

LA CORRÉLATION DE MIGRATION : MÉTHODE D'ESTIMATION ET APPLICATION AUX HISTORIQUES DE NOTATION DES ENTREPRISES FRANÇAISES

S. FOULCHER*, C. GOURIEROUX** et A. TIOMO***

RÉSUMÉ. – Un des sujets majeurs des études empiriques en finance concerne la notion de corrélation des risques de défaut. Les corrélations sont en effet les moteurs essentiels des risques de crédit sur un portefeuille donné. À ce titre, elles interviennent dans le calcul du capital réglementaire tel que défini dans les accords de Bâle II. Cependant, peu d'études empiriques ont été consacrées aux corrélations de défaut, vraisemblablement à cause du manque de données adéquates, complètes et fiables. Par ailleurs, il existe une certaine confusion dans la littérature sur la notion même de corrélation des risques de crédit, et une clarification devient nécessaire. Cet article propose un cadre général d'étude de la notion de corrélation de migration (incluant les cas de corrélations de défaut). Il porte sur la définition et la proposition d'une méthode d'estimation des corrélations de migration qui soit convergente. Cette méthode repose sur un modèle de migration stochastique, où les paramètres d'intérêt, c'est-à-dire les corrélations de migration, sont définies de façon précise. Nous utilisons la base des données historiques de scores de la Banque de France pour illustrer notre propos.

Migration Correlation : Estimation Method and Application to French Corporates Ratings

ABSTRACT. – One major topic in empirical studies on Finance is the correlation of default risk. Correlation is a main driver for credit risk on a credit portfolio and for bank's capital requirement under the Basel II Accord. However, empirical evidence on the magnitude of correlation is rather scarce, mainly due to data limitation. First, the aim of this paper is to clarify the notion of correlation which depends on the underlying distributions and variables of interest. We suggest a general framework in which different types of correlations are precisely defined. Then, we discuss some implications of the type of correlation needed for the computation of the capital requirements. Then, the migration correlations are estimated using a large database of ratings and bankruptcies from the Banque de France.

Les propos tenus dans cet article ne reflètent pas nécessairement ceux de la Banque de France et n'engagent que leurs auteurs. Les auteurs remercient Mme Bardos, ainsi que les participants aux séminaires Banque de France et du SGCB pour leurs remarques et commentaires. Cet article a été écrit lorsque le troisième auteur était encore à la Banque de France

* S. FOULCHER : Banque de France – sandra.foulcher@banque-france.fr

** C. GOURIEROUX : CREST, CEPREMAP et Université de Toronto – Christian.Gourieroux@ensae.fr

*** A. TIOMO : DEXIA S.A., ERUDITE, Université de Paris 12
andre.tiomo@dexia.com - tiomo@univ-paris12.fr

1. Introduction

La dernière décennie a vu se développer dans le monde de la finance moderne des méthodologies d'analyse des risques de crédit. La nécessité de bien comprendre et évaluer les risques de défaut sur des portefeuilles de crédit a par ailleurs été renforcée par le Comité de Bâle sur la supervision bancaire (2001, 2003) qui a proposé une révision complète des standards pour le calcul du capital réglementaire (Valeur à Risque) pour les banques.

Un des défis les plus importants dans l'analyse des risques de crédit concerne l'introduction des co-mouvements, c'est à dire de phénomènes de dépendance des événements de défaut ou plus largement des transitions d'un niveau de risque vers un autre. Cette dépendance est appelée corrélation de défaut ou corrélation de migration¹. Évaluer les corrélations entre les défaillances d'entreprises est un aspect important de la mesure des divers risques rencontrés sur le marché financier. A titre d'exemple, les risques sur les portefeuilles d'obligations d'entreprises, de lettres de crédit, de contrats d'échange sur défaut de crédit (credit default swap)² sont tous fonctions des corrélations de défaut. De la même façon, dans la majorité des modèles de risque de crédit, les corrélations interviennent au même titre que les probabilités de défaut et que les taux de recouvrement comme inputs dans le calcul de la Valeur à Risque (VaR).

La prise en compte de la dépendance entre firmes dans l'analyse globale d'un portefeuille de crédits repose sur le constat de co-mouvements, c'est à dire d'évolution jointe de la situation de plusieurs entreprises. Les dépendances qui existent entre deux firmes peuvent être de différentes natures :

- Un lien direct, c'est-à-dire structurel peut exister entre les deux entreprises. Il s'agit notamment des liens entre la firme et à la fois ses fournisseurs et ses créanciers. Une entreprise qui ne peut payer ses fournisseurs, fragilise leur situation et ainsi accroît le risque qu'ils fassent eux-mêmes défaut. De même, le défaut d'un débiteur peut conduire au défaut de l'entreprise créancière. Dans ces cas, il y a une séquentialité entre les défauts, le défaut d'une firme affectant la situation future, et non la situation présente, de l'autre. Pour mesurer la dépendance entre ces deux entreprises, il faudrait alors tenir compte de ces décalages temporels.
- Même si deux entreprises n'ont pas de lien direct, elles restent dépendantes par le biais d'un ensemble de facteurs qui impactent conjointement leurs situations. La santé des entreprises dépend de l'état général de l'économie, c'est-à-dire de paramètres tels

1. Le phénomène de migration est caractérisé par le fait qu'une entreprise ou contrepartie quelconque passe d'une classe de risque donnée à une autre classe de risque supérieure, ou au contraire inférieure.

2. Les swaps de crédit consistent à s'échanger les revenus issus de deux créances ou portefeuilles de créances. Ce type de contrat de gré à gré est souvent mis en place grâce à un intermédiaire qui perçoit une commission pour l'opération. Par rapport aux opérations de titrisation, ce type de contrat a l'avantage que les crédits restent enregistrés dans les livres de la banque. Quant aux swaps sur défaut de crédit, le vendeur de protection s'engage, contre le versement d'une prime, à dédommager « l'originateur » (ou acheteur de la protection) en cas d'événements négatifs sur son portefeuille : défaut de paiement ou simplement dégradation de la qualité de ses débiteurs. Contrairement à ce que semble indiquer le terme, le produit s'apparente donc davantage à une option qu'à un swap. En cas de défaut de paiement sur un nombre prédéterminé de titres détenus en portefeuille, le détenteur du contrat reçoit un dédommagement de la part du vendeur de protection. Ce type de contrat correspond au besoin d'un investisseur qui accepte d'assumer des pertes limitées (si un ou deux titres font défaut, il ne reçoit rien), mais veut se couvrir contre les grosses pertes.

que le prix du pétrole, le niveau d'inflation, les taux d'intérêt etc..., qui conditionnent leurs structures de production ainsi que leurs débouchés. Une hausse des coûts de production issue par exemple de l'augmentation brutale des prix des biens de production affectera simultanément toutes les entreprises qui utilisent cet input. Le risque de défaut de ces firmes évoluera alors conjointement sans qu'elles aient pour autant de liens de dépendance directs. De la même manière, une chute de la demande globale liée à la baisse du revenu disponible des ménages fragilisera les entreprises. Ces liens indirects sont perceptibles au niveau de l'économie globale, et on les appréhende souvent à travers la notion de cycle ; ils sont cependant bien plus forts au niveau de sous-ensembles tels que des secteurs d'activité ou des régions géographiques.

La détermination de l'ampleur des phénomènes de co-mouvements devient primordiale dans le cadre de l'évaluation des risques de portefeuille de crédits. En effet, agréger des risques individuels suppose de connaître leurs liens de dépendance. Les mêmes réserves ne seront pas nécessaires pour couvrir les risques d'un portefeuille composé de deux entreprises dont les situations sont indépendantes que ceux de deux entreprises dont les situations sont corrélées. Le niveau de couverture requis variera en fonction du degré de corrélation des entreprises constituant le portefeuille de crédit.

Avant d'évaluer les corrélations de défaut ou plus largement de migration, il est utile de préciser la notion de corrélation retenue et de la définir formellement³. La notion de corrélation de défaut ou de migration a déjà fait l'objet de quelques articles dans la littérature. Ces articles peuvent être classés en deux catégories.

D'une part, certains auteurs comme Lucas (1995) et Bahar et Nagpal (2001), se sont attachés à construire des estimateurs des corrélations de défaut en les approchant par leur contrepartie empirique, c'est-à-dire les taux de défaut observés. Ils ont défini les corrélations de défaut à partir des probabilités marginales de défaut et des probabilités de défaut jointes. Il s'agit en fait d'une approche par forme réduite, partant simplement des taux de défaut observés.

D'autre part, les corrélations de migration et plus spécifiquement de défaut ont aussi été définies dans le cadre de modèles structurels (on parle alors d'approche structurelle). Cette modélisation s'appuie en grande partie sur les travaux de Black & Scholes (1973) et Merton (1974). Dans ces modèles, le défaut est supposé survenir lorsque la valeur de marché des actifs d'une firme passe en dessous de la valeur de ses dettes. Il est alors possible de compléter le modèle en reliant la valeur des actifs à un ou plusieurs facteurs de risque globaux et à des facteurs spécifiques à chaque firme. Par définition, les facteurs globaux, tels que l'état général de l'économie, le secteur ou la zone géographique, sont communs à plusieurs contreparties et conduisent leurs risques dans la même direction. Les facteurs spécifiques sont beaucoup plus difficiles à définir et sont généralement représentés par des bruits indépendants. Ainsi, seuls les facteurs communs seront responsables des corrélations. Ces facteurs peuvent être observables, comme dans le cas du modèle proposé par Wilson (1997a, 1997b) dans lequel les facteurs sont des variables macro-économiques. Ils peuvent aussi être supposées non observables comme dans Finger (1999) ou encore Belkin, Suchower et Forest (1998)].

3. La notion dépend aussi de la définition retenue pour le défaut. Cette dernière dépend des utilisateurs et n'est par exemple pas la même pour les agences de notations S&P, Moody's Fitch, dans les modèles internes des diverses banques, ou dans les suggestions du comité de Bâle. Une présentation des ces définitions alternatives est par exemple donnée dans Foulcher, Gouriéroux, Tiomo (2004). Dans l'application de l'article, la définition retenue est celle de la Banque de France, mais la partie théorique s'applique à tout type de défaut une fois celui-ci précisément défini.

Ainsi, deux concepts différents se côtoient dans la littérature relative au risque de crédit sous le terme générique de « corrélation ». Dans un modèle structurel, la corrélation dite latente mesure la dépendance entre variables « support du risque » (par exemple les valeurs de marché des actifs de deux firmes dans le modèle de Merton). De cette corrélation latente, on peut déduire la corrélation entre les défauts. S'il est possible de déduire une des ces corrélations de la connaissance de l'autre, il est toutefois important de bien faire la distinction entre les deux⁴.

Le présent article contribue à la recherche sur les corrélations, en s'attachant à définir clairement le paramètre d'intérêt qu'est la corrélation de migration. Les corrélations de migration sont ensuite estimées à partir de la base de données historiques de la Banque de France contenant actuellement les scores d'environ 135 000 entreprises sur dix ans. La taille importante de l'échantillon, ainsi que sa profondeur historique confèrent aux résultats une robustesse importante. L'environnement économique étant un facteur important pour la corrélation de migration, notre étude portera essentiellement sur les entreprises françaises non financières dans six secteurs d'activité : Industrie, Commerce de détail, Commerce de gros, Transport, Construction et Hôtels & Restaurants.

La suite de l'article est organisée comme suit : le deuxième paragraphe s'attache à définir la notion de corrélation de migration ainsi qu'une méthode d'estimation convergente. Ces définitions sont ensuite utilisées dans le troisième paragraphe pour évaluer les corrélations de migration sur la base de données Banque de France. Le dernier paragraphe conclut.

Conjointement un second article est consacré spécifiquement au calcul des corrélations dans le cadre de modèles structurels. Après avoir décrit ces modèles, l'accent y est mis sur le lien existant entre les corrélations estimées sur la base de variables latentes et les corrélations estimées à partir de l'observation de transitions. Une fois le lien établi, à partir des corrélations estimées dans le présent article sont déduites des corrélations entre variables latentes. Ces dernières sont finalement comparées aux propositions du Comité de Bâle, en insistant plus particulièrement sur les conséquences en termes de pertes potentielles⁵.

2. La corrélation de migration

Depuis les travaux de Lucas (1995), il existe désormais une littérature sur les corrélations de défaut et plus généralement de migration (Cf. par exemple Bahar et Nagpal (2001), de Servigny et Renault (2002)). Cependant, cette corrélation n'est pas toujours bien définie. L'objet de ce paragraphe est à la fois de préciser la définition des corrélations de migration et d'en donner des estimateurs. Pour simplifier la présentation, un premier paragraphe est consacré aux corrélations de défaut⁶ qui sont un cas particulier des corrélations de migration. Dans un second paragraphe, la définition est généralisée à l'ensemble des transitions.

4. Cf. Foulcher, Gouriéroux, Tiomo (2004) pour plus de détails.

5. À noter que ne sont abordées dans ces articles que les corrélations par paires, c'est-à-dire les liens de dépendance entre deux entreprises.

6. Le terme défaut doit être compris ici au sens large, l'estimateur proposé dans ce paragraphe pouvant servir de la même façon au calcul de corrélations de défaut ou de défaillance.

2.1 La corrélation de défaut

Quoiqu'il soit devenu classique de parler de corrélation de défaut, le terme corrélation n'est pas aussi explicite qu'on le croit. En effet, la notion classique de corrélation linéaire utilisée notamment dans l'analyse macro-économique est très inadéquate pour mesurer le risque en général, qu'il s'agisse du risque de défaut ou du risque de taux de change et d'intérêt. Nous allons présenter cette notion lorsque la variable définissant le défaut est dichotomique.

Considérons deux firmes i et j et un horizon de temps t . A la date t , il existe deux états possibles pour chaque entreprise n'ayant pas fait défaut jusqu'à cette date : « défaut » et « non défaut ». Introduisons la variable indicatrice :

$$Y_{i,t}^* = \begin{cases} 1, & \text{si la firme } i \text{ fait défaut en } t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La corrélation de défaut en t entre i et j est définie comme la corrélation entre les deux variables $Y_{i,t}^*$ et $Y_{j,t}^*$, sachant que les deux entreprises n'ont pas fait défaut jusqu'à cette date. Cette corrélation de défaut sera notée $\delta_{ij}(t)$. Elle dépend de la date et des firmes considérées. Il y a donc autant de corrélations que de dates et de couples d'entreprises.

Si nous désignons par $P_i(t)$ la probabilité qu'une firme i fasse défaut en t sachant qu'elle n'a pas fait défaut jusqu'à cette date, et par $P_{ij}(t)$ la probabilité que les deux entreprises i et j fassent simultanément défaut en t sachant qu'elles ont survécu jusque là, la corrélation de défaut est donnée par :

$$(2.1) \quad \delta_{ij}(t) = \frac{P_{ij}(t) - P_i(t)P_j(t)}{\sqrt{[P_i(t) - P_i(t)^2] [P_j(t) - P_j(t)^2]}}$$

De façon équivalente la probabilité de défaut jointe $P_{ij}(t)$ peut être exprimée comme :

$$(2.2) \quad P_{ij}(t) = P_i(t)P_j(t) + \delta_{ij}(t) \sqrt{[P_i(t) - P_i(t)^2] [P_j(t) - P_j(t)^2]}$$

Ainsi, à probabilités marginales $P_i(t)$ et $P_j(t)$ connues, il est équivalent de connaître la probabilité de défaut jointe $P_{ij}(t)$ ou la corrélation de défaut $\delta_{ij}(t)$. Ainsi pour deux variables dichotomiques la corrélation linéaire et les lois marginales caractérisent leur loi jointe. Il n'y a donc pas de raison de distinguer mesures de dépendance linéaire et non linéaire. En revanche, cette distinction est importante, lorsque plus de deux firmes seront étudiées conjointement, ou lorsque la variable de risque n'est plus dichotomique, par exemple correspondant à un rating.

La relation entre les probabilités jointes et la corrélation de défaut est, pour des niveaux de probabilités de défaut marginales donnés, linéaire et croissante.

Dans le cas d'indépendance, i.e. $\delta_{ij}(t) = 0$, et la probabilité jointe de défaut est égale au produit des probabilités marginales. Par ailleurs, la relation (2.2) implique une contrainte sur le niveau de la corrélation. En effet, la probabilité jointe de défaut $P_{ij}(t)$ prenant réellement ses valeurs entre $\max\{P_i(t) + P_j(t) - 1, 0\}$ et $\min\{P_i(t), P_j(t)\}$ ⁷, il vient que :

$$(2.3) \quad \frac{\max\{0, P_i(t) + P_j(t) - 1\} - P_i(t)P_j(t)}{\sqrt{[P_i(t) - P_i(t)]^2} [P_j(t) - P_j(t)]^2} \leq \delta_{ij}(t) \leq \frac{\min\{P_i(t), P_j(t)\} - P_i(t)P_j(t)}{\sqrt{[P_i(t) - P_i(t)]^2} [P_j(t) - P_j(t)]^2},$$

Une corrélation $\delta_{ij}(t)$ varie par définition entre -1 et 1 . On montre cependant facilement que la valeur -1 n'est atteinte que dans le cas $P_i(t) + P_j(t) = 1$ et la valeur 1 que si $P_i(t) = P_j(t)$. Ces deux cas limites correspondants aux cas de liaisons affines négatives (respectivement positives) entre deux variables indicatrices contraignent à ne prendre que les valeurs 0 ou 1 . Les corrélations ne prendront donc leurs valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$ que pour le cas $P_i(t) = P_j(t) = 50\%$. Dans l'ensemble des autres cas, le domaine de variation des corrélations est restreint. Cette contrainte sur le domaine de variation de la corrélation linéaire et l'impossibilité de fixer celle-ci sans prendre en compte les lois marginales provient de l'aspect dichotomique des variables, et plus généralement se présente, lorsque les variables étudiées ont un support borné [voir par exemple Joe (1997)].

Intéressons-nous dans un premier temps au cas où les deux firmes ont le même risque marginal, soit $P_i(t) = P_j(t)$. L'équation (2.2) devient $P_{ij}(t) = P_i(t)^2 + \delta_{ij}(t)[P_i(t) - P_i(t)]^2$ et la contrainte sur le niveau des corrélations s'écrit alors:

$$\left(\frac{-P_i(t)}{(1 - P_i(t))} 1_{P_i(t) \leq 1/2} + \frac{(P_i(t) - 1)}{P_i(t)} 1_{P_i(t) \geq 1/2} \right) \leq \delta_{ij}(t) \leq 1.$$

Cette contrainte est reprise sur le graphique 1.

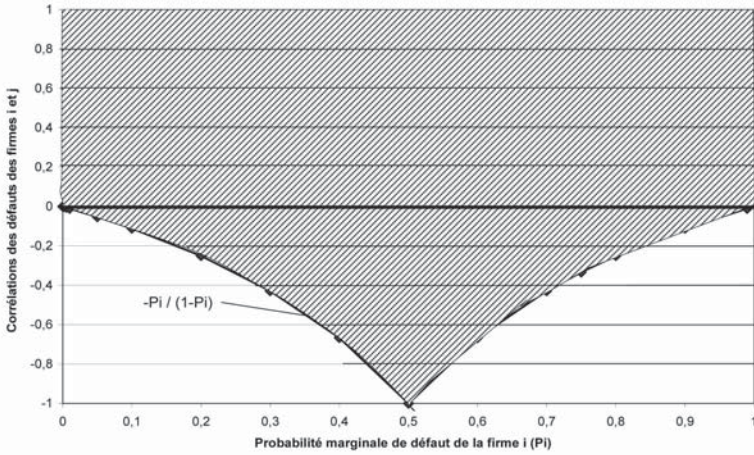
Quel que soit le niveau de probabilité de défaut marginale considéré, les corrélations de défaut ne peuvent prendre que des valeurs situées dans la zone hachurée. La corrélation des défauts de deux entreprises ayant une probabilité de défaut de 1% par exemple, prend ses valeurs dans $[-0,01 ; 1]$. Ce n'est que pour un niveau de

7. De façon générale, pour toute fonction de distribution multivariée $F(x_1, \dots, x_n)$ ayant des distributions marginales F_1, \dots, F_n , on a : $\max\left\{\sum_{i=1}^n F_i(x_i) + 1 - n, 0\right\} \leq F(x_1, \dots, x_n) \leq \min\{F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)\}$.

Ces valeurs sont communément appelées bornes de Fréchet-Hoeffding.

GRAPHIQUE 1

Domaine de variation des corrélations $\delta_{ij}(t)$ dans le cas $P_i(t) = P_j(t)$

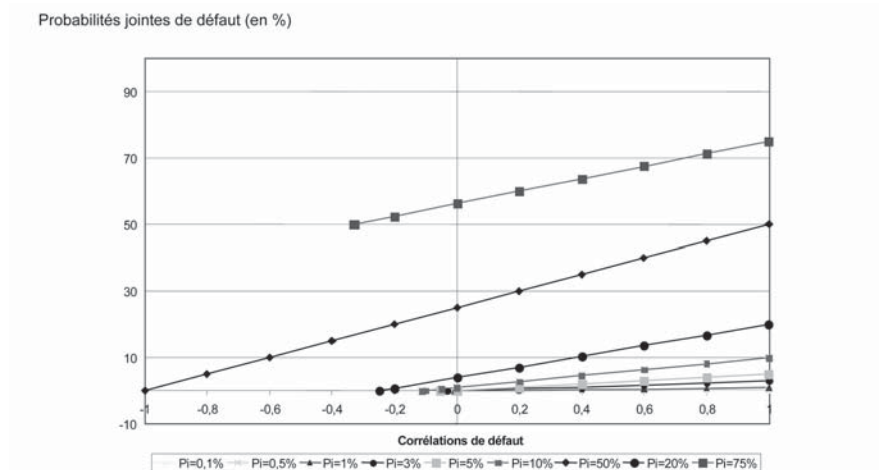


probabilités de défaut marginales de 50% que les corrélations varient dans $[-1 ; 1]$. En pratique, les probabilités marginales de défaut à un an varient essentiellement entre 0 et 30% avec une majorité de contreparties ayant des niveaux de probabilité de défaut inférieurs à 10 %⁸. De ce fait, les corrélations de défaut ne seront que très rarement inférieures à $-0,11$.

Le graphique 2 représente la relation entre probabilités jointes et corrélations de défaut pour différents niveaux de probabilités marginales dans le cas où les deux firmes ont la même probabilité marginale de défaut.

GRAPHIQUE 2

Évolution de la probabilité jointe de défaut en fonction de la corrélation de défaut [cas où $P_i(t) = P_j(t)$]



8. Chez S&P, une entreprise notée CCC (respectivement B) avait une probabilité de défaut à 1 an de 27.87 % (respectivement 9.31 %) en 2003.

Pour un niveau de corrélation fixé, la probabilité jointe augmente avec la probabilité marginale. Inversement, pour des niveaux de probabilités marginales donnés, la probabilité jointe de défaut croît avec le niveau de la corrélation. A titre d'exemple, si la corrélation de défaut entre les deux firmes i et j est de 20%, et si les probabilités marginales de défaut de i et j sont de 5%, alors la probabilité de défaut jointe est de 1,2%, alors qu'elle aurait été de 0,25% dans le cas d'indépendance. Ne pas tenir compte de l'impact des corrélations conduit alors à sous-estimer les probabilités jointes de défaut et donc les risques.

Dans un deuxième temps, lorsque les deux firmes i et j ont des probabilités marginales de défaut différentes, le graphique 3 ci-après décrit l'espace de variation des corrélations.

Pour des probabilités marginales de défaut $P_i(t)$ comprises entre 0 et 50%, il apparaît que plus les niveaux de probabilités marginales de défaut $P_j(t)$ sont élevés, moins la borne inférieure est restrictive, c'est-à-dire plus le domaine de variation des corrélations négatives est important. Par ailleurs, plus les probabilités de défaut des deux firmes sont proches, moins la borne supérieure est restrictive, les corrélations atteignant la valeur 1, lorsque les deux probabilités marginales sont identiques. Ainsi, les valeurs des corrélations linéaires dans le cas de variables dichotomiques doivent être examinées avec prudence, car intuitivement comparées à leurs bornes fonctions des probabilités marginales.

2.2 La corrélation de migration

La notion de corrélation de défaut est généralisée à la notion de corrélation de migration, c'est-à-dire d'interdépendance entre deux firmes appartenant respectivement à deux classes de risque (ces classes pouvant être identiques ou différentes) en $t-1$ et qui migrent chacune vers une autre classe de risque en t .

Pour définir la notion de corrélation de migration, nous introduisons une variable qualitative polytomique $Y_{i,t}$, $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$, prenant les modalités $k = 0, \dots, K-1$, chaque modalité correspondant à la classe de risque de la firme i à la date t . Nous supposons que les classes sont ordonnées par risques décroissants ; la classe 0 représentant l'état de défaut.

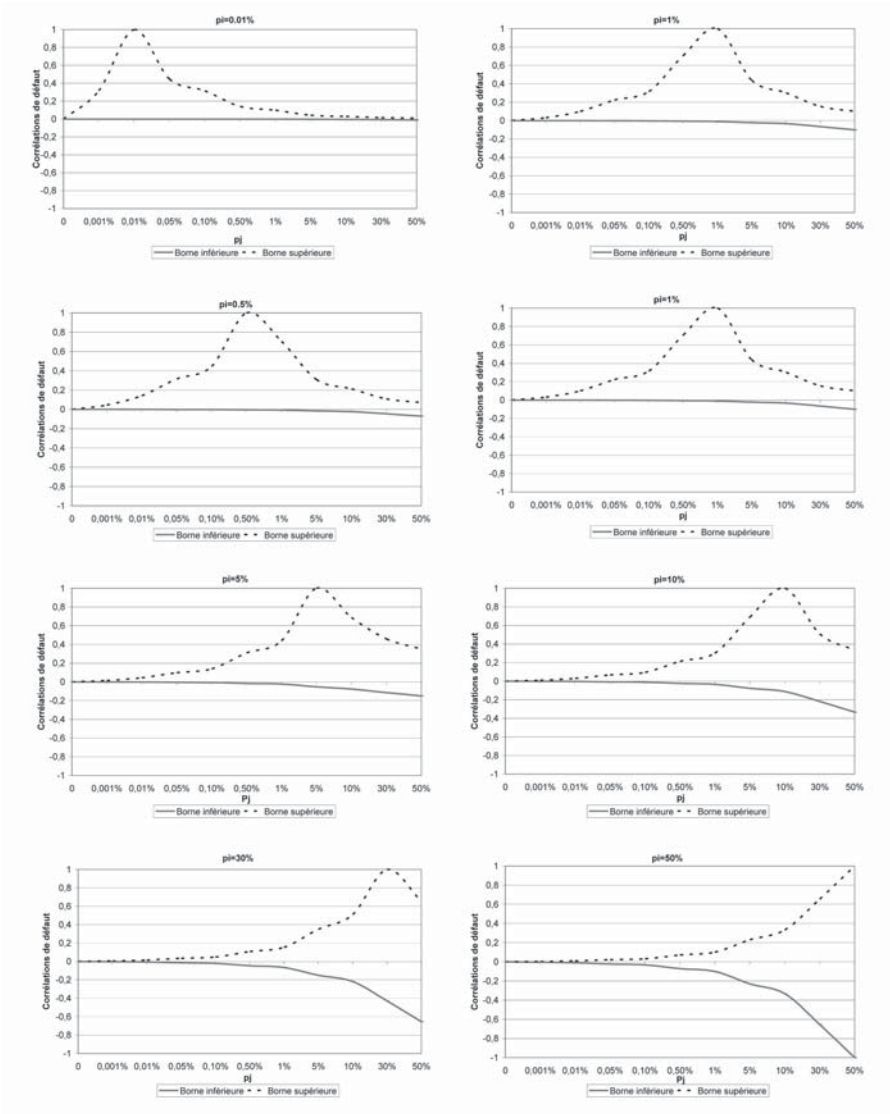
Afin de définir les corrélations de migration et d'en proposer des estimateurs convergents, nous supposons que les historiques de notation $(Y_{i,t})$, où t varie, sont des processus de Markov indépendants et identiquement distribués lorsque les matrices de transition $\Pi_t = (\pi_{kk^*,t})$ sont connues. $\pi_{kk^*,t}$ donne la probabilité de passage de la classe k à la classe k^* , entre $t-1$ et t . Cette probabilité de transition (ou migration) est généralement approximée par la fréquence empirique de cette transition :

$$(2.4) \quad \hat{\pi}_{kk^*,t} \neq \frac{N_{kk^*,t}}{N_{k,t-1}},$$

où $N_{k,t}$ désigne le nombre de contreparties dans la classe k à la date t , et $N_{kk^*,t}$, $k, k^* = 0, \dots, K-1$, le nombre de contreparties ayant migré de la classe k

GRAPHIQUE 3

Domaine de variation de corrélations pour différentes probabilités marginales de défaut



à la classe k^* entre $t - 1$ et t . Cette fréquence de transition constitue un estimateur convergent de la probabilité de transition correspondante, lorsque les tailles sont $N_{k,t}$ grandes. C'est le cas des applications au risque de crédit, où le nombre de firmes considérées est en pratique entre 10 000 et 100 000, et l'ensemble des notes au moins égal à 8 niveaux d'après les régulateurs. Ainsi, $N_{k,t}$ est de l'ordre de 500 – 10 000 en tenant compte des différences entre classes de risque.

Puis, nous supposons que les matrices de transition sont stochastiques. Nous nous plaçons alors dans une extension du modèle à intensité stochastique introduit

à l'origine pour le risque de défaut [Cf. Lando (1998), Duffie et Singleton (1999), Gouriéroux, Monfort et Polimenis (2005)]. Cette spécification a pour but de permettre de comprendre la dépendance des migrations. Dans ce cadre, la dépendance jointe entre ratings passe par la transition stochastique. On obtient alors un modèle non linéaire à facteurs dans lequel les facteurs sont simplement les éléments des matrices de transition. Le nombre de facteurs est alors $(K-1)^2$, du fait de la contrainte sur les probabilités de transition (dont les lignes doivent sommer à un) et de l'interprétation du défaut comme un état absorbant, c'est à dire un état dont il est impossible de sortir⁹. Comme les matrices de transition jointes temporelles ne sont pas observables, la distribution jointe des historiques de rating doit être obtenue en intégrant par rapport au facteur observable Π_t . Il est alors possible de calculer des probabilités jointes de migration.

Au final, pour un système de rating à K modalités (ou classes de risque) et n firmes il faudra présenter K^n probabilités jointes de migration. L'exercice devient très rapidement impossible. En considérant par exemple le score industrie développé à la Banque de France qui comporte 11 classes de risque, il y a 11^2 , soit 121, probabilités jointes de migration entre 2 firmes, 1331 entre 3 firmes, 14 641 entre 4 firmes etc...

Pour cette raison, il est important de contraindre le modèle de façon à caractériser les transitions jointes des diverses firmes à l'aide d'un plus petit nombre de paramètres. Ceci est rendu plus simple, si on suppose que les matrices de transition stochastiques sont indépendantes, de même loi¹⁰. Sous cette hypothèse, on peut vérifier que l'introduction d'intensité stochastique ne détruit pas la propriété Markovienne du processus des ratings, tout en rendant homogène le processus au sens où si un processus $(Y_{i,t})$ est Markov homogène, un processus joint $(Y_{i,t}, Y_{j,t})$ est aussi un processus de Markov homogène sur un espace d'états incluant les paires de ratings admissibles (i,j) . Il en est de même d'un processus joint $(Y_{i,t}, Y_{j,t}, Y_{k,t})$ et ainsi de suite [Cf. Gagliardini & Gouriéroux (2005a), (2005b)]. Dans la suite, nous nous intéressons au suivi des couples d'entreprises. La matrice de transition jointe considérée est de taille (K^2, K^2) et est indépendante de la date.

Les probabilités de transition jointes sont définies par :

$$(2.5) \quad p_{kk^*,ll^*} = P[Y_{i,t+1} = k^*, Y_{j,t+1} = l^* | Y_{i,t} = k, Y_{j,t} = l].$$

Ces probabilités de transition jointes ne dépendent pas du couple de firmes (i, j) considérées, mais simplement de la classe de risque à laquelle chacune appartient.

9. Supposer que la défaillance est un état absorbant est imposé par la régulation actuelle, et cette hypothèse est présente dans tous les modèles existants de risque de défaut. Ceci a des conséquences par exemple sur la définition de la défaillance et de la firme. Ainsi une inscription au chapitre 11 de la loi sur les faillites américaines, qui sert généralement à faciliter des renégociations des prêts entre autres n'est jamais considéré comme un défaut. De même, une entreprise qui fait défaut, et renait doit être considérée comme une nouvelle entreprise, même si elle porte le même nom.

10. Cette hypothèse sous-tend toute la démarche actuelle du comité de Bâle, et est pertinente dans une première étape d'évaluation du capital réglementaire, car elle conduit à des méthodes assez simples à mettre en œuvre. Evidemment, cette hypothèse devrait être testée. Il est connu qu'elle n'est pas satisfaite en pratique [cf. Foulcher et alii (2004)] et que ceci conduit à des modèles à facteurs dynamiques beaucoup plus élaborés [voir par exemple Gagliardini et Gouriéroux (2005a)] et beaucoup plus délicats à mettre en œuvre.

Elles admettent une expression simple en fonction des probabilités de transition stochastiques $\Pi_t = (\pi_{kk^*,t})$:

$$(2.6) \quad p_{kk^*,ll^*} = E_t \left[\pi_{kk^*,t} \pi_{ll^*,t} \right].$$

Il est aussi possible de définir directement la corrélation de migration comme suit :

$$(2.7) \quad \delta_{kk^*,ll^*} = \text{Corr} \left[1_{Y_{i,t+1}=k^*}, 1_{Y_{j,t+1}=l^*} \mid Y_{i,t} = k, Y_{j,t} = l \right],$$

où $1_{Y=k} = 1$ si $Y = k$, 0 sinon.

Cette corrélation de migration est alors égale à :

$$(2.8) \quad \delta_{kk^*,ll^*} = \frac{\text{cov}(\pi_{kk^*,t}, \pi_{ll^*,t})}{\sqrt{\alpha_{kk^*}(1-\alpha_{kk^*})} \sqrt{\alpha_{ll^*}(1-\alpha_{ll^*})}} = \frac{p_{kk^*,ll^*} - \alpha_{kk^*}\alpha_{ll^*}}{\sqrt{\alpha_{kk^*}(1-\alpha_{kk^*})} \sqrt{\alpha_{ll^*}(1-\alpha_{ll^*})}},$$

où $\alpha_{kk^*} = P(Y_{i,t+1} = k^* \mid Y_{i,t} = k) = E_t \left[\pi_{kk^*,t} \right]$ est l'espérance conditionnelle de la probabilité de transition. Bien que calculées de la façon classique, ces corrélations linéaires particulières fournissent beaucoup d'informations sur les dépendances non linéaires entre ratings aussi bien sérielles qu'en coupe. Comme les corrélations de défaut, les corrélations de migration sont calculées sur des variables dichotomiques, et donc aussi avec des bornes strictement entre -1 et 1 .

La formulation (2.8) peut-être utilisée avec divers choix de classes de ratings initiales ou finales, sachant que la matrice de corrélation des migrations complète comprend $[K(K-1)]^2$ corrélations¹¹. On peut par exemple s'intéresser aux seules corrélations de défaut, c'est à dire au cas où $k^* = l^* = 0$, soit à $(K-1)^2$ cas. Il est aussi possible de se concentrer sur les cas de corrélations des améliorations de la situation de deux entreprises simultanément ou inversement des détériorations. La corrélation de deux *upgrades* correspond aux cas $k^* > k+1$ et $l^* > l+1$ ¹², soit $\left(\frac{(K-1)(K-2)}{2} \right)^2$ corrélations. Dans le cas de corrélations de *downgrade* (dégradation de rating), il s'agirait d'évaluer $\left(\frac{K(K-1)}{2} \right)^2$ corrélations.

2.3 Estimation des corrélations de migration

Afin d'estimer de manière convergente la probabilité de migration jointe p_{kk^*,ll^*} , nous supposons un qu'un grand nombre de firmes sont observées sur plusieurs

11. Car le défaut est absorbant.

12. Rappelons que les classes de risques ont été numérotées par ordre décroissant du risque.

années. Dans une première étape, les probabilités de transition de chaque période $(\pi_{kl,t})$ sont remplacées par leur contrepartie empirique $(\hat{\pi}_{kl,t})$. Puis, l'estimateur du paramètre d'intérêt p est obtenu en moyennant sur le temps¹³ le produit des probabilités marginales de transition ainsi estimées :

$$(2.9) \quad \hat{p}_{kk^*,ll^*} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\pi}_{kk^*,t} \hat{\pi}_{ll^*,t} .$$

A ce niveau, il faut bien remarquer la spécificité de l'estimateur. Si les matrices de transition $(\pi_{kl,t}) = (\pi_{kl})$ avaient été supposées non stochastiques, fixes dans le temps, l'estimation des probabilités jointes de transition aurait consisté à moyennner les transitions jointes à la fois sur les contreparties et les dates, sans distinguer les deux aspects. Ici, l'hypothèse d'intensité stochastique conduit à une démarche en deux temps : estimation des $(\pi_{kl,t})$ par moyennage en coupe, supposant un grand nombre de contreparties pour assurer la convergence des $(\hat{\pi}_{kl,t})$. Puis, calcul des carrés et moyennage temporel. Ce dernier fournit une approximation convergente si le nombre de dates est suffisamment grand.

La corrélation de migration peut alors être estimée par :

$$(2.10) \quad \hat{\delta}_{kk^*,ll^*} = \frac{\hat{p}_{kk^*,ll^*} - \hat{\alpha}_{kk^*} \hat{\alpha}_{ll^*}}{\sqrt{\hat{\alpha}_{kk^*} (1 - \hat{\alpha}_{kk^*})} \sqrt{\hat{\alpha}_{ll^*} (1 - \hat{\alpha}_{ll^*})}} ,$$

avec :

$$(2.11) \quad \hat{\alpha}_{kk^*} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\pi}_{kk^*,t}$$

2.4 Inférence statistique – propriétés de l'estimateur

Lorsque le nombre de firmes est grand, l'estimateur des éléments de la matrice de transition obtenu en (2.4) par la méthode du maximum de vraisemblance est sans biais, et convergent par application de la loi des grands nombres. De même, les estimateurs obtenus en (2.9) et (2.11) par la méthode des moments sont aussi convergents lorsque T est grand. Ce faisant, l'estimateur de la corrélation de migration obtenu en (2.10) est aussi convergent. Cependant en pratique le nombre de firmes est grand, mais le nombre de dates d'observations est fini. Bien que les estimateurs des probabilités de migration soient approximativement sans biais, cette propriété n'est pas satisfaite pour l'estimateur des corrélations de migration. Afin de préciser les propriétés de cet estimateur, son biais lorsque T est fini est calculé

13. Cette méthode d'estimation est connue sous le nom de « méthode des moments ».

de façon approchée dans le cas simple de deux firmes ayant la même trajectoire, c'est-à-dire les mêmes classes de départ et d'arrivée¹⁴ : $k = k^*$ et $l = l^*$. Les indices sont omis pour ne pas alourdir les notations. Dans ces conditions, l'estimateur des corrélations s'écrit :

$$\hat{\delta} = \frac{\hat{p} - \hat{\alpha}^2}{\hat{\alpha}(1 - \hat{\alpha})}$$

Par définition, l'estimateur $\hat{\delta}$ est sans biais si $E\hat{\delta} = \delta$, où δ désigne la vraie valeur de la corrélation.

On peut écrire $\hat{\delta} = f(\hat{\theta})$, où $\hat{\theta} \equiv \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{\alpha} \end{pmatrix}$ est tel que $E\hat{\theta} = \begin{pmatrix} p \\ \alpha \end{pmatrix} \equiv \theta$. Pour approcher l'espérance de la corrélation estimée $E\hat{\delta}$, considérons le développement limité à l'ordre deux de la fonction $f(\hat{\theta})$ autour de θ . On peut alors écrire :

$$f(\hat{\theta}) \approx f(\theta) + \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta'} (\hat{\theta} - \theta) + \frac{1}{2} (\hat{\theta} - \theta)' \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} (\hat{\theta} - \theta).$$

Le biais $E\hat{\delta} - \delta$ est donné par $E[f(\hat{\theta})] - f(\theta) \approx \frac{1}{2} E \left\{ (\hat{\theta} - \theta)' \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} (\hat{\theta} - \theta) \right\}$.

On peut montrer par quelques calculs (Cf. annexe 1) que ce biais est non nul pour T fini et est même strictement négatif. Autrement dit, pour un nombre de dates observées T fini, l'estimateur obtenu en (2.10) sous-estime la vraie valeur de la corrélation de migration dans ce cas particulier d'entreprises suivant la même trajectoire. Des analyses complémentaires des lois de ces estimateurs dans le cas des échantillons finis peuvent être trouvées dans [Gagliardini & Gouriéroux (2005b)].

3. Application sur les historiques de rating de la Banque de France

3.1 La base de données

Le calcul des corrélations est basé sur le score mis en place et actualisé par la Banque de France. Ce score¹⁵ est un outil de détection précoce des risques de

14. Il s'agit du seul type de corrélation analysé dans les accords de Bâle II.
15. Cf. Bardos, Foulcher et Bataille (2003) pour la méthodologie de score Banque de France. Signalons que l'idée d'attribuer à chaque entreprise une note quantitative (score) ou qualitative (rating) fournissant une indication sur son risque supposé date du milieu des années soixante-dix.

défaillance¹⁶ d'entreprises. Il est établi à partir de données de bilan d'entreprises, dont il constitue un résumé en termes de sensibilité au risque. Les informations bilantielles nécessaires à la construction du score proviennent du fichier interbancaire des entreprises Fiben [Cf. Fiben 1998)]. Ce fichier est constitué des firmes réalisant un chiffre d'affaires annuel supérieur à 762 000 euros ou dont l'endettement excède cinq fois le montant du seuil d'enregistrement à la centrale des risques (ce seuil est aujourd'hui de 76 224 € contre 106 714 € jusqu'à mi-1997). Au total, le fichier contient environ 200 000 bilans par an, assurant ainsi, pour la population des firmes imposées au BIC-BRN¹⁷, la couverture de 85 % de l'emploi salarié et de 90 % du crédit bancaire distribué¹⁸. Les facteurs de risque pouvant varier d'un secteur à l'autre, il existe un score par grand secteur d'activité : Industrie, Commerce de Gros, Commerce de détail, Transport, Hôtels - Restaurants, Construction. Au total, les risques de défaillance de plus de 100 000 entreprises ont été ainsi évalués annuellement depuis 1992. Le tableau 1 détaille par secteurs le nombre d'entreprises scorées sur la période 1992-2002.

TABLEAU 1

Population des entreprises scorées par secteur et année

Année	Indus- trie	Commerce de détail	Commerce de gros	Trans- port	Hôtels & restaurants	Construc- tion	Total
1992	37 586	19 956	25 273	4 616	2 298	13 685	103 414
1993	38 173	21 478	26 346	4 890	2 737	14 226	107 850
1994	39 699	23 292	27 659	5 286	3 176	15 093	114 205
1995	41 051	24 884	28 807	5 605	3 601	15 778	119 726
1996	42 163	25 840	29 338	5 853	3 914	15 796	122 904
1997	42 712	26 383	29 594	6 013	4 743	16 963	126 408
1998	42 811	27 294	30 047	6 186	5 187	17 363	128 888
1999	41 897	27 626	29 843	6 241	5 302	17 669	128 578
2000	41 740	28 006	29 893	6 261	5 434	18 537	129 871
2001	41 828	29 082	30 205	6 418	5 881	19 715	133 129
2002	39 564	33 609	29 448	6 240	5 603	19 366	133 830
Total	449 224	287 450	316 453	63 609	47 876	184 191	1 348 803

Source : Banque de France

À partir des scores (qui sont des variables continues), des classes de risque ont été constituées. Elles sont définies par des intervalles de score homogènes en termes de risque, c'est-à-dire regroupent des entreprises ayant des probabilités de défaillance à un horizon fixé proches¹⁹. Le nombre de classes de risque peut varier d'un secteur économique à un autre. Ainsi, elles s'échelonnent de 1 à 10 dans l'industrie, de 1 à 7 dans les secteurs des transports et des commerces de gros et de

16. La défaillance correspond ici à l'ouverture d'une procédure judiciaire.

17. Entreprises soumises à l'impôt sur les Bénéfices Industriels et Commerciaux, déclarant selon le Bénéfice Réel Normal.

18. Ces taux de couverture sont calculés par rapport aux entreprises du BIC-BRN du fichier exhaustif de l'INSEE, hors secteur Immobilier.

19. Dans le cadre des scores Banque de France, cet horizon est de 3 ans.

détail, de 1 à 6 dans le secteur de la construction et enfin de 1 à 5 pour le secteur des hôtels-restaurants. Un numéro de classe élevé correspond à une distance à la défaillance importante. Ainsi, les entreprises les moins risquées, c'est à dire les plus distantes du défaut sont dans les classes 10 ou 7 selon le secteur, et les firmes les plus risquées sont réunies dans la classe 1.

Aux classes de risque établies à partir du score Banque de France est ensuite ajoutée la classe 0, qui rassemble les entreprises défaillantes dans l'année. A ce stade, il paraît important de mentionner que la Banque de France dispose de données exhaustives sur la défaillance. La défaillance de toute entreprise notée une fois au moins sur la période 1989-2002 est ainsi connue et prise en compte dans la classe 0.

Le tableau 2 reprend les proportions moyennes sur la période 1992-2002 d'entreprises par classes de risque et secteur.

TABLEAU 2

Proportions moyennes de firmes par classes de risque pour chaque secteur évaluées sur la période 1992-2002

(en pourcentage)

Classes de risque	Industrie	Commerce de détail	Commerce de gros	Transport	Hôtels-Restaurants	Construction
0	2,60	1,86	2,47	2,48	1,39	3,13
1	2,87	2,85	3,01	0,81	4,24	1,46
2	2,88	3,61	5,17	7,53	8,21	6,45
3	7,95	13,03	15,27	16,25	20,04	15,98
4	6,45	8,67	19,34	7,80	36,38	18,10
5	5,42	24,11	21,05	8,89	29,74	39,54
6	9,35	36,55	21,99	35,77		15,34
7	24,77	9,31	11,69	20,47		
8	12,36					
9	16,35					
10	8,99					
Total	100	100	100	100	100	100

Source : Banque de France

Pour chacun des secteurs d'activité, il serait intéressant de connaître la corrélation de migration – y compris de défaut – entre toutes les combinaisons possibles des classes de risque et à tous les horizons. Dans le cas d'un secteur comportant huit classes de risques (incluant la défaillance), il faudrait calculer $(8 \times 7)^2$, c'est-à-dire 3 136 corrélations de migration pour chaque horizon. Afin de ne pas alourdir inutilement l'exercice et afin de rendre les résultats plus lisibles, nous avons regroupé les classes de risque initiales de façon à obtenir dans tous les secteurs une échelle d'évaluation des risques à 4 positions : 0 pour la classe de défaillance, 1 pour le regroupement des classes risquées, 2 pour la classe neutre²⁰, et 3 pour le

20. La classe neutre correspond à une probabilité de défaillance comparable au taux de défaut constaté dans le secteur.

regroupement des classes favorables. Du fait de ce regroupement, l'analyse des transitions et donc des corrélations de migration sera moins fine. Les résultats des différents secteurs seront en revanche plus aisément comparables.

3.2 Les résultats des estimations

Pour chaque secteur, nous avons calculé toutes les corrélations de migration à partir des estimations des probabilités de migration jointes telles que données par les relations (2.9) et (2.10). Examinons d'abord le cas de la migration vers la défaillance.

3.2.1 Les corrélations de défaillance

Parmi les corrélations de migration, certaines comme les corrélations de défaillance ont un intérêt particulier. Pour chaque secteur et chaque horizon, une matrice de corrélation de défaillance à 9 positions peut être présentée. Elle aura la forme suivante :

TABLEAU 3

Schéma de présentation des corrélations de défaut

Entreprise B			
Entreprise A	Classe de risque 1	Classe de risque 2	Classe de risque 3
Classe de risque 1	$\delta_{10,10}$	$\delta_{10,20}$	$\delta_{10,30}$
Classe de risque 2	$\delta_{20,10}$	$\delta_{20,20}$	$\delta_{20,30}$
Classe de risque 3	$\delta_{30,10}$	$\delta_{30,20}$	$\delta_{30,30}$

où $\delta_{10,10}$ représente le niveau de corrélation de défaillance entre deux entreprises A et B initialement en classe de risque 1. $\delta_{20,10}$ représente le niveau de corrélation de défaillance entre une entreprise initialement en classe 2 et une autre à l'origine en classe 1. Ces corrélations constituent une évaluation moyenne de la dépendance entre deux firmes d'un même secteur selon leur appartenance aux classes de risque. Elles ne rendent donc pas compte du fait que les situations individuelles de deux entreprises du même secteur peuvent être plus ou moins liées.

Avec une échelle de risque à quatre positions (incluant la défaillance), pour un secteur et un horizon, il y a donc six corrélations de défaillance différentes à calculer (trois sur la diagonale lorsque les entreprises sont issues de la même classe et trois correspondant aux cas où les deux entreprises sont issues de classes de risque différentes). Plus généralement, il convient d'estimer plus de corrélations que de classes de risque²¹ dans la mesure où les situations de deux firmes issues de classes de risque différentes peuvent aussi être liées.

21. Pour rappel, ce n'est pas ce qui est proposé dans le cadre de l'accord Bâle II, dans lequel seules les corrélations de défaut de deux entreprises issues de la même classe de risque sont prises en compte, ce qui correspond à la diagonale du tableau.

Le tableau 4 présente les corrélations de défaillance estimées par secteurs à divers horizons.

TABEAU 4

Corrélations de défaillance selon le secteur et l'horizon

(en pourcentage)

		Horizon 1 an			Horizon 3 ans			Horizon 5 ans		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3
Commerce de détail	1	0,117	0,055	0,031	0,260	0,116	0,097	0,095	0,068	0,029
	2	0,055	0,076	0,009	0,116	0,174	0,056	0,068	0,183	0,090
	3	0,031	0,009	0,015	0,097	0,056	0,067	0,029	0,090	0,110
Commerce de gros	1	0,037	0,020	0,013	0,108	0,018	0,048	0,096	-0,002	0,034
	2	0,020	0,032	0,015	0,018	0,013	0,009	-0,002	0,012	0,004
	3	0,013	0,015	0,025	0,048	0,009	0,025	0,034	0,004	0,016
Industrie	1	0,084	0,048	0,023	0,080	0,019	0,003	0,070	0,046	0,026
	2	0,048	0,053	0,023	0,019	0,014	0,007	0,046	0,031	0,016
	3	0,023	0,023	0,013	0,003	0,007	0,006	0,026	0,016	0,015
Transport	1	0,122	0,031	0,052	0,232	0,073	0,073	0,163	0,014	0,041
	2	0,031	0,076	0,022	0,073	0,142	0,039	0,014	0,155	0,065
	3	0,052	0,022	0,030	0,073	0,039	0,054	0,041	0,065	0,050
Bâtiment	1	0,366	0,200	0,064	1,464	1,015	0,572	1,239	0,843	0,746
	2	0,200	0,165	0,059	1,015	0,748	0,423	0,843	0,618	0,553
	3	0,064	0,059	0,028	0,572	0,423	0,252	0,746	0,553	0,510
Hôtels & Restaurants	1	0,455	0,057	0,088	0,934	0,385	0,237	0,680	0,176	0,274
	2	0,057	0,311	0,103	0,385	0,378	0,023	0,176	0,239	0,038
	3	0,088	0,103	0,063	0,237	0,023	0,155	0,274	0,038	0,136

Source : Banque de France

Le premier constat est relatif à la faiblesse du niveau des corrélations. La corrélation de défaillance à l'horizon de 1 an de deux firmes industrielles initialement dans la classe 1 est de 0,084%. Même dans le secteur où cette corrélation est la plus forte, Hôtels – restaurants, sa valeur n'est que de 0,46%. Bien que faibles, ces corrélations ne sont toutefois pas nulles, ce qui reflète l'existence de dépendances entre les risques des firmes d'un même secteur. La faiblesse du niveau de corrélation moyen entre deux entreprises ne doit toutefois pas conduire à négliger l'importance des corrélations au niveau d'un portefeuille global. Certaines stratégies de gestion de portefeuille peuvent par exemple introduire des effets de levier en tenant compte de ces liaisons, et les risques correspondants peuvent alors être significatifs. De ce fait, pour couvrir les risques d'un portefeuille, il faut prendre en compte toutes les corrélations des firmes qui le composent. Un des buts du deuxième article sera d'explicitier la mesure de cet impact.

Outre la faiblesse du niveau des corrélations, il apparaît que :

- Dans chacun des secteurs considérés et à horizon un an, les corrélations de défaut entre firmes issues de même classe croissent avec le risque : les corrélations de défaillance de deux entreprises issues de classes risquées sont en effet supérieures aux corrélations de défaillance de firmes provenant de classes neutres, elles-mêmes supérieures aux corrélations de défaillance obtenues sur des classes non risquées²². Ce constat reste vrai dans la plupart des cas lorsque les firmes ne sont pas issues de la même classe.

- Il n'y a pas de relation monotone entre le niveau des corrélations de défaillance et l'horizon de celle-ci. Pour un niveau de risque initial donné, les corrélations de défaillance à horizon de 3 ans peuvent être plus faibles que les corrélations de défaillance à 1 an par exemple. C'est le cas notamment dans le secteur de l'industrie pour deux entreprises issues de la classe 2. Il est donc important de tenir compte de la structure par termes des corrélations.

- Les corrélations de défaillance sont plus élevées dans les secteurs des hôtels & restaurants et de la construction. Les secteurs qui présentent les plus fortes corrélations ne sont donc pas nécessairement ceux dans lesquels les probabilités marginales de défaut sont les plus importantes²³.

- Des corrélations négatives peuvent apparaître. On observe par exemple des corrélations de défaillance négatives entre firmes du commerce de gros issues des classes 1 et 2. Cela signifie que la probabilité jointe que deux firmes de ces classes de risque fassent défaut est inférieure au produit de leur probabilité marginale²⁴.

- Pour un secteur et un horizon donnés, les corrélations sur la diagonale ne sont pas nécessairement les plus élevées. Par ailleurs, les corrélations hors de la diagonale ne sont pas nulles ; rien ne justifie donc de ne s'intéresser qu'aux corrélations de défaillance de deux firmes issues de la même classe de risque comme le fait actuellement le Comité de Bâle.

Pour compléter l'analyse et mieux comprendre les phénomènes d'interdépendance, les corrélations de défaut ont été calculées en tenant compte de la taille des entreprises (Cf. tableau 5). A cet effet, trois catégories de taille en fonction du chiffre d'affaires ont été définies : moins de 5 millions d'Euros, entre 5 et 50 millions d'Euros, et plus de 50 millions d'Euros²⁵. Par manque d'observations de défaillance, les corrélations de défaut des grandes entreprises n'ont toutefois pas pu être estimées de façon fiable ; les résultats ne seront donc pas présentés.

Pour un même niveau de risque, les corrélations de défaut entre petites entreprises (moins de 5 millions de chiffre d'affaires) sont généralement moins importantes qu'entre firmes de taille moyenne. Autrement dit, la probabilité de défaut jointe de deux petites entreprises est plus faible que celle de deux firmes de taille moyenne du même secteur ayant le même risque marginal.

On remarque par ailleurs que pour une classe de risque donnée, les corrélations des petites entreprises sont généralement inférieures aux corrélations affichées au niveau du secteur dans son ensemble, à l'exception du secteur des hôtels - restaurants et dans une moindre mesure des transports. En revanche, les corrélations

22. Bahar et Nagbal (2001) et Erturk (2000) présentent les mêmes conclusions.

23. Les probabilités marginales de défaut par classes de risque et secteurs sont présentées en annexe 4 où elles sont estimées par les taux de défaillance constatés.

24. Ce constat est peut être lié au phénomène de concurrence, la défaillance d'une entreprise favorisant en fait ses concurrents.

25. Ce découpage correspond à celui proposé par le comité de Bâle dans le cadre du nouvel accord sur le niveau des fonds propres réglementaires.

TABLEAU 5 :

Corrélations de défaillance à l'horizon d'un an par secteur d'activité et par taille d'entreprises

(en pourcentage)

3 = favorable 2 = neutre 1 = risqué		CA < 5 millions €			5 millions € ≤ CA < 50 millions €		
		1	2	3	1	2	3
Commerce de détail	1	0,025	0,011	0,005	0,166	0,080	0,003
	2	0,011	0,062	0,007	0,080	0,132	0,005
	3	0,005	0,007	0,015	0,003	0,005	0,016
Commerce de gros	1	0,015	0,004	-0,001	0,143	0,022	-0,003
	2	0,004	0,021	0,009	0,022	0,043	-0,013
	3	-0,001	0,009	0,014	-0,003	-0,013	0,053
Industrie	1	0,043	0,022	0,008	0,086	0,036	0,022
	2	0,022	0,080	0,015	0,036	0,131	0,024
	3	0,008	0,015	0,011	0,022	0,024	0,026
Transport	1	0,085	0,109	0,010	0,922	0,000	-0,063
	2	0,109	0,258	0,028	0,000	0,000	0,000
	3	0,010	0,028	0,046	-0,063	0,000	0,115
Bâtiment	1	0,255	0,125	0,042	0,249	0,012	0,106
	2	0,125	0,072	0,022	0,012	0,251	0,060
	3	0,042	0,022	0,009	0,106	0,060	0,120
Hôtels & Restaurants	1	0,746	0,379	0,221	NA		
	2	0,379	0,457	0,225			
	3	0,221	0,225	0,134			

Source : Banque de France

entre entreprises de taille moyenne sont globalement supérieures à la moyenne du secteur. Dans le commerce de gros par exemple, la corrélation de défaut de deux firmes moyennes issues de la classe 1 est plus de trois fois supérieure au niveau estimé sur le secteur dans son ensemble.

Ces résultats soulignent la sensibilité du niveau de la corrélation de défaut à la taille des entreprises. Par ailleurs, ils mettent aussi en évidence la dépendance des estimations à la population étudiée, faisant ressortir l'importance du choix du niveau d'analyse à mener. Elles permettent en ce sens de rappeler que les corrélations de défaut estimées au niveau d'un secteur sont des évaluations moyennes qui peuvent sous-estimer ou surestimer selon le cas les dépendances entre deux firmes.

Les corrélations de défaut estimées sont d'autre part directement dépendantes des probabilités marginales observées et donc de la période d'étude. Les résultats présentés jusque là ont été établis sur la base des matrices de transition moyennes

sur les dix années précédentes sans que la sensibilité des estimations à la période d'étude ne soit analysée. Ce point est développé dans le paragraphe suivant.

3.2.1 Distribution empirique de la corrélation de défaillance

Les corrélations de défaillance estimées dépendent des probabilités de défauts observées sur la période considérée, c'est à dire des séquences de matrices de transition. Cependant, nos données ne nous permettent pas d'étudier la variabilité de ces corrélations due aux éventuelles fluctuations des séquences de ces matrices de transition. Une solution consiste alors à simuler des séquences de matrices de transitions par tirage aléatoire des matrices observées, afin de déterminer une distribution empirique des corrélations. Ce qui n'est autre qu'une méthode de bootstrap.

Plus précisément, 200 séquences de matrices de transition ont été construites via un processus itératif de tirage avec remise de 10 matrices de transition dans les 10 matrices observées. Cela permet d'obtenir une distribution empirique des estimations des corrélations de défaillance. Le tableau 6 présente des résultats de cette simulation dans les cas de transitions vers la défaillance à horizon de un an pour les entreprises de l'industrie.

TABLEAU 6

Distribution simulée des corrélations de défaillance à un an dans l'industrie toutes tailles d'entreprises confondues
(en pourcentage)

(kk*,II*)	max	p95	q3	Mé- diane	q1	p5	min	moyen- ne	écart- type	q3-q1
(10,10)	0,577	0,443	0,262	0,093	0,056	0,009	0,000	0,163	0,142	0,207
(10,20)	0,458	0,373	0,230	0,057	0,030	0,001	-0,007	0,127	0,126	0,199
(10,30)	0,120	0,088	0,056	0,027	0,015	0,000	-0,001	0,036	0,029	0,041
(20,20)	0,391	0,350	0,219	0,065	0,036	0,003	0,000	0,122	0,111	0,183
(20,30)	0,098	0,082	0,053	0,027	0,014	0,001	0,000	0,034	0,025	0,038
(30,30)	0,029	0,025	0,017	0,013	0,009	0,001	0,000	0,013	0,007	0,008

Source : Banque de France

où q1 et q3 sont les premier et troisième quartiles, et p5 et p95 les cinquième et quatre-vingt quinzième quantiles de cette distribution. Quelle que soit la classe de risque d'origine, la variance des estimations est non négligeable, ce qui traduit la dépendance à la séquence considérée. Les fluctuations sont toutefois plus importantes dans le cas de transitions à partir de classes risquées. La dépendance à la période d'observation apparaît aussi très nettement en comparant les résultats de la distribution avec ceux présentés dans le tableau 4. Par exemple, la corrélation de défaillance de deux entreprises notées 1 qui avait été évaluée à 0.084 % est dans plus de 50% des cas supérieure à cette valeur. Le même constat peut être fait pour les autres transitions vers la défaillance.

3.2.2 Les corrélations de migration

Pour un secteur et un horizon fixés, il y a 144 $((4 \times 3)^2)$ corrélations de migration. Le tableau 7 présente les corrélations de migration à horizon un an estimées dans

le secteur de l'industrie. Les résultats obtenus sur les autres secteurs peuvent être consultés en annexe 3.

TABLEAU 7

Corrélations de migration à l'horizon d'un an dans l'industrie

(en pourcentage)

		(k*,l*)							
(k,l)	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3	
1,1	0,084	0,027	-0,051	-0,036	0,027	0,533	-0,195	-0,528	
1,2	0,048	0,075	-0,004	-0,077	0,013	0,494	-0,020	-0,440	
1,3	0,023	0,023	0,009	-0,026	0,033	0,330	0,263	-0,433	
2,1	0,048	0,013	-0,030	-0,016	0,075	0,494	-0,205	-0,495	
2,2	0,053	0,055	-0,012	-0,051	0,055	0,522	-0,019	-0,477	
2,3	0,023	0,013	0,000	-0,012	0,048	0,318	0,250	-0,417	
3,1	0,023	0,033	-0,022	-0,036	0,023	0,330	-0,124	-0,326	
3,2	0,023	0,048	-0,005	-0,045	0,013	0,318	-0,012	-0,285	
3,3	0,013	0,020	0,014	-0,026	0,020	0,213	0,165	-0,276	

		(k*,l*)							
(k,l)	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3	
1,1	-0,051	-0,195	0,097	0,192	-0,036	-0,528	0,192	0,530	
1,2	-0,030	-0,205	0,015	0,182	-0,016	-0,495	0,013	0,448	
1,3	-0,022	-0,124	-0,091	0,158	-0,036	-0,326	-0,264	0,432	
2,1	-0,004	-0,020	0,015	0,013	-0,077	-0,440	0,182	0,448	
2,2	-0,012	-0,019	0,017	0,002	-0,051	-0,477	0,002	0,452	
2,3	-0,005	-0,012	-0,001	0,010	-0,045	-0,285	-0,230	0,379	
3,1	0,009	0,263	-0,091	-0,264	-0,026	-0,433	0,158	0,432	
3,2	0,000	0,250	-0,001	-0,230	-0,012	-0,417	0,010	0,379	
3,3	0,014	0,165	0,137	-0,220	-0,026	-0,276	-0,220	0,362	

Source : Banque de France

- Migration dans le même sens à la baisse
- En gras** Migration dans le même sens à la hausse
- Migration en sens opposé

On lit ici les corrélations de migration par couples d'entreprises. La corrélation de migration de deux entreprises notées 1 en t et 0 en t+1 est de 0,084 %. Ainsi, la première colonne donne directement les corrélations de défaillance, ce qui constitue un des avantages de cette présentation. Par ailleurs, afin de faciliter la lecture de cette table, apparaissent

- en gras, les corrélations qui correspondent à des améliorations jointes, c'est-à-dire à des migrations à la hausse des ratings des deux entreprises.

- en grisées clair, les corrélations qui correspondent à des dégradations jointes, c'est-à-dire à des migrations à la baisse des ratings des deux entreprises.
- en grisées foncé, les corrélations qui correspondent à des cas où les deux entreprises évoluent en sens strictement inverse.

Dans les secteurs de l'industrie, du commerce de détail et de la construction, les corrélations sont toujours positives quand le risque des deux firmes évolue strictement dans le même sens. Inversement, les corrélations des migrations sont toujours négatives lorsque les risques des deux entreprises évoluent en sens opposé. L'observation de corrélations positives pour des entreprises évoluant dans le même sens signifie que la probabilité jointe de deux upgrades (resp. downgrades) est plus importante que le produit de leur probabilité marginale. Inversement, les corrélations négatives pour des migrations en sens opposé traduisent le fait que la probabilité de diminution (respectivement augmentation) du risque d'une des entreprises est plus faible si le risque de l'autre firme augmente (respectivement diminue).

Dans les autres secteurs (transports, commerce de gros et hôtels et restaurants), le précédent constat n'est plus systématiquement vérifié (Cf. annexe 2). En effet, les corrélations de migrations en sens opposés ne sont pas toujours négatives et les corrélations de migrations dans le même sens ne sont pas toujours positives. Ce phénomène apparaît notamment lorsqu'une des deux firmes fait défaut. Dans ces secteurs, la défaillance d'une entreprise n'accroît donc pas systématiquement le risque des autres. Au contraire, on constate parfois que la situation d'une firme a plus de chance de s'améliorer quand une concurrente fait défaut.

Ces différences reflètent les spécificités structurelles des secteurs et mettent en relief le fait que les phénomènes d'interdépendance des risques sont non seulement d'intensité variable selon les secteurs d'activité, mais aussi parfois de sens différents.

Quelques constats sont toutefois valables dans tous les secteurs.

Tout d'abord, quelque soit le secteur considéré les corrélations d'upgrades joints sont toujours positives, traduisant le fait que la probabilité que le risque d'une firme diminue est plus grande si celui des autres firmes du secteur décroît. Dans tous les secteurs, les baisses des risques sont donc « contagieuses », alors que ce n'est pas systématiquement le cas des hausses. On note par ailleurs le niveau relativement élevé des corrélations d'upgrades, plus importantes dans la plupart des cas que les corrélations vers le défaut.

Enfin, les corrélations vers le défaut sont toujours positives. Ce dernier constat tend à conforter le choix du Comité de Bâle de ne considérer que les cas de corrélations de défaut positives.

4. Conclusion

Nous avons montré dans cet article à quel point il est important aussi bien pour les établissements de crédit que pour le régulateur de prendre en compte l'interdépendance entre les contreparties (entreprises) d'un portefeuille de crédit dans l'évaluation des réserves réglementaires nécessaires à la couverture du risque. En effet, les portefeuilles détenus par les banques incluent les crédits de plusieurs emprunteurs,

dont les défaillances ne sont pas indépendantes entre elles. La notion de défaut ou de changement de classe de risque étant discrète (qualitative), nous nous sommes attachés à trouver une définition appropriée de la corrélation de migration qui se prête à ce type de données. Nous avons ensuite proposé, sous certaines conditions de régularité, un estimateur qui soient convergent et asymptotiquement efficace. Ce faisant, nous avons alors montré que le domaine de variation des corrélations était beaucoup plus réduit que celui connu classiquement dans la littérature statistique. Sur les données de la Banque de France, nous avons obtenu empiriquement des valeurs des corrélations de migration relativement faible, tout en observant qu'elles pouvaient prendre des valeurs négatives. Quel que soit le secteur, à court terme, les corrélations de défaut croissent avec le risque et souvent avec la taille des entreprises. D'une façon générale, les corrélations de migration sont sensibles à l'horizon d'évaluation, au secteur d'activité, à la taille des entreprises et à la période d'étude.

Une question se pose alors de savoir quel lien existe entre la corrélation de défaut ainsi estimée et celle définie par le comité de Bâle. Cette question sera abordée dans le deuxième article.

D'autres axes de recherche peuvent aussi être envisagés. Si l'analyse des défaillances des entreprises relèvent en effet de la micro-économétrie, il est clair que ces défaillances sont liées entre elles, si bien que des faillites en chaîne possibles pourraient avoir des répercussions au niveau macro-économique et induire des cycles, ou à l'inverse les effets macro-économiques pourraient augmenter globalement les probabilités de défaut. ■

Bibliographie

- BAHAR R. et NAGPAL K. (2001) : « Measuring Default Correlation », *Risk, March*, 129-132.
- BARDOS M., FOULCHER S., et BATAILLE É. (2003) : « Les scores de la Banque de France : méthodes, résultats, application », *Banque de France*.
- Basle Committee on Banking Supervision (2003) : « The New Basel Capital Accord », *Bank of International Settlements*, April.
- Basle Committee on Banking Supervision (2004) : « The New Basel Capital Accord », *Bank of International Settlements*, June.
- BLACK F. et SCHOLES M. (1973) : « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.
- BELKIN B., SUCHOWER S. et FOREST JR. L.R. (1998) : « The Effect of Systematic Credit Risk on Loan Portfolio Value-at-Risk and Loan Pricing », *CreditMetrics Monitor*, First Quarter, 17-28.
- DUFFIE D., et SINGLETON K. (1999) : « Modeling the Term Structure of Defaultable Bonds », *Review of Financial Studies*, 12, 687-720.
- ERTURK E. (2000) : « Default Correlation Among Investment Grades Borrowers », *Journal of Fixed Income*, 9, 55-60.
- FIBEN (1998) : « La Banque de Données Fiben », *Banque de France, Note d'information n°102*.
- FINGER C. (1999) : « Conditional Approaches for CreditMetrics Portfolio Distributions », Working Paper, *CreditMetrics Monitor*, First Quarter, 14-33.
- FOULCHER S., GOURIÉROUX C. et TIOMO A. (2004) : « La structure par termes des taux de défaut et ratings », *Insurance and Risk Management*, 72, 207-276.
- FOULCHER S., GOURIÉROUX C. et TIOMO A. (2004) : « Latent Variable Approach to Modelling Dependence of Credit Risks: Application to French Firms and Implications for Regulatory Capital », *Banque de France*.

- GAGLIARDINI P. et GOURIÉROUX C. (2005a) : « Stochastic Migration Models with Application to Corporate Risk », *Journal of Financial Econometrics*, 3, 188-226.
- GAGLIARDINI P. et GOURIÉROUX C. (2005b) : « Migration Correlations : Definition and Consistent Estimation », *Journal of Banking and Finance*, 29, 865-891.
- GORDY M., et HEITFIELD E. (2002) : « Estimating Default Correlation from Short Panels of Credit Rating Performance Data », Working Paper, *Federal Reserve Board*.
- GOURIÉROUX C., MONFORT A. et POLIMENIS V. (2005) : « Affine Models for Credit Risk », à paraître dans *Journal of Financial Econometrics*.
- JOE, H. (1997) : « Multivariate Models and Dependence Concepts », *Chapman Hall, London*.
- LANDO D. (1998) : « On Cox Processes and Credit Risky Securities », *Review of Derivatives Research*, 2, 99-120.
- LUCAS D. (1995) : « Default Correlation and Credit Analysis », *Journal of Fixed Income*, March, 76-87.
- MERTON R.C. (1974), « On the Pricing of Corporate Debt : The Risk Structure of Interest Rates », *Journal of Finance*, 29, 449-470.
- DE SERVIGNY A. et RENAULT O. (2002) : « Default Correlation : Empirical Evidence », Working Paper Standard and Poor's.
- Standard and Poor's (2003) « Ratings Performance 2002 », Special Report.
- WILSON T. (1997a) : « Portfolio Credit Risk I », *Risk*, 10(9), 111-117.
- WILSON T. (1997b) : « Portfolio Credit Risk II », *Risk*, 10(10), 56-61.

ANNEXE 1

Étude du signe du biais asymptotique de la corrélation de migration

La relation donnant le biais asymptotique de la corrélation de migration peut être écrite :

$$E[f(\hat{\theta})] - f(\theta) \approx \frac{1}{2} Tr E \left\{ \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} (\hat{\theta} - \theta) (\hat{\theta} - \theta)' \right\} = \frac{1}{2} Tr \left\{ \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \text{var} \hat{\theta} \right\},$$

où $\text{var} \hat{\theta}$ désigne la matrice de variance - covariance de l'estimateur.

En approximant $\hat{\alpha}$ par $\hat{\pi}$, on obtient :

$$Tr \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \theta'} \text{var} \hat{\theta} \right\} = \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{p}^2} \text{var} \hat{p} + \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{\pi}^2} \text{var} \hat{\pi} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{p} \partial \hat{\pi}} \text{cov}(\hat{p}, \hat{\pi}).$$

On a par ailleurs :

$$\text{var} \hat{\pi} \approx \hat{\pi}(1 - \hat{\pi}), \quad \text{var} \hat{p} \propto \text{var} \hat{\pi}^2 = 4\hat{\pi}^3(1 - \hat{\pi}),$$

et

$$\text{cov}(\hat{p}, \hat{\pi}) \propto 2\hat{\pi} \text{var} \hat{\pi} = 2\hat{\pi}^2(1 - \hat{\pi}).$$

Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial \hat{p}^2} = 0$, on a finalement :

$$\begin{aligned} E[f(\hat{\theta})] - f(\theta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{\pi}^2} \text{var} \hat{\pi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{p} \partial \hat{\pi}} \text{cov}(\hat{p}, \hat{\pi}) \\ &= \frac{1}{\hat{\pi}^2 (1 - \hat{\pi})^2} \left\{ \hat{p} - 3\hat{p}\hat{\pi} + 3\hat{p}\hat{\pi}^2 - 2\hat{\pi}^2 + 5\hat{\pi}^3 - 4\hat{\pi}^4 \right\} \end{aligned}$$

On peut vérifier en approximant \hat{p} par $\hat{\pi}^2$ que le biais asymptotique est négatif.

ANNEXE 2

Corrélations de migration à l'horizon d'un an par secteur (en %)

Migration dans le même sens à la baisse

En gras Migration dans le même sens à la hausse

Migration en sens opposé

Commerce de gros

		(k*,l*)						
(k,l)	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3
1,1	0,037	0,056	-0,042	-0,051	0,056	0,500	-0,294	-0,412
1,2	0,020	0,058	-0,008	-0,047	-0,029	0,312	-0,067	-0,207
1,3	0,013	0,038	0,029	-0,049	0,002	0,226	0,206	-0,310
2,1	0,020	-0,029	0,009	0,022	0,058	0,312	-0,191	-0,259
2,2	0,032	-0,003	-0,003	0,001	-0,003	0,229	-0,049	-0,155
2,3	0,015	-0,006	-0,010	0,010	0,016	0,161	0,139	-0,216
3,1	0,013	0,002	-0,012	0,005	0,038	0,226	-0,133	-0,193
3,2	0,015	0,016	-0,007	-0,009	-0,006	0,161	-0,032	-0,111
3,3	0,025	0,017	0,007	-0,020	0,017	0,129	0,107	-0,171

		(k*,l*)						
(k,l)	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3
1,1	-0,042	-0,294	0,185	0,230	-0,051	-0,412	0,230	0,358
1,2	0,009	-0,191	0,047	0,121	0,022	-0,259	0,045	0,183
1,3	-0,012	-0,133	-0,121	0,184	0,005	-0,193	-0,172	0,261
2,1	-0,008	-0,067	0,047	0,045	-0,047	-0,207	0,121	0,183
2,2	-0,003	-0,049	0,036	0,006	0,001	-0,155	0,006	0,133
2,3	-0,007	-0,032	-0,029	0,044	-0,009	-0,111	-0,094	0,147
3,1	0,029	0,206	-0,121	-0,172	-0,049	-0,310	0,184	0,261
3,2	-0,010	0,139	-0,029	-0,094	0,010	-0,216	0,044	0,147
3,3	0,007	0,107	0,094	-0,145	-0,020	-0,171	-0,145	0,227

Source : Banque de France

Commerce de détail

(k*,l*)								
(k,l)	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3
1,1	0,117	0,086	-0,051	-0,104	0,086	0,559	-0,207	-0,519
1,2	0,055	0,123	0,043	-0,158	0,153	0,414	0,081	-0,472
1,3	0,031	0,075	0,050	-0,095	0,041	0,367	0,289	-0,482
2,1	0,055	0,153	-0,054	-0,157	0,123	0,414	-0,150	-0,410
2,2	0,076	0,168	0,034	-0,195	0,168	0,451	0,070	-0,499
2,3	0,009	0,110	0,087	-0,144	0,036	0,305	0,239	-0,400
3,1	0,031	0,041	-0,021	-0,042	0,075	0,367	-0,131	-0,352
3,2	0,009	0,036	0,013	-0,045	0,110	0,305	0,048	-0,337
3,3	0,015	0,030	0,021	-0,039	0,030	0,258	0,199	-0,336

(k*,l*)								
(k,l)	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3
1,1	-0,051	-0,207	0,095	0,185	-0,104	-0,519	0,185	0,497
1,2	-0,054	-0,150	-0,041	0,181	-0,157	-0,410	-0,078	0,466
1,3	-0,021	-0,131	-0,103	0,173	-0,042	-0,352	-0,275	0,461
2,1	0,043	0,081	-0,041	-0,078	-0,158	-0,472	0,181	0,466
2,2	0,034	0,070	0,033	-0,098	-0,195	-0,499	-0,098	0,571
2,3	0,013	0,048	0,038	-0,064	-0,045	-0,337	-0,265	0,443
3,1	0,050	0,289	-0,103	-0,275	-0,095	-0,482	0,173	0,461
3,2	0,087	0,239	0,038	-0,265	-0,144	-0,400	-0,064	0,443
3,3	0,021	0,199	0,157	-0,261	-0,039	-0,336	-0,261	0,439

Source : Banque de France

Transport

(k*,l*)								
(k,l)	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3
1,1	0,122	-0,025	<i>0,001</i>	<i>-0,038</i>	-0,025	0,659	-0,292	-0,593
1,2	0,031	0,130	-0,022	<i>-0,112</i>	-0,073	0,832	0,149	-0,920
1,3	0,052	0,069	0,029	-0,079	-0,038	0,407	0,215	-0,449
2,1	0,031	-0,073	<i>0,030</i>	<i>0,052</i>	0,130	0,832	<i>-0,381</i>	<i>-0,832</i>
2,2	0,076	-0,030	-0,026	<i>0,037</i>	-0,030	1,380	0,211	<i>-1,510</i>
2,3	0,022	-0,028	0,006	0,014	0,004	0,684	0,308	-0,727
3,1	0,052	-0,038	<i>0,007</i>	<i>0,014</i>	0,069	0,407	<i>-0,206</i>	<i>-0,392</i>
3,2	0,022	0,004	-0,017	<i>0,007</i>	-0,028	0,684	0,110	<i>-0,751</i>
3,3	0,030	-0,001	0,010	-0,011	-0,001	0,397	0,177	-0,421

(k*,l*)								
(k,l)	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3
1,1	<i>0,001</i>	-0,292	0,160	0,241	<i>-0,038</i>	<i>-0,593</i>	0,241	0,588
1,2	<i>0,030</i>	<i>-0,381</i>	-0,076	0,428	<i>0,052</i>	<i>-0,832</i>	-0,115	0,895
1,3	<i>0,007</i>	<i>-0,206</i>	<i>-0,118</i>	0,235	<i>0,014</i>	<i>-0,392</i>	<i>-0,195</i>	0,427
2,1	-0,022	0,149	-0,076	-0,115	<i>-0,112</i>	-0,920	0,428	0,895
2,2	-0,026	0,211	0,077	-0,266	<i>0,037</i>	<i>-1,510</i>	-0,266	1,682
2,3	-0,017	0,110	0,029	-0,100	<i>0,007</i>	<i>-0,751</i>	<i>-0,324</i>	0,787
3,1	0,029	0,215	<i>-0,118</i>	<i>-0,195</i>	-0,079	-0,449	0,235	0,427
3,2	0,006	0,308	0,029	<i>-0,324</i>	0,014	-0,727	-0,100	0,787
3,3	0,010	0,177	0,131	-0,226	-0,011	-0,421	-0,226	0,473

Source : Banque de France

Construction

(k*,l*)								
(k,l)	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3
1,1	0,366	0,393	-0,308	-0,512	0,393	0,726	-0,477	-0,833
1,2	0,200	0,644	0,078	-0,717	0,227	1,096	0,258	-1,321
1,3	0,064	0,419	0,360	-0,567	0,062	0,702	0,629	-0,963
2,1	0,200	0,227	-0,183	-0,279	0,644	1,096	-0,729	-1,287
2,2	0,165	0,385	0,024	-0,416	0,385	1,763	0,390	-2,104
2,3	0,059	0,254	0,202	-0,333	0,118	1,115	0,999	-1,534
3,1	0,064	0,062	-0,052	-0,082	0,419	0,702	-0,467	-0,828
3,2	0,059	0,118	0,019	-0,142	0,254	1,115	0,234	-1,321
3,3	0,028	0,076	0,071	-0,110	0,076	0,713	0,626	-0,970

(k*,l*)								
(k,l)	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3
1,1	-0,308	-0,477	0,344	0,547	-0,512	-0,833	0,547	1,006
1,2	-0,183	-0,729	-0,126	0,839	-0,279	-1,287	-0,303	1,554
1,3	-0,052	-0,467	-0,404	0,631	-0,082	-0,828	-0,749	1,144
2,1	0,078	0,258	-0,126	-0,303	-0,717	-1,321	0,839	1,554
2,2	0,024	0,390	0,249	-0,618	-0,416	-2,104	-0,618	2,656
2,3	0,019	0,234	0,311	-0,406	-0,142	-1,321	-1,280	1,898
3,1	0,360	0,629	-0,404	-0,749	-0,567	-0,963	0,631	1,144
3,2	0,202	0,999	0,311	-1,280	-0,333	-1,534	-0,406	1,898
3,3	0,071	0,626	0,629	-0,918	-0,110	-0,970	-0,918	1,377

Source : Banque de France

Hotels-restaurants

(k*,l*)								
(k,l)	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3
1,1	0,455	0,158	0,067	-0,559	0,158	1,068	-0,404	-1,093
1,2	0,057	0,270	0,189	-0,403	0,179	0,953	-0,156	-0,557
1,3	0,088	0,090	0,192	-0,225	0,008	0,373	0,922	-1,007
2,1	0,057	0,179	-0,008	-0,275	0,270	0,953	-0,337	-1,076
2,2	0,311	0,210	-0,007	-0,211	0,210	0,967	-0,111	-0,621
2,3	0,103	0,095	0,280	-0,309	0,043	0,327	0,878	-0,950
3,1	0,088	0,008	0,040	-0,110	0,090	0,373	-0,153	-0,387
3,2	0,103	0,043	0,034	-0,089	0,095	0,327	-0,019	-0,235
3,3	0,063	0,021	0,051	-0,063	0,021	0,210	0,347	-0,413

(k*,l*)								
(k,l)	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3
1,1	0,067	-0,404	0,233	0,244	-0,559	-1,093	0,244	1,550
1,2	-0,008	-0,337	0,153	0,082	-0,275	-1,076	-0,075	0,908
1,3	0,040	-0,153	-0,318	0,354	-0,110	-0,387	-1,012	1,107
2,1	0,189	-0,156	0,153	-0,075	-0,403	-0,557	0,082	0,908
2,2	-0,007	-0,111	0,210	-0,139	-0,211	-0,621	-0,139	0,636
2,3	0,034	-0,019	-0,094	0,090	-0,089	-0,235	-0,590	0,652
3,1	0,192	0,922	-0,318	-1,012	-0,225	-1,007	0,354	1,107
3,2	0,280	0,878	-0,094	-0,590	-0,309	-0,950	0,090	0,652
3,3	0,051	0,347	0,876	-0,959	-0,063	-0,413	-0,959	1,066

Source : Banque de France

ANNEXE 3

Probabilités marginales de défaillance par classes de risque et secteurs classes de risque regroupées

(en pourcentage)

Classe de risque	Commerce de Détail	Commerce de Gros	Industrie	Transport	Construction	Hôtels & Restaurants
0	100	100	100	100	100	100
1	2,82	3,20	6,56	4,25	6,76	3,79
2	0,60	0,69	1,40	0,75	1,24	1,01
3	0,14	0,17	0,21	0,19	0,27	0,13

