ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 77 – 2005

Substituabilités entre demandes de facteurs induites par les demandes de biens

Edmond MALINVAUD*

RÉSUMÉ. – Les réponses à diverses questions de macroéconomie appliquée dépendent des valeurs attribuées aux élasticités de substitution entre les demandes de facteurs, ces demandes étant agrégées toutes origines sectorielles confondues. Les élasticités en cause traduisent non seulement des substituabilités dans les secteurs de production, mais aussi des substituabilités provenant du système des fonctions de demande de biens, lesquelles réagissent aux variations des prix relatifs de ces biens. Un modèle d'une assez grande généralité aboutit à une relation liant les variations des prix des facteurs aux variations des demandes agrégées de ces facteurs. La relation est appliquée à certaines spécifications particulières, notamment à une économie CES simple et, pour le cas de deux facteurs, à une économie où le système des demandes de biens est d'abord CES puis conforme à une spécification non-homothétique familière. Ainsi la relation présentée dans l'article permet d'étudier comment, au niveau agrégé, les substituabilités entre facteurs dépendent non seulement des formes des fonctions de production et de demande de biens, mais aussi de l'hétérogénéité entre les jeux de paramètres caractérisant ces fonctions.

Substitutabilities between factor demands as depending on demands for goods

ABSTRACT. – Answers to various questions of applied macroeconomics depend on the values given to elasticities of substitution between the demands for factors, these demands being aggregated across productive sectors. Such elasticities reflect not only substitutabilities within productive sectors, but also substitutabilities arising from the system of demand functions for goods, showing how the latter demands react to changes in relative prices of goods. A fairly general model leads to a relation linking changes in factor prices to changes in the aggregate demands for these factors. The relation is applied to particular specifications, especially to a simple CES economy and, for the case of two factors, to an economy in which the system of demand functions for goods is either CES or given by a now familiar non-homothetic specification. Thus, the relation exhibited here lends itself to studies about how, at the aggregate level, factor substitutabilities depend not only on the forms of production and goods demand functions, but also on heterogeneity across the set of parameters characterizing these functions.

* Edmond MALINVAUD : Professeur honoraire au Collège de France, CREST.

Introduction

Depuis longtemps un problème d'agrégation est en suspens dans la théorie de la production. Il concerne la relation entre, d'une part, les substitutions entre demandes de biens et, d'autre part, les substitutions entre demandes de facteurs productifs. Il implique l'hétérogénéité entre branches quant aux intensités des utilisations respectives des divers facteurs, de même que la complexité du système des courbes d'Engel qui régissent les demandes des biens produits par ces branches, cela pour tous ensembles de prix relatifs.

Déjà dans les années 1960 certains professeurs de macroéconomie enseignaient que les changements dans les prix des facteurs affectaient de deux façons la combinaison des facteurs au niveau agrégé : d'une part directement à cause de leurs effets sur la combinaison efficace à mettre en œuvre dans chaque entreprise, d'autre part indirectement, à travers les changements induits des prix relatifs des divers biens, à cause de leurs effets sur le panier des biens demandés. Souvent il était dit que les seconds effets s'ajoutaient aux premiers et que les substitutions entre facteurs étaient donc plus importantes au niveau agrégé que dans les unités de production. Motivé à l'origine par l'étude des allègements de charges sur les salaires des non-qualifiés, j'ai cherché à examiner de près la conjecture qui, de fait, se trouve être invalide dans toute une gamme de cas.

La pertinence d'une exploration analytique du sujet devrait être reconnue plus généralement qu'en relation avec l'étude des politiques visant à réduire le chômage des non-qualifiés. Par exemple elle s'applique à l'évaluation correcte des causes susceptibles d'expliquer les changements dans la prime à la qualification[1]. Mieux connaître comment calculer les effets indirects induits par les substitutions entre branches devrait être aussi pertinent pour savoir comment tirer parti en macroéconomie des ensembles de plus en plus riches d'estimations provenant de l'exploitation économétrique de bases de microdonnées d'entreprises.

Cet article utilise un modèle qui est délibérément réduit aux quelques éléments essentiels à faire intervenir dans une analyse locale du problème. Elle généralise grandement certains résultats obtenus dans E. Malinvaud (2001 et 2002). Pour la mettre au point j'ai beaucoup bénéficié d'échanges avec Alain Bernard qui s'est intéressé dans ses recherches aussi bien à la représentation des substituabilités qu'à l'agrégation[2, 3].

L'étude procède à une analyse locale des variations de l'équilibre du modèle. Elle aboutit d'abord à une formule générale, dont sont ensuite tirées des implications, notamment grâce à l'examen de spécifications particulières. La formule, équation (44), caractérise les substituabilités entre demandes agrégées de facteurs. Elle lie en effet les variations relatives des prix des facteurs à celle des consommations globales de ces facteurs (vecteurs P et X^S). Y interviennent les caractéristiques de

1. Ainsi D. Acemoglu (2002) écrit : "the elasticity of substitution σ [between skilled and unskilled labor] is important for the behavior of the skill premium when supply changes… Unfortunately this parameter is rather difficult to estimate, since it refers to an elasticity of substitution that combines substitution both within and across industries" (p. 20).

2. Grâce à A. Bernard j'ai compris en particulier qu'il y avait une maladresse dans le traitement du modèle tel qu'il était présenté dans E. Malinvaud (2001 et 2002). Alors que j'avais procédé à une résolution complète des spécifications retenues, c'est-à-dire à une détermination de quasiment toutes les variations endogènes microéconomiques, avant d'agréger, il s'avère plus simple de procéder tôt à une agrégation partielle des relations induites par l'équilibre de la seule sphère productive (voir section 3 ici).

3. Ma recherche sur le problème a aussi profité de discussions avec B. Crépon, E. Girardin, G. Laroque, C. Meghir, J.-S. Pischke, C. Teulings et des remarques de lecteurs anonymes.

l'équilibre de référence quant à la structure de l'économie (A^h pour la technologie de la branche productive h, C pour le système des courbes d'Engel) et quant à l'hétérogénéité microéconomique (entre les consommations unitaires W^h de facteurs dans les branches et les élasticités-revenu e_h des demandes de biens).

Le cas où n'existe que deux facteurs illustre bien les enseignements à tirer de cette étude, car les substituabilités s'y caractérisent par une seule grandeur : l'élasticité de substitution agrégée. Sa détermination implique plus qu'une agrégation appropriée des élasticités de substitution des diverses branches, car elle doit aussi prendre en compte les effets indirects dûs aux substitutions entre demandes de biens. Sans entrer pour le moment dans l'étude qui montre l'importance des moments centrés d'ordre 2 de la distribution statistique des W^h et e_h, il s'avère que l'élasticité de substitution agrégée peut être sensiblement supérieure à une moyenne naturelle des élasticités de substitution dans les branches, mais cela si et seulement si d'une part l'hétérogénéité microéconomique est importante, d'autre part les substituabilités entre biens sont plus intenses que les substituabilités entre facteurs dans les branches.

Après qu'ait été posé le modèle (section 1), puis traité de l'analyse locale d'une branche productive (section 2), la section 3 aboutira à un système de relations entre les variations des demandes agrégées de facteurs et les variations des productions et des prix. La section 4 tirera parti des fonctions de demande des biens pour dégager une formule générale entre variations des demandes globales de facteurs et variations de leurs prix. Comme l'interprétation de cette formule n'est pas évidente, la suite de l'article lui sera consacrée. La section 5 montrera comment, dans une spécification simple du système des fonctions de production et de demande des biens, la caractérisation des élasticités de substitution reflète la matrice des covariances des contenus en facteurs de production entre les divers secteurs, c'est-à-dire leur hétérogénéité. La section 6 appliquera la formule générale au cas où n'existeraient que deux facteurs de production. Dans la section 7 ce cas sera plus étroitement caractérisé pour la situation où le système des demandes de biens serait du type CES, ainsi que la recherche macroéconomique l'a souvent supposé au cours des dernières décennies dans l'investigation de nombreux sujets. Afin de voir comment la distinction entre biens de première nécessité et biens de luxe affecte les résultats, la section 8 portera sur « l'économie de Stone-Geary ».

1 Modèle et notation

Il existe n biens ($h = 1, 2 \dots n$) produits dans n secteurs distincts, directement à partir de m facteurs de production ($i = 1, 2 \dots m$) selon une technologie à rendements d'échelle constants[4]. La production du bien h est dénotée y_h et la quantité de facteur i utilisée dans le secteur h est dénotée x_i^h . Les marchés des biens et des facteurs sont traités comme concurrentiels (sauf pour quelques commentaires con-

4. L'hypothèse simplifie l'analyse. Elle ne semble pas en restreindre foncièrement la portée, à en juger par E. MALINVAUD (2002) où des cas de rendements d'échelle décroissants sont aussi considérés. Généraliser systématiquement l'analyse de façon à ce qu'elle couvre aussi de tels cas est concevable, mais conduirait à y apporter pas mal de complications, et cela dès cette section.

cernant le marché du travail non-qualifié). A l'équilibre le prix du facteur i est p_i, celui du bien h est q_h.

Avec l'hypothèse de rendements constants, le revenu global r est tel que :

$$r = \sum_{h=1}^{n} q_h y_h = \sum_{i=1}^{m} p_i \left[\sum_{h=1}^{n} x_i^h \right] \tag{1}$$

Le système des fonctions de production est dénoté par :

$$y_h = f^h(x_1^h, x_2^h ... x_m^h) \qquad h = 1, 2...n \tag{2}$$

Les fonctions f^h sont supposées deux fois différentiables.

Le système des fonctions de demande de biens est dénoté par :

$$\ln y_h = g^h(\ln q_1, \ln q_2 ... \ln q_n \ ; \ln r) \qquad h = 1, 2...n \tag{3}$$

Par hypothèse il satisfait identiquement l'équation de budget, première égalité de (1). Les fonctions g^h sont supposées différentiables, leurs dérivées étant notées g_k^h par rapport à $\ln q_k$ et g_r^h par rapport à $ln\ r$. Nous désignerons par la suite C la matrice carrée ayant les éléments $C_{hk} = -g_k^h$ et par e le vecteur colonne ayant les composantes $e_h = g_r^h$. Nous introduirons également dans un moment une règle de normalisation des prix, de façon à faire disparaître l'arbitraire que comporterait autrement notre spécification, du fait de l'homogénéité des demandes de biens par rapport aux grandeurs nominales.

Dans le secteur de production h l'hypothèse de concurrence parfaite implique que y_h et les x_i^h maximisent :

$$q_h y_h - \sum_{i=1}^{m} p_i x_i^h \tag{4}$$

pour les valeurs supposées fixes de q_h et des p_i, ainsi que sous la contrainte de la fonction de production (2). Il en résulte que ces $m + 1$ variables sont solution de :

$$q_h f_i^h(x_1^h, x_2^h ... x_m^h) = p_i \qquad i = 1, 2...m \tag{5}$$

$$q_h y_h = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i^h \tag{6}$$

où f_i^h est la dérivée de f^h par rapport à x_i^h et l'équation (6) résulte de (2) et de ce que f^h est une fonction homogène de degré 1. La condition du second ordre pour que la solution en x^h de (5) et (6) soit un maximum local de (4) est que la matrice des dérivées secondes de f^h soit semi-définie négative en x^h.

Pour une définition complète du modèle il convient encore de se donner des hypothèses quant aux marchés des facteurs. Dans cette note nous supposerons le plus souvent ces marchés concurrentiels et admettrons que les offres agrégées des facteurs sont exogènes, soit x_i^S pour tout i. Les équations du modèle seront alors complétées par :

$$\sum_{h=1}^{n} x_i^h = x_i^S \qquad i = 1, 2 \ldots m \tag{7}$$

Peu de modifications auraient à intervenir si d'autres hypothèses étaient introduites sur les marchés des facteurs, par exemple que le prix p_m du dernier facteur soit exogène et l'offre x_m^S partiellement inemployée. Nous y reviendrons d'ailleurs.

Le modèle ainsi défini comporte $m(n+1) + 2n + 1$ variables endogènes, les x_i^h, p_i, y_h, q_h et r, correspondant aux équations (5), (7), (2), (3) et (1). Une analyse locale, s'appliquant au voisinage d'un équilibre supposé atteint, concerne les différentielles (infiniment petites) des variables endogènes (dx_i^h, etc.) qui correspondent à des variations infinitésimales exogènes (le plus souvent les dx_i^S).

Nous devrons bien entendu opérer avec des représentations matricielles. En particulier les différentielles des variables endogènes (sauf r) seront représentées par les vecteurs-colonnes X^h, P, Y, Q dont les composantes seront :

(8) $$X_i^h = \frac{dx_i^h}{x_i^h} \qquad P_i = \frac{dp_i}{p_i} \qquad Y_h = \frac{dy_h}{y_h} \qquad Q_h = \frac{dq_h}{q_h}$$

La règle retenue ici, pour la normalisation du système des prix sera la contrainte linéaire suivante sur le vecteur Q :

(9) $$\sum_{h=1}^{n} v_h \frac{dq_h}{q_h} = 0$$

où v_h sera la part du bien h dans le marché des biens, soit :

(10) $$v_h = \frac{q_h y_h}{r}$$

2 Analyse locale de l'équilibre du secteur *h*

Pour la simplicité des formules omettons, sauf exception, l'indice h dans cette section. L'équilibre d'un secteur, pour une demande y_h qu'il a à satisfaire, est déterminé par la solution des équations (5) et (2) qui lui correspondent. Il nous faut maintenant étudier le système obtenu par différentiation.

Commençons par donner la forme logarithmique à (5) soit :

(11) $$\log q + \log f_i = \log p_i \qquad i = 1, 2 \ldots m$$

et par différentiation :

(12) $$\frac{1}{f_i} \sum_{j=1}^{m} f_{ij} dx_j + \frac{dq}{q} = \frac{dp_i}{p_i} \quad i = 1, 2 \ldots m$$

où f_{ij} est la dérivée seconde de f par rapport à x_i et x_j .

De même (2) conduit à :

(13) $$\sum_{j=1}^{m} f_j dx_j = dy$$

Pour la suite il convient d'introduire dès maintenant les variables auxiliaires :

(14) $$w_i^h = \frac{p_i x_i^h}{q_h y_h} = \frac{f_i x_i}{y}$$

la seconde équation étant due à (5). Les w_i sont les parts des différents facteurs dans le coût unitaire de la production du secteur, en conformité avec l'équation (6). Introduisons de plus la notation :

(15) $$b_{ij} = \frac{f\, f_{ij}}{f_i f_j}$$

Avec ces notations les équations (12) et (13) deviennent :

(16) $$\sum_j b_{ij}\, w_j \frac{dx_j}{x_j} + \frac{dq}{q} = \frac{dp_i}{p_i} \quad \sum_j w_j \frac{dx_j}{x_j} = \frac{dy}{y}$$

qui sont rassemblées dans la forme matricielle suivante :

(17) $$\begin{bmatrix} P \\ dy/y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & U^m \\ {}^tU^m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_w X \\ dq/q \end{bmatrix}$$

où B est la matrice des b_{ij}, U^m et ${}^tU^m$ sont les vecteurs-colonnes et lignes ayant toutes leurs composantes égales à 1, tandis que D_w est la matrice diagonale des parts w_i.

Notons maintenant que pour tout i :

(18) $$\sum_j f_{ij} x_j = 0 \qquad \sum_j b_{ij} w_j = 0$$

La première équation, qui résulte de ce que f_i est homogène de degré 0, montre que 0 est racine de la matrice des dérivées secondes de f, associée au vecteur propre x. La seconde équation, qui résulte directement de la première et des définitions (14) et (15), montre de même que w est vecteur propre de B associé à la racine nulle. Notons encore que :

(19) $$\sum_{ij} w_i b_{ij} w_j = \frac{1}{f} \sum_{ij} x_i f_{ij} x_j \leq 0$$

où l'inégalité résulte de la condition du second ordre énoncée dans la section 1. La matrice B est donc semi-définie négative. Dès lors l'inverse de la matrice carrée figurant dans (17) existe[5] et a la forme :

(20) $$\begin{bmatrix} A & w \\ {}^tw & 0 \end{bmatrix}$$

5. Le lemme 1 de l'appendice de DIEWERT and WOODLAND (1977) l'indique, tout au moins si la matrice B a le rang m-1, ce que nous pouvons supposer sans restreindre vraiment la portée de notre analyse. En effet la matrice $U^m\ {}^tU^m - B$ est définie positive puisque, pour le seul vecteur propre w de B associé à la racine nulle, ${}^tw\, U^m$ est égal à 1.

où A est la matrice solution de :

(21) $$AB + w^t U^m = I \qquad A U^m = 0$$

(Le fait que Bw soit le vecteur nul est donné par (18) tandis que ${}^t w\, w = 1$ résulte de (14) et de l'hypothèse de rendements constants.)

Nous pouvons conclure cette section avec la relation matricielle déduite de (17), où nous réintroduisons l'indice h :

(22) $$\begin{bmatrix} D_w^h\ X^h \\ dq_h / q_h \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} A^h & w^h \\ {}^t w^h & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} P \\ dy_h / y_h \end{bmatrix}$$

3 Agrégation des demandes de facteurs

Sur la forme (22) la nature d'un système analogue qui va lier les variations des demandes agrégées de facteur aux autres variations dp_i / p_i, dy_h / y_h et dq_h / q_h se devine assez aisément. En effet la ligne i s'écrit :

(23) $$w_i^h \frac{dx_i^h}{x_i^h} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^h \frac{dp_j}{p_j} + w_i^h \frac{dy_h}{y_h}$$

Or selon (7) :

(24) $$\frac{dx_i^S}{x_i^S} = \sum_{h=1}^{n} \frac{x_i^h}{x_i^S} . \frac{dx_i^h}{x_i^h}$$

où les rapports x_i^h / x_i^S se calculent aisément à partir de (14) soit :

(25) $$p_i x_i^h = q_h y_h w_i^h$$

donc

(26) $$p_i x_i^S = \sum_{h=1}^{n} q_h y_h w_i^h$$

L'expression de droite a une interprétation directe si nous introduisons la part v_h de chaque bien h dans la valeur de la production globale, telle qu'elle a été définie par (10). Mise à part la valeur de cette production, le membre de droite est une moyenne pondérée de w_i^h. Nous pouvons écrire :

(27) $$\overline{w}_i = \sum_{h=1}^{n} v_h w_i^h$$

et en déduire :

(28)
$$\frac{x_i^h}{x_i^S} = \frac{v_h w_i^h}{\overline{w}_i}$$

Ainsi, selon (24) :

(29)
$$\overline{w}_i \frac{dx_i^s}{x_i^S} = \sum_{h=1}^{n} v_h w_i^h \frac{dx_i^h}{x_i^h}$$

Cette dernière équation montre comment opérer pour obtenir un système qui va déterminer les variations relatives des demandes agrégées de facteurs, les dx_i^S / x_i^S (la notation x_i^S avait été introduite pour l'offre du facteur i, mais l'égalité entre offre et demande est supposée). S'agissant du facteur i par exemple, il faut considérer les n équations telles que (23) prises dans les divers secteurs, puis multiplier chacune par le poids v_h lui correspondant, enfin sommer, pour avoir selon (29) la valeur de $\overline{w}_i \; dx_i^S / x_i^S$. Nous aboutissons ainsi à :

(30)
$$\overline{w}_i \frac{dx_i^S}{x_i^S} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^S \frac{dp_j}{p_j} + \sum_{h=1}^{n} v_h \; w_i^h \frac{dy_h}{y_h}$$

où, bien entendu, les a_{ij}^S sont les éléments de la matrice définie par :

(31)
$$A^S = \sum_{h=i}^{n} v_h A^h$$

Si W désigne la matrice à m lignes et n colonnes des w_i^h, on aboutit ainsi au système :

(32)
$$\begin{bmatrix} D_{\overline{w}} X^S \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^S & WD_v \\ {}^tW & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Y \end{bmatrix}$$

où $D_{\overline{w}}$ et D_v sont les matrices diagonales ayant respectivement les éléments $\overline{w}_i$ et v_h, tandis que X^S a les éléments dx_i^S / x_i^S. (Les n dernières lignes de (32) empilent les (m+1)-èmes lignes des modèles sectoriels (22) dans l'ordre).

Des équations définies par $Q = {}^tWp$ qui apparaît sur (32) et de la règle de normalisation (9) on déduit directement

(33)
$$0 = \sum_h v_h \frac{dq_h}{q_h} = \sum_{hi} v_h w_i^h \frac{dp_i}{p_i} = \sum_i \overline{w}_i \frac{dp_i}{p_i}$$

où il est tenu compte de (27). En d'autres termes la normalisation qui est retenue pour les variations des prix des biens impose une normalisation analogue sur les variations des prix des facteurs.

4 Demandes de biens et formules générales

Différentiant les fonctions de demande (3) nous obtenons :

(34)
$$Y = -CQ + e\frac{dr}{r}$$

Quelles conditions doivent être satisfaites par C et e pour que l'équation de budget (1) soit identiquement vérifiée par tout ensemble de variables obéissant à un tel système de lois de demande et à la règle de normalisation des prix ? Exprimée sur les différentielles l'équation (1) requiert :

(35) $$\frac{dr}{r} = \sum_h v_h \left[\frac{dy_h}{y_h} + \frac{dq_h}{q_h} \right] = \sum_h v_h \frac{dy_h}{y_h}$$

où la seconde équation résulte de (9), c'est-à-dire de la normalisation des prix. Compte tenu de (34), (35) s'écrit :

(36) $$\frac{dr}{r} = \sum_h v_h e_h . \frac{dr}{r} - \sum_{hk} v_h c_{hk} \frac{dq_k}{q_k}$$

C et e seront tels que l'équation de budget soit toujours vérifiée si et seulement si :

(37) $$\sum_h v_h e_h = 1 \text{ et } \sum_{hk} v_h c_{hk} \frac{dq_k}{q_k} = 0$$

pour tout ensemble des dq_k / q_k qui satisfera (9) ce qui impose l'existence d'un nombre γ tel que :

(38) $$\sum_h v_h c_{hk} = \gamma v_k \text{ pour tout } k$$

Soit en termes matriciels :

(39) $${}^t ve = 1 \quad {}^t v[C - \gamma I^h] = 0 \text{ pour un nombre } \gamma$$

Ajoutons maintenant le système (34) aux relations de la section précédente. Les n dernières lignes de (32) conduisent à :

(40) $$Y = e\frac{dr}{r} - C\,{}^t WP$$

De plus la différentiation de (1) implique :

(41) $$\frac{dr}{r} = \sum_i \overline{w}_i \left[\frac{dx_i^S}{x_i^S} + \frac{dp_i}{p_i} \right] = {}^t\overline{w}\left[X^S + P \right] = {}^t\overline{w}X^S$$

Ainsi :

(42) $$Y = e\,{}^t\overline{w}X^S - C^tW\,P$$

Or les m premières lignes de (32) s'écrivent :

(43) $$D_{\overline{w}}X^S = A^S P + WD_v Y$$

Reportant dans cette équation la valeur de Y donnée par (42) nous obtenons *l'équation fondamentale* de notre analyse.

(44) $$[D_{\overline{w}} - WD_v e\,{}^t\overline{w}]X^S = [A^S - WD_v C\,{}^tW]P$$

Elle rattache directement le vecteur X^S des variations des demandes globales de facteurs au vecteur P des variations des prix des facteurs. Tel était le but que nous visions. Enonçons le sous la forme suivante :

PROPOSITION 1. *Les variations X^S des inputs agrégés des facteurs sont liées aux variations P de leurs prix normalisés par l'équation fondamentale (44).*

Il reste à bien interpréter le résultat obtenu. Dès l'abord, quelques remarques générales peuvent être faites.

Remarque 1. Ce sont les seconds termes, à l'intérieur des deux crochets de la formule, qui capturent les effets indirects dus aux variations induites sur les prix relatifs des biens et aux substitutions entre demandes de biens. S'il se trouvait que ces seconds termes soient nuls, alors la relation entre X^S et P s'exprimerait simplement par :

(45) $$D_{\overline{w}} X^S = A^S P$$

qui transposerait directement celle apparaissant dans le secteur h pour autant que n'interviendrait aucun effet volume (dans l'équation (22) la variation dy_h serait alors nulle).

Remarque 2. On peut interpréter le second terme du membre de gauche de (44) comme traduisant un effet volume. En effet, s'il se trouvait que ${}^t\overline{w}X^S$ soit nul, seul subsisterait dans le membre de gauche $D_{\overline{w}}X^S$. Or le cas ${}^t\overline{w}X^S = 0$ correspond à un déplacement se faisant sur l'hypersurface isoquante dans l'espace des facteurs, disons aussi « dans l'ensemble isoquant ». Les variations positives et négatives dans les inputs agrégés des facteurs se compensent, chacune intervenant avec le poids correspondant à son importance dans la production globale[6]. C'est précisément ce que suppose la définition usuelle des élasticités de substitution entre facteurs, dans la théorie de la production[7]. D'où l'intérêt d'exprimer le résultat suivant :

PROPOSITION 2. *Dans l'ensemble isoquant $({}^t\overline{w}X^S = 0)$ les variations des inputs agrégés des facteurs sont liées aux variations de leurs prix normalisés $({}^t\overline{w}P = 0)$ par l'équation des substitutions :*

(46) $$D_{\overline{w}} X^S = [A^S - WD_v C\ {}^t W]P$$

Remarque 3. S'il n'y avait pas d'hétérogénéité entre secteurs quant à leurs intensités d'utilisation respective des divers facteurs, c'est-à-dire si

(47) $$w_i^h = \overline{w}_i \quad i = 1, 2 \ldots m\ ;\ h = 1, 2 \ldots n$$

alors la matrice W serait égale à $\overline{w}\ {}^tU^n$. Le second terme du membre de droite de (44) ou (46) serait nul du fait de la normalisation des prix. En somme, il n'y

6. Les équations (29), (14) et (13) montrent d'ailleurs que ${}^t\overline{w}X^S = {}^t vY$: les déplacements dans l'ensemble isoquant des facteurs se traduisent bien par $\sum q_h\ dy_h = 0$.

7. Pour les discussions de la définition à donner aux élasticités de substitution voir BERNARD (1986), HELM (1987) et les références qui y sont citées.

aurait pas d'effet induit sur les prix relatifs des biens, donc pas matière à substitution entre demandes de biens. Mais le cas qui nous intéresse est évidemment celui d'hétérogénéité.

Remarque 4. L'expression du second terme dans le crochet du membre de droite montre qu'il est une fonction quadratique de W. Cette remarque nous autorise à avancer, au moins provisoirement, la conclusion selon laquelle de petits écarts $w_i^h - \overline{w}_i$ n'auraient que des effets négligeables. Seuls risquent de vraiment importer les grands écarts.

Remarque 5. La forme des systèmes (44) et (46) fait apparaître, comme multiplicateurs de X^S et P respectivement, deux matrices carrées d'ordre m. Elle suggère une résolution directe donnant en général la valeur du vecteur P en fonction du vecteur exogène X^S. Mais l'équation (45) nous alerte, tout au moins pour le cas considéré dans la remarque 1, car la matrice symétrique A^S est singulière, comme chacune des matrices A^h, du fait de leurs définitions dans lesquelles ${}^tU^mA^h = 0$ interviennent. Nous aurons effectivement à nous préoccuper de tels cas et à tenir compte alors de la normalisation des prix comme adjuvant nécessaire à une résolution complète du système. N'insistons pas plus sur ce point, au niveau de généralité où nous nous trouvons.

Pour préciser l'interprétation des formules (44) et (46) qui restent peu transparentes, il est éclairant de considérer des cas particuliers, ce que nous allons faire maintenant.

5 Facteurs multiples dans des économies presque log-linéaires et homothétiques

Les formules (44) et (46) montrent que l'équation fondamentale et celle des substitutions dépendent d'une part des substituabilités dans les secteurs productifs et dans le système des demandes de biens (matrices A^h et C), d'autre part de l'hétérogénéité entre secteurs dans l'utilisation des facteurs et entre demandes de biens différents (matrice W et vecteur e). Dans les sections suivantes de cet article nous réduirons fortement le nombre de dimensions d'hétérogénéité en supposant $m = 2$. Cela simplifiera beaucoup l'étude des conséquences des substituabilités microéconomiques.

Auparavant il convient de focaliser l'attention dans cette section sur un cas général quant au nombre m des facteurs mais spécial par les fortes simplifications qu'il retient quant aux formes de la substituabilité dans les secteurs et dans le système des demandes de biens. Nous supposons pour cela que les fonctions de production f^h sont des CES (« constant elasticity of substitution »), à rendements d'échelle constants et ont toutes la même élasticité de substitution $\sigma^h = \sigma^P$. Nous supposons de plus que le système des lois de demande est lui aussi un CES où n'intervient qu'un seul paramètre : l'élasticité de substitution σ^C commune à tous les choix bilatéraux entre biens et services. De plus les élasticités-revenu e_h sont toutes égales à 1, de sorte que le système des lois de demande est homothétique. (Cette spécification des lois de demande est employée très souvent en macroéconomie en raison de sa commodité analytique, sans doute d'ailleurs trop souvent). Ainsi les hétérogénéités du système global concernent la seule matrice W.

Notons que si de plus $\sigma^C = \sigma^P = 1$ la spécification est purement log-linéaire. Débordant ce cas, le système qui va être étudié restreint beaucoup les écarts par rapport à la log-linéarité et les caractérise par deux paramètres seulement σ^P et σ^C.

Pour un secteur la fonction de production (2) est définie par :

(48) $$f^{-\omega} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i^{-\omega} \qquad \sigma^P = \frac{1}{1+\omega}$$

où l'indice h du secteur est pour l'instant omis et où les β_i sont des constantes. La dérivation de log f par rapport à x_i conduit à :

(49) $$\frac{f_i}{f} = \beta_i x_i^{-1} \left[\frac{f}{x_i} \right]^{\omega} = \frac{w_i}{x_i}$$

où la seconde équation, qui servira ci-dessous, résulte de (14). La dérivation de log f_i par rapport à x_j conduit de même à :

(50) $$x_j \frac{f_{ij}}{f_i} = (\omega+1)\left[\frac{x_j f_j}{f} - \delta_{ij} \right] \qquad b_{ij} = \frac{f f_{ij}}{f_i f_j} = \frac{1}{\sigma^P}\left[1 - \frac{\delta_{ij}}{w_j} \right]$$

où δ_{ij} est l'indicateur de Kronecker.

Pour déterminer dans la spécification retenue ici la matrice A il faut résoudre le système (21) qui s'écrit :

(51) $$\sum_k a_{ik} b_{kj} + w_i = \delta_{ij} \qquad \sum_k a_{ik} = 0$$

Compte tenu des valeurs données aux b_{kj} par (50), les deux équations ci-dessus impliquent :

(52) $$w_i - \frac{1}{\sigma_P} \sum_k a_{ik} \frac{\delta_{kj}}{w_k} = w_i - \frac{a_{ij}}{\sigma^P w_j} = \delta_{ij}$$

conduisant à :

(53) $$a_{ij}^h = \sigma^P \left[w_i^h w_j^h - \delta_{ij} w_j^h \right]$$

où les indices h ont été rappelées.

De même la matrice agrégée A^S définie par (31) a les éléments :

(54) $$a_{ij}^S = \sigma^P \left| \sum_h v_h w_i^h w_j^h - \delta_{ij} \sum_h v_h w_j^h \right|$$

Reprenant pour les moyennes les mêmes définitions que celles posées dans (27), nous ajoutons pour les covariances :

$$Cov(w_i, w_j) = \sum_h v_h (w_i^h - \overline{w}_i)(w_j^h - \overline{w}_j) \tag{55}$$

Nous obtenons ainsi :

$$a_{ij}^S = \sigma^P [Cov(w_i, w_j) + \overline{w}_j (\overline{w}_i - \delta_{ij})] \tag{56}$$

Il est opportun de noter à ce stade que le calcul ne se généralise pas à la détermination des valeurs locales des σ_{ij}^h, car l'expression donnée par (50) à b_{ij} ne se généraliserait que si le calcul des dérivées secondes f_{ij} opérait comme avec une fonction CES. De même encore si une fonction CES s'appliquait à chaque secteur, mais avec des ω^h et β^h spécifiques (53) devrait être modifié en y remplaçant σ^P par σ^h et l'expression de a_{ij}^S différerait de (54). L'hypothèse d'une économie presque log-linéaire et homothétique joue ainsi de deux façons : (i) par des structures particulières pour les matrices des élasticités de substitution binaires dans chaque secteur, (ii) par l'identité entre secteurs de la valeur σ^h qui dans la fonction CES joue comme indicateur général de toutes les élasticités de substitution. Nous verrons en revanche dans la section 6 comment une analyse locale s'applique dès lors que $m = 2$.

Pour le système des lois de demande nous supposons :

$$e = U^n \quad C = \sigma^C I^n \tag{57}$$

I^n étant la matrice unité d'ordre n. Cette spécification respecte les conditions (39) avec $\gamma = \sigma^C$. Pour l'application des formules générales (44) et (46) nous pouvons partir de ce que :

$$[WD_v e]_i = \overline{w}_i \qquad [WD_v C\, {}^tW]_{ij} = \sigma^C [Cov(w_i, w_j) + \overline{w}_i \overline{w}_j] \tag{58}$$

Le long d'une isoquante où ${}^t\overline{w}X^S = 0,$ la formule (46) s'écrit donc, compte tenu de (56) :

$$\overline{w}_i X_i^S = \sum_j \left\{ (\sigma^P - \sigma^C)[Cov(w_i, w_j) + \overline{w}_i \overline{w}_j] - \sigma^P \overline{w}_j \delta_{ij} \right\} P_j \tag{59}$$

Avec la normalisation des prix donnée par (33) cette équation s'écrit plus simplement :

$$\frac{dx_i^S}{x_i^S} = \frac{\sigma^P - \sigma^C}{\overline{w}_i} \sum_j Cov(w_i, w_j) \frac{dp_j}{p_j} - \frac{\sigma^P dp_i}{p_i} \tag{60}$$

ou, de façon équivalente en notation matricielle :

$$X^S = -[\sigma^P I^n + (\sigma^C - \sigma^P) D_{\overline{w}}^{-1} Cov] P \tag{61}$$

où Cov désigne la matrice des covariances (55).

Ainsi la matrice des élasticités croisées, mises à part les élasticités directes liant par exemple dx_i^S / x_i^S à $dp_i / p_i,$ a la même structure que la matrice des covariances des

w_i entre secteurs. Dès lors que $m > 2$ la description de la matrice des élasticités de substitution agrégées peut donner lieu à autant de développements que ceux dont a fait l'objet, en statistique mathématique, la description des matrices des covariances.

De plus, nous notons immédiatement que le résultat de la proposition 2 est très simple dans *l'économie intégralement log-linéaire et homothétique* et même, plus généralement, dans l'économie de cette section dès lors que $\sigma^C = \sigma^P$: *si l'offre du facteur i augmente de 10 pour cent, le prix relatif de ce facteur diminue à l'équilibre de 10.* σ^P *pour cent et les autres prix relatifs ne varient pas, cela quelles que soient sur l'isoquante les modifications compensatoires des offres des autres facteurs.* Cette économie est bien particulière. Le même résultat s'applique s'il n'y a pas d'hétérogénéité entre les secteurs, en ce sens que tous les moments du second ordre des w_i^h sont nuls. Cas lui aussi bien particulier.

6 Le cas de deux facteurs seulement

Ce cas où $m = 2$ a l'avantage d'apporter des résultats relativement simples, dont l'interprétation est assez transparente. Avec $m > 2$ se manifeste ce que les mathématiciens appellent parfois le « fléau de la dimensionnalité », qui dans un autre contexte a été bien révélé par le débat entre les deux Cambridge sur la théorie du capital. Ce fléau a pour effet de troubler les résultats et de nuire à la rigoureuse validité de toute interprétation simple.

La matrice A^S représente les effets agrégés des substitutions s'effectuant à l'intérieur des secteurs de production. La déterminer suppose la solution, pour chaque secteur, du système (21). Complexe en général, ainsi que l'a montré A. BERNARD (1986) et que nous l'avons remarqué dans la section précédente, cette solution est simple dans le cas $m = 2$. Elle conduit alors à des résultats intuitivement satisfaisants et éclairants.

Comme nous avons supposé des rendements d'échelle constants dans la production, les fonctions de production (2) peuvent être exprimées sous la forme :

$$(62) \qquad y_h = x_1^h \, \varphi^h \left[\frac{x_2^h}{x_1^h} \right] \quad h = 1, 2 \ldots n$$

A partir de cette formule il est possible de déterminer l'expression suivante de la matrice B^h.

$$(63) \qquad B^h = \frac{-1}{\sigma^h w_1^h w_2^h} \begin{bmatrix} (w_2^h)^2 & -w_1^h w_2^h \\ -w_1^h w_2^h & (w_1^h)^2 \end{bmatrix}$$

où σ^h est la valeur de l'élasticité de substitution entre x_1^h et x_2^h au voisinage de l'équilibre considéré[8].

8. Pour établir cette formule il convient évidemment de supprimer l'indice h dans (62) et les dérivations à opérer. On démontre aisément que $w_2 = x_2\varphi' / x_1\varphi$ et $w_1 = 1 - w_2$. La formule usuelle de l'élasticité de substitution d'une fonction de production à rendements constants permet d'écrire $\sigma = -x_1^2 w_1 w_2 \, \varphi / x_2^2 \varphi''$ où apparaît la dérivée seconde φ''. Après avoir calculé les dérivées $f_1, f_2, f_{11}, f_{12}, f_{22}$ de f, d'où les valeurs des b_{11}, b_{12} et b_{22}, on aboutit à une matrice qui peut être exprimée sous la forme (63).

La solution du système (21) conduit alors à une matrice A^h ayant la forme simple suivante :

(64) $$A^h = a^h \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

où

(65) $$a^h = \sigma^h w_1^h w_2^h$$

L'équation (31) implique alors que A^S a une forme analogue à (64) avec :

(66) $$a^S = \sum_{h=1}^{n} v_h \sigma^h w_1^h w_2^h$$

Le vecteur $A^S P$ a deux composantes égales en valeurs absolues mais de signes opposés. La première par exemple est égale à :

(67) $$a^S \left[\frac{dp_2}{p_2} - \frac{dp_1}{p_1} \right]$$

Si nous admettons maintenant que les variations dx_1^S et dx_2^S se font le long d'une isoquante du plan (x_1^S, x_2^S), nous voyons que le terme $A^S P$ dans le membre de droite de (46) conduirait, s'il était seul à intervenir, à :

(68) $$\bar{w}_1 \frac{dx_1^S}{x_1^S} = a^S \left[\frac{dp_2}{p_2} - \frac{dp_1}{p_1} \right] = -\bar{w}_2 \frac{dx_2^S}{x_2^S}$$

Ainsi nous aurions :

(69) $$\frac{dx_1^S}{x_1^S} - \frac{dx_2^S}{x_2^S} = \frac{a^S}{\bar{w}_1 \bar{w}_2} \left[\frac{dp_2}{p_2} - \frac{dp_1}{p_1} \right]$$

L'élasticité de substitution agrégée vaudrait :

(70) $$\hat{\sigma}^S = \sum_{h=1}^{n} v_h \frac{w_1^h w_2^h}{\bar{w}_1 \bar{w}_2} \sigma^h$$

donc une valeur qui n'est pas en général une moyenne pondérée[9] des σ^h .

Comme le second terme du crochet apparaissant dans l'équation (46) ne doit pas en général être négligé, il faut que nous nous fassions une meilleure idée de son rôle. Pour cela nous allons maintenir l'hypothèse $m = 2$ et lui adjoindre d'autres hypothèses.

9. En effet $\sum_h v_h w_1^h w_2^h = \bar{w}_1 \bar{w}_2 - \sum_h v_h (w_1^h - \bar{w}_1)^2$. Si les σ^h étaient tous égaux à une même valeur σ^P, $\hat{\sigma}^S$ serait égal à $\sigma^P \left[1 - \frac{Var(w)}{\bar{w}_1 \bar{w}_2} \right]$, où $Var(w)$ est le second terme du membre de droite de l'équation précédente.

7 Un système CES des demandes de biens

Les hypothèses complémentaires doivent surtout concerner la spécification des n fonctions g_h de demande de biens. Retenons d'abord la spécification (57) déjà utilisée dans la section 5 et habituelle en théorie macroéconomique, où elle est souvent déduite d'une fonction d'utilité particulière attribuée au consommateur représentatif, la fonction CES à élasticité de substitution constante[10]. Des équations (58) et de la règle de normalisation des prix (33) nous déduirons directement la forme suivante de l'équation fondamentale :

$$(71) \qquad [D_{\overline{w}} - \overline{w}^t\overline{w}]X^S = [A^S - \sigma^C Cov]P$$

Comme nous n'avons que deux facteurs et que $w_1^h + w_2^h = 1,$ nous voyons aisément que :

$$(72) \quad Cov(w_1, w_2) = -Var(w_1) = -Var(w_2) \qquad -Cov = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} Var(w)$$

En rapprochant cette formule de celle (64) s'appliquant à A^S, nous voyons que, au total, l'équation fondamentale prend la forme :

$$(73) \qquad \left[D_{\overline{w}} - \overline{w}\,^t\overline{w}\right]X^S = \left[a^S + \sigma^C Var(w)\right]\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}P$$

A première vue on pourrait penser que cette expression simple confirme l'idée que l'élasticité de substitution agrégée tend à être systématiquement supérieure à une valeur centrale des élasticités de substitution σ^h des secteurs productifs. Mais cette impression est trompeuse, comme on le voit aisément si on considère le cas où tous les σ^h seraient égaux à une même valeur σ^P caractérisant la substituabilité entre les deux facteurs dans les productions. En effet dans ce cas, selon (66), a^S serait égal à :

$$(74) \qquad a^S = \sigma^P \sum_h v_h w_1^h w_2^h = \sigma^P \left[\overline{w}_1\overline{w}_2 - Var(w)\right]$$

Ainsi une augmentation de l'hétérogénéité, exprimée ici par $Var(w)$, ne se traduit par une augmentation du crochet figurant à gauche de (73) que si l'élasticité de substitution σ^C dans la demande de biens est supérieure à l'élasticité de substitution σ^P dans la demande de facteurs.

10. Voir par exemple MALINVAUD (2002), partie 4. On y note notamment que dans le système CES la règle de la normalisation (9) est équivalente à $d\hat{q}/\hat{q} = 0$, où $\hat{q}$ est l'indice du niveau général des prix tel qu'il est habituellement défini dans ce système, car ses variations obéissent bien à : $\frac{d\hat{q}}{\hat{q}} = \sum_h v_h \frac{dq_h}{q_h}$.

De fait, les égalités des deux vecteurs à deux composantes figurant à droite et à gauche de (73) s'écrivent grâce à une seule et même équation :

$$\bar{w}_1\bar{w}_2\left[\frac{dx_1^S}{x_1^S}-\frac{dx_2^S}{x_2^S}\right]=\left[a^S+\sigma^C Var(w)\right]\left[\frac{dp_2}{p_2}-\frac{dp_1}{p_1}\right] \tag{75}$$

On lit directement sur cette équation que l'élasticité de substitution entre les deux facteurs au niveau agrégé est donnée par :

$$\sigma^S=\frac{a^S+\sigma^C Var(w)}{\bar{w}_1\bar{w}_2} \tag{76}$$

Dans le cas particulier où les σ^h sont tous égaux au même σ^P, la formule devient[11] :

$$\sigma^S=\sigma^P+(\sigma^C-\sigma^P)\frac{Var(w)}{\bar{w}_1\bar{w}_2} \tag{77}$$

L'équation (75) donne l'essentiel pour la solution complète du système. Ainsi, s'agissant de valeurs exogènes données des variations des offres de facteurs dx_1^S/x_1^S et dx_2^S/x_2^S, les deux variations endogènes dp_1/p_1 et dp_2/p_2 sont déterminées individuellement par la normalisation des prix, l'équation (33), soit :

$$\frac{dp_1}{p_1}=-\bar{w}_2\left[\frac{dp_2}{p_2}-\frac{dp_1}{p_1}\right] \qquad \frac{dp_2}{p_2}=\bar{w}_1\left[\frac{dp_2}{p_2}-\frac{dp_1}{p_1}\right] \tag{78}$$

la valeur du crochet figurant à droite dans les deux équations étant déduite directement de (75).

De même, (75) et (78) donnent la solution pour le cas où, le second facteur étant par exemple le travail non-qualifié, il existerait une offre excédentaire de ce travail conjointement avec un coût p_2 exogène. Dans (75) il faut alors remplacer dx_2^S/x_2^S par la variation endogène de la demande globale x_2^D de travail non-qualifié. En l'absence de toute variation de l'offre du premier facteur x_1^S, on obtient immédiatement :

$$\frac{dx_2^D}{x_2^D}=\frac{-\left[a^S+\sigma^C Var(w)\right]}{\bar{w}_2(\bar{w}_1)^2}\cdot\frac{dp_2}{p_2} \tag{79}$$

L'effet de la substitution dans la demande de facteurs se trouve magnifié par le multiplicateur $1/\bar{w}_1$, qui traduit la réduction du déséquilibre sur le marché des facteurs.

Au total la solution du système CES est très simple. Un peu de réflexion explique cette simplicité par le caractère intégralement homothétique du système. Non seulement intervient l'hypothèse de rendements d'échelle constants dans la production. Mais aussi celle , beaucoup plus irréaliste, d'homothétie du système des lois de demandes pour les biens : les courbes d'Engel sont toutes des droites issues de l'origine. La commodité analytique se paie donc d'un prix élevé.

Le réaliser nous incite à examiner un cas moins favorable, où la présence simultanée de biens de première nécessité et de biens de luxe serait reconnue. Cette pré-

11. Cette dernière formule est conforme à celles établies dans E. MALINVAUD (2002) à partir d'un modèle quelque peu différent.

occupation conduisit dès les années 1950 R. STONE (1954) et R. GEARY à examiner, indépendamment l'un de l'autre, un système de lois de demande linéaires ayant cette caractéristique. Nous allons reprendre ce système sous une forme un peu plus générale où figurera une élasticité de substitution σ^C quelconque (STONE et GEARY avait considéré le cas $\sigma^C = 1$).

8 Un système non-homothétique des demandes de biens

Contentons-nous ici de donner les grandes lignes de l'argumentation qui est plus précisément exposée en annexe. Le système des lois de demande est supposé avoir la forme :

$$y_h = \chi_h + \gamma_h \left[\frac{q_h}{\hat{q}}\right]^{-\sigma^C} \frac{r_e}{\hat{q}} \tag{80}$$

où χ_h, γ_h et σ^C sont des paramètres, la somme des γ_h étant égale à 1. Le paramètre χ_h est positif pour un bien de première nécessité. La variable $\hat{q}$ est un indicateur du niveau général des prix défini par :

$$\hat{q}^{1-\sigma^C} = \sum_{h=1}^{n} \gamma_h q_h^{1-\sigma^C} \tag{81}$$

La variable r_e est le « revenu excédentaire » :

$$r_e = \sum_{h=1}^{n} q_h (y_h - \chi_h) \tag{82}$$

Il est facile de voir que, si tous les χ_h sont nuls, ce système est similaire à celui considéré dans la section précédente.

L'annexe montre que le nouveau système est un cas particulier de celui introduit dans la section 1 avec les spécifications suivantes pour les élasticités de revenu :

$$e_h = \left[1 - \frac{\chi_h}{y_h}\right] \frac{r}{r_e} \tag{83}$$

les élasticités-prix $-C_{hk}$ étant alors définies par :

$$C_{hk} = \frac{\sigma^C r_e}{r} e_h \delta_{hk} + e_h v_k \left[1 - \frac{\sigma^C r_e}{r} e_k\right] \tag{84}$$

où δ_{hk} est l'indice de Kronecker et v_h est défini par (10). On note que, compte tenu de (A.11), les conditions (39) sont vérifiées avec le nombre $\gamma = 1$. Les valeurs du vecteur e et de la matrice C montrent que la spécification étudiée ici ne généralise (57) que pour le cas où $\sigma^C = 1$ dans (57).

Nous allons d'abord considérer le système des deux équations (44) pour des déplacements se faisant le long d'une isoquante ${}^{t}\overline{w}X^{S} = 0$. L'annexe montre que ce système se ramène à une équation (A.26) qui peut s'écrire :

$$(85) \quad \overline{w}_1\overline{w}_2\left[\frac{dx_1^S}{x_1^S} - \frac{dx_2^S}{x_2^S}\right] = \left\{a^S + \frac{\sigma^C r_e}{r}\left[m(ew^2) - [m(ew)]^2\right]\right\}\left[\frac{dp_2}{p_2} - \frac{dp_1}{p_1}\right]$$

où figurent les moments suivants de la distribution statistique, entre biens, des e_h et w_1^h :

$$(86) \qquad m(ew) = \sum_h v_h e_h w_1^h \quad m(ew^2) = \sum_h v_h e_h (w_1^h)^2$$

Ainsi l'élasticité de substitution agrégée est donnée par :

$$(87) \qquad \sigma^S = \frac{a^S}{\overline{w}_1\overline{w}_2} + \sigma^C \frac{r_e}{r} . \frac{m(ew^2) - [m(ew)]^2}{\overline{w}_1\overline{w}_2}$$

Afin de rendre cette formule plus transparente, l'annexe introduit des moments centrés tels que :

$$(88) \qquad \overline{m}(ew_1) = \sum_h v_h (e_h - 1)(w_1^h - \overline{w}_1) = Cov(e, w_1)$$

Elle concentre aussi l'attention sur le cas où le moment centré du troisième ordre $\overline{m}(e\, w_1^2)$, particulièrement difficile à évaluer et vraisemblablement très faible, serait nul. Elle dégage alors, pour l'élasticité de substitution agrégée σ^S, des formules qui peuvent se comparer à celles (76) et (77) s'appliquant à l'économie CES étudiée dans la section 7. Ainsi (76) se compare à :

$$(89) \qquad \overline{w}_1\overline{w}_2\sigma^S = a^S + \frac{r_e}{r}\sigma^C\left[Var(w) - [Cov(e, w)]^2\right]$$

Pour des valeurs données de $\overline{w}_1$, $Var(w)$ et a^S, l'élasticité σ^S aurait tendance à être plus faible dans l'économie de Stone-Geary que dans l'économie CES correspondante.

Mise à part l'interférence éventuelle de $\overline{m}(ew_1^2)$, le membre de droite de (89) est plus faible que celui de (76), à la fois parce que σ^C $Var(w)$ est multiplié par r_e / r, normalement inférieure à 1, et parce qu'intervient en déduction le terme normalement positif dû au carré de $Cov(e, w)$. Cependant ces deux corrections n'ont vraisemblablement qu'un impact assez faible. En particulier le rapport $[Cov(e, w)]^2$ / $Var(w)$ est égal à la variance des élasticités-revenu multipliée par le carré du coefficient de corrélation entre les e_h et w_1^h.

En revanche si nous considérons, comme nous l'avons fait à la fin de la section précédente, l'effet des variations du prix p_2 du travail non-qualifié sur la demande globale x_2^D de ce travail en cas d'offre excédentaire, la formule (79) doit être remplacée par une autre, (A.34) en annexe. Le multiplicateur, dû à la modification du déséquilibre sur le marché du travail non-qualifié, se révèle alors sensible à la corrélation intersectorielle entre le contenu en travail non-qualifié (w_2^h) et l'élasticité-revenu de la demande de biens (e^h) . Plus ce contenu est relativement élevé pour les biens de luxe (e^h élevé), plus donc $Cov(e, w)$ est négative, plus l'effet multiplicateur transitant par le marché des biens est lui aussi élevé[12]. ■

Références

ACEMOGLU D. (2002). – « Technical change, inequality and the labor market », *Journal of Economic Literature,* March, pp. 7-72.

BERNARD A. (1986). – « Mesure et représentation de la substituabilité », Communication au Séminaire René Roy, Paris.

DIEWERT W.E. and WOODLAND A.D. (1977). – « Frank Knight's theorem in linear programming revisited », *Econometrica*, March 1977, Vol. 45, pp. 375-98.

HELM D.R. (1987). – « Elasticity of substitution », *The New Palgrave Dictionary of Economics,* Macmillan, London.

MALINVAUD E. (2001). – « An aggregation problem : the demand for unskilled labour », *Document de travail CREST,* n° 2001-22.

MALINVAUD E. (2002). – « Sur l'agrégation des demandes de travail non-qualifié », *Annales d'Economie et de Statistique,* N° 66, pp. 42-80.

STONE R. (1954). – « Linear expenditure systems and demand analysis : an application to the pattern of British demand », *Economic Journal,* Vol. 64, pp. 511-27.

12. Ce résultat bien naturel avait été annoncé dans MALINVAUD (2001) pour le cas dans lequel la même élasticité de substitution σ^P s'appliquait à tous les secteurs de production. La formule était toutefois moins transparente, car elle ne concernait pas directement les élasticités-revenu e^h.

Annexe

Traitement de la spécification de Stone-Geary

Soit :

(A.1) $$y_h = \chi_h + \gamma_h \left[\frac{q_h}{\hat{q}}\right]^{-\sigma^C} \cdot \frac{r_e}{\hat{q}}$$

les demandes de biens s'adressant aux divers secteur h, l'indicateur $\hat{q}$ étant défini par :

(A.2) $$\hat{q}^{1-\sigma^C} = \sum_h \gamma_h q_h^{1-\sigma^C}$$

et le revenu excédentaire r^e par :

(A.3) $$r_e = \sum_h q_h (y_h - \chi_h)$$

(voir équations (80) et (82) du texte). Dans cette annexe nous écrirons maintenant σ au lieu de σ^C afin de simplifier les formules.

L'équation (A.1) peut se mettre sous la forme :

(A.4) $$\ln y_h + \ln\left[1 - \frac{\chi_h}{y_h}\right] = -\sigma \ln q_h + \ln r_e + (\sigma - 1)\ln \hat{q} + \ln \gamma_h$$

Différentiant nous obtenons :

$$\frac{dy_h}{y_h} + \frac{\chi_h}{y_h}\left[1 - \frac{\chi_h}{y_h}\right]^{-1} \frac{dy_h}{y_y} = \left[1 - \frac{\chi_h}{y_h}\right]^{-1} \frac{dy_h}{y_h}$$

(A.5) $$= -\sigma \frac{dq_h}{q_h} + \frac{dr_e}{r_e} + (\sigma - 1)\frac{d\hat{q}}{\hat{q}}$$

De même (A.3) conduit à :

(A.6) $$\frac{dr_e}{r} = \frac{dr}{r} - \sum_k \frac{\chi_k}{y_k} v_k \frac{dq_k}{q_k}$$

et (A.2) à :

(A.7) $$\frac{d\hat{q}}{\hat{q}} = \sum_k v_k e_k . \frac{dq_k}{q_k}$$

où v_k est défini par (10) et e_k par

(A.8) $$e_k = \left[1 - \frac{\chi_k}{y_k}\right] \frac{r}{r_e}$$

Introduisant (A.6) et (A.7) dans (A.5) et multipliant par $[1-\chi_h / y_h]$ nous obtenons :

(A.9) $$\frac{dy_h}{y_h} = e_h \frac{dr}{r} - \sum_{k=1}^{n} C_{hk} \frac{dq_k}{q_k}$$

où

(A.10) $$C_{hk} = \frac{\sigma r_e}{r} e_h \delta_{hk} + e_h v_k \left[1 - \frac{\sigma r_e}{r} e_k\right]$$

δ_{hk} étant l'indicateur de Kronecker égal à 1 si $h = k$, à 0 autrement.

L'équation (A.9) montre que e_h est l'élasticité-revenu et $-C_{hk}$ une élasticité-prix. Notons encore que, à partir d'ici, nous allons retenir comme variables pertinentes les e_h et n'aurons plus à faire intervenir les χ_h. De plus, nous notons en passant que les définitions de v_h par (10), r_e par (A.3) et e_h par (A.8) impliquent

(A.11) $$\overline{e} = \sum_h v_h e_h = 1$$

En vue d'appliquer l'équation fondamentale (44) à la spécification de STONE-GEARY, notons l'expression suivante de l'élément (j, i) de la seconde matrice du membre de droite :

$$\{WD_v C'W\}_{ji} = \frac{\sigma r_e}{r}\left[m(ew_j w_i) - m(ew_j)m(ew_i)\right] + m(ew_j)\overline{w}_i$$

où $m(ew_j w_i)$ et $m(ew_j)$ sont les moments définis par :

(A.13) $$m(ew_j w_i) = \sum_h v_h e_h w_j^h w_i^h \quad m(ew_j) = \sum_h v_h e_h w_j^h$$

Le long d'une isoquante, où par définition ${}^t\overline{w}X^S = 0,$ et compte tenu de la normalisation (33) du prix des facteurs, le système se ramène à :

(A.14) $$\frac{r}{r_e}\left[D_{\overline{w}} X^S\right]_j = \sum_{i=1}^{m} J_{ji} \frac{dp_i}{p_i}$$

où

(A.15) $$J_{ji} = \frac{r}{r_e} A_{ji}^S - \sigma\left[m(ew_j w_i) - m(ew_j)m(ew_i)\right]$$

Ce système est assez simple puisque nous n'identifions que deux facteurs ($m = 2$), ce qui donne notamment à la matrice A^S la forme découlant des équations (64) à (66) du texte. De plus la normalisation des prix (33) peut être prise en compte. Ainsi (A.14) implique :

(A.16) $$\frac{r}{r_e}\overline{w}_1\overline{w}_2\left[\frac{dx_1^S}{x_1^S} - \frac{dx_2^S}{x_2^S}\right] = \left[\overline{w}_1\overline{w}_2(J_{21}+J_{12}) - \overline{w}_2^2 J_{11} - \overline{w}_1^2 J_{22}\right]\left[\frac{dp_2}{p_2} - \frac{dp_1}{p_1}\right]$$

La formule permet de lire directement l'élasticité de substitution entre les deux facteurs. Mais elle est encore trop peu transparente pour nos besoins. Afin de voir en quoi l'hétérogénéité des demandes de biens ajoute ses effets à celle des besoins relatifs en facteurs des diverses branches productives, nous avons naturellement l'idée de décomposer les moments en écrivant par exemple :

(A.17) $$m(ew_1) = m\left[(e-1)w_1\right] + \overline{w}_1$$

(A.18) $$m(ew_1^2) = m\left[(e-1)w_1^2\right] + Var(w) + (\overline{w}_1)^2$$

Nous pouvons même introduire les moments centrés tels que :

(A.19) $$\overline{m}(ew_1) = \sum_h v_h(e_h - 1)(w_1^h - \overline{w}_1)$$

(A.20) $$\overline{m}(ew_1^2) = \sum_h v_h(e_h - 1)(w_1^h - \overline{w}_1)^2$$

formules dans lesquelles (A.11) est pris en compte. De ces définitions résultent par exemple :

(A.21) $$m(ew_1) = \overline{m}(ew_1) + \overline{w}_1$$

(A.22) $$m(ew_1^2) = \overline{m}(ew_1^2) + 2\overline{w}_1 Cov(e,w) + Var(w) + (\overline{w}_1)^2$$

où par définition $Cov(e, w)$ est identique à $\overline{m}(ew_1)$ défini par (A.19). De (A.21) et (A.22) on déduit directement :

(A.23) $$m(ew_1^2) - \left[m(ew_1)\right]^2 = \overline{m}(ew_1^2) - \left[\overline{m}(ew_1)\right]^2 + Var(w)$$

Remontant à (A.15) et tenant compte de (31) et (64) à (66), nous obtenons :

(A.24) $$J_{11} = -\frac{r}{r_e}a^S - \sigma\overline{m}(ew_1^2) + \sigma\left[Cov(e,w)\right]^2 - \sigma\, Var(w)$$

Les mêmes calculs peuvent être conduits pour J_{22} et $J_{12} = J_{21}$. Tenant compte de ce que $w_2^h - \overline{w}_2 = -(w_1^h - \overline{w}_1)$, il résulte $\overline{m}(ew_2^2) = \overline{m}(ew_1^2) = -\overline{m}(ew_1 w_2)$ et $\overline{m}(ew_2) = -\overline{m}(ew_1)$. Nous trouvons alors :

(A.25) $$J_{22} = J_{11} \quad J_{12} = J_{21} = -J_{11}$$

Ainsi (A.16) se ramène à :

(A.26) $$\frac{r}{r_e}\overline{w}_1\overline{w}_2\left[\frac{dx_1^S}{x_1^S} - \frac{dx_2^S}{x_2^S}\right] = -J_{11}\left[\frac{dp_2}{p_2} - \frac{dp_1}{p_1}\right]$$

Conjointement avec l'expression (A.24) l'élasticité de substitution globale σ^S s'en déduit :

(A.27) $$\sigma^S = -\frac{r_e J_{11}}{r\,\overline{w}_1\overline{w}_2}$$

Pour faciliter l'interprétation supposons que le moment centré du troisième ordre $\overline{m}(ew_1^2)$ soit nul et que les σ^h soient tous égaux au même σ^P. Alors

$$-J_{11} = \frac{r}{r_e}.\sigma^P \left[\overline{w}_1\overline{w}_2 - Var(w)\right] + \sigma^C\, Var(w) - \sigma^C \left[Cov(e,w)\right]^2 \tag{A.28}$$

D'où :

$$\sigma^S = \sigma^P + \left[\frac{r_e}{r}\sigma^C - \sigma^P\right]\frac{Var(w)}{\overline{w}_1\overline{w}_2} - \frac{r_e\sigma^C}{r\overline{w}_1\overline{w}_2}\left[Cov(e,w)\right]^2 \tag{A.29}$$

Le membre de droite est inférieur à celui donné par (77) en raison de la soustraction du dernier terme, lequel est normalement positif, et du fait que, dans le second terme, σ^C est multiplié par la fraction r_e / r normalement plus petite que 1.

Ainsi que nous l'avons fait à la fin de la section 7, considérons maintenant le cas où, le second facteur étant le travail non-qualifié, il existerait une offre excédentaire de ce travail conjointement avec un prix p_2 exogène. Les variables exogènes seraient alors x_1^S et p_2 tandis que la demande globale de travail non-qualifié, maintenant écrite x_2^D, serait endogène. Notre objectif consiste à dégager la formule qui lie dx_2^D / x_2^D à dp_2 / p_2 quand x_1^S ne varie pas. Pour cela nous devons appliquer la formule générale (44) en tenant compte de ce que la normalisation des prix implique, selon (33) :

$$\frac{dp_1}{p_1} = -\frac{\overline{w}_2}{\overline{w}_1}.\frac{dp_2}{p_2} \tag{A.30}$$

De même que (A.12) va nous servir à appliquer l'expression du membre de droite de (44), nous pouvons appliquer l'expression du membre de gauche en observant que :

$$\left[WD_v e\, {}^t\overline{w}\right]_{ji} = m(ew_j)\overline{w}_i \tag{A.31}$$

comme la première composante de X^S est nulle (x_1^S ne varie pas), la première ligne de (44) s'écrit :

$$-m(ew_1)\overline{w}_2 \frac{dx_2^D}{x_2^D} = \frac{r_e}{r}\left[J_{11}\frac{dp_1}{p_1} + J_{12}\frac{dp_2}{p_2}\right] \tag{A.32}$$

ou encore, compte tenu de (A.25) et (A.30) :

$$-m(ew_1)\overline{w}_1\overline{w}_2 \frac{dx_2^D}{x_2^D} = \frac{-r_e}{r} J_{11}\frac{dp_2}{p_2} \tag{A.33}$$

Les formules (A.21) et (A.27) conduisent alors à :

$$\frac{dx_2^D}{x_2^D} = -\frac{\sigma^S}{\overline{w}_1 + Cov(e,w)}.\frac{dp_2}{p_2} \tag{A.34}$$

Le multiplicateur de dp_2 / p_2 est d'autant plus élevé en valeur absolue que σ^S est plus élevé et que $Cov(e,w)$ est plus négative.