ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 81 – 2006

Croissance durable, ressource épuisable et effort optimal d'exploration

Gilles LAFFORGUE

RÉSUMÉ. – L'objet de cet article est de montrer comment la contrainte d'épuisement qui pèse sur une ressource non-renouvelable peut être contournée grâce à un effort permanent d'exploration. Le processus d'exploration retenu génère aléatoirement des découvertes selon une loi de probabilité non-stationnaire et endogène. Nous montrons que l'économie a alors la possibilité de se placer sur un sentier moyen de croissance durable dès lors que l'impatience de la société est susceptible d'être compensée par les effets positifs des découvertes de nouveaux gisements.

Sustainable Growth, Exhaustible Resource and Optimal Exploration Process

ABSTRACT. – In this paper, we show how a continuous exploration effort can relax the availability constraint of a non-renewable resource. The exploration process randomly yields discoveries, according to a distribution of probability which is both endogenous and non-stationary. Hence, we investigate the possibility of the economy to reach, in average, a sustainable growth path if the impatience of society is balanced by the positive effects of new deposit discoveries.

G. LAFFORGUE: INRA-LEERNA, 21 Allée de Brienne, 31000 Toulouse.
Mel: glafforg@toulouse.inra.fr

1 Introduction

Nous nous proposons de montrer dans cet article comment la contrainte d'épuisement qui pèse sur une ressource non-renouvelable et sur laquelle risquerait de buter à terme la volonté de maintien d'un certain niveau de consommation, peut être contournée grâce à un effort permanent d'exploration. Nous montrons également pourquoi l'économie devrait se placer sur un sentier de croissance durable dès lors que l'impatience de la société est susceptible d'être compensée par les effets positifs des découvertes.

Selon PINDYCK [1980], l'exploration revêt principalement deux fonctions. En premier lieu, elle permet d'améliorer l'information dont on dispose sur la répartition de la ressource lorsque celle-ci est mal connue et s'apparente ainsi à un processus d'apprentissage qui permet d'améliorer la connaissance dont on dispose sur la distribution des réserves (voir par exemple CLARK et MANGEL, [1986]). En second lieu, l'exploration de nouvelles zones permet de découvrir de nouveaux gisements et ainsi d'accroître les réserves déjà disponibles. Cependant, le résultat de ces recherches est par nature incertain puisque le délai nécessaire à l'obtention d'un succès est une variable aléatoire. En outre, chaque nouvelle phase d'exploration est caractérisée par la découverte ou non d'un gisement, ce qui rend discontinue la trajectoire suivie par le stock de ressource. Le modèle proposé dans cet article se concentre plus particulièrement sur cette seconde fonction. Les découvertes y sont générées par un processus non-stationnaire de Poisson dont le taux d'arrivée dépend non seulement du temps, mais également de l'effort courant dévolu à l'exploration. Ainsi, une intensification de cet effort permet d'augmenter les chances de découvrir un nouveau gisement. L'endogénéisation de la probabilité de succès constitue l'originalité de ce modèle par rapport à la littérature existante. En effet, la plupart des modèles de recherche en économie des ressources naturelles, tels ARROW et CHANG [1982], DEVARAJAN et FISHER [1982] ou encore QUYEN [1991], endogénéisent le processus de découvertes en faisant dépendre la taille des nouveaux gisements de l'effort de recherche, et non la probabilité de découverte. Ce type de modélisation nécessite en outre une redéfinition de la règle de Hotelling qui dicte habituellement l'évolution de la rente minière, afin de prendre en compte les accroissements de stock qui résultent du processus de découvertes. Nous retrouvons alors le résultat obtenu par GAUDET et HOWITT [1989], à savoir qu'en présence d'incertitude, la rente minière doit croître à un taux égal au taux d'intérêt (ou taux d'escompte psychologique à l'optimum), augmenté d'un terme correcteur (positif ou négatif selon les cas).

Dans une optique économique plus large, nous proposons également une vision alternative de l'exploration. En effet, cette activité peut s'interpréter comme une activité de R&D qui permettrait, lorsqu'une découverte voit le jour, d'accroître un stock de connaissance dont dépend directement la productivité de la ressource en tant que facteur de production (voir par exemple AMIGUES et al., [2001]). Ainsi, l'arrivée d'une innovation technologique permettrait d'améliorer les conditions d'utilisation de la ressource non-renouvelable en augmentant sa productivité ou son degré de substituabilité avec d'autres facteurs. Le long d'un horizon de vie infini, le processus génère un nombre infini de découvertes si bien que la ressource peut être vue à terme comme une ressource potentiellement renouvelable. Dans cet article, nous nous réfèrerons indistinctement à un processus d'exploration et un processus de R&D puisque la conséquence commune de ces deux types d'investissement est d'étendre les réserves en cas de succès, tout au moins temporairement.

Il convient enfin de définir ce que l'on entend par sentier de croissance durable. La plupart des discussions sur la définition de la durabilité intègrent deux facteurs communs (voir entre autres CHICHILNISKY et al., [1998], HEAL, [1998], CHEVÉ et SCHUBERT, [2002]). Le premier correspond à la nécessité de suivre des stratégies de développement qui soient compatibles avec l'environnement. L'objectif principal est la conservation de la qualité et de la diversité de la nature ; la croissance économique est alors qualifiée de durable pour une qualité de l'environnement au moins maintenue. Le second facteur se réfère au concept d'équité, à la fois inter et intragénérationnelle. Dans ce cas, le développement durable se définit comme un développement qui doit satisfaire les besoins des générations présentes sans pour autant compromettre la possibilité pour les générations futures de satisfaire les leurs. Cela se traduit d'un point de vue économique par la nécessité d'une utilité non décroissante au cours du temps, critère qui sera retenu dans cet article pour caractériser tout sentier de croissance durable.

L'article est organisé comme suit. Le modèle général est exposé à la section 2. Les conditions d'optimalité et la règle d'évolution de la rente minière sont examinées à la section 3. La section 4 restreint l'analyse au cas d'une probabilité de découverte proportionnelle à l'effort d'exploration consenti et étudie les propriétés des politiques optimales du modèle. Dans la section 5, nous recherchons les conditions nécessaires pour obtenir, en moyenne, des sentiers de consommation non décroissants au cours du temps, c'est-à-dire des trajectoires de croissance durable. Enfin, nous concluons brièvement à la section 6.

2 Le modèle

Considérons une économie dans laquelle la population est constante et l'offre de travail, inélastique. Sans perte de généralité, normalisons à 1 la quantité de travail disponible à chaque instant. La production du bien final de consommation s'effectue à partir d'une ressource non-renouvelable dont le taux d'extraction à la date t est noté R_t et de travail productif en quantité L_t, selon la technologie à rendements d'échelle constants suivante :

$$C_t = F\left(R_t, L_t\right) = R_t^{\theta} L_t^{1-\theta}, \tag{1}$$

où θ, $\theta \in (0, 1)$, est un paramètre qui mesure l'élasticité de la production au facteur ressource.

La ressource non-renouvelable est disponible initialement en quantité finie S_0. La seule possibilité de retarder son épuisement consiste à explorer de nouvelles zones afin de découvrir de nouveaux gisements qui viendraient accroître les réserves existantes, ou bien d'investir en recherche et développement afin d'améliorer sa productivité. Ces deux types d'investissement étant parfaitement substituables et ayant pour même objectif l'extension de l'utilisation de la ressource, nous les assimilons à un seul et même secteur d'activité. Ainsi, le travail disponible peut être affecté soit au secteur productif, soit au secteur de l'exploration et développement, d'où les contraintes de répartition suivantes :

(2) $$1 - L_t - N_t \geq 0, \quad L_t \geq 0 \text{ et } N_t \geq 0,$$

où N_t désigne la quantité de travail allouée à l'exploration et développement. On suppose nul tout coût d'extraction ou d'exploration autre que ceux liés à l'affectation du facteur travail dans l'un ou l'autre secteur. Cette question de l'affectation de l'effort à l'une ou l'autre des deux activités implique l'arbitrage suivant : attribuer une grande quantité de travail à la production permet de produire plus dans l'immédiat, mais implique également un niveau d'extraction plus soutenu, ce qui réduit d'autant la taille des réserves de ressource et accélère leur épuisement ; inversement, intensifier l'effort de recherche permet d'augmenter le potentiel de découvertes, mais requiert une réduction de la production à court terme.

La dynamique du stock de ressource supposé, noté S_t, est caractérisée par le processus suivant :

(3) $$dS_t = -R_t dt + xS_t d\widetilde{q_t},$$

où la variable aléatoire $\widetilde{q_t}$ dénombre les succès obtenus depuis l'origine jusqu'à la date t. Cette v.a. suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda\,(N_t)\,t$:

(4) $$P\left(\widetilde{q_t} = k\right) = \frac{\left[\lambda(N_t)t\right]^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

où $\lambda\,(.)$ est une fonction croissante et concave en N_t, telle que $\lambda\,(N_t) \in [0, 1]$, $\forall N_t \in [0, 1]$ et $\lambda\,(0) = 0$. En d'autres termes, la probabilité à chaque instant d'étendre les réserves existantes augmente avec l'effort de recherche engagé et est nulle lorsqu'aucun effort n'est consenti. Étant donnée la loi de $\widetilde{q_t}$, les variations $d\widetilde{q_t}$ suivent un processus non-stationnaire de Poisson de taux d'arrivée par intervalle de temps $\lambda\,(N_t)$. Durant chaque intervalle de temps dt, soit un nouveau gisement de ressource est découvert, auquel cas $d\widetilde{q_t} = 1$ avec la probabilité $\lambda\,(N_t)dt$, soit aucune découverte n'est réalisée, auquel cas $d\widetilde{q_t} = 0$ avec la probabilité $[1 - \lambda\,(N_t)\,dt]$.

Le paramètre x, $x > 0$, désigne la taux moyen de découverte, c'est-à-dire le taux de croissance moyen des réserves en cas de découverte ou d'innovation. Ainsi, les décisions de recherche et de production sont implicitement dissociées les unes des autres. En effet, consentir un effort en exploration et développement peut mener à des accroissement de stock, mais ces accroissements sont considérés comme exogènes à l'égard de la production. En outre, la quantité supplémentaire de ressource issue d'une découverte ou d'une innovation est supposée proportionnelle à la taille des réserves courantes. Selon PINDYCK [1987], cette hypothèse reflète l'idée que la taille du secteur de l'exploration et développement est proportionnelle à la taille du secteur industriel de la ressource.

Le processus stochastique (3) s'interprète de la façon suivante. Tant qu'aucune découverte n'est réalisée, ou durant une phase d'exploration, $\widetilde{q}_t = 0$ et l'équation dynamique (3) se réécrit sous la forme suivante :

$$\dot{S}_t = -R_t. \tag{5}$$

Puisque la ressource est non-renouvelable, le stock non-utilisé à l'instant t décroît au rythme de son utilisation. Lorsqu'un nouveau gisement est découvert, $\widetilde{q}_t$ augmente instantanément de une unité, i.e. $d\widetilde{q}_t = 1$ (et $dt = 0$). Cela suppose que le gisement découvert puisse être immédiatement exploité pour ne pas avoir à distinguer le stock courant de ressource et les stocks découverts. Par extension au secteur de la R&D, cela suppose que les dates d'invention et d'innovation (i.e. de mise en application de l'invention) soient confondues. Le stock de ressource courant augmente alors instantanément et la trajectoire suivie par S_t fait un saut discret vers le haut dont la taille est définie par :

$$\Delta S_t = S\left(t, \widetilde{q}_t + 1\right) - S\left(t, \widetilde{q}_t\right) = xS\left(t, \widetilde{q}_t\right), \tag{6}$$

où $S\left(t, \widetilde{q}_t + 1\right)$ est le niveau du stock de ressource rendu disponible à la suite d'une nouvelle découverte.

En résumé, il existe à chaque instant une probabilité non-nulle qu'un nouveau gisement soit découvert. En cas de succès, vient instantanément s'ajouter aux réserves courantes le stock additionnel $x\,S_t$. La trajectoire suivie par le stock de ressource est donc émaillée de sauts discrets positifs, qui apparaissent lors de chaque nouvelle découverte. En horizon de temps infini, cette trajectoire devient continue uniquement par morceaux puisque l'expérience aléatoire à partir de laquelle nous obtenons un succès avec probabilité $\lambda\,(N_t)\,dt$ et un échec avec probabilité complémentaire, est répétée un nombre infini de fois. En moyenne, l'effet positif qu'engendre une découverte sur l'état des réserves l'emportera sur l'effet négatif de l'extraction si et seulement si la probabilité de découverte est supérieure au ratio quantités extraites sur quantités découvertes[1]. Il semble donc possible de maintenir, en moyenne, un stock de ressource constant au cours du temps. Il suffit pour cela que lors de chaque découverte, la taille du nouveau gisement compense exactement les quantités extraites.

Enfin, la fonction d'utilité instantanée est du type à élasticité constante de l'utilité marginale :

$$u\left(C_t\right) = \frac{\left(C_t\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \gamma > 0, \gamma \neq 1,$$

où C_t est la consommation courante et $1 / \gamma$ désigne l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation.

---

1. Les variations espérées du stock de ressource sont définies par $E_t\, d\, S_t / dt = -R_t + \lambda\,(N_t)\, x\, S_t$. Ce terme est positif si et seulement si $\lambda\,(N_t) \geq R_t / x\, S_t$. Puisque $\lambda\,(N_t)$ doit être comprise entre 0 et 1, une condition nécessaire pour obtenir un taux de croissance espéré positif du stock de ressource est qu'à chaque nouvelle découverte, le stock additionnel soit supérieur à l'extraction courante, i.e. $x\, S_t \geq R_t$.

3 Le programme optimal et la Règle de Hotelling généralisée

Dans un modèle utilitariste généralisé, l'objectif du planificateur social est de maximiser l'espérance de la somme actualisée des flux d'utilité instantanée, sous les contraintes (1), (2) et (3), pour un niveau initial de stock S_0 donné. Notons δ, δ > 0, le taux d'escompte social, supposé constant au cours du temps. Étant donnée la structure du problème, il apparaît clairement que la contrainte d'allocation du travail disponible sera saturée à l'optimum : tout travail non alloué au secteur productif sera affecté à l'exploration afin de maximiser l'espérance des capacités de consommation future, ce qui permet d'éliminer de l'analyse une variable de contrôle en posant $L_t = 1 - N_t$. Soit (P) le programme du planificateur :

$$(P) \quad \max_{\{R_t, N_t, t\geq 0\}} E \int_0^\infty u(C_t) e^{-\delta t} dt$$

$$\text{slc.} \left| \begin{array}{l} C_t = F\left[R_t, (1-N_t)\right] \\ dS_t = -R_t dt + d\widehat{q}_t, S_0 \text{ donné} \\ R_t, N_t, (1-N_t) \text{ et } S_t \geq 0, \forall t \geq 0. \end{array} \right.$$

Puisque les deux facteurs employés sont nécessaires à la production, il est clair que les contraintes $1 - N_t \geq 0$ et $R_t \geq 0$ ne seront jamais saturées, sauf peut-être asymptotiquement. On résoud (P) en ayant recours aux méthodes standards de programmation dynamique stochastique (voir Chow, [1979]). Soit $J(S_t)$ la fonction valeur du programme (P). L'équation de Hamilton–Bellman–Jacobi qui lui est associée s'écrit :

$$\delta J(S_t) = \max_{R_t, N_t} \left\{ u\left[F(R_t, 1-N_t)\right] + \frac{1}{dt} EdJ(S_t) + \mu_t N_t \right\}, \tag{7}$$

équation qui, après développement du terme $E\, d\, J(S_t)$, se reformule comme suit :

$$\delta J(S_t) = \max_{R_t, N_t} \left\{ u\left[F(R_t, 1-N_t)\right] - R_t J'(S_t) + \lambda(N_t)\Delta J(S_t) + \mu_t N_t \right\}, \tag{8}$$

où $\Delta J(S_t)$, $\Delta J(S_t) > 0$, désigne le surplus instantanée de bien-être social dégagée à la suite d'un nouveau succès, i.e. $\Delta J(S_t) = J[(1+x) S_t] - J(S_t)$.

Examinons le cas où l'économie n'est pas contrainte par la condition $N_t \geq 0$. Les conditions du premier ordre du programme (P) sont alors :

$$u'(C_t) F_R' = J'(S_t), \tag{9}$$

$$u'(C_t) F_L' = \lambda'(N_t)\Delta J(S_t). \tag{10}$$

L'interprétation de la condition (9) est habituelle : le long de toute trajectoire optimale, le bénéfice marginal de l'extraction en termes d'utilité instantanée doit être en permanence égal à la rente de la ressource, ici $J'(S_t)$. Ce dernier terme, qui s'écrit formellement comme la dérivée de la fonction objectif de (P) par rapport à la contrainte dynamique, correspond au prix implicite de la ressource, c'est-à-dire à la valeur d'une unité marginale de ressource in-situ. De façon équivalente, la condition (10) égalise le long de tout sentier optimal, le coût marginal de l'effort d'exploration en termes d'utilité courante au bénéfice marginal espéré de cet effort, $\lambda'(N_t)$ étant la probabilité marginale de découverte et $\Delta J(S_t)$, le surplus instantané de bien-être social que dégage cette nouvelle découverte.

En divisant (9) par (10), il vient :

$$\frac{F_R'}{F_L'} = \frac{J'(S_t)}{\lambda'(N_t)\Delta J(S_t)}, \tag{11}$$

qui n'est autre que l'égalité le long de toute trajectoire optimale entre le taux marginal de transformation (partie de gauche) et le rapport des prix des facteurs de productions (partie de droite), $\lambda'(N_t)\,\Delta J(S_t)$ s'interprétant comme le prix espéré de l'exploration.

Dans les modèles standards d'extraction de ressources non-renouvelables, le prix de ces ressources (ou du moins la rente minière) doit croître au rythme du taux de l'intérêt pour assurer l'efficience intertemporelle. Ce résultat, établit par Hotelling en 1931, illustre l'arbitrage intertemporel auquel est confronté en permanence le détenteur de la ressource : celui-ci doit être indifférent entre extraire une unité de ressource, la vendre à son prix de marché et placer les gains sur un marché financier, ou bien la laisser en terre. La proposition suivante étend le résultat standard de Hotelling au contexte particulier dans lequel des activités d'exploration et de développement peuvent altérer la rareté de la ressource (voir démonstration en annexe A).

Proposition 1 : *Lorsque la découverte de nouveaux gisements est régie par le processus d'exploration (3), la rente nette de la ressource suit, en moyenne, la règle d'évolution suivante :*

$$\frac{EdJ'(S_t)/dt}{J'(S_t)} = \delta - \lambda(N_t)\, x \,\frac{J'\left[(1+x)S_t\right]}{J'(S_t)}, \tag{12}$$

où $J'\left[(1+x)S_t\right]$ *est la valeur instantanée de la rente minière à la suite d'une découverte.*

D'après (12), le taux moyen de croissance de la rente minière correspond au taux d'actualisation diminué d'un terme correcteur. Nous qualifions cette nouvelle règle d'évolution de règle de Hotelling généralisée au cas de découvertes de nouveaux gisements. En moyenne, le taux de croissance de la rente est inférieur à celui préconisé par la Règle de Hotelling traditionnelle, ceci afin de prendre en compte la diminution de la rareté de la ressource due à un accroissement potentiel des réserves en cas de découverte ou d'innovation. Remarquons que l'expression (12) correspond à la règle de Hotelling qui dicterait l'évolution de la rente d'une ressource potentiellement renouvelable, dont le mode de régénération serait à la fois aléatoire (discontinu) et endogène, ce qui se traduit dans cette équation par l'ajout du dernier terme de droite[2].

4 Les politiques optimales

Après avoir examiné les propriétés dynamiques de la rente minière, nous nous attachons à présent à résoudre analytiquement le modèle. Par soucis de simplification des calculs, nous posons $\lambda\,(N_t) = \lambda\, N_t$ où λ, $\lambda \in [0, 1]$, représente la probabilité marginale de découverte. Ainsi, plus l'effort d'exploration est intense, plus la probabilité de découvrir un nouveau gisement est importante mais la probabilité marginale ne dépend pas de cet effort[3].

Soient $\widehat{R}(S_t)$ et $\widehat{N}(S_t)$ respectivement les politiques optimales d'extraction et d'investissement en exploration, solutions du système d'équations (9)-(10). Ces fonctions sont formalisées dans la proposition suivante (voir démonstration en annexe B).

Proposition 2 : *Le sentier optimal d'effort d'exploration est unique et régulier et la politique optimale d'extraction qui lui est associée est proportionnelle au stock courant de ressource. Ces solutions optimales sont définies comme suit :*

$$\widehat{N}(S_t) = N^* = 1 - \frac{(1-\gamma)(1-\theta)\mu}{\lambda\left[(1+x)^{\theta(1-\gamma)} - 1\right]} \tag{13}$$

$$\widehat{R}(S_t) = \mu S_t, \tag{14}$$

où $\mu \equiv \{\delta - \lambda\,[(1+x)^{\theta\,(1-\gamma)} - 1]\} / \gamma$.

Pour simplifier l'écriture, définissons η, $\eta \equiv [(1+x)^{\theta\,(1-\gamma)} - 1]$. Ce terme est strictement positif pour $\gamma < 1$, négatif sinon. En remplaçant dans la relation (1) les variables R et N par leurs solutions respectives (13) et (14), nous en déduisons la politique optimale de consommation suivante :

$$\widehat{C}(S_t) = \mu\left[\frac{(1-\gamma)(1-\theta)}{\lambda\eta}\right]^{1-\theta} S_t^{\theta}. \tag{15}$$

---

2. Le taux de croissance de la rente d'une ressource renouvelable dont le mode de régénération est représenté par la fonction $H\,(S_t)$ correspond au taux d'actualisation diminué du taux marginal de régénération de cette ressource, i.e. $[\delta - H'\,(S_t)]$.
3. Il serait plus réaliste de considérer une relation concave afin d'évoquer l'essoufflement de la probabilité marginale de succès qu'induirait à la marge un trop grand effort d'exploration, par exemple $\lambda(N_t) = 1 - e^{-bN_t}$. Dans ce cas, la limite en capacité de travail implique une probabilité maximale inférieure à 1. Même en affectant la totalité de la main d'œuvre à l'exploration, on ne pourrait dépasser une probabilité de succès égale à $1 - e^{-b}$. Cependant, ce genre de formalisation compliquerait considérablement la résolution.

Puisque $N^* = 1 - L^*$, l'expression (13) définit la répartition optimale du travail disponible entre effort d'exploration et travail productif. Cette affectation du facteur travail à l'un ou l'autre des deux secteurs est constante au cours du temps. En outre, l'effort optimal alloué à l'exploration et au développement doit être permanent.

De N^* et L^* contenus dans l'intervalle (0, 1), nous déduisons les conditions nécessaires d'existence d'une solution intérieure. Nous conviendrons de paramétrer le domaine de définition de cette solution en fonction du ratio (δ / λ) et de noter $(\delta / \lambda)^{sup}$ la borne supérieure et $(\delta / \lambda)^{inf}$ la borne inférieure de ce domaine. Ainsi, la solution optimale (13), (14) et (15) existe si et seulement si :

$$\frac{\delta}{\lambda} \in \left\{ \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{inf}, \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{sup} \right\},$$

où :

$$\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{inf} = \eta \quad \text{si} \quad \gamma < 1, 0 \quad \text{sinon et} \quad \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{sup} = \frac{\left[1-\theta(1-\gamma)\right]\eta}{(1-\gamma)(1-\theta)}.$$

Deux domaines d'acceptation de (δ / λ) sont à distinguer en fonction de la valeur de l'élasticité de substitution intertemporelle. Si $\gamma < 1$ – l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation est alors supérieure à 1 – la politique optimale d'extraction et la quantité optimale de travail allouée à la production sont strictement positives (ce qui implique $N^* < 1$) si et seulement si $(\delta / \lambda) > \eta$. Autrement dit, l'indice de préférence pour le présent doit être suffisamment grand par rapport à la probabilité marginale de découverte pour assurer des niveaux de facteurs de production strictement positifs. Si $\gamma > 1$ les quantités optimales de facteurs de production sont strictement positives pour tout (δ / λ) positif. Enfin, $\forall \gamma \neq 1$, $N^* > 0$ si et seulement si $(\delta / \lambda) < (\delta / \lambda)^{sup}$. Autrement dit, la probabilité marginale de découverte de nouveaux gisements doit être suffisamment grande par rapport au degré d'impatience de la société pour garantir un effort optimal d'exploration qui soit non nul.

Le tableau 1 ci-dessous indique le sens de variation des politiques optimales suite à une augmentation d'un paramètre. Remarquons que cette analyse est menée à partir des formes fonctionnelles des politiques optimales, c'est-à-dire des solutions optimales exprimées en tant que fonction du stock de ressource, et non des valeurs optimales. Par conséquent, leurs variations ne prennent pas en compte les effets directs qui agissent sur S_t.

TABLEAU 1
Comportement des politiques optimales

	S_t	δ	x	λ
N^*	#	–	+	+
L^*	#	+	–	–
$\widehat{R}(S_t)$	+	+	– si $\gamma < 1$ + si $\gamma > 1$	– si $\gamma < 1$ + si $\gamma > 1$
$\widehat{C}(S_t)$	+	+	– si $\gamma < 1$ + si $\gamma > 1^{(*)}$	– si $\gamma < 1$ + si $\gamma > 1^{(*)}$

Les politiques optimales d'extraction et de consommation sont des fonctions croissantes du stock de ressource. Une augmentation de l'indice de préférence pour le présent accroît les quantités optimales des deux facteurs de production et réduit l'effort d'exploration. Un accroissement de la probabilité marginale de découverte ou du taux de découverte augmente dans tous les cas la quantité de travail allouée à l'exploration et accroît la politique optimale d'extraction uniquement si $\gamma > 1$. En effet, lorsque l'élasticité de substitution intertemporelle est inférieure à 1, le consommateur privilégiera son potentiel de consommation présente et une augmentation de x ou λ aura pour effet d'accroître le niveau optimal d'extraction. Dans ce cas, l'effet global sur la politique optimale de consommation semble à priori indéterminé puisque L^* est une fonction décroissante de ces deux paramètres. On peut montrer que l'effet d'augmentation de l'extraction l'emporte sur l'effet de diminution du travail productif si et seulement si la probabilité marginale de découverte est suffisamment élevée par rapport au degré d'impatience (ce qui correspond à la situation (*) dans le tableau 1). Autrement dit, lorsque $\gamma > 1$, un accroissement de x ou de λ élève le niveau optimal de consommation si et seulement si :

$$\frac{\delta}{\lambda} \leq -\frac{\theta\eta}{(1-\theta)}$$

avec $\eta < 0$ pour $\gamma > 1$. En revanche une augmentation de x ou de λ implique dans tous les cas une dégradation des politiques optimales d'extraction et de consommation lorsque $\gamma < 1$.

5 Étude des trajectoires optimales

Nous nous proposons à présent de caractériser entièrement les trajectoires optimales de l'économie afin d'étudier leur comportement asymptotique. En remplaçant dans (3) l'extraction par sa solution optimale (14), nous obtenons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = -\mu S_t dt + x S_t d\widetilde{q_t}. \tag{16}$$

Tant qu'aucun gisement n'est découvert, $d\widetilde{q_t} = 0$ et la solution de (16) est la suivante :

$$S(t,0) = S_0 e^{-\mu t}. \tag{17}$$

En l'absence de découverte, le stock de ressource diminue à un taux constant μ. Lorsque le processus stochastique génère un succès, $d\widetilde{q_t} = 1$, les réserves courantes augmentent instantanément de x % et le niveau de stock post-découverte est $S\left(t,\widetilde{q_t}+1\right) = (1+x)\ S\left(t,\widetilde{q_t}\right)$. En réitérant ce tirage aléatoire un certain nombre de fois, nous obtenons ainsi une suite géométrique de raison $(1 + x)$ dont la solution en fonction de l'état initial est :

$$S\left(t,\widetilde{q_t}\right)=\left(1+x\right)^{\widetilde{q_t}}S\left(t,0\right), \tag{18}$$

où $S\,(t,\,0)$ est définie par (17). Par conséquent, les trajectoires optimales suivies par les différentes variables du modèle ont pour équations :

$$S^*\left(t,\widetilde{q_t}\right) = \left(1+x\right)^{\widetilde{q_t}} S_0 e^{-\mu t}, \tag{19}$$

$$R^*\left(t,\widetilde{q_t}\right) = \mu S^*\left(t,\widetilde{q_t}\right), \tag{20}$$

$$C^*\left(t,\widetilde{q_t}\right) = \left(1+x\right)^{\theta\widetilde{q_t}}\left(\mu S_0\right)^{\theta}\left(1-N^*\right)^{1-\theta} e^{-\theta\mu t}. \tag{21}$$

Ces expressions définissent à chaque instant t, la position de chacune des variables en fonction de l'historique des découvertes (c'est-à-dire du nombre de succès obtenus depuis l'origine jusqu'à la date t). Ces trajectoires optimales ont un comportement asymptotique à priori indéterminé. En effet, l'horizon de planification étant non borné supérieurement, le processus de découvertes ne sera jamais stoppé si bien que $\widetilde{q_t}$ tend en probabilité vers l'infini lorsque t tend vers l'infini alors que $S\,(t,\,0)$ tend vers zéro. Il apparaît alors clairement dans l'expression (19) que le terme lié au processus de découverte et d'innovation, $\left(1+x\right)^{\widetilde{q_t}}$, peut venir compenser le terme exponentiel $e^{-\mu t}$ dans la détermination du stock de ressource asymptotique. De ce fait, l'épuisement de la ressource n'est plus systématique et dépend directement de l'intensité de l'extraction par rapport aux succès de l'exploration. La même analyse est valable pour l'ensemble des trajectoires optimales puisque toutes sont définies à partir de $S^*\left(t,\widetilde{q_t}\right)$.

Puisque d'une part, les trajectoires optimales de l'économie sont discontinues (ou continues seulement par morceaux) et d'autre part, leur comportement asymptotique indéterminé, nous allons plutôt étudier les trajectoires "lissées". En particulier, nous cherchons à déterminer les conditions requises pour obtenir, en moyenne, un taux de croissance de la consommation qui soit positif. Cette condition placerait l'économie sur un sentier "moyen" de croissance durable puisque nous avons convenu d'appeler trajectoire de croissance durable tout sentier d'évolution de la consommation techniquement réalisable qui soit au moins non-décroissant au cours du temps.

La probabilité que l'on obtienne k succès entre les dates 0 et t est définie par (4). On en déduit les expressions suivantes :

$$E\left[\left(1+x\right)^{\widetilde{q_t}}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+x\right)^k\frac{\left(\lambda N^*t\right)^k}{k!}e^{-\lambda N^*t} = e^{x\lambda N^*t},$$

$$E\left[\left(1+x\right)^{\theta\widetilde{q_t}}\right]= \exp\left\{\lambda N^*t\left[\left(1+x\right)^{\theta}-1\right]\right\}.$$

Par conséquent, le stock de ressource, le niveau d'extraction et la consommation suivent les trajectoires moyennes décrites par les équations suivantes :

(22)
$$\overline{S}_t = S_0 \, e^{\left(\lambda x N^* - \mu\right)t},$$

(23)
$$\overline{R}_t = \mu \overline{S}_t,$$

(24)
$$\overline{C}_t = \left(\mu S_0\right)^{\theta}\left(1-N^*\right)^{1-\theta} e^{\left[\lambda N^*(1+x)^{\theta} - \lambda N^* - \theta\mu\right]t}.$$

Les taux de croissance de ces trajectoires sont constants au cours du temps et sont définis comme suit :

$$g_{\overline{S}} = g_{\overline{R}} = \frac{\lambda}{\gamma}\left\{\left[x(1-\gamma)(1-\theta)+\eta\right]\left[1-\frac{\delta}{\lambda\eta}\right]+x\gamma\right\},$$
$$g_{\overline{C}} = \frac{\lambda}{\gamma}\left\{\left[(1+x)^{\theta}-1\right]\left[1-\theta(1-\gamma)-\frac{\delta(1-\gamma)(1-\theta)}{\lambda\eta}\right]+\theta\eta\left(1-\frac{\delta}{\lambda\eta}\right)\right\}.$$

Le signe de ces deux taux de croissance dépend d'une part de la valeur de l'élasticité de substitution intertemporelle et d'autre part du ratio (δ / λ). De la définition de $g_{\overline{S}}$ (et donc de $g_{\overline{R}}$), on déduit :

$$g_{\overline{R}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\delta}{\lambda} \leq \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{*}$$
$$g_{\overline{C}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\delta}{\lambda} \leq \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{**},$$

où :

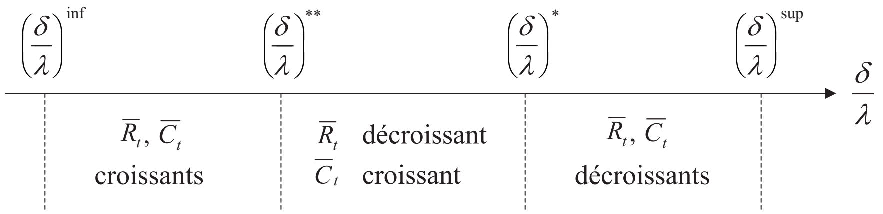
$$\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{*} = \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{\text{sup}} - K_1,$$
$$\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{**} = \left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{\text{sup}} - K_2,$$
$$K_1 = \frac{\gamma(\eta)^2}{(1-\gamma)(1-\theta)\left[x(1-\gamma)(1-\theta)+\eta\right]},$$
$$K_2 = \frac{\gamma\theta(\eta)^2}{(1-\gamma)(1-\theta)\left\{(1-\gamma)(1-\theta)\left[(1+x)^{\theta}-1\right]+\theta\eta\right\}}.$$

On peut facilement vérifier que les seuils $(\delta / \lambda)^{*}$ et $(\delta / \lambda)^{**}$ sont strictement positifs pour tout $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$, $\theta \in (0, 1)$ et $x \in (0, 1)$. De plus, étant données les expressions de K_1 et K_2, on peut montrer que $(\delta / \lambda)^*$ est supérieur à $(\delta / \lambda)^{**}$ pour tout $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$, $\theta \in (0, 1)$ et $x \in (0, 1)$.

Quelle que soit la valeur de l'élasticité de substitution de la consommation et pour $(\delta / \lambda) \in \{(\delta / \lambda)^{\text{inf}}, (\delta / \lambda)^{\text{sup}}\}$, les trajectoires moyennes d'extraction et de consommation sont croissantes au cours du temps si et seulement si la probabilité marginale de découverte est suffisamment grande par rapport à l'indice des préférences pour le présent. L'ensemble des conditions que doit remplir (δ / λ) pour garantir une croissance économique durable peut être représenté par la figure 1 ci-dessous.

FIGURE 1

Conditions de durabilité de la croissance.



Ce schéma peut-être vue comme une échelle de régénération de la ressource. Lorsque la probabilité marginale de découverte est suffisamment élevée par rapport au degré d'impatience de la société, l'effet de l'exploration et du développement l'emporte sur l'effet de l'extraction. Autrement dit, il se régénère plus de ressource qu'il n'en est extrait si bien que le stock est, en moyenne, croissant. La partie de gauche de l'échelle correspond donc à une ressource entièrement renouvelable en moyenne et, à affectation optimale du travail donnée, la consommation peut croître indéfiniment en moyenne. Plus le ratio (δ / λ) augmente, plus la ressource devient, en moyenne, "non-renouvelable". Ainsi, lorsque l'indice de préférence pour le présent devient trop important par rapport à la probabilité d'accroissement du stock, le modèle s'analyse comme un problème de ressource non-renouvelable dans lequel les trajectoires moyennes du stock et de la consommation sont décroissantes au cours du temps et asymptotiquement nulles.

Remarquons que la condition imputée à λ est moins contraignante pour obtenir un sentier espéré de consommation croissant que pour une trajectoire croissante d'extraction. En effet, pour $(\delta / \lambda) \in [(\delta / \lambda)^{**}, (\delta / \lambda)^*]$, la consommation moyenne peut être croissante alors même que l'extraction moyenne est décroissante. Ce résultat provient directement de l'inégalité de Jensen puisque la fonction de production est concave en R. Il en résulte que le taux de croissance de la consommation moyenne peut être supérieur au taux de croissance de l'extraction moyenne pour peu que la productivité de la ressource soit suffisamment élevée par rapport à la productivité du travail.

Enfin, le tableau 2 ci-dessous dresse une analyse de sensibilité des trajectoires moyennes par rapport aux différents paramètres du modèle :

TABLEAU 2
Effet des différents paramètres sur les trajectoires moyennes

	δ	x	λ
$g_{\overline{S}}, g_{\overline{R}}$	–	+	+
$g_{\overline{C}}$	–	+	+
$\overline{S}_t$	–	+	+
$\overline{R}_t$	+ à CT[(a)]	+ si $\gamma > 1$ + si $\gamma < 1$ et à LT[(b)]	+ si $\gamma > 1$ + si $\gamma < 1$ et à LT[(b)]
$\overline{C}_t$	+ à CT[(a)]	indéterminé	indéterminé

[(a)] *Court terme.*
[(b)] *Long terme.*

Les taux de croissance du stock de ressource moyen et de l'extraction moyenne sont des fonctions décroissantes du taux d'escompte psychologique et croissantes des paramètres liés au processus de découverte (i.e. x et λ). Toutefois, le degré de variation de l'extraction moyenne par rapport à ces différents paramètres, dépend du temps. Une augmentation des préférences pour le présent intensifie l'extraction moyenne $\overline{R}_t$ uniquement à court terme. Par ailleurs, si la probabilité marginale de découverte et/ou la proportion de stock additionnel qu'elle engendre augmentent, l'extraction moyenne augmente si et seulement si $\gamma > 1$. Lorsque $\gamma < 1$, elle augmente uniquement à long terme. Enfin, la complexité de l'expression de la consommation moyenne ne nous permet pas de déterminer les sens de variation de cette trajectoire par rapport à x et à λ.

6 Conclusion

L'objet de cet article était de déterminer dans quelles mesures l'introduction d'un processus de découvertes peut éviter l'épuisement asymptotique de la ressource et placer l'économie sur un sentier moyen de croissance optimale durable. Dans un premier temps, nous avons montré dans un cadre général la façon dont ce processus affecte la règle d'évolution de la rente minière au cours du temps. L'évolution anticipée de la rente suit une généralisation de la règle de Hotelling : son taux de croissance correspond au taux préconisé par la règle habituelle auquel s'ajoute un élément correcteur qui tient compte des découvertes potentielles de nouveaux gisements.

Afin de pouvoir résoudre analytiquement le modèle, nous avons envisagé le cas où le développement de nouvelles réserves dépend de façon proportionnelle à la taille du stock courant de ressource et où la probabilité de découverte est également proportionnelle à l'effort d'exploration. La ressource devient alors une ressource potentiellement renouvelable, dont le mode de régénération est à la fois endogène et incertain. Dans ce cas particulier, les conditions d'optimalité impliquent une répartition du travail disponible entre production et recherche qui est constante au cours du temps et une politique d'extraction qui est proportionnelle au stock de ressource. Nous avons également montré que l'activité d'exploration et de développement peut indéfiniment reporter le moment où la ressource sera épuisée pour peu que la société soit suffisamment patiente et que la probabilité marginale de découverte soit assez élevée.

Les résultats de ce modèle sont néanmoins fondés sur des restrictions plus ou moins contraignantes. Un modèle plus sophistiqué consisterait à supposer que les réserves de ressources ne peuvent être parfaitement estimées et que leur disponibilité future est en partie aléatoire. Ce problème s'assimilerait à un problème de "partage de gâteau" dans lequel l'incertitude porterait à la fois sur la taille totale du gâteau, mais aussi sur la façon dont cette taille peut être augmentée si l'on rajoute des oeufs et de la farine dans la composition. Cette considération plus générale du problème semble non seulement plus réaliste mais permettrait en outre de considérer une autre fonction de l'exploration, celle de fournir de l'information sur la taille des réserves lorsque celle-ci est inconnue. ■

Références

AMIGUES J.P., GRIMAUD A. et MOREAUX M. (2001). – « Ressources non-renouvelables, impatience et effort optimal de recherche-développement », *Mimeo LEERNA*, Université de Toulouse I.

ARROW K. et CHANG S. (1982). – « Optimal Pricing, Use and Exploration of Uncertain Natural Resource Stocks », *Journal of Environmental Economics and Management*, 9(1), pp. 1-10.

CHEVÉ M. et SCHUBERT K. (2002). – « La croissance optimale d'une économie polluante : durabilité économique versus durabilité écologique », *Annales d'Économie et de Statistique*, 65, pp. 117-36.

CHICHILNISKY G., HEAL G. et VERCELLI A. (1998). – « Sustainability: Dynamics and Uncertainty », Dordrecht: Kluwer Academic Pub.

CHOW G.C. (1979). – « Optimum Control of Stochastic Differential Equation Systems », *Journal of Economic Dynamics and Control*, 1, pp. 143-75.

CLARK C. et MANGEL M. (1986). – « Search Theory in Natural Resource Modelling », *Natural Resource Modelling*, 1, pp. 3-54.

DESHMUKH S.D. et PLISKA S.R. (1980). – « Optimal Consumption and Exploration of Nonrenewable Resources under Uncertainty », *Econometrica*, 48(1), pp. 175-200.

DEVARAJAN S. et FISHER A.C. (1982). – « Exploration and Scarcity », *Journal of Political Economy*, 90(6), pp. 1279-90.

GAUDET G. et HOWITT P. (1989). – « A Note on Uncertainty and the Hotelling Rule », *Journal of Environmental Economics and Management*, pp. 80-6.

HARTWICK J.M. (1989). – « Nonrenewable Resources Extraction Programs and Markets », Chur, Switzerland: Harwood Academic Publishers.

HEAL G.M. (1998). – « Valuing the Future: Economic Theory and Sustainability », New York: Columbia University Press.

HUNG M.N. et QUYEN N.V. (1994). – « Dynamic Timing Decisions Under Uncertainty: Essays on Invention, Innovation and Exploration in Resource Economics », Heildelberg: Springer-Verlag.

LERCHE I. et MCKAY J.A. (1993). – « Economic Risk in Hydrocarbon Exploration », San Diego, California: Academic Press.

MERTON R.C. (1990). – « Continuous Time Finance », Cambridge: Blackwell Publishers.

PINDYCK R.S. (1980). – « Uncertainty and Exhaustible Resource Markets », *Journal of Political Economy*, 87(1), pp. 194-217.

PINDYCK R.S. (1987). – « On Monopoly Power in Extractive Resource Markets », *Journal of Environmental Economics and Management*, 14, pp. 128-42.

QUYEN N.V. (1991). – « Exhaustible Resources: A Theory of Exploration », *Journal of Economic Studies*, 58, pp. 777-89.

ROTILLON G. (1991). – « Ressources épuisables et substitut », *Annales d'Économie et de Statistique*, 23, pp. 13-33.

SCHUBERT K. et ZAGAMÉ P. (1998). – « L'environnement : une nouvelle dimension de l'analyse économique », Paris : Vuibert.

WÄLDE K. (1999a). – « A Model of Creative Destruction with Undiversifiable Risk and Optimizing Households », *Economic Journal*, 109, pp. 156-71.

WÄLDE K. (1999b). – « Optimal Saving under Poisson Uncertainty », *Journal of Economic Theory*, 87(1), pp. 194-217.

WILS A. (2001). – « The Effects of Three Categories of Technological Innovation on the Use and Price of Nonrenewable Resources », *Ecological Economics*, 37, pp. 457-72.

Annexe A

En différentiant l'équation (7) par rapport à S, on obtient :

$$\delta J'(S) = -RJ''(S) + \lambda(N)\Delta J'(S) + x\lambda(N)J'\big[(1+x)S\big], \tag{25}$$

où $\Delta J'(S) = J'[(1+x)S] - J'(S)$ désigne la variation instantanée de la rente minière lorsqu'un nouveau gisement est découvert grâce à un effort d'exploration N. Nous calculons ensuite directement le taux de variation espéré de $J'(S)$ en étudiant ses accroissements marginaux sur de petits intervalles de temps. La valeur de la rente nette de la ressource évaluée à la date $t + dt$ s'écrit :

$$J'(S)|_{t+dt} = J'(S)|_t + J''(S)dS.$$

Cette valeur dépend du succès de l'exploration puisque dS_t peut prendre différentes valeurs selon que l'on obtienne ou non un succès :

$$J'(S)|_{t+dt} = \begin{cases} J'(S)|_t - RJ''(S)dt & \text{, avec probabilité } 1-\lambda(N)dt \\ J'\big[(1+x)S\big] & \text{, avec probabilité } \lambda(N)dt \end{cases}$$

ce qui implique :

$$\frac{J'(S)|_{t+dt} - J'(S)|_t}{dt} = \begin{cases} -RJ''(S) & \text{, avec probabilité } 1-\lambda(N)dt \\ \Delta J'(S)/dt & \text{, avec probabilité } \lambda(N)dt. \end{cases}$$

Calculons ensuite l'espérance de variation de cette rente sur l'intervalle dt :

$$E\left(\frac{J'(S)|_{t+dt} - J'(S)|_t}{dt}\right) = -\big[1-\lambda(N)dt\big]RJ''(S) + \lambda(N)\Delta J'(S). \tag{26}$$

Or, d'après (25) il vient :

$$\delta J'(S) - x\lambda(N)J'\big[(1+x)S\big] = -RJ''(S) + \lambda(N)\Delta J'(S)$$

ce qui, après substitution dans (26), permet d'écrire :

$$E\left(\frac{J'(S)|_{t+dt} - J'(S)|_t}{dt}\right) = \delta J'(S) - x\lambda(N)J'\big[(1+x)S\big] + \lambda(N)RJ''(S)dt. \tag{27}$$

On obtient finalement le taux de croissance espéré de la rente minière en faisant tendre dt vers 0 et en divisant les deux côtés de (27) par $J'(S)$.

Annexe B

En remplaçant dans (8), (9) et (10) les fonctions *F* (*R*, *L*), *u* (*C*) et λ (*N*) par leurs expressions analytiques, il vient respectivement :

(28) $$\left\{\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)\left[R^{\theta}\left(1-N\right)^{1-\theta}\right]^{1-\gamma}-RJ'\left(S\right)+\lambda N\Delta J\left(S\right)\right\}=\delta J\left(S\right)$$

(29) $$\theta R^{\theta(1-\gamma)-1}\left(1-N\right)^{(1-\theta)(1-\gamma)}=J'\left(S\right)$$

(30) $$\left(1-\theta\right)R^{\theta(1-\gamma)}\left(1-N\right)^{(1-\theta)(1-\gamma)-1}=\lambda\Delta J\left(S\right).$$

En divisant la ligne (29) par la ligne (30), on déduit la relation suivante :

(31) $$1-N=\frac{\left(1-\theta\right)\,J'\left(S\right)}{\theta\lambda\Delta J\left(S\right)}R,$$

ce qui, réintroduit dans (29) permet, après simplifications, d'exprimer le niveau d'extraction comme suit :

(32) $$\widehat{R}\left(S\right)=\left[\frac{1-\theta}{\lambda\Delta J\left(S\right)}\right]^{\frac{(1-\theta)(1-\gamma)}{\gamma}}\left[\frac{\theta}{J'\left(S\right)}\right]^{\frac{1-(1-\theta)(1-\gamma)}{\gamma}}.$$

En combinant (31) et (32), il vient :

(33) $$\widehat{L}\left(S\right)=1-\widehat{N}\left(S\right)=\left[\frac{1-\theta}{\lambda\Delta J\left(S\right)}\right]^{\frac{1-\theta(1-\gamma)}{\gamma}}\left[\frac{\theta}{J'\left(S\right)}\right]^{\frac{\theta(1-\gamma)}{\gamma}}.$$

En remplaçant *R* et *N* dans (28) par leurs expressions respectives (32) et (33) et après simplifications, on obtient une équation différentielle non homogène en *J*, de variable indépendante *S* :

(34) $$\delta J\left(S\right)=\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)\left[\frac{1-\theta}{\lambda\Delta J\left(S\right)}\right]^{\frac{(1-\theta)(1-\gamma)}{\gamma}}\left[\frac{\theta}{J'\left(S\right)}\right]^{\frac{\theta(1-\gamma)}{\gamma}}+\lambda\Delta J\left(S\right).$$

La solution de cette équation différentielle est :

(35) $$J(S) = \Phi S^{\theta(1-\gamma)}$$

$$\text{avec } \Phi = \left\{ \frac{\gamma(1-\gamma)^{-\frac{\gamma+\theta(1-\gamma)}{\gamma}} \left[\frac{1-\theta}{\lambda\left[(1+x)^{\theta(1-\gamma)}-1\right]} \right]^{\frac{(1-\theta)(1-\gamma)}{\gamma}}}{\delta - \lambda\left[(1+x)^{\theta(1-\gamma)}-1\right]} \right\}^{\gamma}.$$

De (35), on déduit :

$$J'(S) = \theta(1-\gamma)\Phi S^{\theta(1-\gamma)-1},$$
$$\Delta J(S) = \Phi S^{\theta(1-\gamma)}\left[(1+x)^{\theta(1-\gamma)}-1\right],$$

ainsi que les politiques optimales (13) et (14) d'après les relations (32) et (33).