ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 77 – 2005

Dépenses publiques dans une économie à deux pays : Stackelberg versus Nash

Hubert KEMPF*, **Emmanuelle TAUGOURDEAU**†

RÉSUMÉ. – Cet article analyse l'impact sur le bien-être des agents des dépenses publiques nationales dans un modèle réel standard à deux pays lorsqu'un des pays est en position de leader de Stackelberg. Nous présentons l'équilibre de Stackelberg et le comparons à l'équilibre de Nash. Nous montrons que l'existence d'un pays meneur bénéficie au pays suiveur s'il existe des complémentarités stratégiques. Les interactions stratégiques dépendent dans ce modèle des élasticités de sustitution relatives entre les biens.

Public expenditures in a two-country economy: Stackelberg vs Nash

ABSTRACT. – This paper analyses strategic fiscal policy-making within the context of the standard two-country-two-good real trade model developped by TURNOVSKY (1988). Introducing asymmetry between the two countries and assuming that one country acts as a Stackelberg leader relative to the other one, we compare the welfare issued from the Nash equilibrium and the welfare for each country issued from the Stackelberg equilibrium. It happens that both countries benefit from Stackelberg equilibrium with respect to the non cooperative equilibrium in the presence of strategic complementarity, because both governments reduce their public spendings. In this model, strategic interactions depend on the relative value of elasticities of substitution between goods. There may either exist strategic substituability or complementarity.

* H. KEMPF : EUREQua, Université Paris 1, 106-112 bd de l'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13. email : kempf@univ-paris1.fr

† E. TAUGOURDEAU : EUREQua, Université Paris 1, et CREM, Université de Caen. emmanuelle.taugourdeau@econ.unicaen.fr

Nous tenons à remercier Russell COOPER, Etienne LEHMANN, Stéphane ROSSIGNOL ainsi que les deux référés anonymes et le rédacteur associé pour leurs commentaires sur des versions préliminaires de ce papier. Nous restons néanmoins seuls responsables des erreurs qui peuvent subsister.

1 Introduction

Les études théoriques consacrées à l'interdépendance internationale reposent le plus souvent sur l'hypothèse d'une parfaite symétrie entre les pays et ne peuvent donc apporter d'éléments de réponse aux interrogations récentes concernant les conséquences d'une « domination » par l'un des pays de l'économie mondiale. Dans le présent article au contraire, nous supposons une telle asymétrie stratégique entre les pays, dans le sens où l'un des pays est en position de meneur de Stackelberg, et nous étudions les conséquences de dépenses publiques nationales décidées de façon non-coopérative sous cette hypothèse. Nous montrons que dans un tel cadre et en raisonnant sur deux pays, il n'est pas vrai que la présence d'un meneur de Stackelberg est nécessairement désavantageuse pour l'autre pays. Plus précisément, nous montrons que l'impact sur le bien-être du pays suiveur des actions adoptées par le pays meneur dépend de la nature des interactions stratégiques qui existent entre les deux pays.

Cet article analyse les décisions stratégiques dans le modèle réel standard à deux biens et deux pays développé par TURNOVSKY (1988)[1]. Ce modèle a la propriété d'être un modèle macroéconomique d'équilibre général, ce qui permet de procéder à des analyses de bien-être explicites[2]. Nous explicitons les relations commerciales entre les deux pays et comparons l'équilibre non coopératif avec la solution de l'équilibre de Stackelberg. L'introduction d'une asymétrie entre les deux pays par le biais de l'existence d'un meneur de Stackelberg montre que les deux pays peuvent tirer profit d'une situation d'équilibre de Stackelberg en comparaison avec un équilibre non coopératif lorsqu'il existe des complémentarités stratégiques car dans ce cas, les deux gouvernements réduisent leurs dépenses publiques[3].

2 Un modèle à deux pays

Nous considérons une économie mondiale composée de deux pays, un pays A et un pays B. Le pays A est spécialisé dans la production du bien a, et le pays B dans la production du bien b. Le consommateur représentatif de chacun des pays désire consommer les deux biens ce qui implique que les pays sont amenés à s'échanger des biens. Dans chaque pays, les dépenses publiques sont financées

1. DEVEREUX [1991] a approfondi cet axe de recherche, et récemment JENSSEN [1996] a comparé les avantages issus de la coopération dans des systèmes de taux de change différents. SORENSEN [1996] s'est intéressé aux conséquences d'une coopération partielle, c'est-à-dire une coopération entre des sous-ensembles de pays dans une économie à plusieurs pays.
2. Dans un article récent portant sur la concurrence fiscale, WANG [1999] a étudié les conséquences de la présence d'un meneur au sens de Stackelberg dans un modèle microéconomique portant sur un seul marché.
3. La notion d'interactions stratégiques est très clairement présentée dans COOPER [1999].

par un impôt forfaitaire. Leur montant en est décidé par chaque gouvernement et ces impôts servent à acquérir du bien national uniquement. Chaque gouvernement a pour objectif de maximiser le bien-être de l'agent représentatif de son pays. La production de chaque bien est fixée et prise comme donnée. Les deux pays ont des tailles identiques et on suppose qu'il existe un grand nombre de consommateurs dans chaque pays.

On note C_a^A et C_b^A les quantités de bien a et de bien b consommées par l'agent représentatif du pays A, C_a^B et C_b^B les quantités de bien a et de bien b consommées par l'agent représentatif du pays B, G^A les dépenses publiques du pays A et G^B les dépenses publiques du pays B. Les gouvernements financent leurs dépenses publiques par un impôt forfaitaire noté $T_A \left(= G^A\right)$ et $T_B \left(= G^B\right)$. Le prix relatif du bien b par rapport au bien a est noté x.

Les quantités produites de chaque bien sont données et égales dans chaque pays. On les note Y. Les conditions d'équilibre sur les marchés des biens impliquent :

Pour le bien *a*

$$Y = C_a^A + C_a^B + G^A \tag{1}$$

Pour le bien *b* :

$$Y = C_b^A + C_b^B + G^B \tag{2}$$

De plus, on suppose que la balance commerciale s'équilibre entre les deux pays par le biais du taux de change, ce qui implique :

$$xC_b^A = C_a^B \tag{3}$$

Tous les agents des deux pays sont supposés identiques. Les fonctions d'utilité des agents représentatifs dépendent de leur consommation en biens privés ainsi que des dépenses publiques de leur gouvernement. Nous utilisons des fonctions d'utilité de type CES. Elles sont données par les équations suivantes :

Pour le pays *A* :

$$U^A\left(C_a^A, C_b^A, G^A\right) = \left[\left(\left(C_a^A\right)^\delta + \left(C_b^A\right)^\delta\right)^{\frac{\gamma}{\delta}} + \left(G^A\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}} \tag{4}$$

Pour le pays *B* :

$$U^B\left(C_b^B, C_a^B, G^B\right) = \left[\left(\left(C_b^B\right)^\delta + \left(C_a^B\right)^\delta\right)^{\frac{\gamma}{\delta}} + \left(G^B\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}} \tag{5}$$

où $\delta \equiv 1 - \frac{1}{\eta_1} < 1$ et $\eta_1 > 1$ caractérise l'élasticité de substitution entre les biens privés alors que $\gamma \equiv 1 - \frac{1}{\eta_2} < 1$ et $\eta_2 > 1$ représente l'élasticité de substitution entre le panier de biens privés et le bien public. Cette spécification satisfait les deux propriétés suivantes : *i)* les biens *a* et *b* sont normaux ; *ii*) les conditions de MARSHALL-LERNER sont satisfaites. La contrainte budgétaire de l'agent représentatif du pays *A* s'écrit :

$$Y - G^A = C_a^A + xC_b^A \tag{6}$$

et la contrainte budgétaire de l'agent représentatif du pays B se note :

$$Y - G^B = x^{-1} C_a^B + C_b^B \tag{7}$$

Chaque consommateur représentant un poids négligeable dans l'économie, le consommateur représentatif prend le niveau général des prix comme donné et prend ses décisions uniquement sur la base du prix relatif x. Le problème de maximisation du consommateur représentatif se résume à choisir son niveau optimal de consommation des deux biens privés a et b, le niveau des dépenses publiques étant considéré comme donné. L'agent représentatif du pays A doit résoudre le problème suivant :

$$\max_{C_a^A, C_b^A} U^A\left(C_a^A, C_b^A, G^A\right) = U^A\left(Y - xC_b^A - G^A, C_b^A, G^A\right) \tag{8}$$

alors que l'agent représentatif du pays B doit résoudre :

$$\max_{C_a^B, C_b^B} U^B\left(C_b^B, C_a^B, G^B\right) = U^B\left(Y - x^{-1}C_a^B - G^B, C_a^B, G^B\right) \tag{9}$$

Notons que ce programme est similaire au problème étudié par TURNOVSKY (1988). Les solutions de ce programme de maximisation sont :

$$C_b^A = \frac{Y - G^A}{x\left(1 + x^{\frac{\delta}{1-\delta}}\right)} \quad C_a^A = x^{\frac{1}{1-\delta}} C_b^A \tag{10}$$

$$C_a^B = \frac{Y - G^B}{x^{-1}\left(1 + x^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\right)} \quad C_b^B = x^{-\frac{1}{1-\delta}} C_a^B \tag{11}$$

L'équation d'équilibre de la balance commerciale (3), combinée avec les niveaux de consommation C_b^A et C_a^B, implique la relation suivante :

$$x \equiv x\left(G^A, G^B\right) = \frac{\left(Y - G^A\right)^{1-\delta}}{\left(Y - G^B\right)^{1-\delta}} \tag{12}$$

Nous pouvons alors en conclure (cf. TURNOVSKY (1988), p. 115) que :

$$\frac{\partial x}{\partial G^A} < 0 \qquad \frac{\partial x}{\partial G^B} > 0 \tag{13}$$

Notons que les termes de l'échange constituent l'unique canal de transmission des politiques budgétaires nationales entre les deux pays. Pour les fonctions d'utilité que nous avons choisies, il apparaît qu'un accroissement des dépenses publiques dans le pays A, et donc du bien a, implique une augmentation du prix du bien a et accroît les termes de l'échange au bénéfice du consommateur représentatif du pays A. Pour un revenu donné, cet agent voit son pouvoir d'achat augmenter et peut ainsi acquérir une plus grande quantité de bien b.

3 Le jeu avec leadership

Nous nous intéressons au cas où il existe une asymétrie stratégique entre les deux pays. Sans perte de généralité, nous supposons que le gouvernement *A* est en position de meneur de Stackelberg : il est ainsi capable d'annoncer sa décision avant que le gouvernement *B* ne choisisse sa propre politique budgétaire. Les gouvernements choisissent leurs niveaux de dépenses publiques avant que le consommateur représentatif ne fasse lui-même ses choix de consommation. De ce fait, une variation du montant des dépenses publiques engendre deux effets : un effet revenu via le taux d'imposition appliqué au revenu et un effet substitution qui modifie la composition du panier de consommation en biens privés. L'objectif de chaque gouvernement revient à maximiser le bien-être de son agent représentatif.

Etant donné que les dépenses en consommation de l'agent représentatif dépendent du prix relatif et du niveau des dépenses publiques décidé par le gouvernement de son pays, il existe pour chaque consommateur une fonction d'utilité indirecte qui dépend uniquement du niveau des dépenses publiques des deux pays :

$$V^I\left(G^I, G^J\right) = \left[\left(v^I\left(G^I, G^J\right)\right)^\gamma + \left(G^I\right)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}} \text{ avec } I = A, B,\ J = A, B \text{ et } I \neq J \tag{14}$$

où

$$v^I\left(G^I, G^J\right) = \left(Y - G^I\right)^\delta \left(\left(Y - G^J\right)^\delta + \left(Y - G^I\right)^\delta\right)^{\frac{1-\delta}{\delta}} \tag{15}$$

avec $I = A,\ B,\ J = A,\ B$ et $I \neq J$

Ces deux fonctions caractérisent les fonctions de paiement respectives des gouvernements *A* et *B*.

Notons que les externalités liées aux dépenses publiques de l'autre pays sont négatives puisque nous avons[4] :

$$V_2^A\left(G^A, G^B\right) = -\frac{\partial U^A}{\partial C_a^A} \cdot C_b^A \cdot \frac{\partial x}{\partial G^B}$$

$$V_2^B\left(G^B, G^A\right) = \frac{\partial U^B}{\partial C_b^B} \cdot C_a^B \cdot \frac{\partial x}{\partial G^A}$$

et que nous sommes en mesure de déduire les signes des derniers termes de ces égalités de la relation (13). L'existence d'externalités négatives est relativement simple à comprendre. Une augmentation des dépenses publiques dans un pays modifie les termes de l'échange au détriment du consommateur représentatif de l'autre pays.

4. En notant $V_2^I\left(G^I, G^J\right) = \frac{\partial V^I\left(G^I, G^J\right)}{\partial G^J}$.

Notons G_S^A et G_S^B les niveaux de dépenses publiques décidés par les gouvernements A et B correspondant à l'équilibre de Stackelberg. G_S^A est défini comme :

$$G_S^A = \arg\max_{G^A} V^A\left(G^A, R^B\left(G^A\right)\right)$$

où $R^I(G^J)$ est la meilleure réponse du gouvernement I à une politique G^J. La condition du premier ordre pour le pays meneur A implique :

$$\Theta^A\left(G_S^A\right) \equiv V_1^A\left(G_S^A, R^B\left(G_S^A\right)\right) + V_2^A\left(G_S^A, R^B\left(G_S^A\right)\right)\frac{\partial R^B}{\partial G^A}\left(G_S^A\right) = 0.$$

Nous pouvons alors avancer la proposition suivante :

PROPOSITION. i) A l'équilibre de Stackelberg les dépenses publiques sont moins élevées que les dépenses publiques issues de l'équilibre de Nash pour le pays meneur (pays A) **et** pour le pays suiveur (pays B) si γ est suffisamment élevé par rapport à δ de telle sorte qu'il existe des **complémentarités stratégiques**. Dans ce cas, les utilités sont plus élevées dans les deux pays comparées aux utilités issues de l'équilibre de Nash.

ii) Les dépenses publiques du meneur (du suiveur) à l'équilibre de Stackelberg sont plus (moins) élevées qu'à l'équilibre de Nash si γ est suffisamment faible par rapport à δ de telle sorte qu'il existe des **substituabilités stratégiques**. Dans ce cas, l'utilité du pays meneur est plus élevée qu'à l'équilibre de Nash, alors que l'utilité du pays suiveur est plus faible qu'à l'équilibre de Nash.

DÉMONSTRATION. Voir Annexe.

Cette proposition montre tout d'abord que les deux gouvernements engendrent des dépenses publiques moins élevées qu'à l'équilibre de Nash non coopératif lorsqu'un des gouvernements est meneur et qu'il existe des complémentarités stratégiques.

Il est montré dans l'annexe qu'il existe des complémentarités stratégiques entre les deux gouvernements si γ est suffisamment élevé par rapport à δ et des substituabilités stratégiques dans le cas inverse. Or le type d'interactions stratégiques est crucial puisqu'il détermine le signe de la pente de la fonction de réaction d'un pays. Ici ce type peut changer selon les valeurs relatives des élasticités de substitution. Cette ambiguïté n'est pas étonnante étant donné l'existence d'effets de revenu et d'effets prix qui peuvent agir en sens opposés.

Afin d'illustrer ce propos, considérons le cas où γ est assez faible par rapport à δ, c'est-à-dire où le panier de biens privés et le bien public sont peu substituables pour l'agent. Alors une augmentation de G^B entraîne un accroissement du prix relatif x. En conséquence, le « panier de biens privés » diminue (d'autant plus que les biens privés sont peu substituables entre eux, cf. eq. (14)). Comme le panier privé et le bien public sont assez complémentaires, il s'en suit que l'utilité marginale du bien public diminue. Au total, cela correspond à des substituabilités stratégiques. Un raisonnement similaire explique pourquoi il peut exister des complémentarités stratégiques lorsque γ est suffisamment élevé par rapport à δ.

On peut alors expliquer la proposition donnée plus haut de la manière suivante. Il existe des externalités négatives entre les pays. Le pays meneur est alors dans une meilleure situation en réduisant ses dépenses par rapport à leur niveau à l'équilibre de Nash puisque cela incite le pays suiveur à diminuer ses propres dépenses en raison des complémentarités stratégiques. Cela est profitable au pays meneur en raison des externalités négatives. La terminologie utilisée par Fudenberg et Tirole (1985) qualifie cette situation de « puppy dog », situation dans laquelle les deux joueurs sont incités à réduire le niveau de leurs actions. Dans le cas inverse, i.e lorsque γ est suffisamment faible par rapport à δ, ce qui correspond à des substituabilités stratégiques, le pays meneur est dans une situation meilleure en augmentant ses dépenses par rapport au niveau décidé à l'équilibre de Nash : ceci entraîne le pays suiveur à réduire ses propres dépenses publiques par rapport au niveau décidé à l'équilibre de Nash en raison de l'existence de substituabilités stratégiques. Cette solution bénéficie au pays meneur puisqu'il existe des externalités négatives. Fudenberg et Tirole qualifient cette situation de « top dog ».

La comparaison des niveaux de bien-être nous montre que le pays suiveur bénéficie d'un avantage en bien-être de « second joueur » dans le cas où γ est suffisamment élevé par rapport à δ (existence de complémentarités stratégiques). Ce résultat est issu du fait qu'étant donné le signe des externalités entre les pays, le pays suiveur bénéficie de la baisse des dépenses du pays meneur par rapport à l'équilibre de Nash. D'un autre coté, lorsque γ est suffisamment faible par rapport à δ, (existence de substituabilités stratégiques), l'effet inverse opère, et ce, toujours en raison des externalités négatives : le « second joueur » souffre de l'asymétrie stratégique qui existe entre les joueurs.

4 Conclusion

Dans cet article, nous avons développé un modèle d'échange à deux pays et deux biens dans lequel il existe une interdépendance budgétaire entre les pays et nous avons analysé les conséquences sur le bien-être d'une situation d'asymétrie stratégique entre les gouvernements lorsque l'un des gouvernements dispose d'un avantage de premier joueur. Nous avons alors montré que pour des élasticités de substitution données, l'existence d'une asymétrie stratégique peut entraîner des gains en bien-être pour les deux pays en comparaison avec les niveaux de bien-être obtenus à l'équilibre de Nash symétrique. En d'autres termes, l'existence d'une asymétrie stratégique entre les pays peut être bénéfique pour les pays y compris pour le pays suiveur. Ce résultat montre l'existence d'un avantage qui peut être tiré par le « second joueur ». Cela peut s'avérer important dans l'évaluation du bien-fondé de la coordination internationale des politiques budgétaires et fiscales. Néanmoins, ceci n'est pas toujours le cas et cela dépend de la valeur des coefficients des élasticités de substitution.

Notre modèle adopte des hypothèses certes très spécifiques. Certaines de ces hypothèses pourraient être relâchées, en particulier la spécialisation extrême des pays dans la production d'un bien particulier, ainsi que l'achat exclusif du bien national par le gouvernement d'un pays donné.

L'hypothèse de fixité des niveaux de production a pour effet de limiter l'impact des politiques de dépenses publiques (avec équilibre budgétaire) au seul canal de transmission passant par le prix relatif et les choix de consommation. D'autres canaux de transmission existent. Le recours à une fonction de production avec possible taxation du (des) facteur(s) de production permettrait de les explorer. Cela constitue une voie de recherche future prometteuse. ■

Références

CAHUC P. and KEMPF H. (1999). – « Asynchronized multiperiod commitments and cycles », *Journal of Economic Behavior and Organization*, vol. 40, 387-407.

COOPER R. (1999). – *Coordination games*, Cambridge University Press.

DEVEREUX M. (1991). – « The international coordination of fiscal policy and the terms of trade », *Economic Inquiry*, vol. 29, 720-736.

FUDENBERG D. and TIROLE J. (1985). – « The Fat-Cat, the Puppy-Dog play and the Lean-and-Hungry Look », *American Economic Review*, vol. 75, 361-366.

GAL-OR E. (1985). – « First-mover and second-mover advantages », *International Economic Review*, vol. 26, 649-653.

JENSSEN H. (1996). – « The advantage of international fiscal cooperation under alternative monetary regimes », *European Journal of Political Economy*, vol. 12, 485-504.

SORENSEN J.R. (1996). – « Coordination of fiscal policy among a subset of countries », *Scandinavian Journal of Economics*, vol. 98, 11-118.

TURNOVSKY S.J. (1988). – « The gains from fiscal cooperation in the two-commodity real trade model », *Journal of International Economics*, vol. 25, 111-121.

WANG Y.-Q. (1999). – « Commodity taxes under fiscal competition : Stackelberg equilibrium and optimality », *American Economic Review*, vol. 89, 974-981.

ANNEXES

A. *Démonstration de la proposition 1*

A.1 *Signe des interactions stratégiques*

– Nous pouvons écrire la fonction $V_1^B\left(G^B, G^A\right)$ comme suit :

$$V_1^B\left(G^B, G^A\right) = f^B\left(G^B, G^A\right) \cdot g^B\left(G^B, G^A\right)$$

avec :

$$f^B\left(G^B, G^A\right) = \left[v_1^B\left(v^B\right)^{\gamma-1} + \left(G^B\right)^{\gamma-1}\right]$$

$$g^B\left(G^B, G^A\right) = \left[\left(v^B\right)^{\gamma} + \left(G^B\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} > 0$$

La composante « interaction stratégique » $V_{12}^B\left(G^B, G^A\right)$ s'écrit de la manière suivante[5] :

$$V_{12}^B\left(G^B, G^A\right) = f_2^B \cdot g^B + f^B \cdot g_2^B$$

A l'équilibre de Nash nous avons :

$$V_1^B\left(G_N, G_N\right) = 0 \Leftrightarrow f^B\left(G_N, G_N\right) = 0 \tag{16}$$

et les interactions stratégiques sont réduites à :

$$V_{12}^B\left(G_N, G_N\right) = f_2^B\left(G_N, G_N\right) \cdot g^B\left(G_N, G_N\right)$$

Le signe de $V_{12}^B\left(G_N, G_N\right)$ dépend du signe de $f_2^B\left(G_N, G_N\right)$ puisqu'on sait que g^B est toujours positif :

$$f_2^B\left(G^B, G^A\right) = \left(v^B\right)^{\gamma-1} v_{12}^B + (\gamma-1)\left(v^B\right)^{\gamma-2} v_2^B v_1^B$$

avec :

$$v^B = \left(Y - G^B\right)^{\delta}\left(\left(Y - G^B\right)^{\delta} + \left(Y - G^A\right)^{\delta}\right)^{\frac{1-\delta}{\delta}} > 0 \tag{17}$$

5. Nous notons h_x la dérivée de la fonction h par rapport au $x^{\text{ème}}$ argument.

$$v_1^B = -\frac{v^B}{Y-G^B}\left[\frac{\left(Y-G^B\right)^\delta + \delta\left(Y-G^A\right)^\delta}{\left(Y-G^B\right)^\delta + \left(Y-G^A\right)^\delta}\right] < 0 \tag{18}$$

$$v_2^B\left(G^B, G^A\right) = -v^B\left[\frac{(1-\delta)\left(Y-G^A\right)^{\delta-1}}{\left(Y-G^B\right)^\delta + \left(Y-G^A\right)^\delta}\right] < 0$$

$$v_{12}^B\left(G^B, G^A\right) = (1-\delta)v^B\,\frac{\left(Y-G^A\right)^{\delta-1}}{Y-G^B}\left[\frac{(1-\delta)\left(Y-G^B\right)^\delta + \delta\left(Y-G^A\right)^\delta}{\left(\left(Y-G^B\right)^\delta + \left(Y-G^A\right)^\delta\right)^2}\right] > 0$$

Notons que :

$$\frac{\partial f_2^B}{\partial \gamma} > 0$$

Cela implique qu'à l'équilibre de Nash on a :

$$f_2^B\left(G_N, G_N\right) > (\leq) 0 \text{ et } V_{12}\left(G_N, G_N\right) > (\leq) 0 \text{ for } \gamma > (\leq) \bar{\gamma}$$

avec $\bar{\gamma}$ tel que :

$$f_2^B\left(G_N, G_N\right) = 0$$

ce qui est équivalent à :

$$\left(Y-G_N\right)^\delta\left(\bar{\gamma}-\delta\right) + \bar{\gamma}\delta\left(Y-G_N\right)^\delta = 0$$

ce qui implique :

$$\bar{\gamma} = \frac{\delta}{1+\delta}$$

Un raisonnement similaire s'applique pour $V_{12}^A\left(G^N, G^N\right)$.

– Monotonie des fonctions de réaction.

Le théorème des fonctions implicites appliqué à la condition du premier ordre $V_1\left(G^I, G^J\right) = 0$ nous donne :

$$\frac{dG^I}{dG^J} = -\frac{V_{12}\left(G^I, G^J\right)}{V_{11}\left(G^I, G^J\right)} \text{ avec } V_{11}\left(G^I, G^J\right) < 0 \tag{19}$$

Nous en déduisons qu'il existe une fonction de réaction que l'on note $G^I = R\left(G^J\right)$ équivalente à la condition $V_1\left(G^I, G^J\right) = 0$.

D'après les propriétés de la fonction $V_1\left(G^I, G^J\right)$, les fonctions de réaction sont continûment dérivables, ce qui implique que leur monotonie est équivalente à leur injectivité. Pour ce qui concerne le pays *A,* l'injectivité de $R\left(G^B\right)$ est équivalente à montrer que pour tout $\left(G^A, G_1^B, G_2^B\right) \in [0,1]^3$:

(20) $$V_1^A\left(G^A, G_1^B\right) = V_1^A\left(G^A, G_2^B\right) = 0 \Rightarrow G_2^B = G_1^B$$

Nous utilisons un raisonnement par l'absurde et supposons sans perte de généralité que $G_1^B > G_2^B$. D'après (16), (17) et (18), ces dernières égalités sont équivalentes à :

$$\frac{v_1^A\left(G^A, G_1^B\right)}{\left[v^A\left(G^A, G_1^B\right)\right]^{1-\gamma}} + \frac{1}{\left(G^A\right)^{1-\gamma}} = 0 = \frac{v_1^A\left(G^A, G_2^B\right)}{\left[v^A\left(G^A, G_2^B\right)\right]^{1-\gamma}} + \frac{1}{\left(G^A\right)^{1-\gamma}}$$

ce qui implique :

(21) $$\frac{v_1^A\left(G^A, G_1^B\right)\left[v^A\left(G^A, G_1^B\right)\right]^{1-\gamma}}{v_1^A\left(G^A, G_2^B\right)\left[v^A\left(G^A, G_2^B\right)\right]^{1-\gamma}} = 1$$

Mais nous avons :

$$\frac{v_1^A\left(G^A, G_1^B\right)}{v_1^A\left(G^A, G_2^B\right)} > 1 \text{ puisque } v_{12} > 0 \text{ et } G_1^B > G_2^B$$

et

$$\frac{\left[v^A\left(G^A, G_1^B\right)\right]^{1-\gamma}}{\left[v^A\left(G^A, G_2^B\right)\right]^{1-\gamma}} > 1 \text{ puisque } v_2 < 0 \text{ et } G_1^B > G_2^B$$

Ces deux inégalités impliquent que (21) est impossible et (20) est démontrée, ce qui prouve la monotonie de la fonction $R\left(G^B\right)$.

Un raisonnement similaire s'applique pour le pays *B.*

– Interactions stratégiques.

Nous avons démontré, par la monotonie des fonctions de réaction, que leur pente est de signe constant. La relation (19) se réécrit :

$$R'\left(G^J\right) = -\frac{V_{12}\left(G^I, G^J\right)}{V_{11}\left(G^I, G^J\right)}$$

ce qui implique que la fonction V_{12} **est de signe constant** en tout point $\left(G^I, G^J\right)$ vérifiant la condition de premier ordre, puisqu'alors $V_{11}\left(G^I, G^J\right) < 0$.

D'après notre étude de l'équilibre de Nash, nous pouvons alors écrire :

Pour $\gamma > \frac{\delta}{1+\delta}$, puisque $V_{12}^{A}\left(G^{N},G^{N}\right) > 0$, nous avons $V_{12}^{A}\left(G^{A},G^{B}\right) > 0$ $\forall G^{A},G^{B} \in [0,1]$.

Pour $\gamma < \frac{\delta}{1+\delta}$, puisque $V_{12}^{A}\left(G^{N},G^{N}\right) < 0$, nous avons $V_{12}^{A}\left(G^{A},G^{B}\right) < 0$ $\forall G^{A},G^{B} \in [0,1]$.

Un raisonnement similaire s'applique pour le pays B

A.2 ***Niveau des dépenses publiques***

Nous avons

$$\Theta^{A}\left(G_{S}^{A}\right) \equiv V_{1}^{A}\left(G_{S}^{A},R^{B}\left(G_{S}^{A}\right)\right) + V_{2}^{A}\left(G_{S}^{A},R^{B}\left(G_{S}^{A}\right)\right)\cdot\frac{\partial R^{B}}{\partial G^{A}}\left(G_{S}^{A}\right) = 0.$$

D'après la condition du second ordre, $\Theta^{A}(\cdot)$ est localement décroissante au voisinage de G_{S}^{A}. D'après les caractéristiques des fonctions d'utilité et les propriétés des fonctions de réaction, on peut montrer que G_{S}^{A} est l'unique équilibre de Stackelberg. Ainsi :

$$\Theta^{A}(G) < (>) 0 \Leftrightarrow G > (<) G_{S}^{A} \tag{22}$$

Pour $\gamma > \bar{\gamma}$

Puisqu'il existe des complémentarités stratégiques, les fonctions de réaction sont alors croissantes car

$$R'\left(G^{A}\right) = -\frac{V_{12}^{B}\left(G^{B},G^{A}\right)}{V_{11}^{B}\left(G^{B},G^{A}\right)}$$

avec $V_{11}^{B}\left(G^{B},G^{A}\right) < 0$ et $V_{12}^{B}\left(G^{B},G^{A}\right) > 0$ et puisque les externalités sont négatives nous avons :

$$\begin{aligned}\Theta^{A}(G_{N}) &\equiv V_{1}^{A}\left(G_{N},R^{B}(G_{N})\right) + V_{2}^{A}\left(G_{N},R^{B}(G_{N})\right)\cdot\frac{\partial R^{B}}{\partial G^{A}}(G_{N})\\ &< V_{1}^{A}\left(G_{N},R^{B}(G_{N})\right) = 0.\end{aligned}$$

Et d'après (22), $G_{S}^{A} < G_{N}$. Comme la fonction de réaction de B est croissante on obtient :

$$G_{S}^{B} = R^{B}\left(G_{S}^{A}\right) < R^{B}(G_{N}) = G_{N} \tag{23}$$

En utilisant les résultats de GAL-OR (1985) et CAHUC et KEMPF (1999), nous pouvons établir la relation suivante :

$$G_{S}^{A} < G_{S}^{B} < G_{N}$$

La comparaison des niveaux de bien-être nous donne immédiatement :

$$V^A\left(G_S^A, G_S^B\right) > V^A\left(G_N, G_N\right)$$

puisque G_S^A est optimal, et que :

$$V^B\left(G_S^B, G_S^A\right) > V^B\left(G_N^B, G_S^A\right) > V^B\left(G_N, G_N\right)$$

la première inégalité étant vérifiée car G_S^B est la meilleure réponse à G_S^A et la seconde inégalité étant vérifiée puisque $G_S^A < G_N$ et qu'il existe des externalités négatives.

Pour $\gamma < \bar{\gamma}$

Puisqu'il existe des substituabilités stratégiques, les fonctions de réaction sont alors croissantes et puisque nous sommes en présence d'externalités négatives, nous avons :

$$\begin{aligned}\Theta^A\left(G_N\right) &\equiv V_1^A\left(G_N, R^B\left(G_N\right)\right) + V_2^A\left(G_N, R^B\left(G_N\right)\right)\cdot\frac{\partial R^B}{\partial G^A}\left(G_N\right)\\ &> V_1^A\left(G_N, R^B\left(G_N\right)\right) = 0\end{aligned}$$

Donc d'après (22), $G_S^A > G_N$. La fonction de réaction du pays B étant décroissante, on a donc :

$$G_S^B = R^B\left(G_S^A\right) < R^B\left(G_N\right) = G_N$$

Nous pouvons ainsi établir la relation suivante :

$$G_S^B < G_N < G_S^A$$

La comparaison des niveaux de bien-être nous donne immédiatement :

$$V^A\left(G_S^A, G_S^B\right) > V^A\left(G_N, G_N\right)$$

puisque G_S^A est optimal et que :

$$V^B\left(G_S^B, G_S^A\right) < V^B\left(G_S^B, G_N\right) < V^B\left(G_N, G_N\right)$$

la première inégalité étant vérifiée puisque $G_S^A > G_N$ et qu'il existe des externalités négatives et la seconde inégalité étant vérifiée car G_N est la meilleure réponse à G_N.