ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 74 – 2004

Couverture, coûts d'agence et taille d'une entreprise

Frédéric LOSS *

RÉSUMÉ. – Cet article étudie la demande de couverture d'une entreprise, où la couverture permet de réduire les coûts d'agence entre les actionnaires et le ou les agents. On montre que lorsque la fusion entre deux firmes implique une perte d'information, la demande de couverture de la nouvelle entreprise est généralement supérieure à celle des entreprises avant fusion. Cela provient de la perte d'information et du fait que la couverture permet de couvrir le risque supporté par plusieurs agents.

Hedging, Agency Costs and Corporate Size

ABSTRACT. – This article analyses the hedging demand of a firm, where hedging helps to reduce the agency costs between stockholders and one or several risk averse agents. We show that when a merger between two firms implies less information, the hedging demand of the new firm is generally higher than the hedging demands of the firms before merger. This is due to the loss of information and because hedging allows to reduce the risk borne by several agents.

* GREMAQ – Université Toulouse I, FMG – London School of Economics. Adresse électronique : frederic.loss@univ-tlse1.fr
Je tiens particulièrement à remercier mon directeur de thèse Bruno JULLIEN pour ses nombreux et pertinents commentaires sur ce travail. Je voudrais également remercier Bruno BIAIS, Catherine CASAMATTA, François BOLDRON, Denis GROMB, Carole HARITCHABALET, Estelle MALAVOLTI, Freyan PANTHAKI, Pierre PICARD, Jean TIROLE, Wilfried ZANTMAN ainsi que tous les participants à l'ASSET 2001 (Rethymno), l'EEA 2001 (Lausanne), l'EGRIE 20001 (Strasbourg) au 2001 « International Finance Conference in Hammam-Sousse » et au « Lunchtime Seminar LSE (Financial Markets Group) ». Cet article est tiré d'un des chapitres de thèse de l'auteur réalisée principalement au GREMAQ-Université Toulouse I et terminée au FMG (LSE). Je suis très reconnaissant du financement européen pour la mobilité des chercheurs (TMR) dont j'ai bénéficié. Toutes les imperfections qui subsistent me sont entièrement imputables.

1 Introduction

Cet article propose une étude théorique de la demande de couverture d'une entreprise, où la couverture est utilisée comme un moyen de réduire les coûts d'agence entre un principal, qui agit dans l'intérêt des actionnaires, et un ou plusieurs agents. On compare la demande de couverture entre une « petite entreprise », caractérisée par une relation *principal-agent* pour la réalisation d'un projet, et une « grande entreprise » caractérisée par une relation *principal-multi-agents* pour la réalisation de deux projets ; une « grande entreprise » correspondant à la fusion de deux « petites entreprises ».

Dans le cas « petite entreprise », le principal neutre vis-à-vis du risque propose à l'agent qui a de l'aversion vis-à-vis du risque, un contrat qui dépend du résultat du projet. Ce résultat correspond à un signal bruité de l'effort effectué par l'agent. La couverture en réduisant les effets de chocs externes qui influencent le résultat du projet, améliore la précision du signal sur lequel est basé le contrat de l'agent. Cela permet de lui donner un contrat plus incitatif.

Dans le cas « grande entreprise », lorsque la fusion entraîne une perte d'information, le principal peut uniquement proposer un contrat qui porte sur le résultat joint des projets. La couverture permet alors d'améliorer la précision du signal sur lequel sont basés les contrats des deux agents. On montre alors que la demande de couverture de la nouvelle « grande entreprise » est supérieure à celles des « petites entreprises ». Ce résultat théorique correspond par exemple, aux résultats empiriques obtenus par NANCE, SMITH et SMITHSON [1993], MIAN [1996], TUFANO [1996], GECZY, MINTON et SCHRAND [1997], ou encore DIONNE-GARAND [2001].

En revanche, dans le cas « grande entreprise », lorsque la fusion n'entraîne pas de perte d'information, le principal propose aux agents un contrat basé sur les résultats des deux projets (un signal par projet). Le principal va alors utiliser la corrélation entre les projets pour améliorer la précision des signaux sur lesquels les contrats des agents sont basés. Finalement, dans ce cas, on montre que le choix de couverture est plus faible dans le cas « grande entreprise » que dans le cas « petite entreprise ».

Cet article est lié à la littérature sur la gestion des risques qui étudient la demande de couverture comme un moyen de réduire les incomplétudes ou les asymétries d'information. DEMARZO-DUFFIE [1991] calculent les demandes optimales de couverture de firmes qui agissent dans l'intérêt de leurs actionnaires, qui ont de l'aversion au risque, lorsque ces firmes ont de l'information privilégiée a propos de leur exposition au risque. Cela réduit le bruit inclus dans l'ensemble d'information des actionnaires et leur permet ainsi de réaliser un meilleur choix de portefeuille pour leur propre compte. DEMARZO-DUFFIE [1995] étudient un modèle où la couverture permet d'améliorer la précision du signal (le résultat de l'entreprise) sur les capacités d'un agent. Plus précisément, ils analysent le choix de couverture d'un agent ayant de l'aversion pour le risque dans un modèle de carrière et montrent que l'agent arbitre entre plus d'information pour le principal et une meilleure couverture de son revenu. BREEDEN-VISWANATHAN [1998] étudient le choix de couverture d'agents étant soit de « bonne qualité » soit de « mauvaise qualité » dans un modèle de carrière où les *a priori* sur la qualité des agents sont révisés chaque période. Ils montrent qu'il existe un équilibre ou les agents de « bonne qualité » vont choisir une politique de couverture totale afin de faciliter la révision des croyances à leur propos, alors que les agents de « mauvaise qualité » vont préférer une politique de non-couverture afin de limiter la révision des croyances à leur propos. D'autres auteurs, ALGER [1999] ou encore HOLMSTRÖM-TIROLE [2000], considèrent la même idée : la couverture est un moyen d'améliorer la précision de l'information et proposent une application à la régulation du système bancaire.

Ce travail est aussi lié à la littérature sur l'évaluation relative des performances des agents (voir HOLMSTRÖM [1982] et MOOKHERJEE [1984]). L'idée de ces travaux est que la corrélation entre les projets effectués par différents agents, permet d'améliorer l'information sur ces agents. Dans cet article, lorsque la fusion se fait sans perte d'information, on étudie alors l'influence de ces mécanismes comparatifs sur le choix de couverture.

Cet article est organisé comme suit. La section 2 étudie le cas d'une « petite entreprise ». La section 3 analyse le cas d'une « grande entreprise » en considérant les deux sous cas : perte d'information après fusion ou non. La section 4 propose des remarques de conclusion, discute des hypothèses et des résultats de cet article. Les preuves sont détaillées en appendice.

2 Le cas d'une « petite entreprise »

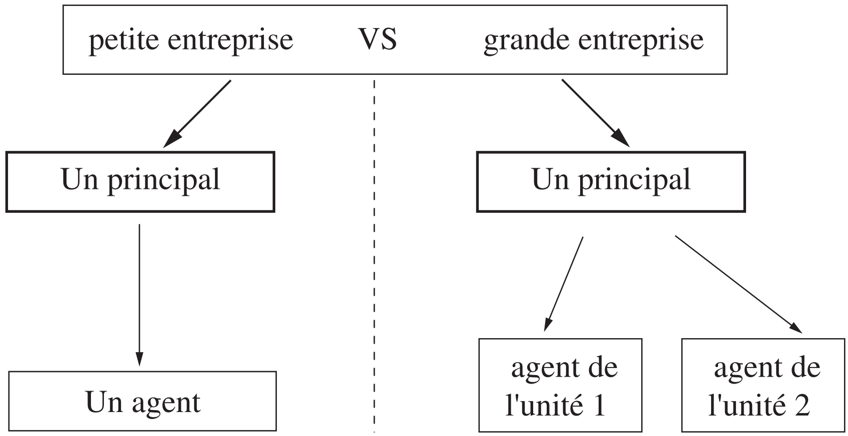
La distinction que l'on fait entre une « petite entreprise » et une « grande entreprise » est dans la lignée de la législation française [1]. Plus il y a d'employés, plus une firme est qualifiée de « grande ». On définit une « petite entreprise », comme une firme caractérisée par une relation *principal-agent* pour la réalisation d'un projet et une « grande entreprise », comme une firme caractérisée par une relation *principal-multi-agents* pour la réalisation de deux projets.

2.1 Le modèle

Soit une relation *principal-agent* pour la réalisation d'un projet. L'agent exerce un effort inobservable e, qui influence positivement le profit du projet π, mais cet effort est « coûteux ». Soit $\psi(e)$ la fonction de coût à l'effort de l'agent. On fait l'hypothèse que cette fonction est croissante, convexe en e et que ce coût est inobservable. On fait comme autre hypothèse que l'agent a de

1. La législation française sur la taille des entreprises est la suivante (cité dans Revue « Economie et Statistique » 1994, N° 271-272, 1/2 collection INSEE) : de 1 à 20 salariés, on parle de petites entreprises. De 20 à 499 salariés, on parle de moyennes entreprises. Enfin, à partir de 500 salariés, on parle de grandes entreprises.

FIGURE 1



l'aversion vis-à-vis du risque, et afin d'éviter tout effet de richesse, que ses préférences pour la richesse sont CARA [2] et décrites par une fonction d'utilité exponentielle. Le coefficient absolu d'aversion pour le risque est noté r. Sa fonction d'utilité peut s'écrire $u(y) = 1 - \exp(-ry)$.

Le principal est neutre au risque. Il reçoit le profit du projet π et compense l'agent pour son effort. Le profit du projet correspond à l'effort effectué par l'agent e, plus à la réalisation d'un choc exogène ε qui peut être positif ou négatif et qui est distribué par une loi normale de moyenne 0 et de variance σ^2. On fait l'hypothèse que le principal n'observe pas ε, mais peut couvrir ce choc sur les marchés financiers. On appelle h le niveau de couverture choisi par le principal.

Pour résumer, le profit final du projet s'écrit :

$$\pi(e,k,h,\varepsilon) = e + (k - h)\,\varepsilon,$$

où k correspond au coefficient qui indique l'influence du choc exogène sur le profit de l'entreprise. Si $k = 0$, cela signifie que le choc n'a pas d'influence sur le profit de l'entreprise. En revanche, plus k est grand, plus l'effet du choc sur le profit de l'entreprise est grand.

Considérer que la couverture n'est pas coûteuse n'est pas réaliste. En premier lieu, il existe des coûts de transaction : taxes, « brokerage fees »... En deuxième lieu, à partir du moment où le choc ε est de nature macroéconomique, le risque relatif à ε est lié au risque agrégé, et la couverture implique

2. CARA : Constant Absolute Risk Aversion.

le paiement d'une prime. Cette prime peut correspondre à une prime de risque [3] ou à une prime de liquidité [4]. On note $v \geqslant 0$ le coût unitaire de la couverture. Cela signifie que pour éliminer tout le risque ε, le principal doit payer kv avant que le projet commence.

Le problème du principal est de choisir une règle de compensation (ou salaire) w, et un niveau de couverture afin de maximiser son espérance de gain, sous la contrainte que l'agent choisit l'effort qui maximise son utilité espérée [*contrainte d'incitation*] et sous la contrainte que l'agent peut atteindre avec ce contrat un niveau d'utilité espérée minimum [*contrainte de rationalité individuelle*]. Pour simplifier et sans perte de généralité, on normalise le salaire de réservation de l'agent à 0.

Finalement, on fait l'hypothèse que les juges chargés de trancher entre les deux parties en cas de litige, observent uniquement les données comptables de l'entreprise, c'est-à-dire ici le profit $\pi(e,k,h,\varepsilon)$ [5]. Par conséquent, le principal propose à l'agent un contrat qui est une fonction du seul signal disponible $w(\pi)$ [6], et obtient le profit du projet $\pi(e,k,h,\varepsilon)$, net du salaire $w(\pi)$, et net du coût de couverture vh.

Le problème de maximisation du principal peut s'écrire :

$$\text{(1)} \quad \begin{aligned} &\max_{w(\pi(e,\varepsilon,k,h)),h} \mathbb{E}\left[(e+\varepsilon\,(k-h)) - w(\pi) - vh\right] \text{ sous les contraintes :} \\ &e \text{ maximise } \mathbb{E}u\,(w(\pi\,(e,\varepsilon,k,h)) - \psi(e))\ \ (IC)_{agent}\ ; \\ &\mathbb{E}u\,(w(\pi) - \psi(e)) \geqslant u\,(0)\ \ (IR)_{agent}\,. \end{aligned}$$

Remarque 1 : La couverture h est l'outil utilisé par le principal pour décrire tous les états de la nature qu'il désire. En ce sens, ce modèle est un modèle *principal-agent* dans lequel tous les contrats sont possibles, mais où le principal est limité sur le type d'instruments qu'il peut utiliser. La littérature caractérise ce type de contrat comme des contrats « presque complets », c'est-à-dire des modèles dans lesquels les incomplétudes sont à la fois limitées et identifiables.

3. Si l'on se place dans le modèle MEDAF où les investisseurs ont de l'aversion pour le risque, il faut compenser les investisseurs pour le risque qu'ils prennent. Dans ce cas, par exemple, le prix à terme sera inférieur à l'espérance du prix spot futur d'un actif. La prime de risque qu'il faut donner aux investisseurs provient de leur aversion vis-à-vis du risque.
4. Si l'on se place dans un modèle LAPM (voir HOMLSTRÖM-TIROLE [2001]), le prix d'un actif dépend de la liquidité qu'il donne à une entreprise lorsque celle-ci en a besoin. Une entreprise neutre au risque est prête à payer une prime de liquidité pour détenir un actif dont la valeur est élevée lorsqu'elle est contrainte financièrement. Voir aussi FROOT, SCHARSTEIN et STEIN [1993] ainsi que CAILLAUD, DIONNE et JULLIEN [2000], où la demande de couverture est générée par l'imperfection du marché du capital et permet de réduire les coûts de financement externes.
5. Cela revient à considérer, que les juges en cas de litige observent uniquement les données comptables de l'entreprise, mais pas les activités hors bilan comme celles de couverture (en d'autres termes que les positions de couverture ne sont pas publiques, ce qui correspond au cas le plus souvent en vigueur aux Etats-Unis. A ce propos, voir DEMARZO-DUFFIE [1995] pour plus de détails sur les « Generally Accepted Accounting Principles » qui portent sur la révélation des engagements hors bilan proposés par la « Financial Accounting Standard Board »).
6. En ce sens, il respecte le théorème de la statistique exhaustive de HOLMSTRÖM [1979] et SHAVEL [1979].

2.2 La règle de compensation

On considère des contrats linéaires, c'est-à-dire des contrats de la forme :

$$w(\pi) = \alpha\pi + \beta.$$

La forme linéaire des contrats peut sembler *ad hoc* dans ce modèle, mais ne l'est pas. En effet, le modèle que l'on considère correspond au modèle de HOMLSTRÖM-MILGROM [1987] et ils montrent que la solution au programme (1) coïncide avec la solution d'un problème principal-agent dans lequel :

– i) l'agent choisit un niveau d'effort de manière continue sur l'intervalle de temps [0; 1] afin de contrôler la tendance d'un processus aléatoire continu stationnaire unidimensionnel (« un processus brownien unidimensionnel ») que l'on peut noter $\{\Pi(\tau); 0 \leqslant \tau \leqslant 1\}$.

– ii) la règle de compensation peut être toute fonction de l'histoire entière du processus aléatoire contrôlé par l'agent.

La variable π correspond alors à l'état final du processus aléatoire : $\pi = \Pi(1)$. Le profit brut espéré dans ce modèle est égal à : $\mathbb{E}\left[\int_0^1 \pi\,(e(\tau))\,d\tau\right]$, le coût personnel de l'agent $\psi(e) = \int_0^1 \psi\,(e(\tau))\,d\tau$ et son utilité est $u\,(w - \psi(e))$ où w est le salaire reçu par l'agent au cours de la période. Dans le cas que l'on considère, l'agent connaît l'histoire du processus aléatoire à chaque moment et peut faire ses choix (d'effort) en fonction de cette histoire. Dans ce cas, (voir HOLMSTRÖM-MILGROM [1987], théorèmes 4, 5, 6 et 7) le contrat optimal est une fonction linéaire du profit final uniquement $w(\pi) = \alpha\pi + \beta$. De plus, l'agent choisit $e(\tau)$ constant à chaque instant τ, indépendamment de l'histoire passée à l'instant τ.

Le niveau d'effort constant e et la pente α sont aussi les solutions du problème (1).

Une preuve rigoureuse est donnée dans HOLMSTRÖM-MILGROM [1987], mais les deux idées principales de la preuve sont les suivantes.

Etant donné les hypothèses décrites ci-dessus, le modèle entraîne un problème stationnaire à chaque instant τ, de telle sorte que les efforts effectués dans le passé et toute compensation reçue dans le passé n'ont pas d'effet sur les choix futurs de l'agent. Le contrat optimal hérite de cette propriété de stationnarité : il spécifie que l'agent devrait faire les mêmes choix d'effort à chaque instant, indépendamment de l'histoire passée et que la compensation sur chaque intervalle de temps doit être la même. Ces conclusions dépendent uniquement de l'hypothèse de stationnarité à propos des préférences et du processus aléatoire.

Cela ne dépend pas de l'hypothèse spécifiant que le processus aléatoire est un mouvement brownien. La propriété provenant de cette hypothèse est la suivante. Lorsque l'agent contrôle la tendance d'un mouvement brownien, alors pour toute règle de compensation qui peut être utilisée, la compensation totale de l'agent a toujours une expression unique comme une intégrale d'Ito de toutes les compensations instantanées provenant à chaque instant.

L'association de ce résultat avec le résultat précédent que le contrat optimal est stationnaire, implique que le coefficient α est une constante. Finalement, la règle de compensation optimale est exprimable comme une fonction linéaire du profit agrégé avec une pente égale à α (voir aussi HOLMSTRÖM-MILGROM [1991]).

2.3 La résolution du modèle

En considérant des contrats linéaires, le problème de maximisation du principal se réécrit :

(2) $\max\limits_{\alpha,\ \beta,\ h} \mathbb{E}\left[(e + \varepsilon\,(k - h))(1 - \alpha) - vh - \beta\right]$ sous les contraintes :

(2-a) e maximise $\mathbb{E}u\,\{\alpha(e + \varepsilon\,(k - h)) + \beta - \psi(e)\}\ \ (IC)_{agent}$;

(2-b) $\mathbb{E}u\,(\alpha(e + \varepsilon\,(k - h)) + \beta - \psi(e)) \geqslant u(0)\ \ (IR)_{agent}$.

Pour trouver une solution à ce problème, on doit calculer l'équivalent certain de l'agent [7] et appliquer la méthode standard développée par HOLMSTRÖM-MILGROM [1987], qui consiste à réécrire le programme (2) en considérant l'équivalent certain de l'agent.

Sous les hypothèses faites dans la section précédente (fonction d'utilité de l'agent exponentielle, fonction de profit distribuée par une loi normale) et après calculs [8], on trouve que l'équivalent certain de l'agent (noté EC) est égal à :

$$EC = \alpha e + \beta - \psi(e) - \frac{r}{2}\alpha^2\left[(k - h)^2\,\sigma^2\right].$$

L'équivalent certain de l'agent est composé du revenu espéré de l'agent $\alpha e + \beta$, moins le coût privé à l'effort $\psi(e)$, et moins la désutilité de l'agent due au risque qu'il supporte. Ce terme, $\frac{r}{2}\alpha^2\left[(k - h)^2\,\sigma^2\right]$ représente la prime de risque que le principal doit donner à l'agent pour compenser le risque que ce dernier supporte. L'équivalent certain dépend du niveau de couverture choisi : plus h est élevé, moins le projet est risqué, et donc plus la prime de risque est faible [9].

On fait une première hypothèse technique :

$$A_1 : \psi''(e)^2 + \psi'(e)\psi'''(e) > 0.$$

Cette hypothèse est une hypothèse standard qui garantit que la prime de risque est convexe en e. Cette hypothèse est vérifiée si $\psi'''(e) > 0$, c'est-à-dire si le coût marginal à l'effort est convexe en e. [10]

En maximisant l'équivalent certain de l'agent par rapport à e, la contrainte d'incitation de l'agent (équation 2-a) devient :

(3) $$\alpha = \psi'(e).$$

---

7. Pour un agent dont les préférences sont représentées par la fonction d'utilité $u()$, l'équivalent certain d'une richesse aléatoire X est le nombre x tel que :

$$u(x) = Eu(X).$$

8. Voir appendice pour le détail des calculs.
9. Ce point important est détaillé plus loin dans l'analyse.
10. Voir appendice pour plus de détails sur l'hypothèse A_1.

La relation (3) indique que l'effort exercé par l'agent dépend uniquement, dans ce modèle, de la partie variable de la règle de compensation α. Dans ce modèle, α est l'outil utilisé par le principal pour inciter l'agent à exercer un niveau d'effort e. Le niveau d'effort est indépendant de l'aversion pour le risque de l'agent (ici caractérisé par le coefficient absolu d'aversion au risque r) et de la partie fixe du contrat β.

β sert uniquement à transférer suffisamment de richesse à l'agent pour satisfaire sa contrainte de participation (équation (2-b)). Finalement, compte tenu du lien entre α et e, l'expression de β s'obtient en annulant l'équivalent certain de l'agent, puisqu'on suppose que le salaire de réserve de l'agent est égal à 0 [11]. On obtient :

(4) $$\beta = \psi(e) + \frac{r}{2}\left[\psi'(e)\right]^2\left[(k-h)^2\sigma^2\right] - \psi'(e)e.$$

Contrairement aux modèles traditionnels d'aléa moral, ici, le salaire de l'agent dépend aussi du niveau de couverture choisi. La couverture permet de réduire l'effet du choc exogène sur le profit du projet. Cela signifie que la précision de l'information contenue dans le profit du projet sur l'effort effectué par l'agent, augmente avec le niveau de couverture choisi. Comme l'agent a de l'aversion pour le risque, cela permet de réduire la prime de risque car la variance du signal sur lequel est basé son salaire est plus faible. Finalement, plus h est élevé, plus β est faible.

En remplaçant α et β par leur valeur respective (voir équation (3) et (4)), le profit espéré du principal se réécrit [12] :

$$\mathbb{E}\left(e+(k-h)\,\varepsilon\right)(1-\alpha)-\beta - hv = e-\psi(e)-\frac{r}{2}\left[\psi'(e)\right]^2\left[(k-h)^2\sigma^2\right]-hv.$$

Cela correspond au gain espéré du projet e, moins le coût total à l'effort (coût direct à l'effort $\psi(e)$, et prime de risque à l'effort $\frac{r}{2}\left[\psi'(e)\right]^2\left[(k-h)^2\sigma^2\right]$) et moins le coût de la couverture hv.

Les conditions du premier ordre par rapport à h et à e sont les suivantes [13] :

(5) $$e^* \text{ vérifie : } 1 = \psi'(e^*) + \underbrace{r\psi'(e^*)\psi''(e^*)\left[\left(k-h^*\right)^2\sigma^2\right]}_{\text{terme } A};$$

(6) $$h^* \text{ vérifie : } \underbrace{\left(k-h^*\right)r\sigma^2\psi'(e^*)^2}_{\text{terme } B} = v.$$

11. Normaliser le salaire de réservation de l'agent à 0 est sans perte de généralité. S'il était différent de 0, l'équivalent certain de l'agent s'écrirait de la même manière mais augmenté du montant du salaire de réservation. Cette hypothèse permet de simplifier l'exposé.

12. Ici, on va résoudre par rapport à e. Cela est équivalent à résoudre par rapport à α. Cela signifie que si le principal souhaite que l'agent exerce un effort $\widehat{e}$, il lui proposera un salaire dont la partie variable $\alpha = \psi'\left(\widehat{e}\right)$.

13. On suppose pour l'instant que les conditions suffisantes du deuxième ordre sont vérifiées. On reviendra sur cette hypothèse plus loin dans le texte.

La condition du premier ordre par rapport à e indique que le principal demande à l'agent d'exercer un effort e tel que le gain marginal à l'effort, ici égal à 1, soit égal au coût marginal total à l'effort (coût marginal direct à l'effort $\psi'(e)$ augmenté du coût marginal indirect à l'effort qui correspond à la prime de risque marginale (terme A)).

La condition du premier ordre par rapport à h permet de comprendre quel est le rôle de la couverture dans ce modèle. La couverture permet de diminuer le coût marginal indirect à l'effort (prime de risque marginale). Le principal choisit un niveau de couverture tel que le gain marginal de la couverture, c'est-à-dire la réduction de prime de risque lorsque h augmente (terme B), soit égal au coût marginal de la couverture v.

La demande de couverture provient de l'aversion pour le risque de l'agent. La couverture permet de rendre plus précis le signal sur lequel est basée la règle de compensation de l'agent, et donc de diminuer la prime de risque qu'il faut lui laisser, puisque son revenu devient moins dépendant de la réalisation d'un choc exogène sur lequel il n'a pas d'influence.

Remarque 2 : Sans la présence d'un problème d'aléa moral entre le principal et l'agent, on aurait alors l'effort de premier rang, e^{PR} qui est tel que le coût marginal direct à l'effort est égal au gain marginal à l'effort : $\psi'(e^{PR}) = 1$ et le principal donnerait à l'agent un salaire fixe égal à $w = \psi(e^{PR})$.
Lorsque la couverture est sans coût, le principal peut obtenir le premier rang en proposant à l'agent le contrat suivant :

$$h^* = k\ ;\ \text{et}\ \begin{cases} w = \psi\left[\psi'^{-1}(1)\right]\ si\ \pi = \psi'^{-1}(1)\,; \\ \qquad w = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Lorsque la couverture est sans coût, le principal choisit de couvrir totalement le résultat du projet. Le résultat du projet n'est alors plus aléatoire dans le sens où il ne dépend plus de la réalisation du choc exogène ε. Le salaire de l'agent $w(\pi)$ est alors basé sur un signal qui correspond uniquement à l'effort qu'il a effectué. Comme ce signal n'est pas risqué (dans le sens où il ne dépend pas de la réalisation de variables que l'agent ne contrôle pas), le principal n'a pas à lui verser une prime de risque. En d'autres termes, on se retrouve dans une situation sans asymétrie d'information, et le principal doit juste compenser l'agent pour le coût à l'effort qu'il supporte.

Avant de résoudre complètement le modèle, on va déterminer quels sont les effets directs de différentes variables sur le niveau d'effort e^*, ainsi que sur le niveau de couverture h^*.

Sous les hypothèses du modèle : principal neutre au risque, agent CARA, fonction de profit distribuée par une loi normale, on obtient.

LEMME 1 : *Le niveau d'effort e^*, pour un niveau de couverture h fixé, est décroissant avec la variance du choc exogène σ^2, ainsi qu'avec le coefficient absolu d'aversion pour le risque de l'agent r. En revanche, le niveau d'effort e^*, est croissant avec le niveau de couverture h.*

PREUVE : voir appendice.

Lorsque la variance du choc σ^2 augmente, le signal π sur lequel est basée la règle de compensation de l'agent est de moins en moins précis sur l'effort effectué par l'agent. Cela signifie que le salaire de l'agent devient plus risqué. Le principal doit donc augmenter la prime de risque. Le coût marginal à l'effort augmente alors que le gain marginal est le même. Ainsi, le principal propose à l'agent un contrat moins incitatif (α diminue), et augmente la partie fixe du contrat (β augmente). Finalement, lorsque σ^2 augmente, et pour h fixé, l'agent exerce un niveau d'effort plus faible.

Plus l'agent a de l'aversion pour le risque plus la prime de risque est élevée. Donc, lorsque le coefficient absolu d'aversion pour le risque r augmente, comme le coût marginal à l'effort augmente alors que le gain marginal reste le même, le principal demande à l'agent de faire un effort plus faible (α diminue et β augmente).

Lorsque h augmente, le signal sur lequel est basée la règle de compensation est plus précis par rapport à l'effort effectué par l'agent. Le salaire de l'agent devient moins risqué. Le principal peut baisser la prime de risque. Le coût marginal à l'effort diminue, alors que le gain marginal reste le même. Le principal propose à l'agent un contrat plus incitatif (α augmente et β diminue) et le niveau d'effort effectué par l'agent augmente.

LEMME 2 : *Le niveau de couverture h^*, pour un niveau d'effort e fixé, est décroissant avec le coût de la couverture v. Enfin, le niveau de couverture h^*, est croissant avec l'effort e.*

PREUVE : voir appendice.

Lorsque le coût unitaire de la couverture v augmente, alors, sans ambiguïté la demande de couverture diminue. Le coût marginal de la couverture augmente tandis que le gain marginal est le même.

Lorsque le principal souhaite que l'agent fasse plus d'effort, il supporte un coût plus que proportionnel à l'effort supplémentaire demandé. Ceci provient de la convexité des coûts directs et indirects à l'effort, c'est-à-dire de la convexité en e de $\psi(e)$ et de la prime de risque $\frac{r}{2}\psi'(e)^2\left((k-h)\sigma^2\right)$. Par conséquent, lorsque le principal demande à l'agent d'exercer plus d'effort, il choisit d'augmenter le niveau de couverture h afin de diminuer le coût marginal total à l'effort.

2.4 Solution globale du programme de maximisation du principal et résultats de statique comparative

On va maintenant déterminer la solution globale e^* [14] du problème de maximisation du principal. On sait que pour e donné, le niveau de couverture optimal (voir équation 6) est tel que $h^* = k - \frac{v}{r\sigma^2\psi'(e)^2}$. En remplaçant h

14. Ou de manière équivalente α^*.

par cette expression, on calcule le programme de maximisation réduit du principal en e.

Le programme de maximisation réduit s'écrit alors :

$$e^* \in \arg\max_e \; e - \psi(e) - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{v^2}{r\sigma^2\psi'(e)^2}}_{\text{terme } C} - \underbrace{\left(kv - \frac{v^2}{r\sigma^2\psi'(e)^2}\right)}_{\text{terme } D},$$

où les termes C et D correspondent respectivement à la prime de risque et au coût de la couverture calculée à l'optimum (en $h = h^*$).

La condition du premier ordre du programme réduit indique que e^* vérifie :

$$1 = \psi'(e^*) + \underbrace{\frac{v^2\psi''(e^*)}{r\sigma^2\psi'(e^*)^3}}_{\text{terme } E}, \tag{7}$$

où le terme E correspond à l'effet marginal global sur le coût indirect à l'effort (terme C) et sur le coût de la couverture (terme D). On appelle ce terme, le coût marginal indirect global à l'effort.

Le niveau d'effort optimal est tel que le gain marginal à l'effort (égal à 1), est égal au coût marginal total à l'effort : $\psi'(e^*)+$ coût marginal indirect global à l'effort.

On fait ici une deuxième hypothèse technique :

$$A_2 : \psi'''(e^*) > \psi''(e^*)^2\left(\frac{3}{\psi'(e^*)} - \frac{1}{1-\psi'(e^*)}\right).$$

Cette deuxième hypothèse garantit que le programme réduit en e est strictement quasi-concave, c'est-à-dire que sous l'hypothèse A_2 la condition du premier ordre (voir équation (7)), définit une solution unique [15].

Cette hypothèse signifie qu'au point candidat défini par l'équation (7), $\psi'''(e^*)$ doit être suffisamment grand. Compte tenu de la relation définie par l'équation (7), si $r\sigma^2$ est suffisamment grand, alors $1 - \psi'(e^*)$ est suffisamment petit de telle sorte que, tout comme pour l'hypothèse A_1, l'hypothèse A_2 est vérifiée si l'on a $\psi'''(e^*) > 0$, c'est-à-dire sous la condition que le coût marginal à l'effort est convexe en e.

Finalement, pour déterminer le niveau de couverture optimal, h^*, il suffit de remplacer dans l'équation (6) e par e^* qui vérifie l'équation (7).

En appliquant le théorème des fonctions implicites à l'équation (7), on en déduit la proposition suivante.

PROPOSITION 1 : *Les solutions globales e^* et h^* sont décroissantes avec le coût de la couverture v.*

PREUVE : voir appendice.

15. Voir appendice pour plus de détails sur l'hypothèse A_2.

Lorsque v augmente, on sait que le niveau de couverture choisi baisse. Donc, le signal sur lequel la règle de compensation de l'agent est basée, est moins précis sur l'effort e exercé par l'agent. Le salaire de l'agent devient plus risqué. Le principal doit verser à l'agent une prime de risque plus importante. En d'autres termes, le coût marginal total à l'effort augmente alors que le gain marginal est toujours le même. Le principal propose alors à l'agent un contrat moins incitatif (α baisse et β augmente), et le niveau d'effort diminue à l'optimum.

D'autre part, lorsque v augmente, le coût marginal de la couverture augmente alors que le gain marginal reste le même. L'effet direct est négatif (*cf.* lemme 2). L'effet indirect est également négatif, puisque lorsque la couverture diminue le coût (marginal) à l'effort augmente, donc le niveau d'effort diminue ce qui entraîne une baisse de la couverture (*cf.* lemme 2).

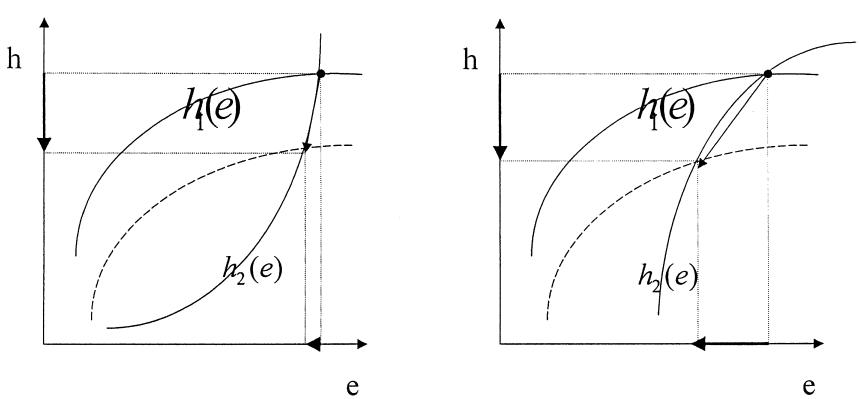
La proposition 1 peut être résumée par les dessins suivants.

A partir des conditions du premier ordre (équation (5) et (6)), on définit la fonction $h_1(e)$ par $h_1(e) = k - \dfrac{v}{r\sigma^2\psi'(e)^2}$.

D'autre part, à partir de l'égalité $\psi'(e)\left[1 + r\psi''(e)\left[(k-h)^2\sigma^2\right]\right] = 1$ on définit la fonction $h_2(e) = k - \left(\dfrac{1}{\sigma^2}\left(\left[\dfrac{1}{\psi'(e)} - 1\right]\dfrac{1}{r\psi''(e)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$.

Afin d'obtenir des figures simples, on considère le cas où la fonction de désutilité à l'effort $\psi(e)$ est quadratique en e. Dans ce cas, on trouve que $h_1(e)$ est croissante et concave en e, alors que $h_2(e)$ est croissante mais peut-être convexe ou concave en e (voir appendice pour une preuve détaillée).

FIGURE 2
Cas : $\psi(e)$ ***quadratique en*** e



Pour $h_2(e)$ convexe   Pour $h_2(e)$ concave

lorsque v augmente

3 Le cas d'une « grande entreprise »

On appelle « grande entreprise » toute structure qui ne peut pas être représentée par une relation *principal-agent*. Dans cet article, on analyse le cas décrit par la figure 1 : un principal et deux agents, pour réaliser deux projets. Ce cas correspond à la fusion de deux petites entreprises comme définies dans la section 2.

Le modèle dans le cas d'une « grande entreprise » correspond au modèle de la section 2, en tenant compte du fait que désormais il y a deux agents et deux projets à réaliser. L'agent 1 (2) exerce un effort inobservable e_1 (e_2) qui influence positivement le profit du projet 1 (2) . Soit $\psi(e_1)$ $(\psi(e_2))$, la fonction de coût à l'effort de l'agent 1 (2). On fait l'hypothèse que cette fonction est croissante, convexe en e_1 (e_2) et que ce coût est personnel et inobservable. On fait comme autre hypothèse que l'agent 1 (2) est averse au risque, et afin d'éviter tout effet richesse, que ses préférences pour la richesse sont CARA et représentées par une fonction d'utilité de type exponentiel $u_1(y)\,(= u_2(y)) = 1 - \exp(-ry)$ [16].

Le principal est neutre au risque. Il reçoit le profit total des deux projets $\Pi = \pi_1 + \pi_2$, et compense l'agent 1 (2) pour son effort e_1 (e_2). Le profit du projet 1 (2) correspond à l'effort effectué par l'agent 1 (2) , plus à la réalisation d'un choc exogène ε_1 (ε_2) qui peut être positif ou négatif. On fait l'hypothèse que le couple $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ suit une loi normale bivariée de moyenne 0, de variance respective σ_1^2, σ_2^2 et de coefficient de corrélation ρ. Le principal n'observe pas $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ mais peut couvrir le choc ε_1 (ε_2) sur les marchés financiers. On note h_1 (h_2) , le niveau de couverture choisi par le principal pour le projet 1 (2) . On note v_1 le coût unitaire de la couverture du choc ε_1, et v_2 le coût unitaire de la couverture du choc ε_2. Comme les variances de ε_1 et de ε_2 ne sont pas forcément égales, v_1 et v_2 ne sont pas forcément égaux. v_1 et v_2 vérifient la relation de non-opportunité d'arbitrage : $\frac{v_1}{\sigma_1} = \frac{v_2}{\sigma_2}$ [17]. D'autre part, comme la couverture du risque associée à chacun des projets correspond à des instruments financiers différents, le principal peut choisir deux niveaux de couverture différents pour les deux projets $(h_1 \neq h_2)$. Enfin, on note k_1 et k_2 les coefficients qui indiquent l'influence de chaque choc sur le profit de chaque projet.

---

16. On considère que les deux agents ont la même fonction de désutilité à l'effort $\psi()$ et le même coefficient absolu d'aversion au risque r. En effet, on n'est pas intéressé dans ce travail, par les questions de savoir comment des fonctions de désutilité à l'effort ou des niveaux d'aversion différents affectent la demande de couverture lorsque l'on considère le cas d'une « grande entreprise ».
17. Sans cette condition, on ne peut pas avoir d'équilibre sur les marchés de la couverture. Supposons que : $\frac{v_i}{\sigma_i} > \frac{v_j}{\sigma_j}$. Alors, tous les investisseurs acceptent de couvrir le choc ε_i et se couvrent contre le choc ε_j. Pour que les marchés de la couverture soient en équilibre, il faut que : $\frac{v_i}{\sigma_i} = \frac{v_j}{\sigma_j}$.

Avantages et inconvénients d'une fusion

La littérature distingue trois types de fusions (et acquisitions) [18].

En premier lieu, il y a les fusions dites *stratégiques*. Ce type de fusion entraîne des *synergies opérationnelles*. Cela signifie que deux firmes sont plus profitables combinées que séparées. Cela peut correspondre à des aspects technologiques (amélioration de la R&D, rationalisation de la gamme de produits, réallocation des facteurs de production...) ou bien à des motifs de type organisation industrielle (fusions verticales ou horizontales, voir TIROLE [1988] pour plus de détails).

En deuxième lieu, il y a les fusions dites *financières* (dans ce cas, on parle plutôt d'acquisitions *financières*). Ces fusions n'entraînent pas de *synergies opérationnelles*. Elles sont motivées par des objectifs de réduction de taxes ou parce que l'acheteur potentiel pense que l'entreprise qu'il souhaite acheter est mal gérée. Ce type d'acquisition est souvent hostile et on parle alors du rôle disciplinaire des marchés financiers.

Enfin, en troisième lieu, il y a les fusions dites de *diversification* (ou création d'un *conglomérat*). Ce type de fusions a pour conséquence des *synergies financières*. Ces *synergies* ont pour effet de réduire le coût du capital. Elles peuvent provenir de réductions de taxes autant que de réductions de problèmes d'asymétrie d'information (voir RENUCCI [2000] pour une application sur le rationnement du crédit).

Cependant, les fusions et acquisitions n'ont pas que des avantages. Un des principaux inconvénients liés aux fusions et acquisitions, est la perte d'information du principal [19]. Comme l'écrivent GRINBLATT-TITMAN [1998] :

« *Lorsque deux firmes fusionnent, il y a généralement une des deux firmes qui n'est plus cotée en bourse* [20]. *Malheureusement, l'information contenue dans le prix d'une action est utile pour évaluer l'effort exercé par les agents et donc pour les rémunérer de façon optimale [...]. On observe qu'il est plus facile de récompenser (ou de punir) le responsable de l'entreprise COMPAQ en fonction de la performance de l'action COMPAQ, que le responsable de la division PC d'IBM en fonction de la performance de l'action IBM. En effet, l'action COMPAQ contient un signal plus précis sur l'effort du dirigeant de cette entreprise, que l'action IBM sur l'effort du dirigeant de la division PC* ».

Organisation optimale de l'entreprise et forme du salaire

Il peut paraître *ad hoc* de laisser l'agent 1 s'occuper tout seul du projet 1 et l'agent 2 du projet 2. Mais, dans les deux cas que l'on va considérer (perte d'information pour le principal ou non), il n'est jamais optimal pour le principal de laisser les deux agents s'occuper conjointement des deux projets, quelque soit la corrélation entre les chocs exogènes, ε_1 et ε_2, qui affectent le profit de chaque projet.

18. Voir GRINBLATT-TITMAN [Chapitre 19, 1998] pour plus de détails.
19. Par exemple, à cause du regroupement des services comptables après fusion.
20. Par exemple, après la fusion entre BNP et Paribas, il n'y a plus deux actions séparément cotées, mais une seule, l'action BNP-Paribas.

Dans ce qui suit, on se limitera à des contrats linéaires. Cela signifie que les contrats proposés sont les contrats de salaire optimaux parmi la classe des contrats de salaire linéaires. Ces contrats ont l'avantage d'être facilement implémentables, puisqu'ils se décomposent en un montant fixe plus un certain nombre d'actions de l'entreprise.

3.1 Impact de la perte d'information

Comme indiqué ci-dessus, la fusion entre deux entreprises peut avoir pour conséquence moins d'information pour le principal. Ici, on considère le cas où après fusion, le principal observe uniquement le profit total des deux projets, $\Pi = \pi_1 + \pi_2$. Il est donc contraint de proposer à l'agent 1 (2) un contrat uniquement basé sur le profit total $w_1(\Pi)$ $(w_2(\Pi))$. Ce cas est le plus mauvais pour le principal en terme d'information.

Pour résoudre le nouveau programme de maximisation du principal, on utilise la même méthode que dans le cas « petite entreprise ». L'équivalent certain de l'agent i (pour $i = 1, 2$) est désormais calculé à partir du nouveau signal sur lequel le salaire est basé, c'est-à-dire sur Π. Associé à un contrat $(\alpha_i; \beta_i)$ et à des niveaux de couverture h_i et h_j, il s'écrit :

$$EC_i = \alpha_i \left(e_i + e_j\right) + \beta_i - \psi(e_i) - \frac{r}{2}\alpha_i^2 var\Pi,$$

où $\mathbb{E}(\alpha_i \Pi + \beta_i) = \alpha_i \left(e_i + e_j\right) + \beta_i$, correspond au revenu espéré de l'agent i, $\psi(e_i)$ à son coût privé à l'effort, et $\frac{r}{2}\alpha_i^2 var\Pi$ au terme de perte d'utilité due au risque qu'il supporte. Ce terme dépend désormais de $var\Pi = (k_i - h_i)^2 \sigma_i^2 + \left(k_j - h_j\right)^2 \sigma_j^2 + 2\rho(k_i - h_i)\left(k_j - h_j\right)\sigma_i\sigma_j$.

Remarque 3 : Quelle que soit la corrélation entre ε_1 et ε_2, il est équivalent pour le principal de laisser chaque agent exercer un effort dans un projet ou dans les deux. En effet, comme les contrats sont basés sur Π, l'équivalent certain de l'agent i (j) s'écrit de la même manière que l'agent i (j) participe au seul projet i ou aux deux projets. Autrement dit, les contraintes de participation et d'incitation des agents s'écrivent de la même manière, que les agents participent à un ou aux deux projets. Le programme de maximisation du principal est donc le même dans les deux cas.

Comme précédemment, l'effort effectué par l'agent i vérifie la relation : $\alpha_i = \psi'(e_i)$ et β_i est l'outil utilisé pour saturer la contrainte de participation de l'agent.

$$\beta_i = \psi(e_i) + \frac{r}{2}\psi'(e_i)^2 var\Pi - \psi'(e_i)\left(e_i + e_j\right).$$

Le profit espéré du principal s'écrit dans ce cas :

$$(e_1 + e_2) - \psi(e_1) - \psi(e_2) - \underbrace{\frac{r}{2}\left[\psi'(e_1)^2 + \psi'(e_2)^2\right] var\Pi}_{\text{noté } P} - h_1 v_1 - h_2 v_2.$$

Il est égal au gain espéré des deux projets $e_1 + e_2$, moins les deux coûts directs à l'effort $\psi(e_1)$, $\psi(e_2)$, moins la prime de risque totale des deux agents P, et moins le coût total de la couverture $h_1 v_1 + h_2 v_2$. La prime de risque totale correspond à la somme des primes de risque des deux agents. C'est pour cela qu'elle dépend de $\frac{r}{2}\left(\psi'(e_1)^2 + \psi'(e_2)^2\right)$. D'autre part, puisque les règles de compensation des deux agents sont établies par rapport à Π, la prime de risque totale est une fonction de $var\Pi$.

Les conditions du premier ordre indiquent que h_1^* et h_2^*, pour e_1, e_2 donnés, vérifient [21] :

$$\begin{cases} r\left(\psi'(e_1)^2 + \psi'(e_2)^2\right)\left[\left(k_1 - h_1^*\right)\sigma_1^2 + \rho\left(k_2 - h_2^*\right)\sigma_1\sigma_2\right] = v_1 \ ; \\ r\left(\psi'(e_1)^2 + \psi'(e_2)^2\right)\left[\left(k_2 - h_2^*\right)\sigma_2^2 + \rho\left(k_1 - h_1^*\right)\sigma_1\sigma_2\right] = v_2. \end{cases}$$

Le gain marginal de la couverture correspond à la réduction marginale de la prime de risque totale. Comme les contrats sont basés sur le profit global Π, couvrir le choc ε_i a un effet sur la prime de risque qu'il faut laisser à l'agent de l'unité i, mais aussi à l'agent de l'unité j. C'est pour cela que le gain marginal de la couverture du choc ε_i est proportionnel à $\frac{r}{2}\left(\psi'(e_1)^2 + \psi'(e_2)^2\right)$. En d'autres termes, couvrir le choc ε_i permet de réduire la prime de risque de l'agent 1 et aussi celle de l'agent 2. On appelle cela, *l'effet multi-agents*.

Le gain marginal de la couverture du choc ε_i est aussi proportionnel à la baisse marginale de $var\Pi$ lorsque h_i augmente marginalement, c'est-à-dire à $\left(k_i - h_i^*\right)\sigma_i^2 + \rho\left(k_j - h_j^*\right)\sigma_i\sigma_j$. Le nouveau terme par rapport au cas « petite entreprise » étant $\rho\left(k_j - h_j^*\right)\sigma_i\sigma_j$. Ce terme provient du terme de covariance entre π_i et π_j. Si $\rho = 0$, ou si $h_j^* = k_j$, ce terme n'existe pas.

En utilisant la relation $\frac{v_i}{\sigma_i} = \frac{v_j}{\sigma_j}$, on obtient $\left(k_i - h_i^*\right)\sigma_i = \left(k_j - h_j^*\right)\sigma_j$. Par conséquent, $\left(k_i - h_i^*\right)\sigma_i^2 + \rho\left(k_j - h_j^*\right)\sigma_i\sigma_j = \left(k_i - h_i^*\right)(1+\rho)\,\sigma_i^2$. Finalement, h_i^* vérifie :

$$r\left(\psi'(e_1)^2 + \psi'(e_2)^2\right)\left(k_i - h_i^*\right)(1+\rho)\,\sigma_i^2 = v_i.$$

On appelle $(1+\rho)\,\sigma_i^2$, *l'effet précision du signal.*

Etant donné que le principal observe un seul signal sur les efforts effectués par les deux agents Π, et que les caractéristiques des agents sont les mêmes, il demande aux agents d'exercer le même effort $e_i^* = e_j^* \equiv e^*\,(GE)$. En écrivant le programme réduit du principal en e, on obtient :

21. Voir appendice pour plus de détails.

$$1 = \psi'\left(e^*(GE)\right) + \underbrace{\frac{v_i^2}{2r(1+\rho)\sigma_i^2}\frac{\psi''\left(e^*(GE)\right)}{\psi'\left(e^*(GE)\right)^3}}_{\text{terme } F}.$$

Le terme F correspond au coût marginal indirect global à l'effort dans le cas « grande entreprise ». Il dépend de $\frac{1}{2r}$ à cause de *l'effet multi-agents* et de $\frac{1}{(1+\rho)\sigma_i^2}$ à cause de *l'effet précision du signal*. Dans le cas « petite entreprise », le coût marginal indirect global à l'effort s'écrivait : $\frac{v_i^2}{r\sigma_i^2}\frac{\psi''(e)}{\psi'(e)^3}$. Par conséquent, pour $\rho \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ et à e donné, le coût marginal indirect global à l'effort dans le cas « grande entreprise », est inférieur au coût marginal indirect global à l'effort dans le cas « petite entreprise ». Le gain marginal à l'effort étant toujours égal à 1, le principal va demander un effort plus grand aux agents que dans le cas « petite entreprise » : $e^*(GE) \geqslant e_i^*(PE)$, où $e_i^*(PE)$ correspond au niveau d'effort optimal effectué par l'agent de la « petite entreprise i ».

Finalement, comme $e_i^* = e_j^* = e^*(GE)$ *l'effet multi-agents* est égal à $2\psi'\left(e^*(GE)\right)^2$ et la relation qui indique le choix de couverture du choc ε_i, se réécrit :

$$2r\left(k_i - h_i^*\right)\psi'\left(e^*(GE)\right)^2(1+\rho)\sigma_i^2 = v_i.$$

Pour $\rho \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$, *l'effet multi-agent* et *l'effet précision du signal* implique que le gain marginal de la couverture est plus grand que dans le cas « petite entreprise »[22], puisque $2r(1+\rho)\sigma_i^2 \geqslant r\sigma_i^2$ et $e^*(GE) \geqslant e_i^*(PE)$. En revanche, les coûts marginaux de la couverture sont toujours les mêmes $\left(v_i, v_j\right)$ étant donné que les chocs couverts sont toujours les mêmes. Donc, dans cet intervalle, les niveaux de couverture sont plus importants dans le cas « grande entreprise » que dans le cas « petite entreprise ».

Lorsque la corrélation entre les projets est fortement négative, $\rho \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]$, le coût marginal indirect global à l'effort est plus grand dans le cas « grande firme », alors que le gain marginal est toujours égal à 1. Le niveau d'effort optimal demandé $e^*(GE)$, est donc inférieur par rapport au cas « petite entreprise » $\left(e_i^*(PE), e_j^*(PE)\right)$. D'autre part, les gains marginaux de la couverture deviennent plus faibles que dans le cas « petite

22. Dans le cas d'une « petite entreprise i », le gain marginal à la couverture était égal à : $r\left(k_i - h_i^*\right)\psi'\left(e_i^*\right)^2\sigma_i^2$.

entreprise », alors que les coûts marginaux restent les mêmes. Donc, les niveaux de couverture demandés baissent. Dans ce cas, la fusion permet d'obtenir une couverture des agents sans coût. Cela correspond à une fusion de diversification.

Les résultats sont résumés dans la proposition suivante, où $h_i^*(GE)$ $\left(h_i^*(PE)\right)$ correspond au niveau de couverture optimal pour une « grande entreprise » (« petite entreprise i ») :

PROPOSITION 2 : *Pour* $\rho \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$, *les niveaux de couverture et d'effort demandés pour une « grande entreprise » sont supérieurs à ceux obtenus lorsque les deux entreprises sont séparées :*

$$h_i^*(\mathrm{GE}) \geqslant h_i^*(\mathrm{PE}) \text{ et } e^*(GE) \geqslant e_i^*(\mathrm{PE}),$$

et pour $\rho \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right[$, *les niveaux de couverture et d'effort demandés pour une « grande entreprise » sont inférieurs à ceux obtenus lorsque les deux entreprises sont séparées :*

$$h_i^*(\mathrm{GE}) < h_i^*(\mathrm{PE}) \text{ et } e^*(GE) < e_i^*(\mathrm{PE}).$$

PREUVE : voir appendice.

3.2 Observabilité des deux profits

On suppose maintenant que le principal est capable d'observer après fusion les deux profits π_1 et π_2 séparément. Ce cas est le meilleur pour le principal. Il correspond par exemple à la fusion de deux entreprises ayant des activités très différentes (création d'un conglomérat).

Une « grande entreprise » fera forcément mieux que deux « petites », puisqu'elle peut toujours (au moins) dupliquer la solution adoptée par les deux petites firmes. De plus, le principal va pouvoir utiliser sans coût supplémentaire la corrélation entre π_1 et π_2 à la place de la couverture $(v_1, v_2 > 0)$.

Les contrats que l'on considère entre le principal et l'agent sont toujours des contrats linéaires. Ainsi, pour $i = 1,\ 2$, on a :

$$w_i(\pi_1, \pi_2) = \alpha_i \pi_i + \tau_i \pi_j + \widetilde{\beta}_i. \tag{8}$$

Pour trouver une solution à ce problème, on utilise toujours la même méthode. L'équivalent certain de l'agent i associé à un contrat $w_i(\pi_1, \pi_2)$ (voir équation (8)) et à des niveaux de couverture h_i et h_j s'écrit :

$$EC_i = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_i e_i + \tau_i e_j + \widetilde{\beta}_i - \psi(e_i) \\ -\frac{r}{2}\left[\alpha_i^2 (k_i - h_i)^2 \sigma_i^2 + \tau_i^2 \left(k_j - h_j\right)^2 \sigma_j^2 + 2\alpha_i \tau_i \rho \,(k_i - h_i)\left(k_j - h_j\right) \sigma_i \sigma_j\right] \end{array} \right\}.$$

L'équivalent certain de chaque agent se compose toujours de son revenu espéré moins le coût privé à l'effort et moins le terme de désutilité du au risque qu'il supporte. Le profit de l'unité j apparaît à la fois dans le revenu espéré et dans le terme de désutilité de l'agent i, à cause du nouvel outil τ_i que peut utiliser le principal.

La relation indiquant l'effort exercé par chaque agent est toujours $\alpha_i = \psi'(e_i)$ puisque chaque agent participe à une seule tâche. Finalement, le profit espéré du principal s'écrit :

$$(e_1 + e_2) - \psi(e_1) - \psi(e_2) - v_1 h_1 - v_2 h_2 - R',$$

où R' correspond à la nouvelle prime de risque totale qui dépend de : r, σ^2, ρ, k_1, h_1, τ_1, k_2, h_2, τ_2 (voir appendice pour plus de détails sur R').

Remarque 4 : Si le principal demandait aux agents de participer aux deux projets, on aurait : $\alpha_i = \tau_i = \psi'(e_{i1} + e_{i2})$ (avec e_{ij} effort réalisé par l'agent i dans le projet j). Par conséquent, le principal a intérêt à demander à chaque agent à ne participer qu'à un seul projet, car ainsi il peut choisir τ_i de manière non contrainte (pas forcément égal à α_i). Le programme de maximisation du principal lorsqu'il choisit de demander à chaque agent de ne participer qu'à un seul projet domine donc celui où il demande à chaque agent de participer aux deux projets.

La condition du premier ordre indique que τ_i^*, pour e_i, h_i, h_j donnés, vérifie la relation suivante :

(9) $$\tau_i^* = -\psi'(e_i)\,\rho \frac{(k_i - h_i)}{(k_j - h_j)} \frac{\sigma_i}{\sigma_j}.$$

τ_i constitue un nouvel outil pour le principal. Dans l'expression du profit espéré, il apparaît uniquement dans le terme de prime de risque. Le principal va donc choisir optimalement τ_i afin de minimiser ce terme.

La condition du premier ordre par rapport à h_i calculée en τ_i^* défini par l'équation (9), s'écrit :

$$h_i^* = k_i - \frac{v}{r\psi'(e_i)^2} \frac{1}{\left(1 - \rho^2\right)\sigma_i^2}.$$

La demande de couverture de la « grande entreprise » est exactement la même que celle d'une « petite entreprise », sauf que dans le cas d'une « grande entreprise » la variance prise en compte n'est pas la variance marginale σ_i^2, mais la variance conditionnelle de ε_i sachant ε_j, c'est-à-dire $\left(1 - \rho^2\right)\sigma_i^2$.

Si on remplace τ_i^* par son expression, la prime de risque pour l'agent i s'écrit :

$$\frac{r}{2}\left(1 - \rho^2\right)\sigma_i^2 \psi'(e_i)^2 (k_i - h_i)^2 .$$

Cela correspond à la prime de risque associée à la variance conditionnelle de ε_i sachant ε_j (voir appendice pour le détail des calculs).

PROPOSITION 3 : *Pour* $\rho = 0$, *les niveaux d'effort et les taux de couverture sont les mêmes dans le cas « grande entreprise » et dans le cas « petite entreprise » :*

$$e_i^* \text{ (GE)} = e_i^* \text{ (PE)} \ \textit{et} \ h_i^* \text{ (GE)} = h_i^* \text{ (PE)} .$$

PREUVE : voir appendice.

Dans ce cas là, la variance conditionnelle est égale à la variance marginale. Par conséquent, les programmes de maximisation « grande entreprise » et « petite entreprise » sont les mêmes. Donc, les solutions choisies par les deux principaux aussi. Dans ce cas, l'outil supplémentaire τ_i ne sert à rien pour le principal $\left(\tau_i^* = 0\right)$. La précision du signal sur lequel la règle de compensation est basée est la même que dans le cas « petite entreprise ». Le niveau d'effort demandé e_i^* tout comme le niveau de couverture choisi h_i^* seront donc les mêmes.

DÉFINITION 1 : *Soit* $\widehat{\rho_i}$ *tel que :*

$$k_i = \frac{v_i}{r\psi'\left(e_i^*\right)^2} \frac{1}{\sigma_i^2\left(1 - \widehat{\rho_i}^2\right)}.$$

Cela signifie que $h_i^*(-\widehat{\rho_i}) = h_i^*(\widehat{\rho_i}) = 0$.

PROPOSITION 4 : *Pour* $\rho \in [-\widehat{\rho_i}; \widehat{\rho_i}] - \{0\}$, *les niveaux de couverture et d'effort sont strictement plus faibles dans le cas « grande entreprise » que dans le cas « petites entreprises » :*

$$e_i^* \text{ (GE)} < e_i^* \text{ (PE)} \ \textit{et} \ h_i^* \text{ (GE)} < h_i^* \text{ (PE)} .$$

PREUVE : voir appendice.

Pour $\rho \in [-\widehat{\rho_i}; \widehat{\rho_i}] - \{0\}$, le nouvel outil τ_i est utile au principal ($\tau_i^* \neq 0$). Grâce au nouvel outil, la variance prise en compte pour le calcul de la prime de risque est la variance conditionnelle $\left(1 - \rho^2\right)\sigma_i^2$ qui est alors strictement inférieure à la variance marginale σ_i^2. Le gain marginal de la couverture (proportionnel à $\left(1 - \rho^2\right)\sigma_i^2$) est alors plus faible, alors que le coût v_i est le même. Le niveau de couverture choisi baisse. Finalement, le niveau d'effort baisse, car la baisse du niveau de couverture implique que le coût marginal total à l'effort augmente alors que le gain marginal reste le même.

PROPOSITION 5 : *Pour* $\rho \in]-1; -\widehat{\rho_i}] \cup [\widehat{\rho_i}; 1[$, *les niveaux de couverture de la « grande entreprise » sont égaux à* 0 *et les niveaux d'effort sont croissants avec* $|\rho|$ *:*

$$e_i^* \text{ (GE)} \ \textit{croissant avec} \ |\rho|, \ \textit{et} \ h_i^* \text{ (GE)} = 0 < h_i^* \text{ (PE)} .$$

PREUVE : voir appendice.

Pour $\rho \in]-1; -\widehat{\rho_i}] \cup [\widehat{\rho_i}; 1[$, la variance conditionnelle est suffisamment faible pour que l'on ait atteint la borne inférieure $h_i^*(GE) = 0$ [23].

Le programme de maximisation du principal s'écrit alors comme un programme standard par rapport à la seule variable d'effort e. La prime de risque est uniquement proportionnelle à la variance conditionnelle $\left(1-\rho^2\right)\sigma_i^2$ et ne dépend pas du niveau de couverture (car $h_i^*(\mathrm{GE}) = 0$). Lorsque ρ augmente, le coût marginal total à l'effort diminue alors que le gain marginal à l'effort est toujours le même. Donc, lorsque ρ augmente le principal demande à l'agent d'exercer un effort plus grand.

PROPOSITION 6 : *Pour $|\rho| = 1$, les niveaux d'effort de la « grande entreprise » correspondent aux niveaux d'effort de premier rang et les niveaux de couverture sont toujours égaux à 0.*

$$e_i^*(\mathrm{GE}) = e^{PR} \text{ et } h_i^*(\mathrm{GE}) = 0 < h_i^*(\mathrm{PE}).$$

PREUVE : voir appendice.

Lorsque la corrélation entre ε_i et ε_j est parfaite, connaître la réalisation du choc qui influence le profit du projet $j\left(\varepsilon_j\right)$, permet alors de connaître parfaitement la réalisation du choc qui influence le profit du projet $i\,(\varepsilon_i)$. Le signal sur lequel la règle de compensation des agents est basée est alors parfaitement précis sur l'action exercée par les agents. Le principal n'a plus de prime de risque à verser aux agents, car le salaire des agents ne dépend pas de la réalisation de chocs exogènes qu'ils ne contrôlent pas. Le programme du principal correspond alors au programme de premier rang lorsqu'il n'y a pas de problème d'aléa moral. On aura donc $e_i^*(GE) = e_j^*(GE) = e^{PR}$.

Remarque 5 : Les résultats que l'on vient d'obtenir en terme de demande de couverture et d'effort seraient les mêmes si l'on avait considéré un contrat pour l'agent i basé sur la loi de ε_i sachant ε_j. En effet, avant que le principal verse le salaire w_i à l'agent i, il observe π_i mais aussi π_j. Connaissant π_j, et ayant anticipé l'effort fait par l'agent j, e_j, le principal infère la valeur du choc ε_j. Il peut alors réviser ses croyances, étant donné ρ, sur le choc ε_i. Le principal peut donc proposer un salaire $w_i = \alpha_i\pi_i + \widetilde{\widetilde{\beta}}_i$ en considérant la loi conditionnelle de ε_i sachant ε_j au lieu de la loi marginale de ε_i [24].

Les propositions 3, 4, 5, et 6 sont résumées dans les deux graphiques suivants [25].

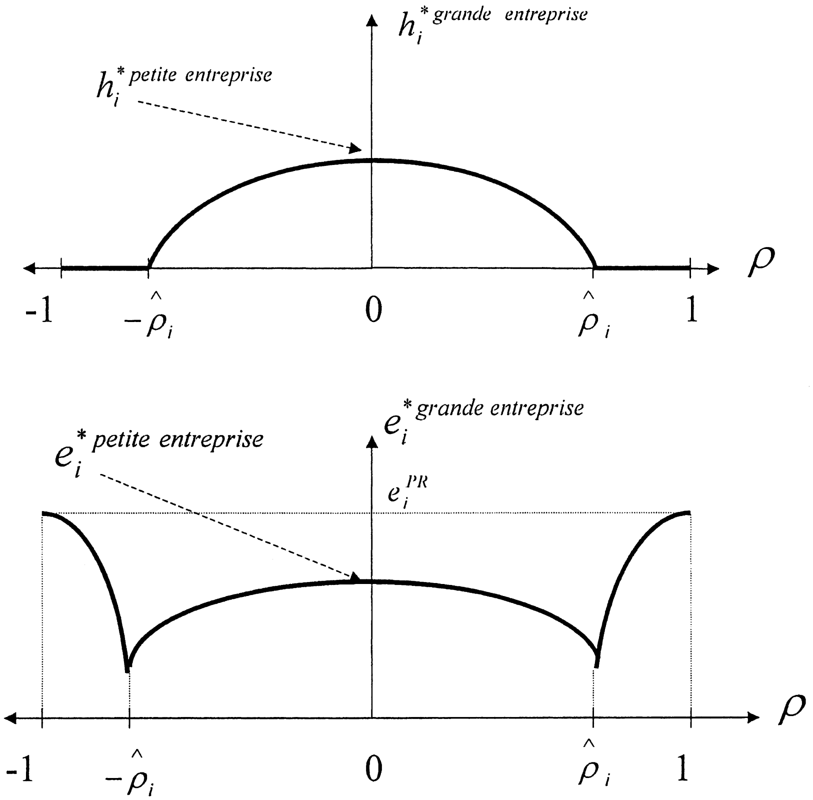
---

23. Le gain marginal de la couverture (proportionnel à la variance conditionnelle) est strictement inférieur au coût marginal v_i.

24. Ces mécanismes comparatifs ont été étudiés de manière détaillée par HOLMSTRÖM [1982] ainsi que par MOOKHERJEE [1984]. Voir aussi ZANTMAN [2000] pour une application de ces mécanismes en économie politique.

25. Pour ces deux graphiques on a supposé que les fonctions $h_i^*(\rho)$ et $e_i^*(\rho)$ étaient concaves par morceau.

FIGURE 3
Niveaux optimaux de couverture et d'effort



4 Remarques de conclusion, discussion des hypothèses et des résultats

Cet article développe un modèle où la demande de couverture est générée par l'aversion pour le risque des agents et est utilisée afin de réduire les coûts d'agence entre le principal et le ou les agents. La couverture permet d'augmenter la précision des signaux sur lesquels sont basées les règles de compensation des agents. Cela permet de réduire les coûts marginaux à l'effort des agents et de leur proposer des contrats plus incitatifs. Lorsque la fusion entre deux firmes entraîne une perte d'information, le gain marginal de la couverture augmente du fait de cette perte d'information et du fait que la couverture permet de diminuer le coût marginal à l'effort de plusieurs agents. Ainsi, on montre qu'une « grande entreprise » peut avoir une demande de couverture supérieure à celle d'une « petite entreprise », ce qui correspond aux faits empiriques.

Dans cet article, on a fait des hypothèses sur l'aversion au risque des agents et on a supposé que le principal était neutre vis-à-vis du risque. On va maintenant discuter ces hypothèses.

Aversion pour le risque de l'agent

On a considéré que l'aversion absolue pour le risque des agents était constante, dans le but d'éviter tout effet richesse. En effet, il y a un effet richesse qui apparaît après fusion dans le cas où il y a perte d'information car les contrats de salaire portent alors sur le profit total des deux projets, $\Pi = \pi_1 + \pi_2$. Comme on ne souhaite pas étudier l'impact de l'effet richesse sur la demande de couverture, on considère que les préférences pour la richesse des agents sont CARA. Considérer des préférences IARA [26] ou DARA [27] compliquerait l'analyse en rajoutant un effet richesse et rendraient plus difficile à comprendre l'effet que l'on a voulu développer ici.

Neutralité au risque du principal

La demande de couverture dans la littérature a aussi était expliquée par l'aversion pour le risque des actionnaires. On peut montrer que les résultats en ce qui concerne le choix de couverture sont également vrais, si l'on considère un principal qui a de l'aversion vis-à-vis du risque, et dont les préférences, afin d'éviter tout effet richesse, sont CARA. Dans ce cas, il faut développer l'analyse en calculant l'équivalent certain du principal. L'analyse par rapport au niveau de couverture choisi est la même et les résultats concernant le choix de couverture sont robustes à cette extension.

Cependant, ici, on considère que le principal représente les actionnaires qui peuvent parfaitement diversifier leur portefeuille de sorte qu'il se comporte comme étant neutre vis-à-vis du risque en ce qui concerne la gestion de l'entreprise. Cela permet d'expliquer la demande de couverture uniquement par l'aversion au risque des agents, comme un moyen de baisser la prime de risque que le principal doit leur verser. ▼

26. IARA : Increasing Absolute Risk Aversion.
27. DARA : Decreasing Absolute Risk Aversion.

• Références

ALGER G. A. (1999) . – « The Beauty in the Beast: Derivatives, Double Moral Hazard and Regulation », *Mimeo GREMAQ-Université Toulouse I.*

BREEDEN D., VISWANATHAN S.(1998) . – « Why do Firms Hedge? An Asymmetric Information Model », *Working Paper, Duke University*.

CAILLAUD B., DIONNE G., JULLIEN B. (2000) . – « Corporate Insurance with Optimal Financial Contracting », *Economic Theory*, 16,1, p. 77-105.

DEMARZO P., DUFFIE D. (1991) . – « Corporate Financial Hedging with Proprietary Information », *Journal of Economic theory*, 53, p. 261-286.

DEMARZO P., DUFFIE D. (1995) . – « Corporate Incentives for Hedging and Hedge Accounting », *Review of Financial Studies*, 8, p. 743-771.

DIONNE G., GARAND M. (2001) . – « Risk Management Determinants Affecting Firms' Values in the Gold Mining Industry: New Empirical Results », *Papier présenté lors de la conférence de l'AFFI à Paris*.

REVUE « ECONOMIE ET STATISTIQUE » (1994) . – N° 271-272, 1/2 *Collection INSEE.*

FROOT K. A., SCHARFSTEIN D. S., STEIN J. C. (1993) . – « Risk Management: Coordinating Corporate Investment and Financing Policies », *the Journal of Finance*, 48, 1, p. 1629-1658.

GECZY C., MINTON B., SCHRAND C. (1997) . – « Why firms Use Currency Derivatives », *the Journal of Finance*, 52, p. 1323-1354.

GRINBLATT M., TITMAN S. (1998) . – « Financial Markets and Corporate Strategy », *Mac Graw-Hill International Editions, Finances Series.*

HOLMSTRÖM B. (1979) . – « Moral Hazard and Observability », *Bell Journal of Economics*, 10, p. 74-91.

HOLMSTRÖM B. (1982) . – « Moral Hazard in Teams », *Bell Journal of Economics*, 13, p. 324- 340.

HOLMSTRÖM B., MILGROM P. (1987) . – « Aggregation and Linearity in the Provision of Intertemporal Incentives », *Econometrica*, 55, p. 303-328.

HOLMSTRÖM B., MILGROM P. (1991) . – « Multitask Principal-Agent Analyses: Incentives Contracts, Asset Ownership and Job Design », *Journal of Law, Economics and Organization*, 7, p. 24-51.

HOLMSTRÖM B., TIROLE J. (2000) . – « Liquidity and Risk Management », *Journal of Money, Credit and Banking*, 32, p. 295-319.

HOLMSTRÖM B., TIROLE J. (2001) . – « LAPM: A Liquidity-Based Asset Pricing Model », *the Journal of Finance*, 56, 5, p. 1837-1867.

LOSS F. (2001) . – « Hedging, Agency Costs and Corporate Size », *DP N° 396, Financial Markets Group, London School of Economics et Document de travail N° 21-02-567, GREMAQ Université Toulouse I.*

MOOKHERJEE D. (1984) . – « Optimal Incentive Schemes with Many Agents », *Review of Economic Studies*, 51, p. 433-446.

MIAN S. L. (1996) . – « Evidence on Corporate Hedging Policy », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31, p. 419-439.

NANCE D. R., SMITH C. W., SMITHSON C. W. (1993) . – « On the Determinants of Corporate Hedging », *the Journal of Finance*, 48, p. 267- 284.

RENUCCI A. (2000) . – « Access to Financing and the Organization Structure of the Firm », *Mimeo GREMAQ-Université Toulouse I.*

SHAVEL S. (1979) . – « Risk Sharing and Incentives in the Principal and Agent Relationship », *Bell Journal of Economics*, 10, p. 55-73.

SMITH C., STULZ R. (1985) . – « The Determinants of Firms' Hedging Policies », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, p. 391-405.

TIROLE J. (1988) . – « The Theory of Industrial Organization », *MIT press.*

TUFANO P. (1996) . – « Who Manages Risk? An Empirical Examination of Risk Management Practices in the Gold Mining Industry », *the Journal of Finance*, 51, 4, p. 1097-1137.

ZANTMAN W. (2000) . – Intégration Economique et Contrôle des Politiciens, *Mimeo GREMAQ-Université Toulouse I.*

Appendice

PREUVE DU LEMME 1

En utilisant la formule qui donne l'espérance d'une fonction exponentielle d'une variable aléatoire normale x :

$$\mathbb{E}\exp(-rX) = \exp\left(-r\left(\mathbb{E}\, X - \frac{r}{2}VarX\right)\right),$$

on calcule l'équivalent certain qui correspond à $\mathbb{E}X - \frac{r}{2}VarX$. Ici $X = \alpha\,[e + \varepsilon\,(k-h)] + \beta - \psi(e)$, avec ε distribuée selon une $N\left(0,\sigma^2\right)$. Donc, $\mathbb{E}X = \alpha e + \beta - \psi(e)$ et $VarX = \alpha^2\,(k-h)^2\,\sigma^2$. Finalement,

$$EC = \alpha e + \beta - \psi(e) - \frac{r}{2}\alpha^2\,(k-h)^2\,\sigma^2.$$

Maximiser l'utilité espérée de l'agent est équivalent à maximiser EC. La condition du premier ordre par rapport à e s'écrit : $\alpha = \psi'(e)$.

L'équivalent certain devient :

$$EC = \psi'(e)e + \beta - \psi(e) - \frac{r}{2}\psi'(e)^2\,(k-h)^2\,\sigma^2.$$

Puisqu'on a fait l'hypothèse que le salaire de réserve de l'agent était égal à 0, on a

$$\beta = \psi(e) + \frac{r}{2}\psi'(e)^2\,(k-h)^2\,\sigma^2 - \psi'(e)e.$$

La prime de risque correspond à : $\frac{r}{2}\psi'(e)^2\,(k-h)^2\,\sigma^2$. La dérivée seconde de la prime de risque en e, s'écrit : $r\sigma^2\left(\psi''(e)^2 + \psi'(e)\psi'''(e)\right)(k-h)^2$. L'hypothèse A_1 garantit que la prime de risque est convexe en e.

Finalement, le profit espéré du principal est égal à :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\,(e + (k-h)\,\varepsilon)\,(1-\alpha) - \beta - hv\\ &= e - \psi(e) - \frac{r}{2}\psi'(e)^2\,(k-h)^2\,\sigma^2 - hv.\end{aligned}$$

Les conditions du premier ordre sont :

(10) par rapport à e : $\psi'(e)\left[1 + r\psi''(e)\,(k-h)^2\,\sigma^2\right] = 1;$

(11) par rapport à h : $(k-h)\,r\sigma^2\psi'(e)^2 = v.$

En appliquant le théorème des fonctions implicites à l'équation (10), et sous l'hypothèse A_1, on obtient :

$$\frac{\partial e}{\partial h} = \frac{2r\psi'(e)\psi''(e)(k-h)\sigma^2}{\psi''(e) + \left[r\sigma^2(k-h)^2\right]\left[\psi'''(e)\psi'(e) + \psi''(e)^2\right]} > 0\,;$$

$$\frac{\partial e}{\partial \sigma^2} = -\frac{r\psi'(e)\psi''(e)\,(k-h)^2}{\psi''(e) + \left[r\sigma^2(k-h)^2\right]\left[\psi'''(e)\psi'(e) + \psi''(e)^2\right]} < 0\,;$$

$$\frac{\partial e}{\partial r} = -\frac{\psi'(e)\psi''(e)\,(k-h)^2\,\sigma^2}{\psi''(e) + \left[r\sigma^2(k-h)^2\right]\left[\psi'''(e)\psi'(e) + \psi''(e)^2\right]} < 0.$$

PREUVE DU LEMME 2

En appliquant le théorème des fonctions implicites à l'équation (11), on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial v} = -\frac{1}{r\sigma^2\psi'(e)^2} < 0\,;$$

$$\frac{\partial h}{\partial e} = \frac{2(k-h)\psi''(e)}{\psi'(e)} > 0.$$

JUSTIFICATION DE L'HYPOTHÈSE $\mathbf{A}_2$

Le programme de maximisation est concave en h, car la dérivée seconde en h : $-r\sigma^2\psi'(e)^2$ est négative en tout e.

Considérons maintenant le programme réduit de maximisation en e.

$$e^* = \underset{e}{\mathrm{argmax}}\, e - \psi(e) + \frac{1}{2}\frac{v^2}{r\sigma^2\psi'(e)^2} - kv.$$

La condition du premier ordre s'écrit :

$$1 - \psi'(e^*) - \frac{v^2\psi''(e^*)}{r\sigma^2\psi'(e^*)^3} = 0. \tag{12}$$

Pour vérifier que ce programme réduit est strictement quasi-concave, il faut vérifier que la dérivée seconde est négative en e qui vérifie la condition du premier ordre. La dérivée seconde s'écrit :

$$-\psi''(e^*) - \frac{v^2}{r\sigma^2}\frac{\psi''(e^*)}{\psi'(e^*)^3}\left[\frac{\psi'''(e^*)}{\psi''(e^*)} - 3\frac{\psi''(e^*)}{\psi'(e^*)}\right] < 0.$$

En utilisant l'équation (12), cela se réécrit :

$$-\psi''(e^*)^2\psi'(e^*) - \left(1-\psi'(e^*)\right)\left[\psi'''(e^*)\psi'(e^*) - 3\psi''(e^*)^2\right] < 0.$$

L'hypothèse A_2 garantit que cette dernière expression est strictement négative.

PREUVE DE LA PROPOSITION 1

En appliquant le théorème des fonctions implicites, on obtient

$$\frac{\partial e^*}{\partial v} = \frac{-\frac{2v\psi''(e^*)}{r\sigma^2\psi'(e^*)^3}}{\psi''(e^*) + \frac{v^2}{r\sigma^2}\frac{\psi''(e^*)}{\psi'(e^*)^3}\left[\frac{\psi'''(e^*)}{\psi''(e^*)} - 3\frac{\psi''(e^*)}{\psi'(e^*)}\right]} < 0.$$

En différentiant l'équation (12) évaluée en e^*. On obtient

$$\frac{dh^*}{dv} = \frac{1}{r\sigma^2\psi'(e^*)^2}\left(-1 + \frac{2v\psi''(e^*)}{\psi'(e^*)}\underbrace{\frac{\partial e^*}{\partial v}}_{<0}\right) < 0.$$

CONCAVITÉ OU CONVEXITÉ DE $h_1(e)$ ET DE $h_2(e)$

On a : $h_1(e) = k - \frac{v}{r\sigma^2\psi'(e)^2}$. Donc $h_1'(e) = \frac{2v\psi''(e)}{r\sigma^2\psi'(e)^3} > 0$ et $h_1''(e) = -\frac{6v\psi''(e)^2}{r\sigma^2\psi'(e)^4} < 0$.

$h_2(e) = k - \left(\frac{1}{r\sigma^2\psi''(e)}\left[\frac{1}{\psi'(e)} - 1\right]\right)^{\frac{1}{2}}$. $h_2(e)$ peut-être réécrit :

$$h_2(e) = k - B\left(\frac{1}{\psi'(e)} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \text{ avec } B\ (>0) \text{ constante.}$$

Considérons la fonction $f(e) = \frac{1}{\psi'(e)} - 1$. Cette fonction est décroissante et convexe en e.

$$f'(e) = -\frac{\psi''(e)}{\psi'(e)^2} < 0\,;$$

$$f''(e) = \frac{2\psi''(e)^2}{\psi'(e)^3} > 0.$$

Soit $g(e) = -B\,(e)^{\frac{1}{2}}$. Finalement, $h_2(e) = k - g(f(e))$. Cette fonction est croissante et peut-être convexe ou concave en e.

$$h_2'(e) = \underbrace{g'(f(e))}_{<0} * \underbrace{f'(e)}_{<0} > 0\,;$$

$$h_2''(e) = \underbrace{g''(f(e))}_{>0} * \underbrace{\left(f'(e)\right)^2}_{} > 0 + \underbrace{f''(e)}_{>0} * \underbrace{g'(f(e))}_{} < 0\ ?$$

Le programme de maximisation du principal s'écrit désormais

$$\max_{\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,h_1,h_2} \mathbb{E}\Pi\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)-\beta_1-\beta_2-h_1 v_1-h_2 v_2$$

$$sc\begin{cases} e_i \text{ maximise } \mathbb{E}u\left(\alpha_i\Pi+\beta_i-\psi(e_i)\right)\ (IC)_{agent\ i} \text{ avec } i=1,2\ ; \\ \mathbb{E}u\left(\alpha_i\Pi+\beta_i-\psi(e_i)\right)\geqslant u\left(0\right)\ (IR)_{agent\ i}\ \text{ avec } i=1,2. \end{cases}$$

Avec $\Pi=\pi_1+\pi_2=(e_1+e_2)+(k_1-h_1)\,\varepsilon_1+(k_2-h_2)\,\varepsilon_2$.

Pour $i=1,\ 2$, l'équivalent certain de l'agent i est égal à $\mathbb{E}X_i-\dfrac{r}{2}VarX_i$. Ici, $X_i=\alpha_i[\left(e_i+e_j\right)+(k_1-h_1)\,\varepsilon_1+(k_2-h_2)\,\varepsilon_2]+\beta_i-\psi(e_i)$. Donc,

$$EC_i=\left\{\begin{matrix}\alpha_i\left(e_i+e_j\right)+\beta_i-\psi(e_i)\\ -\frac{r}{2}\alpha_i^2\left[(k_1-h_1)^2\,\sigma_1^2+(k_2-h_2)^2\,\sigma_2^2+2\rho\,(k_1-h_1)\,(k_2-h_2)\,\sigma_1\sigma_2\right]\end{matrix}\right\}.$$

La condition du premier ordre de l'équivalent certain de chaque agent par rapport à e_i nous donne la relation : $\alpha_i=\psi'(e_i)$.

Puisqu'on a fait l'hypothèse que le salaire de réserve des agents était égal à 0, on obtient :

$$\begin{aligned}\beta_i=\psi(e_i)+\frac{r}{2}\psi'(e_i)^2\left[(k_1-h_1)^2\,\sigma_1^2+(k_2-h_2)^2\,\sigma_2^2\right.\\ \left.+2\rho\,(k_1-h_1)\,(k_2-h_2)\,\sigma_1\sigma_2\right]-\psi'(e_i)\left(e_i+e_j\right).\end{aligned}$$

Finalement, le profit espéré du principal s'écrit :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left((e_1+e_2)+(k_1-h_1)\,\varepsilon_1+(k_2-h_2)\,\varepsilon_2\right)(1-\alpha_1-\alpha_2)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad-\beta_1-\beta_2-h_1v_1-h_2v_2\\ &=\left\{\begin{matrix}e_1+e_2-\psi(e_1)-\psi(e_2)-h_1v_1-h_2v_2\\ -\dfrac{r}{2}\left(\psi'(e_1)^2+\psi'(e_2)^2\right)\left[(k_1-h_1)^2\,\sigma_1^2+(k_2-h_2)^2\,\sigma_2^2\right.\\ \left.+2\rho\,(k_1-h_1)\,(k_2-h_2)\,\sigma_1\sigma_2\right]\end{matrix}\right\}.\end{aligned}$$

Les conditions du premier ordre par rapport à h_1 et h_2 sont :

$$\begin{cases} r\left(\psi'\left(e_1\right)^2+\psi'\left(e_2\right)^2\right)\left[\left(k_1-h_1^*\right)\sigma_1^2+\rho\left(k_2-h_2^*\right)\sigma_1\sigma_2\right]=v_1\ ; \\ r\left(\psi'\left(e_1\right)^2+\psi'\left(e_2\right)^2\right)\left[\left(k_2-h_2^*\right)\sigma_2^2+\rho\left(k_1-h_1^*\right)\sigma_1\sigma_2\right]=v_2. \end{cases}$$

En résolvant ce système de deux équations à deux inconnues et en utilisant la relation $\dfrac{v_1}{\sigma_1}=\dfrac{v_2}{\sigma_2}$, on trouve :

$$h_i^*=k_i-\frac{v_i}{r\left(\psi'\left(e_1\right)^2+\psi'\left(e_2\right)^2\right)(1+\rho)\,\sigma_i^2}\ \text{pour } i=1{,}2. \tag{13}$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 2

En remplaçant $k_1 - h_1$ et $k_2 - h_2$ par leur valeur respective (voir équation (13)), l'expression du profit espéré du principal réduit par rapport à e_1 et e_2 pour une « grande entreprise » s'écrit :

$$(e_1 + e_2) - \psi(e_1) - \psi(e_2) - k_1 v_1 - k_2 v_2 \\ + \frac{1}{r\left(1-\rho^2\right)\left(\psi'(e_1)^2 + \psi'(e_2)^2\right)} \left[\rho \frac{v_1 v_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{v_1^2}{2\sigma_1^2} + \frac{v_2^2}{2\sigma_2^2}\right].$$

La condition du premier ordre par rapport à e_i $(i = 1,2)$ est :

$$1 - \psi'(e_i) - \frac{2\psi'(e_i)\psi''(e_i)}{r\left(1-\rho^2\right)\left(\psi'(e_i)^2 + \psi'(e_j)^2\right)^2} \left[\rho \frac{v_1 v_2}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{v_1^2}{2\sigma_1^2} + \frac{v_2^2}{2\sigma_2^2}\right] = 0.$$

Puisque les agents 1 et 2 jouent le même rôle, le principal choisit $e_1^* = e_2^* = e^*$. En utilisant la relation $\frac{v_1}{\sigma_1} = \frac{v_2}{\sigma_2}$, les CN1 deviennent $1 - \psi'(e^*) - \frac{v_i^2}{2r\,(1+\rho)\,\sigma_i^2} \frac{\psi''(e^*)}{\psi'(e^*)^3} = 0.$

Les CN1 dans le cas d'une « petite entreprise i » étaient :

$$1 - \psi'(e_i^*) - \frac{v_i^2}{r\sigma_i^2} \frac{\psi''(e_i^*)}{\psi'(e_i^*)^3} = 0.$$

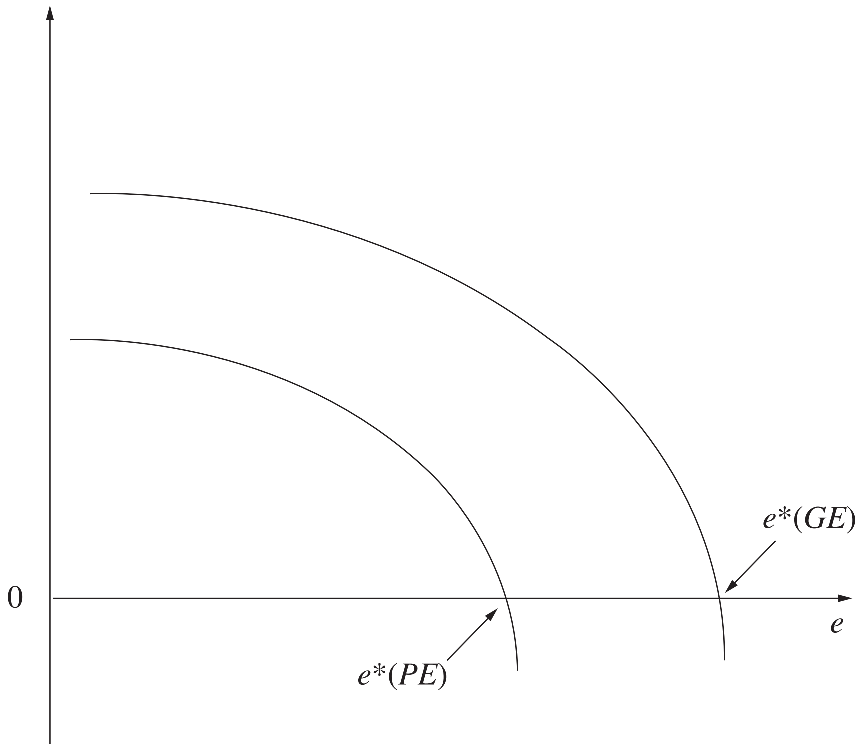
– Pour $\rho \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, on a $1 \geqslant \frac{1}{2\,(1+\rho)}$. Donc, dans cet intervalle, pour e donné, on aura :

$$1 - \psi'(e) - \frac{v_i^2}{2r\,(1+\rho)\,\sigma_i^2} \frac{\psi''(e)}{\psi'(e)^3} \geqslant 1 - \psi'(e) - \frac{v_i^2}{r\sigma_i^2} \frac{\psi''(e)}{\psi'(e)^3}.$$

De même, l'hypothèse A_2 implique que les fonctions $1 - \psi'(e) - \frac{v_i^2}{2r\,(1+\rho)\,\sigma_i^2} \frac{\psi''(e)}{\psi'(e)^3}$, et $1 - \psi'(e) - \frac{v_i^2}{r\sigma_i^2} \frac{\psi''(e)}{\psi'(e)^3}$ sont décroissantes en e. Donc, finalement pour $\rho \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, on a e^* (GE) $\geqslant e_i^*$ (PE) .

Pour illustration, considérons le cas où $\psi'(e)$ est quadratique. Alors, $1 - \psi'(e) - \frac{\psi''(e)}{\psi'(e)^3}$ ainsi que $1 - \psi'(e) - \frac{v_i^2}{r\sigma_i^2} \frac{\psi''(e)}{\psi'(e)^3}$ sont décroissantes et concaves.

FIGURE 4



– Dans le cas « petite entreprise i » le choix de couverture de ε_i est donné par la relation :

$$h_i \text{ (PE)} = k_i - \frac{1}{\psi'(e_i)^2} \frac{v_i}{r\sigma_i^2},$$

et dans le cas « grande entreprise » par la relation (13). Pour $\rho \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, on a $1 \geqslant \frac{1}{2(1+\rho)}$ et $e^* \text{ (GE)} \geqslant e_i^* \text{ (PE)}$. Donc, dans cet intervalle on aura $h_i^* \text{ (GE)} \geqslant h_i^* \text{ (PE)}$.

– Pour $\rho \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right[$, on a $1 < \frac{1}{2(1+\rho)}$. L'analyse est alors inversée. On obtient $e^* \text{ (GE)} < e_i^* \text{ (PE)}$ et $h_i^* \text{ (GE)} < h_i^* \text{ (PE)}$.

Le programme de maximisation du principal s'écrit désormais

$$\max_{\alpha_1,\tau_1,\widetilde{\beta}_1,h_1,\alpha_2,\tau_2,\widetilde{\beta}_2,h_2} \mathbb{E}\pi_1(1-\alpha_1-\tau_2)+\pi_2(1-\alpha_2-\tau_1)-\widetilde{\beta}_1-\widetilde{\beta}_2-h_1v_1-h_2v_2$$

$$sc: \begin{cases} e_i \text{ maximise } \mathbb{E}u\left(\alpha_i\pi_i+\tau_i\pi_j+\widetilde{\beta}_i-\psi(e_i)\right)\ (IC)_{agent\ i} \quad \text{avec } i=1,2\,; \\ \mathbb{E}u\left(\alpha_i\pi_i+\tau_i\pi_j+\widetilde{\beta}_i-\psi(e_i)\right) \geqslant u(0)\ (IR)_{agent\ i} \quad \text{avec } i=1,2. \end{cases}$$

Ici, $X_i = \alpha_i\pi_i + \tau_i\pi_j + \widetilde{\beta}_i - \psi(e_i)$. En utilisant la même méthode que précédemment, on trouve que l'équivalent certain de l'agent i est égal à :

$$EC_i = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_i e_i + \tau_i e_j + \beta_i - \psi(e_i) \\ -\frac{r}{2}\left[\alpha_i^2(k_1-h_1)^2\sigma_1^2 + \tau_i^2(k_2-h_2)^2\sigma_2^2 \right. \\ \left. +2\alpha_i\tau_i\rho(k_1-h_1)(k_2-h_2)\sigma_1\sigma_2\right] \end{array} \right\}.$$

De la même manière que précédemment, on a les relations :

$$\alpha_i = \psi'(e_i) \text{ et ;}$$

$$\beta_i = \psi(e_i) - \alpha_i e_i - \tau_i e_j + \tfrac{r}{2}\left[\alpha_i^2(k_1-h_1)^2\sigma_1^2 + \tau_i^2(k_2-h_2)^2\sigma_2^2 \right. \\ \left. +2\alpha_i\tau_i\rho(k_1-h_1)(k_2-h_2)\sigma_1\sigma_2\right].$$

Le profit espéré du principal s'écrit alors

$$\mathbb{E}\left(\pi_1(1-\alpha_1-\tau_2)+\pi_2(1-\alpha_2-\tau_1)-\widetilde{\beta}_1-\widetilde{\beta}_2-h_1v_1-h_2v_2\right)$$

$$(14) = \left\{ \begin{array}{c} e_1+e_2-\psi(e_1)-\psi(e_2)-h_1v_1-h_2v_2 \\ \underbrace{-\frac{r}{2}\left[\begin{array}{c} \left(\psi'(e_1)^2+\tau_2^2\right)(k_1-h_1)^2\sigma_1^2 \\ +\left(\psi'(e_2)^2+\tau_1^2\right)(k_2-h_2)^2\sigma_2^2 \\ +2\left(\psi'(e_1)\tau_1+\psi'(e_2)\tau_2\right)\rho(k_1-h_1)(k_2-h_2)\sigma_1\sigma_2 \end{array}\right]}_{R'} \end{array} \right\}.$$

R' correspond à la prime de risque totale dans ce cas. Les conditions du premier ordre par rapport à h_i et τ_i pour $i = 1,2$ sont :

$$\begin{cases} r\left[\left(\psi'(e_i)^2+\tau_j^2\right)(k_i-h_i)\sigma_i^2 + \left(\psi'(e_i)\tau_i+\psi'(e_j)\tau_j\right)\rho\left(k_j-h_j\right)\sigma_i\sigma_j\right] \\ = v_i \text{ pour } i=1,2\,; \\ \tau_i = -\psi'(e_i)\rho\frac{(k_i-h_i)}{(k_j-h_j)}\frac{\sigma_i}{\sigma_j} \text{ pour } i=1,2. \end{cases}$$

En remplaçant τ_i et τ_j par leur valeur, on obtient : $h_i = k_i - \dfrac{v_i}{r\psi'(e_i)^2}\dfrac{1}{\left(1-\rho^2\right)\sigma_i^2}$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 3

Dans ce cas là, la variance conditionnelle est égale à la variance marginale σ^2. Ainsi le programme de maximisation du principal de la « grande entreprise » est égal à la somme des deux programmes de maximisation des deux « petites firmes ». Autrement dit, le programme de maximisation de la « grande entreprise » est séparable en (e_1, h_1) et en (e_2, h_2). Le programme de maximisation en e_i et h_i (avec $i = 1, 2$) correspond à celui de la « petite entreprise i ». Les solutions de ce programmes e_1^*, e_2^* et h_1^*, h_2^* seront donc les mêmes que celles du cas « petites firmes ».

PREUVE DE LA PROPOSITION 4

En remplaçant $(k_1 - h_1)$, $(k_2 - h_2)$, τ_1, τ_2 par leur valeur, l'expression du profit espéré du principal réduit en e_1, e_2 s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\pi_1\left(1-\alpha_1-\tau_2\right)+\pi_2\left(1-\alpha_2-\tau_1\right)\right)-\widetilde{\beta}_1-\widetilde{\beta}_2-h_1v_1-h_2v_2 \\ =\left(e_1+e_2\right)-\psi(e_1)-\psi(e_2)+\frac{v_1^2}{2r\left(1-\rho^2\right)\sigma_1^2}\frac{1}{\psi'(e_1)^2} \\ +\frac{v_2^2}{2r\left(1-\rho^2\right)\sigma_2^2}\frac{1}{\psi'(e_2)^2}-h_1v_1-h_2v_2.\end{aligned}$$

Les conditions du premier ordre indiquent que $e_i^*(GE)$, pour $i = 1, 2$, vérifie :

$$1-\psi'\left(e_i^*(GE)\right)-\frac{v_i^2}{r\left(1-\rho^2\right)\sigma_i^2}\frac{\psi''(e_i^*(GE))}{\psi'(e_i^*(GE))^3}=0. \tag{15}$$

Pour $\rho \in [-\widehat{\rho_i}; \widehat{\rho_i}] - \{0\}$ on a $h \neq 0$ et $\dfrac{1}{\left(1-\rho^2\right)} > 1$. Or, dans le cas d'une « petite entreprise » $e_i^*(PE)$ vérifie l'équation $1-\psi'(e_i^*(PE))-\dfrac{v_i^2}{r\sigma_i^2}\dfrac{\psi''(e_i^*(PE))}{\psi'(e_i^*(PE))^3}=0$. Donc, sous l'hypothèse A_2, $e_i^*(GE) < e_i^*(PE)$ ce qui implique $h_i^*(GE) < h_i^*(PE)$. Les démonstrations sont les mêmes que celles de la proposition 3.

PREUVE DE LA PROPOSITION 5

Pour $\rho = \pm\widehat{\rho_i}$ on a $k_i = \dfrac{v_i}{r\psi'(e_i^*)^2}\dfrac{1}{\sigma_i^2\left(1-\rho^2\right)}$. En appliquant à l'équation (15) le théorème des fonctions implicites, on a :

$$\frac{\partial e_i^*(GE)}{\partial\rho}\propto-\frac{v_i^2}{r\left(1-\rho^2\right)^2\sigma_i^2}\frac{\psi''(e_i^*(GE))}{\psi'(e_i^*(GE))^3}<0.$$

De plus, on a :

$$\frac{dh_i}{d\rho^2} = \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial e_i}}_{>0} \underbrace{\frac{\partial e_i^*}{\partial \rho}}_{<0} + \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial \rho}}_{<0} < 0.$$

Donc, pour $\rho \in \left]-1; -\widehat{\rho_i}\right] \cup \left[\widehat{\rho_i}; 1\right[$, on a $\rho^2 \geqslant \widehat{\rho_i}$ et $h_i^* = 0$.

En remplaçant, $h_i^* = 0$, $h_j^* = 0$ dans les équations (14) et dans l'expression de τ_i, τ_j, le programme de maximisation du principal se réécrit alors pour $i = 1{,}2$:

$$\max_{e_j,\, e_i} \left\{ \begin{array}{c} e_1 + e_2 - \psi(e_1) - \psi(e_2) \\ -\frac{r}{2}\left[\psi'(e_1)^2 k_1^2 \sigma_1^2 + \psi'(e_2)^2 k_2^2 \sigma_2^2\right]\left(1 - \rho^2\right) \end{array} \right\}.$$

La condition du premier ordre par rapport à e_i est :

$$1 - \psi'(e_i^*) - r\psi'(e_i^*)\psi''(e_i^*)k_i^2\left(1 - \rho^2\right)\sigma_i^2 = 0.$$

En utilisant le théorème des fonctions implicites, on trouve :

$$\frac{\partial e_i^*}{\partial \rho^2} \propto r\psi'(e_i^*)\psi''(e_i^*)k_i^2\sigma^2 > 0.$$

e_i^* est donc croissant avec ρ^2 et donc avec $|\rho|$.

Preuve de la proposition 6

Pour $\rho \in \{-1; 1\}$ on a $h_i^* = 0$.

Dans ce cas, le programme de maximisation du principal par rapport à e_1, e_2 s'écrit :

$$e_1 + e_2 - \psi(e_1) - \psi(e_2).$$

Les CN1 par rapport à e_i, pour $i = 1,\ 2$, est : $1 - \psi'(e_i^*) = 0$. Donc, $e_i^* = e^{PR}$.