant intervenir que la densité de la copule, ceci n'affectera pas l'estimation dans notre application.

3 Application à la dépendance rendement-volume

3.1 Présentation et traitement des données

Les données que nous utilisons sont extraites de la base d'Euronext. Il s'agit de séries de prix et de volumes de transaction enregistrées à très hautes fréquences (cotations tick-par-tick). Nous avons sélectionné ces séries pour huit actions appartenant à l'indice CAC40 durant la période considérée : Dassault Systemes, Lagardère, StMicroelec, France Telecom, Thomson Multimédia, BNP Paribas, Cap Gemini et Alcatel. Notre échantillon couvre la période allant du 1^{er} Novembre 2000 au 31 Octobre 2001. Sur cette période, les séances de cotations sur la place Parisienne commencent à 9h00 et se terminent à 17h30. Les séries ont été agrégées sur un intervalle de temps constant d'une demi-heure. Sans considérer la première cotation de 9h00 qui résulte du fixing⁴, chaque jour ouvré compte alors 17 demi-heures. Nous disposons ainsi de 4301 observations.

Le traitement statistique des séries de volumes est particulièrement délicat et a fait l'objet de nombreuses études dans la littérature. En effet, les volumes de

4. Le fixing est l'opération faite par l'ordinateur CAC pour obtenir les prix d'ouvertures. Elle consiste à maximiser le volume pour les meilleurs prix limites enregistrés la veille. Le prix qui en résulte étant trop bruité de l'information, on a coutume de ne pas le considérer.

transactions ont connu dans les années 90 une tendance croissante et non linéaire, certainement imputable aux innovations dans le domaine des instruments financiers et des télécommunications. Cette tendance étant complexe et de fait, difficile à extraire comme en témoignent les travaux de ANDERSEN [1996] et de GALLANT *et al.* [1992], plusieurs méthodes ont été utilisées pour stationnariser en tendance la série des volumes. BROCK et LEBARON [1996] par exemple, proposent de normaliser les volumes par le nombre de titres en circulation. Cette méthode étant, d'une part souvent insuffisante pour la stationnarisation (comme le remarque GALLANT *et al.*, [1992]) et d'autre part, difficile à mettre en oeuvre du fait de l'indisponibilité fréquente d'une telle information sur une période longue de 10 à 20 ans, GALLANT *et al.* [1992] préfèrent utiliser une simple fonction quadratique pour estimer la tendance de leur série de volume (qui concerne l'indice SP500). Dans le même esprit, MARSH et WAGNER [2000], ont recouru à un filtre Hodrick-Prescott. Le principal handicap de ces deux dernières méthodes réside dans leur incapacité de discriminer la composante déterministe de la composante stochastique de la série et notamment lorsque celle-ci présente une forte persistance comme c'est le cas pour les volumes (BROCK, [1992]).

Afin d'éviter la modélisation d'une telle composante déterministe difficile à identifier et d'épargner ainsi au modèle une formulation trop lourde, l'utilisation de données intra-journalières nous est apparue comme une solution judicieuse pour disposer d'une multitude d'observations sur une courte période (un an). Cependant, d'autres difficultés apparaissent lorsque l'on manipule des données à très hautes fréquences, en particulier, l'apparition d'une saisonnalité marquée tant dans la volatilité des rendements que dans les volumes (voir BAILLIE et BOLLERSLEV, [1990], ANDERSEN et BOLLERSLEV, [1997], GOURIEROUX *et al.*, [1999], pour une discussion). Cette saisonnalité est illustrée par les mouvements oscillatoires des autocorrélations empiriques du volume et de la variance des rendements (mesurée comme leurs valeurs absolues), représentées sur la figure 1 pour le cas Cap Gemini⁵.

Dans notre cas de figure, l'intervalle de temps choisi étant relativement large (la demi-heure), la saisonnalité peut être traitée facilement par l'utilisation de variables indicatrices. Notons t l'indice temps ($t = 1, \dots, 4301$), D_i , la variable indicatrice telle que $D_i = 1$ si $t =$ "la $i^{\text{ème}}$ demi-heure d'une journée", $D_i = 0$ sinon, pour $i = 1, 2, \dots, 17$, et V_t le volume observé à l'instant t . Nous estimons l'équation de régression suivante:

$$(5) \quad \log(V_t) = \sum_{i=1}^{17} \gamma_i D_i + \zeta_t$$

avec ζ_t un processus stationnaire.

Pour le rendement, défini comme $R_t = 100 \log \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$, où P_t désigne le prix de l'actif à l'instant t , nous estimons un modèle à hétéroscedasticité conditionnelle constante du type :

$$(6) \quad \begin{aligned} R_t &= c + s_t^{1/2} \sigma \epsilon_t \\ s_t &= \prod_{i=1}^{17} (1 + \delta_i D_i) \\ \epsilon_t &\sim \mathcal{D}(\theta) \end{aligned}$$

5. L'ensemble des séries étudiées présentent les mêmes faits stylisés, pour cette raison nous ne présentons graphiquement que le cas Cap Gemini afin d'économiser de l'espace.

où $\mathcal{D}(\theta)$ désigne une loi univariée de vecteur de paramètre θ , d'espérance nulle et de variance 1. Les contraintes de positivité de la variance sont : $\delta_i \geq -1$ pour $i = 1, \dots, 17$.

D'autres méthodes plus sophistiquées de traitement de la saisonnalité sont disponibles dans la littérature économétrique. En particulier, ANDERSEN et BOLLERSLEV [1997] proposent une description de la saisonnalité intra-journalière des rendements par l'usage d'une fonction de Fourier. Cette méthode, développée sur la base des travaux de GALLANT [1981, 1982], est incontournable lorsque l'intervalle de temps (constant) est petit (choisi égal à 5 minutes dans l'application de ANDERSEN et BOLLERSLEV, [1997]). Dans notre étude empirique, nous avons choisi un intervalle de temps tel qu'un traitement simple, par un nombre raisonnable de variables indicatrices, soit possible afin de ne pas alourdir la formulation du modèle. Notons, en outre qu'il demeure très difficile de justifier le choix de l'intervalle de temps dans une analyse intra-journalière. En effet, à notre connaissance, il n'existe pas de méthodes simples capables de sélectionner de façon efficace l'intervalle de temps qui maximise l'information contenue dans la série tout en minimisant la part du bruit. Pour cette raison, le choix de la demi-heure est motivé par la volonté d'écrire un modèle à distribution paramétrique non-monotone le plus lisible possible.

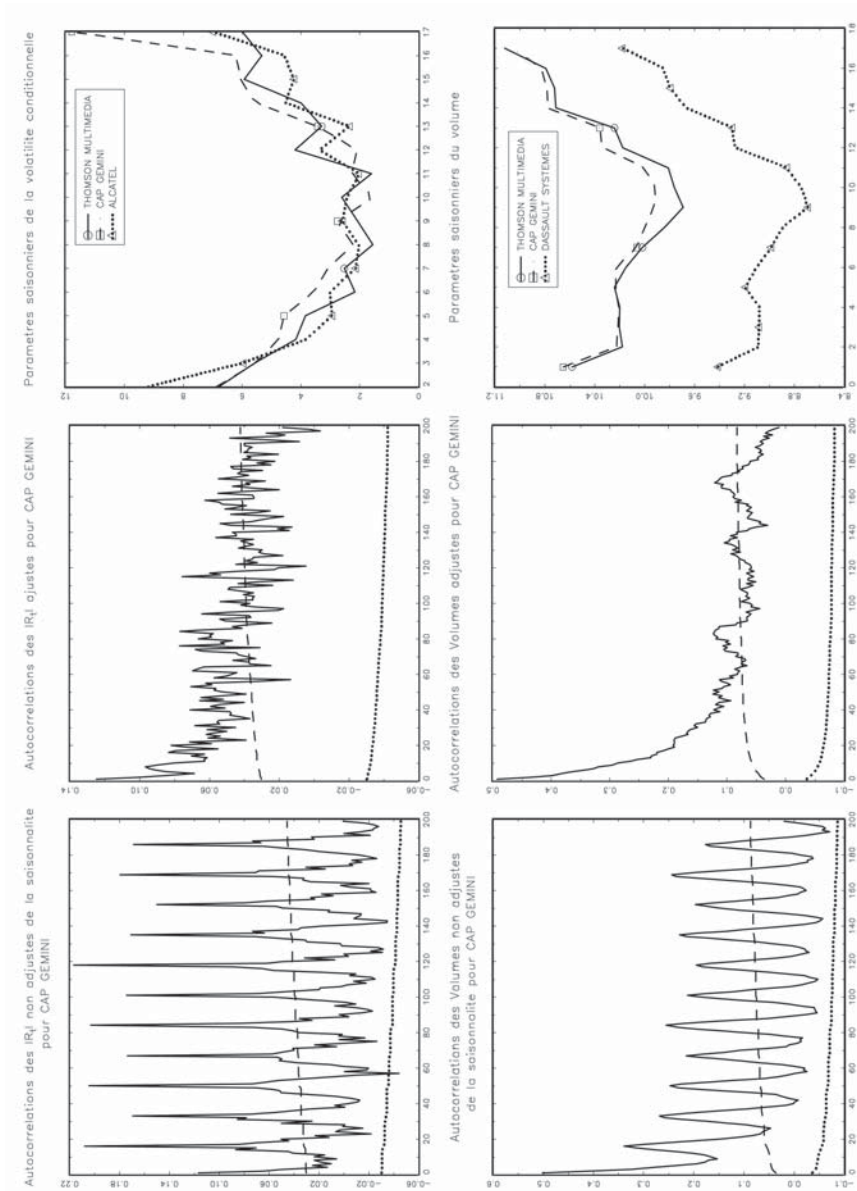
Le modèle (6) est estimé par quasi-maximum de vraisemblance avec pour $\mathcal{D}(\theta)$, une loi normale centrée réduite⁶. Les séries filtrées des composantes déterministes correspondent alors aux résidus normés, notés $v_t = \hat{\zeta}_t$, pour les volumes et $r_t = \hat{e}_t / \sqrt{\hat{\sigma}_t^2}$ pour les rendements, avec $\sigma_t^2 = (s_t \sigma^2)$, la variance conditionnelle. Les paramètres saisonniers estimés ($\hat{\gamma}_i$ et $\hat{\delta}_i$ pour $i = 1, \dots, 17$) sont présentés sur la figure 1 pour quelques-unes des sociétés étudiées. On y distingue la forme en "U" accusée par la littérature empirique qui traduit l'intensité de l'activité au cours d'une séance de cotation. Ainsi, sur la place parisienne, durant les premières heures qui suivent le fixing du matin, la volatilité est très élevée du fait que les prix révèlent encore mal l'information. Les prix limites se trouvent très éloignés dans les queues du carnet d'ordres du fait de la très grande aversion pour le risque des agents⁷. En conséquence, la fourchette des prix s'élargit et la liquidité se resserre à ce moment de la journée. Le creux du "U" correspond, quant à lui, aux heures de déjeuner durant lesquelles l'activité se ralentit. Enfin, à l'approche de la clôture du marché, l'activité s'accroît avec le dénouement des positions avant la fin de séance qui tend à brouter l'information contenue dans les prix.

La figure 1 présente également les fonctions d'autocorrélations empiriques des séries ajustées des volumes et de la variance pour la société Cap Gemini. La comparaison de ces graphiques à ceux portant sur les séries de départ, montre que la saisonnalité a été correctement traitée dans la mesure où les autocorrélations ne présentent plus de mouvements oscillatoires. Ainsi filtrées, les séries peuvent faire l'objet d'une étude statistique efficace. Les tableaux 1 et 2 présentent quelques statistiques descriptives pour les séries désaisonnalisées. Elles révèlent une forte hétéroscédasticité pour les rendements et les volumes. Les tests de normalités de DOORNIK et HANSEN [1994] et de Jarque et Bera rejettent l'hypothèse de normalité

6. L'hypothèse de normalité peut apparaître ici comme forte. Cependant, elle est sans conséquence sérieuse dans la mesure où cette estimation préliminaire a pour seul but de traiter la saisonnalité présente dans la volatilité. Toutefois, afin de tenir compte de cette hypothèse, le modèle est estimé par quasi-maximum de vraisemblance (BOLLERSLEV et WOOLDRIDGE, [1992]).

7. Sur le marché Euronext Paris, les fournisseurs de liquidité sont les investisseurs qui placent des ordres à prix limites.

FIGURE 1



pour l'ensemble des rendements et des séries de volume. Bien que les volumes présentent une leptokurticité moins marquée, ils restent très largement non-gaussiens du fait de la très haute fréquence des observations. Par ailleurs, les statistiques de Ljung Box robustes à l'hétéroscédasticité, Q^W , sont calculées pour les ordres 10 et 17 et concluent que l'hypothèse de non-autocorrélation ne peut pas être rejetée pour l'ensemble des séries de volumes⁸. En outre, en dépit d'une période d'obser-

8. Les statistiques Q^W sont construites sur la base de WHITE [1980]. Nous avons choisi 17 retards afin de tester l'autocorrélation sur une journée.

TABLEAU 1
Statistiques descriptives des rendements ajustés

	DASSAULT SYSTÈMES	LAGARDERE	STMICROELEC	FRANCE TELECOM	THOMSON MULTIMEDIA	BNP PARIBAS	CAP GEMINI	ALCATEL
Mean	0.006	0.003	0.001	0.001	-0.003	-0.001	-0.002	0.002
Std	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Skewness	-0.214	-0.323	-0.296	0.090	-0.099	-0.228	-0.415	-0.367
Kurtosis - 3	4.066	3.353	8.076	3.117	6.298	3.556	5.291	4.341
DH	1251.855	880.337	3169.988	875.601	2385.930	1018.603	1652.201	1268.651
Jarque-Bera	2995.607	2089.055	11748.544	1746.134	7114.339	2302.270	5138.801	3472.675
Q ^W (10)	7.743*	11.902*	3.765*	16.059*	8.441*	19.556	7.284*	8.163*
Q ^W (17)	15.414*	22.369*	11.329*	22.337*	10.199*	24.444*	13.531*	20.103*

* H_0 acceptée à 5 %.

a) DH désigne la statistique de Doornik-Hansen.

TABEAU 2
Statistiques descriptives des volumes ajustés

	DASSAULT SYSTÈMES	LAGARDERE	STMICROELEC	FRANCE TELECOM	THOMSON MULTIMEDIA	BNP PARIBAS	CAP GEMINI	ALCATEL
Mean	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Std	0.889	0.838	0.668	0.713	0.885	0.707	0.810	0.649
Skewness	-0.303	0.154	-0.171	0.026	-0.184	0.548	-0.243	0.086
Kurtosis - 3	1.246	2.165	1.504	1.886	1.353	1.676	6.215	1.127
DH ^a	186.268	486.829	266.889	402.371	222.694	261.857	2265.659	168.707
Jarque-Bera	344.147	856.622	426.435	638.033	352.165	718.693	6962.890	232.893
Q ^W (10)	694.886	795.102	779.820	872.221	851.038	803.149	830.135	815.692
Q ^W (17)	700.826	804.325	786.530	877.367	855.526	814.646	837.582	822.497

* H₀ acceptée à 5 %.

a) DH désigne la statistique de Doornik-Hansen.

vation relativement courte, l'allure des autocorrélations empiriques des volumes et des variances de l'ensemble des firmes étudiées, à l'image du cas Cap Gemini présenté à la figure 1, témoigne d'une très forte persistance⁹. En effet, la très lente décroissance des fonctions d'autocorrélations empiriques laisse supposer l'existence d'une dynamique à mémoire longue plutôt qu'à celle d'une mémoire courte.

3.2 Modèle rendements-volume avec distribution non-monotone

Considérant la décomposition marges-copule introduite dans la première section, nous présentons maintenant la spécification des différentes composantes.

3.2.1 Spécification des marges

Plusieurs spécifications sont possibles pour les marges de la distribution jointe du couple rendement-volume. Notre choix se base sur les travaux de BOLLERSLEV et JUBINSKI [1999] et ceux de LOBATO et VELASCO [2000] qui retiennent l'hypothèse de longue mémoire pour modéliser les volumes et la volatilité. Par ailleurs, BOLLERSLEV et JUBINSKI [1999] montrent la forte similitude des degrés de persistance de ces deux variables. Ce résultat les conduits à faire l'hypothèse d'une intégration fractionnaire commune. Sans imposer une telle contrainte dans notre modélisation, nous optons néanmoins pour la modélisation fractionnaire des volumes et de la variance conditionnelle des rendements afin de capturer le phénomène de persistance et d'obtenir des résidus dont les valeurs absolues sont filtrées de l'autocorrélation. Après de nombreuses estimations, nous retenons pour les volumes un modèle ARFIMA(1,d,1) suivant¹⁰ :

$$(7) \quad (1-L)^d \Phi(L) \log(V_t) = \sum_{i=1}^{17} \delta_i D_i + \Theta(L) \xi_t \\ \xi_t \sim \mathcal{D}(\theta)$$

dont les polynômes $\Phi(L) = (1 - \rho L)$ et $\Theta(L) = (1 - \psi L)$ ont toutes leurs racines à l'extérieur du disque unité. En outre, on a $d \in (-0.5, 0.5)$. Ces contraintes assurent l'inversibilité et la stationnarité du processus ARFIMA.

Pour les rendements, nous considérons un modèle MA(1)-FIGARCH(1,d,1) (proposé par BAILLIE *et al.*, [1996]) avec une variance conditionnelle saisonnière comme décrit dans la section précédente. Le SFIGARCH (pour Seasonal FIGARCH) s'écrit alors¹¹ :

9. On renvoie aux travaux de BAILLIE *et al.* [1996], ANDERSEN, BOLLERSLEV [1997, 1998] pour une discussion sur la persistance de la volatilité et à ceux de LeBARON [1992] et de BROCK et LeBARON [1996] pour une discussion sur la persistance des volumes.

10. Voir BAILLIE [1996] pour une revue de la littérature sur les modèles à mémoire longue et en particulier sur les processus fractionnaires.

11. L'ordre du GARCH est tel qu'il assure la blancheur du carré des résidus et de leurs valeurs absolues. Pour cela nous avons mené des tests d'autocorrélation.

$$\begin{aligned}
 R_t &= \Theta(L)\varepsilon_t \\
 \varepsilon_t &= (s_t h_t)^{1/2} \eta_t \\
 \eta_t &\sim \mathcal{D}(\theta) \\
 s_t &= \prod_{i=1}^{17} (1 + \delta_i D_{t,i}) \\
 h_t &= \alpha_0 + \beta h_{t-1} + \Lambda(L) \frac{\varepsilon_t^2}{s_t} \\
 \Lambda(L) &= 1 - \beta L - (1 - \phi L)(1 - L)^d
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Les contraintes de positivité et de stationnarité de la variance sont : $\delta_i \geq -1$; $0 \leq d \leq 1 - 2\phi$ et $0 \leq \beta \leq \phi + d$. Dans notre estimation, la somme infinie $\Lambda(L)$ sera tronquée à 500 retards.

Compte tenu de la très haute fréquence des observations, l'utilisation d'une loi normale pour le choix de la loi conditionnelle $\mathcal{D}(\theta)$ est trop restrictive. Par conséquent, pour les deux modèles, notre choix se porte alors sur la loi de Student qui autorise des queues plus épaisses que la loi normale (BOLLERSLEV, [1987]). La fonction de densité des innovations de l'équation des rendement est alors la suivante :

$$f(\eta_t; \nu) = \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1} \left((\nu-2) s_t h_t \right)^{-1/2} \left(1 + \varepsilon_t^2 (s_t h_t)^{-1} (\nu-2)^{-1} \right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

avec $\nu > 2$, afin d'assurer l'existence des deux premiers moments de la loi. Pour les innovations des volumes, ξ_p , la fonction de densité précédente sera la même avec $s_t h_t = 1$.

3.2.2 Construction de la structure de dépendance

Comme nous l'avons dit en introduction, la relation entre les rendements et le volume de transaction est connue pour être non-monotone. Dans ce contexte, il n'est pas surprenant de trouver un coefficient de corrélation (noté ρ_T) nul entre ces deux variables (voir Tableau 3).

La figure 2 présente, pour quelques-uns des titres étudiés, les nuages de points des couples volume-rendement filtrés de la saisonnalité, (v_t, r_t) , ainsi que ceux de leurs fonctions cumulées empiriques notées respectivement $F_T(v_t)$ et $F_T(r_t)$. Ces graphiques révèlent la forme non-monotone de la structure de dépendance. On distingue très nettement la forme en "V" accusée par la littérature. Ainsi, sur les graphiques des marges empiriques $F_T(v_t)$ et $F_T(r_t)$, on observe une forte concentration de points autour des zones de coordonnées $(0, 1)$, $(1, 1)$ et $(0.5, 0)$ et une très faible densité de points au voisinage des zones $(0, 0)$ et $(1, 0)$ ¹².

Comme nous l'avons souligné dans la première section, la plupart des copules utilisées dans les études empiriques sont des structures de dépendance monotones. Afin de modéliser la dépendance de la distribution jointe du rendement et du

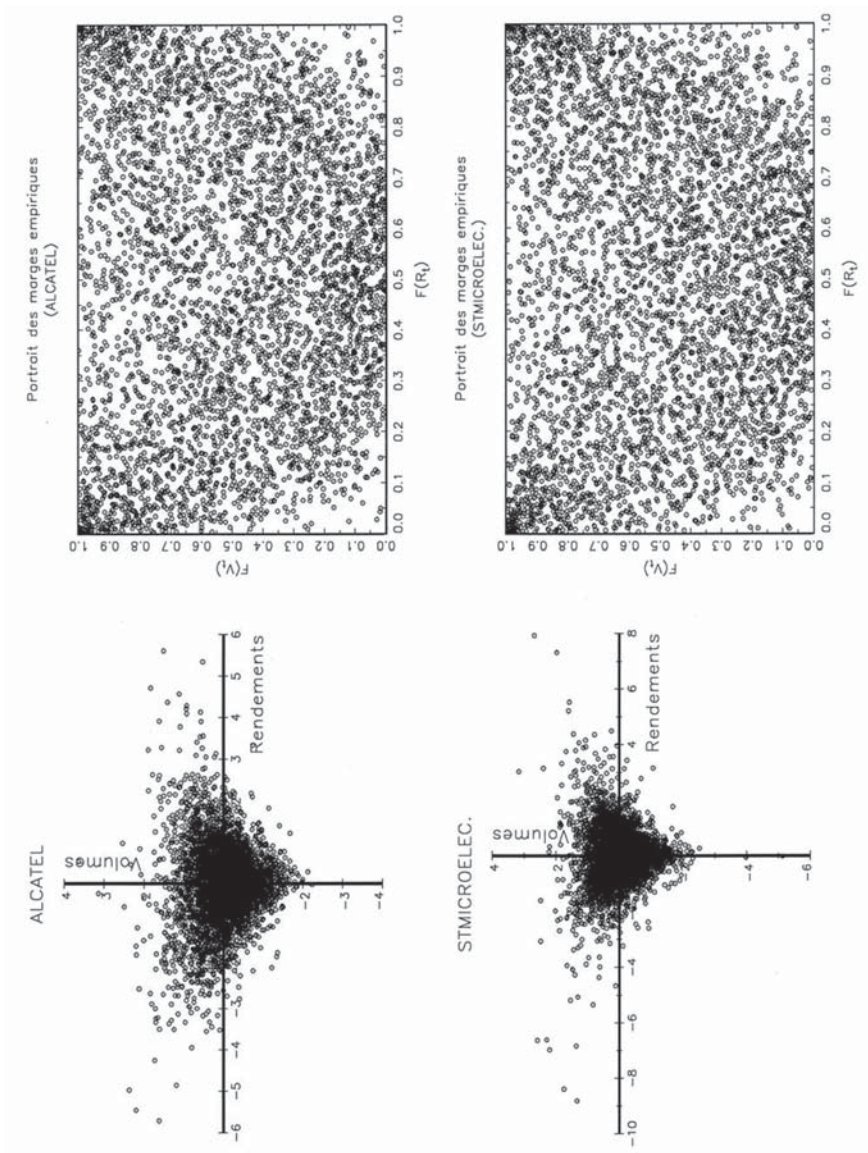
12. Les points de coordonnées $(0, 1)$, $(1, 1)$ et $(0.5, 0)$ correspondent aux modes de la densité de la structure de dépendance (i.e. la copule empirique).

TABEAU 3

Rho de Pearson du couple rendement-volume

	DASSAULT SYSTÈMES	LAGARDERE	STMICROELEC	FRANCE TELECOM
$\rho_T(r, v)$	-0.006	0.001	-0.014	-0.018
	THOMSON MULTIMEDIA	BNP PARIBAS	CAP GEMINI	ALCATEL
$\rho_T(r, v)$	-0.004	-0.023	-0.031	-0.048

FIGURE 2



volume, nous construisons une copule non-monotone à l'aide de la formulation (4). Pour cela nous introduisons la fonction $\phi(u) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que :

$$(9) \quad \phi(u) = \left[(2u - 1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Cette fonction est non-monotone et admet un minimum unique en $u = 0.5$ et deux maxima : $\phi(1) = 1$ et $\phi(0) = 1$. Afin de simplifier l'écriture du modèle, nous construisons notre structure de dépendance non-monotone à partir d'une copule Gaussienne de fonction de densité notée $c_{\mathcal{N}}$. Ainsi en considérant les innovations des équations (7) et (8), et en notant leurs fonctions de distribution respectives, F_{ξ} et F_{η} , l'expression de la fonction de densité de la copule non-monotone c_{ϕ} , est donnée par :

$$c_{\phi}(u_1^*, u_2; \theta_{\phi}) = c_{\mathcal{N}}(\phi(u_1), u_2; \rho) \\
 = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\Phi^{-1}(F_{\xi})^2 + \Phi^{-1}(\phi(F_{\eta}))^2 - 2\Phi^{-1}(F_{\xi})\Phi^{-1}(\phi(F_{\eta}))}{2(1-\rho^2)} + \frac{\Phi^{-1}(F_{\xi})^2 + \Phi^{-1}(\phi(F_{\eta}))^2}{2} \right)$$

où ρ est le coefficient de corrélation. Rappelons que dans notre application les distributions des erreurs ξ et η sont supposées obéir à une loi de Student dont la fonction cumulée est notée t_{ν} , par conséquent on aura $F_{\xi} = t_{\nu_1}$ et $F_{\eta} = t_{\nu_2}$. La figure 3 donne l'allure d'une distribution bivariée non-monotone construite à partir d'une copule Gaussienne. La figure 4 présente les portraits des couples simulés $(\phi(F_1), F_2)$ et (F_1^{-1}, F_2^{-1}) pour quelques exemples de distributions bivariées non-monotones.

3.2.3 Introduction de l'asymétrie dans la mesure de dépendance

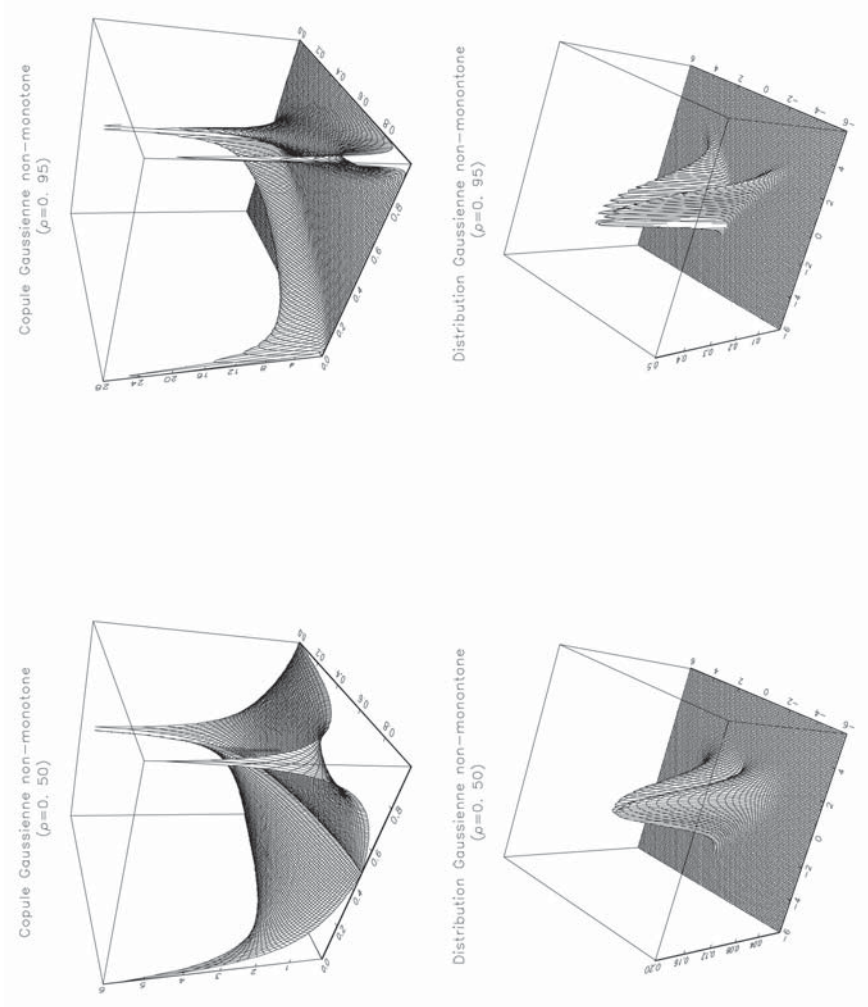
Alors que la non-monotonicité est facilement détectable sur les graphiques de la figure 2, une éventuelle asymétrie de la dépendance est en revanche plus difficile à discerner. Pourtant, de nombreux travaux théoriques rapportent que la relation rendement-volume est asymétrique (EPPS, [1975], KARPOFF, [1987], ou encore JENNINGS *et al.*, [1981]). En d'autres termes, ces travaux montrent que la relation rendement-volume est plus forte lorsque la correction des prix est positive, *i.e.* $\frac{V^+}{R^+} > \left| \frac{V^-}{R^-} \right|$. Selon JENNINGS *et al.* [1981], l'explication de ce phénomène réside dans le fait que les positions courtes sont plus coûteuses que les positions longues. Ce coût relativement élevé du recours aux ventes à découvert empêcherait certains investisseurs d'agir sur leur avantage informationnel.

Afin de capturer et de tester l'asymétrie, la mesure de dépendance peut être conditionnée par le sens du rendement tel que¹³ :

$$(10) \quad \rho = \rho_1 \mathbb{I}_{\{F_{\eta} \geq 0.5\}} + \rho_2 \mathbb{I}_{\{F_{\eta} < 0.5\}}$$

13. Voir ROCKINGER et JONDEAU [2006] pour un conditionnement similaire du paramètre de dépendance.

FIGURE 3

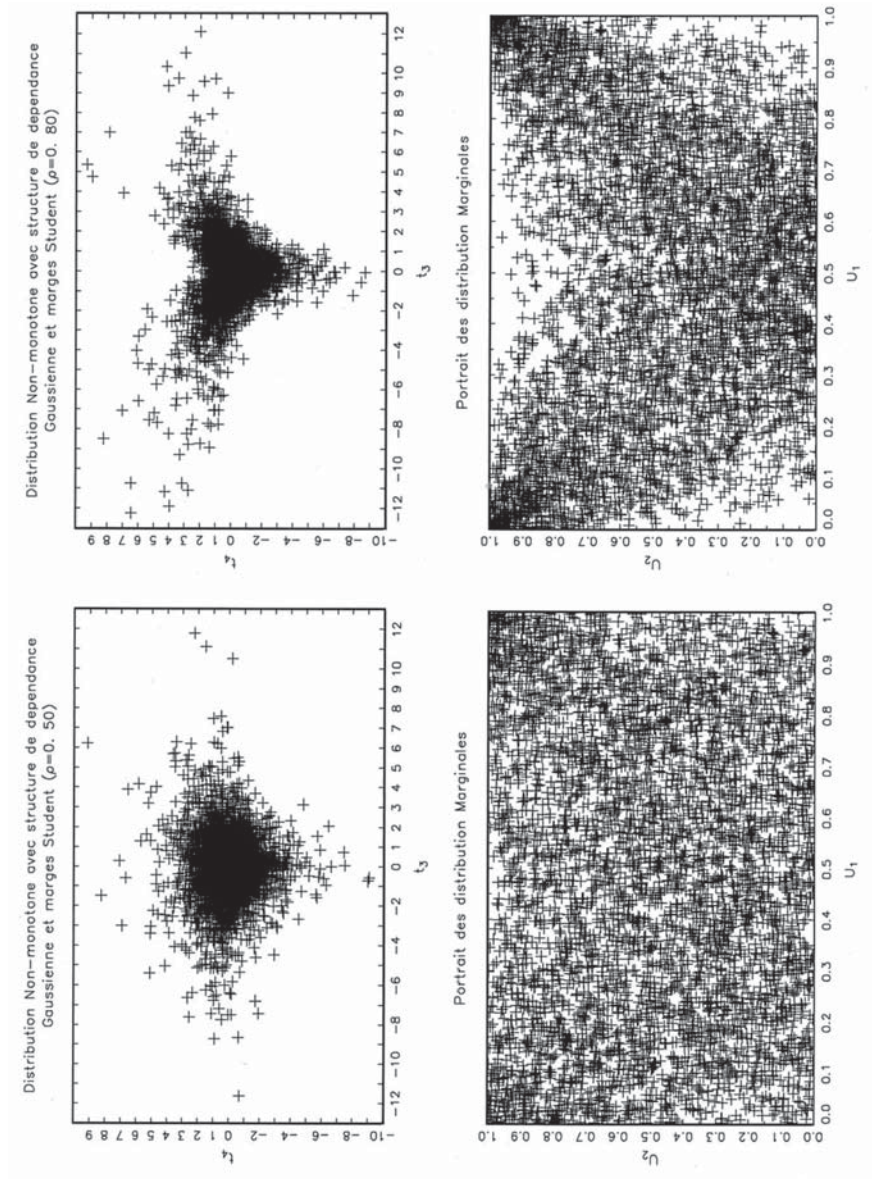


Selon la littérature théorique, on devrait s’attendre à obtenir des estimations significativement différentes pour les paramètres ρ_1 et ρ_2 .

4 Méthode d’estimation

Le fait que la fonction $\phi(\cdot)$ soit, par construction, non bijective sur $[0, 1]$, cela rend l’estimation particulièrement délicate. En effet, si la transformation ϕ avait été monotone, pour mener l’estimation, il aurait été possible de revenir à une copule standard à partir de c_ϕ , telle que la relation $c_\phi(\phi^{-1}(u_1^*), u_2; \theta_\phi) = c_D(u_1, u_2; \theta_D)$

FIGURE 4



soit unique. Dans notre cas de figure, la fonction $\phi = \left[(2u-1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ a deux antécédents sur $[0, 1]$, l'un supérieur à 0.5 et l'autre inférieur à 0.5. Néanmoins, on note que la solution peut être identifiée en écrivant :

$$\phi^{-1} = u = \begin{cases} \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{2} & \text{si } u > 0.5 \\ -\frac{1}{2}\phi + \frac{1}{2} & \text{si } u < 0.5 \\ 0.5 & \text{si } u = 0.5 \end{cases}$$

Dans la mesure où le sens de u (*i.e.* $u > 0.5$ ou $u < 0.5$) est nécessaire pour identifier la solution, nous supposons que la relation rendement-volume observable sur la figure 2 est le couple $(F_T(r_t) = \phi^{-1}, F_T(v_t) = \phi)$. Dans ce cas, il suffit d'appliquer la fonction ϕ à la marge des rendements pour se ramener à une dépendance monotone (voir Figure 5). Une estimation par maximum de vraisemblance peut alors être mise en oeuvre.

En gardant les notations de la section 2.2 où θ_1 et θ_2 désignent les vecteurs de paramètres des marges u_1 et u_2 du couple d'observations (x_1, x_2) , et θ_D , le vecteur de paramètres de la fonction c_D , l'estimation de $\theta = (\theta_1' \theta_2' \theta_D')$ est obtenue par maximisation de la log-vraisemblance $\mathcal{L}(\cdot; \theta)$, telle que :

$$(11) \quad \hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \mathcal{L}(x_1, x_2; \theta)$$

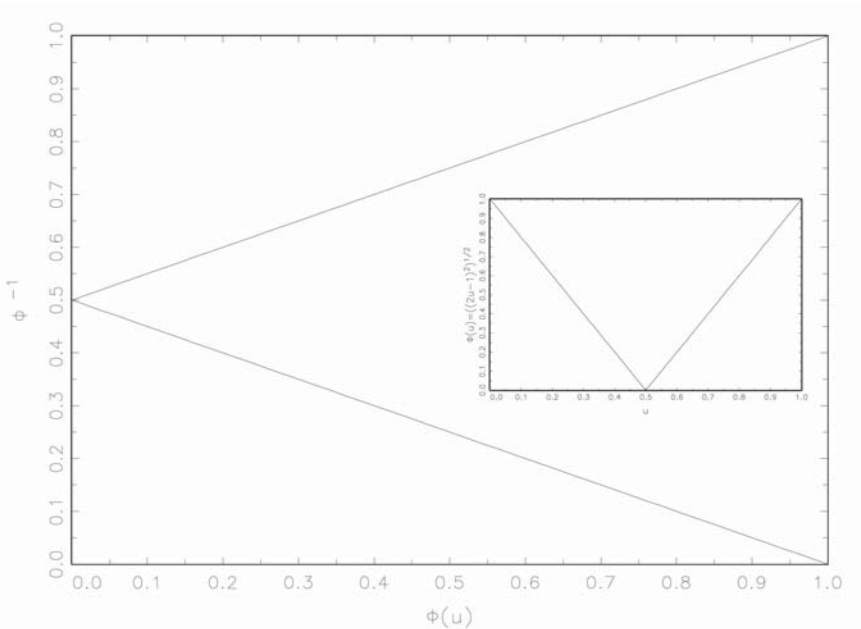
avec

$$\mathcal{L}(x_1, x_2; \theta) = \sum_{t=1}^T \log f_t(\phi(F_1(x_{1,t})), F_2(x_{2,t}); \theta)$$

où $f_t(\cdot; \theta)$ désigne la fonction de densité de la distribution jointe conditionnelle des observations. À partir de la formulation en terme de copule de la distribution jointe (équation (2)), l'expression de la densité f en terme de copule est immédiate et la log-vraisemblance s'écrit comme la somme de trois log-vraisemblances, l'une sur la copule et les deux autres sur les marges :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2; \theta) &= \sum_{t=1}^T \log c_D(\phi(F_1(x_{1,t})), F_2(x_{2,t}); \phi_D) + \sum_{k=1}^2 \sum_{t=1}^T \log f_k(x_{k,t}; \theta_k) \\ &= \mathcal{L}_c(\phi(u_1), u_2; \theta_D) + \mathcal{L}_{f_1}(x_{1,t}; \theta_1) + \mathcal{L}_{f_2}(x_{2,t}; \theta_2) \end{aligned}$$

FIGURE 5



avec $f_k(X_k; \theta_k)$, la $k^{\text{ième}}$ fonction de densité univariée pour $k = 1, 2$. Le succès des fonctions copules réside dans le fait que cette décomposition permet d'alléger considérablement l'estimation des modèles multivariés de grandes dimensions dans la mesure où il devient possible de procéder en plusieurs étapes. C'est l'idée de la méthode IFM (pour Inference Function for Margins) introduite par McLEISH et SMALL [1988] et XU [1996]. Les propriétés des estimateurs de cette méthode sont résumées dans JOE [1997, chapitre 10].

Les deux étapes de la méthode IFM sont les suivantes : la première consiste à estimer par la méthode du maximum de vraisemblance chaque composante univariée telle que :

$$\hat{\theta}_k = \arg \max_{\theta_k} \mathcal{L}_{f_k}(x_k; \theta_k); \text{ pour } k = 1, 2$$

Dans la seconde étape, les estimations de la première étape sont utilisées pour estimer la structure de dépendance :

$$\hat{\theta}_c = \arg \max_{\theta_c} \mathcal{L}_c(\phi(u_1), u_2; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \theta_D)$$

avec $\mathcal{L}_c(u_1, u_2; \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \theta_D) = \sum_{t=1}^T \log c_D(\phi(F_1(x_{1,t}; \hat{\theta}_1), F_2(x_{2,t}; \hat{\theta}_2; \theta_D)))$.

Sous certaines conditions de régularité, l'estimateur $\hat{\theta}$ est asymptotiquement non-biaisé, convergant et distribué selon une loi normale :

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, V(\theta))$$

Dans nos estimations, nous utiliserons l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance (BOLLERSLEV et WOOLDRIDGE, [1992]) fondé sur une correction de la matrice de variance-covariance asymptotique qui tient compte d'une éventuelle mauvaise spécification de la distribution jointe conditionnelle. La matrice de variance-covariance des paramètres s'écrira alors :

$$V(\theta) = J(\theta)^{-1} I(\theta) J(\theta)^{-1}$$

avec $J = E \left[-\frac{\partial^2 \log l_t(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right]$ et $I = E \left[\frac{\partial \log l_t(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log l_t(\theta)}{\partial \theta'} \right]$, avec $l_t(\theta)$ la distribution conditionnelle considérée. Son approximation en échantillon fini est donnée par :

$$V_T(\hat{\theta}) = J_T^{-1}(\hat{\theta}) I_T(\hat{\theta}) J_T^{-1}(\hat{\theta})$$

avec $J_T(\hat{\theta}) = -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial^2 \log l_t(\hat{\theta})}{\partial \theta \partial \theta'}$ et $I_T(\hat{\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{\partial \log l_t(\hat{\theta})}{\partial \theta} \frac{\partial \log l_t(\hat{\theta})}{\partial \theta'}$.

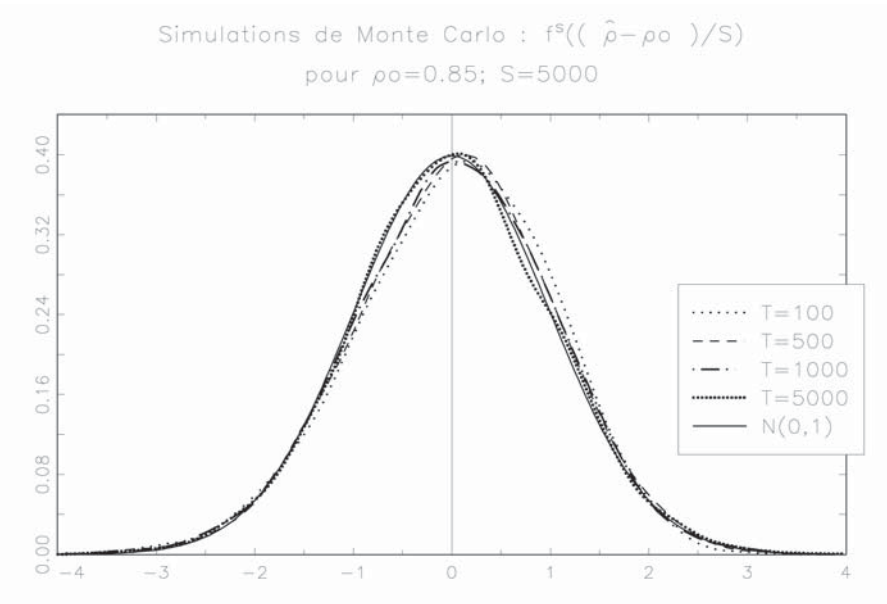
Rappelons que dans notre étude empirique, les marges sont des distributions de Student ($u_k \equiv t_{v_k}$) et la structure de dépendance, une copule non-monotone construite à partir d'une copule gaussienne.

Expériences de Monte-Carlo

Afin de valider les propriétés des estimateurs dans le cadre d'une copule non-monotone, nous estimons les distributions des paramètres par expériences de Monte-Carlo. Nous simulons 5 000 couples $(x_{1,t}, x_{2,t})_{t=1}^T$ dont la distribution jointe est non-monotone et obtenue à partir de marges gaussiennes et d'une structure de dépendance également gaussienne. Le paramètre de dépendance est fixé à $\rho = 0.85$. Afin de rendre compte de la convergence de l'estimateur, ces simulations sont menées pour $T = 100, 500, 1\,000$ et $5\,000$. La figure 6 compare les distributions empiriques estimées du paramètre ρ à la loi normale et illustre ainsi le comportement gaussien de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas d'une distribution jointe non-monotone¹⁴.

En outre, on rappelle qu'un des faits empiriques de la relation rendement-volume est que si la corrélation est nulle entre ces deux variables, elle ne l'est pas lorsque l'on prend la valeur absolue ou le carré des rendements. Toujours à l'aide de simulations, nous examinons dans quelle mesure notre modèle à distribution non-monotone est capable de générer de la corrélation linéaire entre la valeur absolue (ou le carré) de la variable transformée par $\phi(\cdot)$ et la seconde variable du modèle. Pour cela, nous simulons une distribution bivariable dont la structure de dépendance est non-monotone, telle que $c_\phi(u_1^*, u_2; \theta_\phi)$ avec la fonction $\phi(\cdot)$ donnée par (9). Les marges simulées sont deux distributions de Students de paramètres $\nu_1 = 4$ et $\nu_2 = 6$, et la structure de dépendance non-monotone est obtenue à partir d'une copule gaussienne. Nous simulons 5 000 échantillons de 1 000 réalisations avec les paramètres : $\rho = \{0.2, 0.5, 0.7, 0.8\}$. Pour chacune des simulations, nous enre-

FIGURE 6



14. Par ailleurs, des tests de normalité ont été menés sur les distributions empiriques. Ils nous ont amené dans tous les cas au non rejet de l'hypothèse de normalité.

gistrions trois mesures de corrélation. La première est celle entre les deux variables, la seconde est la corrélation obtenue avec la valeur absolue de la variable associée à la marge transformée ($u_1^* = \phi(u_1)$), et enfin la troisième est celle obtenue avec son carré. Les moyennes de ces corrélations sur les 5 000 simulations sont reportées au tableau 4. Par construction, le coefficient de Pearson est incapable de capturer le caractère non-monotone de la dépendance. Comme pour l'ensemble de nos actions, les coefficients sont nuls (tableau 3). Avec la valeur absolue et le carré de la variable x_1 , la mesure de Pearson obtenue est positive même si celle-ci sous-estime la dépendance.

TABLEAU 4

Rho de Pearson pour un couple de variables aléatoires dont la distribution jointe est non-monotone

	$\rho = 0.2$	$\rho = 0.5$	$\rho = 0.7$	$\rho = 0.8$
$\rho_T(x, y)$	-0.001 (0.039)	0.001 (0.051)	-0.002 (0.062)	-0.001 (0.066)
$\rho_T(x , y)$	0.136 (0.037)	0.340 (0.041)	0.480 (0.042)	0.551 (0.054)
$\rho_T(x^2, y)$	0.045 (0.018)	0.127 (0.029)	0.182 (0.036)	0.212 (0.043)

* Pour un échantillon de taille $T = 1\ 000$ simulé 5 000 fois.

5 Les résultats

Les modèles GARCH saisonniers présentés précédemment sont lourds à estimer du fait d'un nombre élevé de paramètres et de la spécification fractionnaire. Nous procéderons par conséquent à une estimation en deux étapes. Dans une première étape nous estimons les variables filtrées de la saisonnalité (v_t et r_t) obtenues par l'estimation des équations (5) et (6). Nous estimons ensuite les modèles ARFIMA et FIGARCH sur ces séries filtrées. Les tableaux 5 et 6 présentent les résultats des estimations pour les rendements et les volumes des huit sociétés. Les écart-types sont calculés selon la méthode du quasi-maximum de vraisemblance. Conformément aux allures des autocorrélations empiriques (Figure 1), nous obtenons des estimations pour le d fractionnaire très significatives et correspondant au schéma de la longue mémoire ($0 < d < 0.5$, pour les volumes et $0 < d < 1$, pour la variance conditionnelle). Comme nous l'avons déjà souligné, plusieurs travaux économétriques plaident en faveur de l'hypothèse de longue mémoire pour la volatilité et les volumes de transaction. BOLLERSLEV et JUBINSKI [1999] s'appuyant sur l'hypothèse de CLARK [1973], avancent l'existence d'une intégration fractionnaire commune à ces deux séries. Dans notre cas, les deux paramètres fractionnaires (celui du ARFIMA et celui du FIGARCH) n'étant pas comparables, il nous est

TABEAU 5
Estimations pour les rendements

	DASSAULT SYSTÈMES	LAGARDERE	STMICROELEC	FRANCE TELECOM	THOMSON MULTIMEDIA	BNP PARIBAS	CAP GEMINI	ALCATEL
μ	0.020 (0.012)	0.017 (0.013)	0.005 (0.011)	0.001 (0.029)	-0.002 (0.010)	0.016 (0.015)	0.007 (0.010)	0.020 (0.015)
θ	-0.043 (0.017)	-0.070 (0.017)	0.020 (0.015)	0.002 (0.008)	-0.043 (0.017)	-0.074 (0.017)	-0.050 (0.017)	-0.012 (0.006)
α	0.157 (0.032)	0.094 (0.021)	0.097 (0.020)	0.090 (0.021)	0.135 (0.026)	0.063 (0.015)	0.095 (0.021)	0.102 (0.022)
ϕ	0.365 (0.029)	0.342 (0.026)	0.347 (0.026)	0.362 (0.021)	0.379 (0.020)	0.339 (0.023)	0.353 (0.023)	0.363 (0.022)
β	0.428 (0.039)	0.501 (0.035)	0.464 (0.036)	0.560 (0.031)	0.474 (0.032)	0.573 (0.031)	0.513 (0.035)	0.514 (0.033)
d	0.271 (0.058)	0.316 (0.052)	0.307 (0.052)	0.276 (0.043)	0.242 (0.041)	0.322 (0.047)	0.294 (0.047)	0.274 (0.043)
ν	3.868 (0.268)	4.767 (0.395)	4.069 (0.258)	6.578 (0.660)	3.954 (0.265)	5.864 (0.540)	4.680 (0.365)	5.259 (0.429)
$Q^{(w)}(10)$	7.918	14.365	6.686	18.115	16.151	15.325	14.502	11.206
P. Value	0.637	0.157	0.755	0.053	0.095	0.121	0.151	0.341
$Q^{(w)}(17)$	14.380	24.883	15.510	23.751	20.022	18.884	26.432	20.722
P. Value	0.640	0.097	0.559	0.126	0.273	0.335	0.067	0.239

TABLEAU 6
Estimations pour les volumes

	DASSAULT SYSTEMES	LAGARDERE	STMICROELEC	FRANCE TELECOM	THOMSON MULTIMEDIA	BNP PARIBAS	CAP GEMINI	ALCATEL
ρ	0.846 (0.034)	0.884 (0.025)	0.833 (0.046)	0.852 (0.033)	0.846 (0.037)	0.310 (0.134)	0.867 (0.042)	0.771 (0.080)
ψ	0.710 (0.056)	0.814 (0.039)	0.753 (0.069)	0.707 (0.050)	0.724 (0.064)	0.357 (0.133)	0.813 (0.056)	0.632 (0.108)
d	0.162 (0.038)	0.223 (0.031)	0.289 (0.040)	0.205 (0.030)	0.200 (0.043)	0.383 (0.024)	0.319 (0.033)	0.256 (0.036)
σ	0.723 (0.011)	0.697 (0.013)	0.526 (0.008)	0.541 (0.009)	0.728 (0.012)	0.571 (0.011)	0.622 (0.011)	0.522 (0.009)
v	8.009 (0.944)	5.966 (0.595)	7.514 (0.941)	7.647 (1.029)	7.490 (0.910)	5.762 (0.545)	7.591 (1.054)	6.287 (0.653)
$Q^{(w)}(10)$	4.478	7.909	3.209	5.106	26.250	4.273	4.913	16.223
P.Value	0.923	0.638	0.976	0.884	0.003	0.934	0.897	0.093
$Q^{(w)}(17)$	11.009	12.854	15.481	18.276	29.841	11.692	9.148	24.090
P.Value	0.856	0.746	0.561	0.372	0.028	0.818	0.935	0.117

impossible de soutenir une telle hypothèse¹⁵. Nous pouvons cependant noter que l'ordre des valeurs obtenues pour le paramètre d est conservé dans les deux modèles : Dassault et Thomson ont les valeurs de d les plus faibles tandis que BNP enregistre la valeur la plus élevée.

Par ailleurs, soulignons que l'introduction de la composante moyenne mobile dans l'équation des rendements (équation (8)) est destinée à capturer l'autocorrélation négative traditionnellement observée pour les séries des rendements à très haute fréquence. Cette spécificité est liée au phénomène du *bid-ask jump*, propre à la mécanique du carnet d'ordres. Conformément aux résultats couramment obtenus pour ce type de données, l'estimation du paramètre moyenne mobile sort négative et significative dans la majorité des cas, excepté pour ST. Microelec. et France Telecom. Ce paramètre n'étant cependant pas significatif pour ces deux firmes, on peut conclure que l'effet bid-ask ne ressort pas pour l'intervalle de temps considéré.

Les tableaux 5 et 6 présentent également les statistiques de Ljung-Box robustes à l'hétéroscédasticité¹⁶. Les tests menés à partir de celles-ci montrent qu'à l'exception de Thomson, l'hypothèse d'autocorrélation est rejetée pour l'ensemble des séries de volumes. Par ailleurs, signalons que les faibles valeurs trouvées pour le paramètre de degré de liberté de la distribution de Student sont dues à la très haute fréquence des observations qui d'amplifie le phénomène de leptokurticité des distributions empiriques des séries financières¹⁷.

Conformément à la seconde étape de la méthode IFM, la fonction copule est estimée pour chacun de nos titres à l'aide des estimations des tableaux 5 et 6. Le tableau 7 présente ces estimations pour les modèles avec une mesure de dépendance non-conditionnelle et conditionnelle (i.e. $\rho = g(I_{\{F_\eta \geq 0.5\}}, I_{\{F_\eta < 0.5\}})$). La matrice de variance-covariance des paramètres est calculée de façon robuste comme décrit précédemment. Les valeurs des paramètres de dépendance pour les deux modèles sont très significatives et très proches d'une société à l'autre. Elles sont comprises entre 20 % et 33 % pour le modèle à dépendance non-conditionnelle. Concernant le modèle avec dépendance conditionnelle, les estimations associées aux rendements négatifs sont comprises entre 14 % et 32 % tandis que celles associées aux rendements positifs sont comprises entre 23 % et 37 %. Afin de tester l'hypothèse de symétrie de la dépendance, considérons le test suivant : $H_0 : \rho_1 = \rho_2$ (*symétrie*) contre $H_a : \rho_1 \neq \rho_2$. Ainsi, bien que les estimations de la dépendance associées aux valeurs positives des rendements (ρ_2) soient toujours supérieures à celles associées aux valeurs négatives (ρ_1), ce qui semble aller dans le sens des constats empiriques et théoriques cités précédemment, la symétrie est acceptée pour l'ensemble des firmes, excepté pour les titres Cap Gemini et Alcatel. Dans l'ensemble, nos résultats ne viennent donc pas contredire ceux de TAUCHEN *et al.* [1996]. En effet, ces auteurs, qui estiment les fonctions de réponses du volume aux rendements selon leurs signes, obtiennent des résultats sensiblement égaux pour les valeurs négatifs et positifs des rendements. Cependant, le fait que deux firmes échappent à l'accep-

15. En effet, rappelons que dans le cas du modèle FIGARCH(1,d,1), le paramètre d est tel que $0 \leq d \leq 1 - 2\phi$ et $0 \leq \beta \leq \phi + d$, tandis que dans le cadre du modèle ARFIMA(1,d,1), $d \in (-0.5, 0.5)$.

16. Rappelons que par construction, nos modèles autorisent l'hétéroscédasticité dans les résidus normés (la loi conditionnelle étant une Student). D'où l'utilisation de la statistique de Ljung-Box robuste à l'hétéroscédasticité.

17. Pour des séries en fréquence quotidienne, l'estimation obtenue pour ce paramètre est traditionnellement compris entre 15 et 20.

TABEAU 7
Estimations de la copule non-monotone

	DASSAULT SYSTEMES	LAGARDERE	STMICROELEC	FRANCE TELECOM	THOMSON MULTIMEDIA	BNP PARIBAS	CAP GEMINI	ALCATEL
ρ	0.248 (0.014)	0.217 (0.015)	0.328 (0.015)	0.319 (0.014)	0.252 (0.015)	0.207 (0.016)	0.203 (0.050)	0.318 (0.016)
Paramètres de dépendance conditionnelle								
ρ_1	0.233 (0.020)	0.210 (0.020)	0.317 (0.021)	0.307 (0.020)	0.253 (0.021)	0.178 (0.023)	0.146 (0.057)	0.272 (0.023)
ρ_2	0.264 (0.021)	0.224 (0.021)	0.339 (0.021)	0.333 (0.021)	0.251 (0.021)	0.232 (0.021)	0.295 (0.021)	0.364 (0.020)
$H_0 : \rho_1 = \rho_2$	1.200*	0.227*	0.549*	0.858*	0.004*	2.959*	5.982	8.931
P. Value	0.273	0.633	0.459	0.354	0.948	0.085	0.014	0.003
Rho de Pearson								
$\rho_T(\xi, \eta)$	0.215 (0.016)	0.185 (0.016)	0.276 (0.015)	0.242 (0.016)	0.211 (0.016)	0.161 (0.016)	0.233 (0.016)	0.274 (0.016)
$\rho_T(\xi, \eta^2)$	0.083 (0.006)	0.104 (0.007)	0.076 (0.004)	0.124 (0.007)	0.080 (0.005)	0.090 (0.007)	0.096 (0.006)	0.123 (0.006)

* H_0 est acceptée à 5 %.

tation de l'hypothèse nulle de symétrie, rend nos conclusions plus mitigées que celles de TAUCHEN *et al.* [1996] qui utilisent un modèle semi-nonparamétrique.

Les deux dernières lignes du tableau 7 donnent la corrélation empirique entre les volumes et le carré des rendements d'une part et leurs valeurs absolues d'autre part ($\rho_T(\xi, |\eta|)$ et $\rho_T(\xi, \eta^2)$). Ces résultats sont à rapprocher de ceux des simulations de la section précédente. Si dans l'absolu, les corrélations obtenues semblent globalement sous-estimer la dépendance entre ces deux variables (reportées sur première ligne du tableau 7), comme ce fut le cas dans nos simulations, il nous a été impossible de mener un test d'égalité du type $H_0 : \rho = \rho_T(\xi, |\eta|)$ ou $H_0 : \rho = \rho_T(\xi, \eta^2)$ afin de juger ce biais comme statistiquement significatif. Cette impossibilité provient du fait que les deux modèles par lesquels sont obtenus ρ (la mesure de dépendance non-monotone) et ρ_T (le coefficient de Pearson standard), ne sont pas emboîtés.

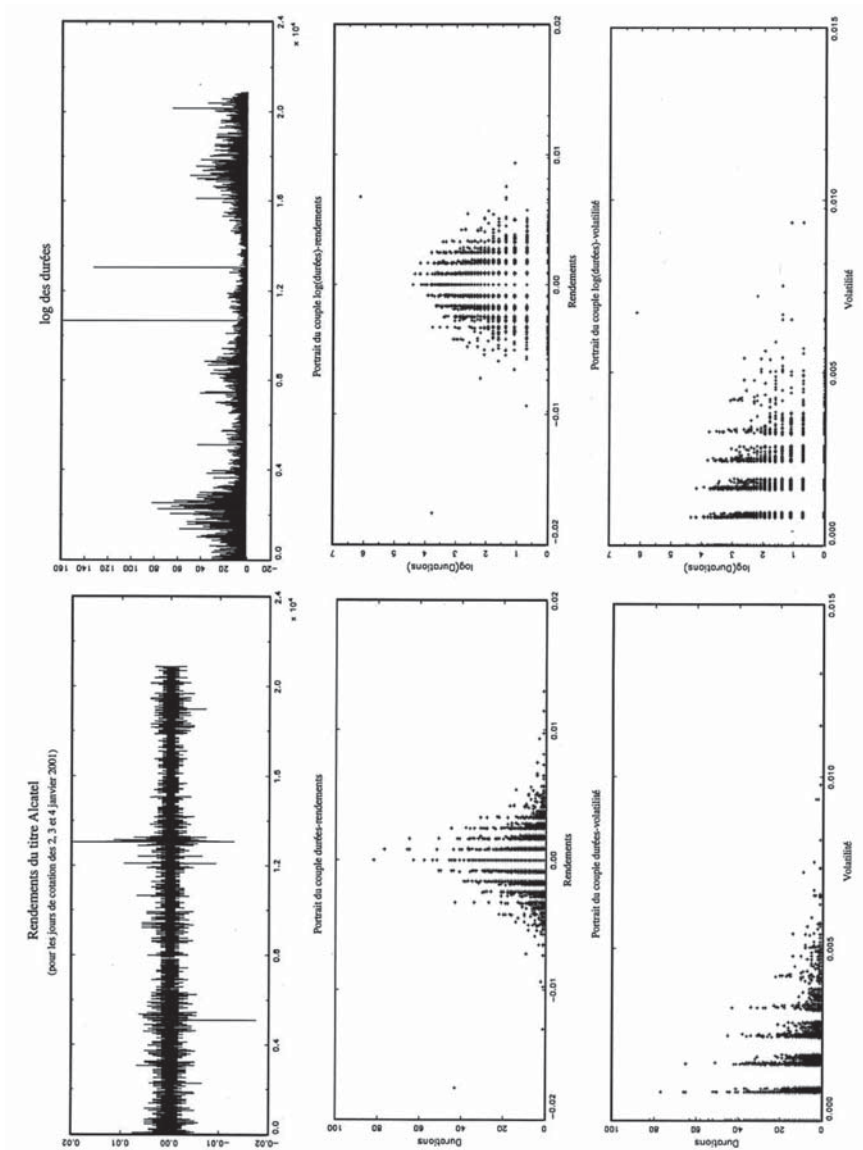
6 Conclusion

Lorsque la dépendance entre deux variables aléatoires n'est pas monotone, les mesures traditionnellement utilisées, comme le coefficient de corrélation, sont incapables de mesurer correctement la dépendance. Cet article s'est intéressé à construction d'une distribution bivariable non-monotone dans le cadre de l'analyse de la relation rendement-volume, bien connue pour être non-monotone. Sur la base des travaux théoriques de SCARSINI et VENETOULIAS [1993] nous proposons une structure de dépendance paramétrique non-monotone afin de mesurer la relation rendement-volume. De façon générale, la méthodologie de SCARSINI et VENETOULIAS [1993] se prête mal à l'estimation. C'est probablement la raison pour laquelle leurs travaux n'ont pas fait, à notre connaissance, l'objet d'applications. Cependant, dans le cadre de l'analyse rendement-volume, nous montrons comment il est possible d'estimer un modèle paramétrique muni d'une telle distribution.

En dépit du fait que les deux approches ne soient pas emboîtées, la modélisation que nous proposons compte certains avantages sur l'analyse volatilité-volume. En effet, si cette dernière se ramène à une relation monotone en appliquant aux rendements une fonction de type $|\cdot|^p$, pour $p \geq 1$, celle que nous proposons repose sur une transformation de leur fonction de répartition empirique. La fonction cumulée ne faisant intervenir que le rang des réalisations et non leurs valeurs, notre approche sera, de fait, moins sensible aux valeurs extrêmes. D'autre part, notre modélisation permet la représentation analytique et paramétrique de la distribution jointe des rendements et des volumes, ce qui facilite l'inférence statistique.

Il est important de noter par ailleurs que, outre l'utilisation d'outils récemment introduits en économétrie (les fonctions copules), notre modèle fait intervenir la particularité de non-monotonie d'une distribution jointe qui n'a pas fait l'objet de nombreuses recherches en économétrie. Pour ces raisons, nous avons été amenés à faire des simplifications dans la spécification paramétrique des rendements et des volumes par soucis de lisibilité du modèle. Toutefois, de nombreuses extensions du modèle peuvent être envisagées afin d'améliorer la description des faits empiriques. Ainsi, l'asymétrie des distributions marginales pourrait être introduite via l'utilisa-

FIGURE 7



tion d'un modèle GARCH asymétrique (GLOSTEN et al., [1993]) et/ou l'utilisation de distributions conditionnelles asymétriques (voir ROCKINGER et JONDEAU, [2006]). Par ailleurs, la sélection de la copule paramétrique pourra également faire l'objet d'un choix plus judicieux pour décrire la structure de dépendance, notamment du point de vue de son comportement aux queues (PATTON, [2006]). Ainsi, dans le cadre d'une analyse de l'interdépendance des marchés financiers, ROCKINGER et JONDEAU [2006] munissent la distribution jointe des rendements d'une fonction copule capable de rendre compte de la dépendance aux extrêmes (ce que la copule Normale est incapable de capturer).

Signalons, par ailleurs, que suite à cette étude nous avons cherché d'autres cas qui présenteraient une dépendance non-monotone. L'une des plus insolite que nous ayons relevé est sans doute celle associée à la relation entre les rendements et les durées entre chaque transaction ou encore celle entre la volatilité et ces durées. La figure 7 illustre le caractère insolite de ces structures de dépendance pour le titre Alcatel. Cette application fera l'objet de recherches ultérieures. ■

Références

- ANDERSEN T.G. (1996). – « Return Volatility and Trading Volume: An Information Flow Interpretation of Stochastic Volatility », *Journal of Finance*, 51(1): pp. 169-204.
- ANDERSEN T.G., BOLLERSLEV T. (1997). – « Intraday Periodicity and Volatility Persistence in Financial Markets », *Journal of Empirical Finance*, 4: pp. 115-158.
- ANDERSEN T.G., BOLLERSLEV T. (1998). – « Deutsche Mark-Dollar Volatility: Intraday Activity Patterns, Macroeconomic Announcements, and Longer Run Dependencies », *Journal of Finance*, 53(1): pp. 219-265.
- ANÉ T., GEMAN H. (2001). – « Order Flow, Transaction Clock, and Normality of Asset Returns », *Journal of Finance*, 55(5): pp. 2259-2284.
- BAILLIE R.T., BOLLERSLEV T. (1990). – « Intra-Day and Inter-Market Volatility in Foreign Exchange Rates », *Review of Economic Studies*, 58: pp. 565-585.
- BAILLIE R.T. (1996). – « Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics », *Journal of Econometrics*, 73(1): pp. 5-59.
- BAILLIE R.T., BOLLERSLEV T., MIKKELSEN H.O. (1996). – « Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity », *Journal of Econometrics*, 74(1): pp. 3-30.
- BLUME L., EASLEY D., O'HARA M. (1994). – « Market Statistics and Technical Analysis: The Role of Volume », *The Journal of Finance*, 49(1): pp. 153-181.
- BOLLERSLEV T. (1986). – « Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity », *Journal of Econometrics*, 31: pp. 307-327.
- BOLLERSLEV T. (1987). – « A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return », *Review of Economics and Statistics*, 69: pp. 542-547.
- BOLLERSLEV T., WOOLDRIDGE J.M. (1992). – « Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time-Varying Covariances », *Econometric Reviews*, 11(2): pp. 143-172.
- BOLLERSLEV T., JUBINSKI D. (1999). – « Equity Trading Volume and Volatility: Latent Information Arrivals and Common Long-Run Dependencies », *Journal of Business & Economic Statistics*, 17(1): pp. 9-21.
- BROCK W.A., DECHERT W.D., SCHEINKMAN J.A. (1987). – « A Test for Independence Based on the Correlation Dimension », *Working Paper*, University of Wisconsin.
- BROCK W.A., LEBARON B.D. (1996). – « A Dynamical Structural Model for Stock Return Volatility and Trading Volume », *The Review of Economics and Statistics*, 78(1): pp. 94-110.
- CLARK P.K. (1973). – « A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices », *Econometrica*, 41: pp. 135-155.
- DING Z., GRANGER C.W.J., ENGLE R.F. (1993). – « A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model », *Journal of Empirical Finance*, 1: pp. 83-106.
- ENGLE R.F. (1982). – « Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation », *Econometrica*, 50(4): pp. 987-1008.
- EPPS T.W. (1975). – « Security Price Changes and Transaction Volumes: Theory and Evidence », *American Economic Review*, 65: pp. 586-597.
- EPPS T.W., EPPS M.L. (1976). – « The Stochastic Dependence of Security Price Changes and Transaction Volumes: Implications for the Mixture of Distributions Hypothesis », *Econometrica*, 44(2): pp. 305-321.

- FRÉCHET M. (1951). – « Sur les tableaux de corrélations dont les marges sont données », *Annales de l'Université Lyon, Section A*, 9: pp. 53-77.
- GALLANT R. (1981). – « On the Bias in Flexible Functional Forms and an Essentially Unbiased Form: The Fourier Flexible Form », *Journal of Econometrics*, 15: pp. 211-245.
- GALLANT R. (1982). – « Unbiased Determination of Production Technologies », *Journal of Econometrics*, 20: pp. 285-323.
- GALLANT R., ROSSI P.E., TAUCHEN G. (1992). – « Stock Prices and Volume », *Review of Financial Studies*, 5: pp. 199-242.
- GALLANT R., ROSSI P.E., TAUCHEN G. (1993). – « NonLinear Dynamic Structures », *Econometrica*, 61: pp. 871-907.
- GLOSTEN R.T., JAGANNATHAN R., RUNKLE D. (1993). – « On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks », *Journal of Finance*, 48(5): pp. 1779-1801.
- GOURIEROUX C., JASIAK J., LEFOL G. (1999). – « Intraday Market Activity », *Journal of Financial Markets*, 2: pp. 193-226.
- JENNINGS R.H., STARKS L.T., FELLINGHAM J.C. (1981). – « An Equilibrium Model of Asset Trading with Sequential Information Arrival », *Journal of Finance*, 36(1): pp. 143-161.
- JOE H. (1997). – « Multivariate Models and Dependence Concepts », *Monographs on Applied Probability and Statistics*, 73, Chapman and Hall.
- KARPOFF M. (1987). – « The Relation between Price Changes and Trading Volume: A Survey », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22(1): pp. 109-126.
- LAMOUREUX C.G., LASTRAPES W.D. (1990). – « Heteroscedasticity in Stock Return Data: Volume vs. GARCH Effects », *Journal of Finance*, 45(1): pp. 221-229.
- LAMOUREUX C.G., LASTRAPES W.D. (1994). – « Endogenous Trading Volume and Momentum in Stock Return Volatility », *Journal of Business & Economic Statistics*, 12: pp. 253-260.
- LEBARON B.D. (1992). – « Persistence of the Dow Jones Index on Rising Volume », *Working Paper*, 9201, Department of Economics, University of Wisconsin.
- LIESENFELD R. (1998). – « Dynamic Bivariate Mixture Models: Modeling the Behavior of Prices and Trading Volume », *Journal of Business & Economic Statistics*, 16(1): pp. 101-109.
- LIESENFELD R. (2001). – « A Generalized Bivariate Mixture Model for Stock Price Volatility and Trading Volume », *Journal of Econometrics*, 104: pp. 141-178.
- LOBATO I.N., VELASCO C. (2000). – « Long Memory in Stock-Market Trading Volume », *Journal of Business & Economic Statistics*, 18(4): pp. 410-427.
- MARSH T.A., WAGNER N. (2000). – « Return-Volume Dependence and Extremes in International Equity Markets », *Working Paper*, No. RPF-293, U.C. Berkeley.
- MCLEISH D.L., SMALL C.G. (1988). – « The Theory and Applications of Statistical Inference Functions », *Lecture Notes in Statistics*, 44, Springer-Verlag, New York.
- MÜLLER U.A., DACOROGNA M.M., OLSEN R.B., PICTET O.V., SCHARTZ M., MORGENEGG C. (1990). – « Statistical Study of Foreign Exchange Rates, Empirical Evidence of a Price Change Scaling Law and Intraday Analysis », *Journal of Banking and Finance*, 14: pp. 1189-1208.
- NELSEN R.B. (1998). – « An Introduction to Copulas », *Lecture Notes in Statistics*, 139, Springer Verlag.
- PATTON A.J. (2006). – « Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence », *International Economic Review*, 47(2) : pp. 527-556.
- ROCKINGER M., JONDEAU E. (2006). – « The Copula-GARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock-Market Application », *Journal of International Money and Finance*, 25(5) : pp. 827-853.
- SCARSINI M., VENETOULIAS A. (1993). – « Bivariate Distributions with Nonmonotone Dependence Structure », *Journal of American Statistical Association, Theory and Methods*, 88(421): pp. 338-344.
- SKLAR A. (1959). – « Fonction de répartition à n dimensions et leurs marges », *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris*, 8: pp. 229-231.

- TAUCHEN G., PITTS M. (1983). – « The Price Variability-Volume Relationship on Speculative Markets », *Econometrica*, 51: pp. 485-505.
- TAUCHEN G., HAROLD Z., MING L. (1996). – « Volume, Volatility, and Leverage: A Dynamic Analysis », *Journal of Econometrics*, 74(1): pp. 177-208.
- WATANABE T. (2000). – « Bayesian of Dynamic Bivariate Mixture Models: Can They Explain the Behavior of Returns and Trading Volume? », *Journal of Business & Economic Statistics*, 18(2): pp. 199-210.
- WHITE H. (1980). – « A Heteroscedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroscedasticity », *Econometrica*, 48(4): pp. 817-838.
- XU J.J. (1996). – « Statistical Modelling and Inference for Multivariate and Longitudinal Discrete Response Data », *Ph.D. thesis*, Department of Statistics, University of British Columbia.