

# Comportements collectifs dans les réseaux d'influence sociale

Frédéric DEROÏAN \*

**RÉSUMÉ.** – Nous explorons les phénomènes de comportements collectifs dans un modèle déterministe formalisant une population d'agents en interaction. Nous relierons les phénomènes de diversité ou d'unanimité aux conditions structurelles du réseau d'interaction.

---

## Collective Behaviors in Networks of Social Influence

**ABSTRACT.** – We explore collective behaviors in a deterministic model of interacting agents. We relate unanimity or diversity to the structural conditions of the interaction network.

---

\* F.O.R.U.M. - Université Paris X - 200, avenue de la République 92001 Nanterre, France. E-mail : fderoian@u-paris10.fr

# 1 Introduction

---

L'influence sociale joue un rôle à part entière dans certaines situations économiques, comme l'illustrent des travaux comme ceux de BECKER [1991] pour la fréquentation des restaurants, VALENTE [1995] pour le lien entre influence sociale et diffusions d'innovation, ou TOPOL [1991] concernant les marchés financiers. Cependant, cette externalité n'est pas toujours unilatérale. Nous abordons dans cet article la question suivante : l'influence sociale constitue-t-elle une unique variable, exerçant un impact indifférencié sur les comportements individuels ou inversement peut-elle produire des phénomènes antagonistes ? Nous suggérons sur la base d'un modèle simple que les mécanismes de rétroactions positives induits par les phénomènes d'influence sociale peuvent générer à la fois l'unanimité et la diversité dans les comportements, et nous relierons la diversité des comportements à la structure du réseau sur lequel chemine l'influence.

Plus précisément, nous dégagons d'un modèle d'agents non stratégiques en interaction quelques résultats simples : nous déterminons tout d'abord une condition nécessaire et suffisante à l'établissement de comportements autonomes (proposition 1). Quand cette condition n'est plus satisfaite, nous étudions dans des cas simples les conditions d'intensité relationnelle assurant l'unanimité, par un mécanisme comparable aux phénomènes de « masse critique » des modèles à interactions globales. Mais l'intérêt d'étudier des interactions directes différenciées réside dans la capture d'effets de structure que l'on ne peut pas ramener à des dynamiques globales. Ces effets de structure jouent un rôle prépondérant pour certains régimes d'influence. Quand les comportements sont très interdépendants, la prise en compte jointe de la structure sociale et des opinions initiales se révèle nécessaire à la détermination de l'état stationnaire du système. C'est le spectre de la matrice d'influence sociale qui capture dans notre analyse les effets structurels. Nous établissons une condition simple sur la valeur propre de plus petit module induisant un état stationnaire où les opinions sont fortement interdépendantes (proposition 2). Nous montrons alors, sur l'exemple d'une structure sociale composée de sous-groupes fortement intraconnectés et faiblement interconnectés, que l'ensemble du spectre est à considérer si l'on veut prévoir les possibilités d'unanimité ou de diversité sur le long terme (proposition 3).

Nous rapportons maintenant nos hypothèses à la littérature existante sur le sujet<sup>1</sup>. Comme STEYER et ZIMMERMANN [1998], nous nous situons dans un contexte de cumul d'influence. Il apparaît en effet légitime dans certains contextes, comme l'établissement de normes sociales ou d'opinions sur un bien de qualité incertaine, qu'une opinion soumise à influence soit affectée par l'ensemble des opinions auxquelles l'agent est confronté. Dans le cadre des diffusions d'innovations, ROGERS [1995] affirme ainsi : « *individuals are*

---

1. Voir pour quelques articles généraux sur le lien interactions / agrégation COHENDET [1995], KIRMAN [1999], ou encore DALLE et FORAY [1999]. Pour un article plus technique, voir CONLISK *et al.* [2001].

*exposed to the innovation through their network of peers, and this exposure has a cumulatively increasing influence on adoption in a cumulative manner* ». (voir aussi DEROÏAN et ZIMMERMANN [2001] pour une discussion plus détaillée sur la notion de cumul d'influence). Cette hypothèse de cumul range le modèle présenté ici comme un modèle de « masse critique » (GRANOVETTER [1978] et SCHELLING [1978] en sciences sociales, KANDORI *et al.* [1993], ELLISON [1993], BLUME [1993], YOUNG [1998], Morris [2000], par exemple pour les jeux de coordination). Dans leur lignée, nous mettons en évidence un mécanisme de bifurcation dans le comportement du système, entre autonomie et forte interdépendance. Notons aussi l'apport de CHWE [2000], qui propose un modèle de coordination où les agents ont des stratégies élaborées : les agents communiquent à travers une structure de communication, et décident grâce à des inférences sophistiquées d'un comportement de révolte si un nombre suffisant d'autres agents se révolte aussi. L'auteur dresse des conditions sur la structure de communication menant à l'instauration de la révolution.

Dans STEYER et ZIMMERMANN [1998], dont notre modèle s'inspire sensiblement, les agents sont situés dans un réseau social, et les mécanismes de cumul d'influence sont explicites. Les auteurs examinent les comportements d'adoption d'une population finie d'agents faisant des choix répétés de standards technologiques. Le standard adopté est celui qui satisfait au meilleur rapport utilité - coût d'acquisition. Les auteurs établissent une notion de frontière critique comme analogue aux phénomènes de transition de phase, et établissent les conditions structurelles gouvernant la taille de la frontière critique et le devenir du système dans cette frontière. Notre modèle se situe dans le prolongement de celui de STEYER et ZIMMERMANN [1998]. Notre approche permet un traitement théorique de questions soulevées sur la base de simulations, ceci en raison de son caractère déterministe, synchrone et étant donnée l'utilisation de fonctions de réponse individuelle réagissant *continuellement* à l'influence environnante.

Au-delà des modèles à seuil, d'autres modèles, comme les modèles de *matching*, existent, qui relie la capacité d'une population à opérer en long terme un choix uniforme et éventuellement socialement efficace à certaines propriétés structurelles des réseaux sociaux. CONLISK *et al.* [2000] étudient les conditions structurelles assurant l'unanimité dans un modèle où les agents dans une grande population ont une probabilité d'adhérer à un comportement dit de norme sociale. Ils montrent essentiellement le caractère multiple des équilibres de cohésion sociale, ainsi que la forte sensibilité aux conditions initiales. BALA et GOYAL [1998] et ELLISON et FUDENBERG [1995] étudient les conditions assurant un apprentissage social efficace dans des modèles où les paiements résultant de différentes actions sont incertains ; de fait, les agents utilisent leur expérience passée, ainsi que celle de leurs voisins (les agents sont des optimisateurs bayésiens) pour guider leurs décisions. Mentionnons aussi les travaux de BERNHEIM [1993] qui utilise la théorie du signal comme base à l'étude de la conformité sociale<sup>2</sup>.

---

2. Pour des modèles issus de la physique statistique, qui traitent de comportements interactifs sur des structures spatiales de voisinage, voir DAVID et FORAY [1994], DÜRLAUF [1993 et 1997], DALLE [1995], FÖLLMER [1974], ainsi que la revue de littérature de HORS [1995].

L'influence sociale se traduit par des comportements grégaires, *a priori* non stratégiques, mais qui peuvent parfois être rationnellement justifiés. La question du degré de rationalité est abondamment décrite en économie et beaucoup de modèles utilisent une rationalité limitée. ELLISON et FUDENBERG [1995], utilisant des agents non stratégiques dans un modèle de compétition entre standards technologiques, observent que « *given the simplicity of the decision problems, we find the extreme simplicity of the behavior we study at least as plausible as the complex behavior required by the standard "fully rational" approach* ». De même, l'imitation sur les marchés financiers, selon KEYNES [1936], peut être une stratégie relationnelle, étant donné le caractère incertain de l'univers économique en question. Enfin, les travaux sur les jeux évolutionnaires (KANDORI *et al.* [1993], ELLISON [1993 et 2000], YOUNG [1998] utilisent une rationalité affaiblie.

En outre, notre modélisation suppose que les agents se réfèrent à la seule décision antérieure des autres. Ainsi, le modèle diffère des modèles d'apprentissage social de ARTHUR et LANE [1993] ou ELLISON et FUDENBERG [1995] et il est plus proche de celui de KIRMAN [1993], puisque les agents n'accumulent pas d'expérience dans l'observation du comportement des autres ou de leurs choix passés. Leur décisions sont sujetes au « *popularity weight* » de ELLISON et FUDENBERG [1995] ou de KIRMAN [1993].

L'article se présente comme suit. La section 2 présente un modèle dynamique simple d'influence sociale. La section 3 présente les apports théoriques, consistant à relier certaines conclusions sur l'état stationnaire du système aux propriétés du spectre de la matrice résumant les effets d'influence. La section 4 présente une structure type induisant unanimité ou diversité des comportements sur le long terme : nous y percevons les rôles respectifs que jouent les valeurs propres du système. La section 5 conclut.

## 2 Un modèle simple d'externalités d'influence interpersonnelles

---

L'ensemble  $N = \{1, \dots, n\}$  décrit une population de  $n$  agents considérant de manière récurrente une opinion. L'état ou opinion de chaque agent est donné par une valeur réelle  $u_i \in [-1, 1]$ . Plus  $|u_i|$  est proche de 1, plus l'agent  $i$  a une opinion tranchée. Quand  $u_i$  vaut 0, l'agent est indifférent. Nous désignons par activité globale du réseau (notée  $U$ ) la somme de toutes les opinions individuelles.

L'opinion des adopteurs potentiels est soumise à influence sociale. Dans cet article, nous considérons comme exogène la formation de ce réseau : l'état des opinions ne modifie pas les rapports d'influence sociale entre les agents. Afin de formaliser les externalités d'influence interpersonnelles, nous introduisons une matrice d'influence  $\Omega$ , dont le terme général  $\omega_{ij} \in \mathbb{R}^+$  décrit l'influence de l'agent  $j$  sur l'agent  $i$ . Ceci est équivalent à un graphe orienté dont les arcs valués représentent les liens d'influence entre les agents. Plus  $\omega_{ij}$  est grand, plus l'influence de l'agent  $j$  sur l'agent  $i$  est puissante, donc plus l'opinion de

l'agent  $i$  peut être attirée par celle de l'agent  $j$ . Une auto-influence est possible. Elle correspond à la prise en compte partielle des expériences personnelles passées. Nous notons par  $\rho(\Omega)$  le rayon spectral de la matrice  $\Omega$ , *i.e.* le plus grand module des valeurs propres complexes ou réelles de  $\Omega$ . Nous appelons  $\zeta(\Omega)$  le module de la valeur propre de plus petit module non nul dans le spectre de  $\Omega$ , et nous nommons  $\xi(\Omega)$  le module de la valeur propre de plus petit module. Ainsi,  $\zeta > \xi$  quand 0 est valeur propre.

Le temps est discret, indicé par  $t = 1, \dots, +\infty$ , et la dynamique est synchrone. L'utilité espérée  $u_i$  de l'agent  $i$  dépend des utilités des agents avec qui il est lié. Cette somme est pondérée par les liens d'influence. L'utilité de l'agent  $i$  en  $t + 1$  est

$$u_i^{t+1} = \sigma \left( \sum_j \omega_{ij} \cdot u_j^t \right), \text{ pour tout } i \in N$$

où  $\sigma$  est une fonction ayant les propriétés suivante :  $\sigma$  est croissante,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma(x) = 1$ . Les réseaux de neurones sont particulièrement adaptés à la question du cumul d'influence. Un agent donné reçoit une somme de signaux pondérés et gère cette somme, transformant le flux entrant en son niveau d'opinion, par le biais d'une fonction (appelée fonction d'activation). Cette fonction révèle la réceptivité des agents à l'influence externe. Dans ce modèle, nous choisissons une fonction continue, puisque nous examinons un niveau continu d'opinion individuelle. Dans le but de produire des résultats analytiques, nous choisissons une fonction  $C^\infty$  classique de forme sigmoïdale<sup>3</sup>

$$\sigma_i(x) = \tanh(\beta_i \cdot x), \beta_i \geq 0, i \in N$$

Le paramètre  $\beta_i$  représente la réceptivité de l'agent  $i$  à l'influence externe. Plus  $\beta_i$  est grand, plus l'agent  $i$  est affecté par l'influence sociale. Observons que pour  $0 < |x| \leq 1$ , quand  $\beta_i \leq 1$ , l'influence entrante est toujours affaiblie. Quand  $\beta_i > 1$ , pour  $|x|$  inférieur à  $x^*$  solution de  $x^* = \tanh(\beta_i \cdot x^*)$ , la fonction d'activation amplifie le signal reçu. Quand  $\beta_i$  tend vers l'infini, la fonction s'approche d'une fonction en escalier, correspondant à une réponse ternaire  $\{-1, 0, 1\}$  à l'influence externe. Nous notons par  $\sigma$  l'opérateur de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui applique la fonction tangente hyperbolique aux coordonnées d'un vecteur :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow (\tanh(x_1), \dots, \tanh(x_n)) \end{aligned}$$

L'opinion d'un agent est influencée par celle d'autres agents, et non par leur décision d'adoption. Ceci diffère fondamentalement des modèles précédents. Les agents sont supposés nourrir des relations directes avec leur voisinage relationnel, et confronter leurs opinions mutuelles. Au contraire, dans les modèles traditionnels, les agents observent les décisions des autres.

---

3. Voir HOPFIELD [1982] pour l'utilisation de la tangente hyperbolique dans le cadre des réseaux neuronaux.

Soulignons aussi le mode de séquentialité des choix. Dans le cas présent, alors qu'en général dans la littérature un agent tiré au hasard (avec remplacement) reconsidère son niveau d'opinion à chaque période, nous optons pour une version où tous les agents prennent position simultanément. Cette hypothèse, outre son intérêt technique, nous permet de formaliser l'évolution simultanée des préférences individuelles<sup>4</sup>.

## 3 Autonomie et grégarisme

---

Le modèle général consiste en un système dynamique d'ordre un non linéaire en temps discret, et nous étudions les configurations sur le long terme des niveaux d'opinions individuelles. Nous établissons deux propositions basiques caractérisant le système dans toute sa généralité, et se rapportant aux seules caractéristiques de la matrice d'influence. Ainsi, le degré d'interaction du système est établi en fonction des seules propriétés de la matrice d'influence. Dans les cas d'interdépendance, les conditions initiales sur les opinions individuelles permettent alors de sélectionner l'état stationnaire. Ce résultat peut être rapproché de STEYER et ZIMMERMANN [1998].

### 3.1 Comportements indépendants

Le système dynamique s'écrit

$$u_i^{t+1} = \tanh\left(\beta_i \cdot \sum_j \omega_{ij} \cdot u_j^t\right), \text{ pour tout } i \in N$$

Nous pouvons intégrer le terme  $\beta_i$  à la matrice d'influence et raisonner sur la matrice  $[\beta_i \cdot \omega_{ij}]_{(i,j) \in N^2}$ . Ainsi, par soucis de simplification, nous normalisons sans perte de généralité les  $\beta_i$  à 1 et faisons dépendre les résultats de la seule matrice  $\Omega$  (Ceci revient à dire que tous les agents sont identiquement réceptifs à l'influence externe, au prix que l'influence cumulée effective perçue par l'agent  $i$  est celle de la ligne  $i$  de la matrice d'influence initiale multipliée par le coefficient  $\beta_i$ ).

La proposition suivante établit que lorsque  $\rho(\Omega) \leq 1$  (et ayant normalisé les réceptivités individuelles à 1), l'application contracte tous les points initiaux vers le vecteur nul, unique point fixe du système.

PROPOSITION 1 : *Le vecteur  $\vec{0}_n$  est l'unique point fixe du système et il est globalement attracteur si et seulement si  $\rho(\Omega) \leq 1$ .*

---

4. Dans ORLÉAN [1995], l'adoption d'une séquentialité où tous les agents réorientent simultanément leur choix nuance notablement les phénomènes de *lock-in* associés aux cascades informationnelles.

PREUVE :

*Implication* : une condition nécessaire et suffisante à la stabilité locale pour un point fixe est qu'à ce point toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne sont inférieures ou égales à 1 en module. L'implication est donc évidente puisque si  $\rho(\Omega) > 1$ , étant donné que la matrice jacobienne de l'application en  $\vec{0}_n$  est  $\Omega$ , le point fixe n'est pas attracteur local (*a fortiori* global).

*Réciproque* : supposons que  $\rho(\Omega) \leq 1$ . Il est aisé de voir que l'application est contractante. Soit  $\|x\|_2 = \sum_{i \in N} |x_i| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$  la norme 2 de l'espace vectoriel de dimension  $n$ . Alors, d'une part  $\|\Omega X\|_2 < \|X\|_2$  car  $\rho(\Omega) \leq 1$ , et d'autre part,  $|\tanh(x)| < |x|$  pour tout  $x \neq 0$ , ce qui induit  $\|\Sigma Y\|_2 < \|Y\|_2$  ( $\tanh$  est une fonction contractante), d'où  $\forall X \in [-1, 1]^n$ ,  $\|(\Sigma \circ \Omega)(X)\|_2 < \|X\|_2$ .  
C.Q.F.D.

DISCUSSION SUR LA PROPOSITION 1 : Dans le modèle proposé, les agents modifient de manière endogène leurs opinions. Le sens de la proposition est très simple. Si le réseau d'influence sociale ne transmet pas suffisamment d'influence, les agents deviennent en long terme indépendants. Leurs choix ne résultent plus de comportements grégaires. Les opinions sont alors fonction de variables propres à la situation économique étudiée, ce qui dépasse le cadre du modèle. Cela signifie que l'organe diffuseur, qu'il soit public ou privé, ne peut profiter du réseau social pour alléger le poids financier de sa stratégie de persuasion. Il ne s'agit pas seulement de gagner les faveurs d'une base initiale d'agents assurant par contagion sociale et en tant que masse critique atteinte l'efficacité de la diffusion. Il faut persuader tous les agents sans escompter d'effet particulier d'entraînement.

### 3.2 Vecteur nul comme point fixe source

La proposition suivante définit les conditions sur la seule matrice d'influence assurant que le vecteur nul, synonyme de comportements indépendants, est source (les réceptivités individuelles sont encore normalisées à 1). En d'autres termes, la distance entre le vecteur nul et tout vecteur d'opinions initiales non nul s'écarte avec le temps.

PROPOSITION 2 : *Quand  $\xi(\Omega) > 1$ , le vecteur nul est source. Quand  $\zeta(\Omega) > 1$ , les opinions s'écartent du vecteur nul presque partout (sauf à partir du sous-espace propre associé à la valeur propre nulle).*

PREUVE : le principe de la démonstration est le suivant. En premier lieu, quand le rayon spectral est issu d'une racine réelle, nous savons déjà que le système converge. Si on avait affaire à deux racines complexes non réelles conjuguées, le système cyclerait<sup>5</sup>. En second lieu, soit  $\Theta$  la matrice diagonale complexe

5. Signalons la possibilité théorique d'apparition de cycles, quand le rayon spectral est issu d'une valeur propre complexe non réelle. Ces cas sont d'autant plus susceptibles d'apparaître que la

associée à  $\Omega$ . Si  $X$  est un vecteur d'opinions de coordonnées dans la base canonique n'appartenant pas au noyau de la valeur propre 0, et  $Y$  ses coordonnées dans une base orthonormée formée des vecteurs propres complexes de  $\Theta$ , alors  $\|\Theta \cdot Y\|_2 > \|Y\|_2$ . La norme 2 étant invariante par changement de base,  $\|\Omega \cdot X\|_2 > \|X\|_2$ . Or,  $|\tanh(kx)| > |x|$  si  $k > 1$ . Ainsi,  $\|X^{t+1}\|_2 > \|X^t\|_2$ . Quel que soit  $X^t \notin \text{Ker}(\Omega)$  si 0 est valeur propre ou simplement non nul dans le cas contraire,  $X^{t+1}$  est de norme supérieure.

C.Q.F.D.

DISCUSSION SUR LA PROPOSITION 2 : la proposition 2 donne les conditions assurant que le système est fortement interdépendant. Tout vecteur non nul (et qui ne réside pas dans le noyau e la valeur propre 0 si elle existe) d'opinions initiales s'écarte inexorablement du vecteur nul, et l'on est assuré qu'aucun agent ne sera indifférent au final. L'interprétation de ce type de résultat est que les agents sont suffisamment influencés dans leur opinion par leur voisinage relationnel pour qu'un régime de diffusion se mette en place, indépendamment d'autres arguments économiques. Par exemple, si nous avons affaire aux opinions concernant une innovation, nous serions assurés que par la seule entremise de la structure sociale en place les agents prendraient position sur le long terme. Cette information intéresse nécessairement le diffuseur, qui peut s'en servir pour calibrer sa stratégie de persuasion (niveau de dépenses publicitaires, ...).

*Remarque* : nous n'avons pas de résultat général concernant les cas intermédiaires entre les propositions 1 et 2, pour lesquels les valeurs propres non nulles de la matrice d'influence ne sont pas rangées dans leur totalité du même côté de 1. La section 4 commente quelques situations générant des résultats contrastés.

## 4 Quelques exemples d'unanimité et de diversité

---

Nous ne pouvons pas analyser le cas général pour  $n \geq 2$ . Nous nous orientons donc vers une démarche plus opératoire en proposant une étude analytique comparée entre des structures de réseau régulières et une structure caractérisée par des sous-groupes fortement intracconnectés et faiblement interconnectés. Nous montrons dans ce dernier cas ce que l'intuition nous permet d'imaginer : des groupes d'opinion opposée peuvent se constituer. Mais plus que cela, c'est le rôle de la plus petite valeur propre qui est mise en évidence.

---

matrice d'influence est antisymétrique. Nous ne nous intéressons pas dans cet article à ces situations. Voir DEROÏAN [2001a] et DEROÏAN [2001b] pour l'étude de cycles avec relations d'influence positives ou négatives.



## 4.1 Unanimité

Nous commençons avec en préambule l'analyse succincte du cas  $n = 1$ . C'est en effet le même mécanisme de bifurcation que l'on retrouve pour certaines configurations de la matrice d'influence en dimension  $n$ .

*Préambule technique* : Quand  $n = 1$ , si  $\omega \leq 1$ , 0 est point fixe globalement attracteur. Sinon, deux points fixes symétriques nouveaux se créent, localement stables, 0 devenant instable. La figure 4.1 (voir à la fin de l'article) présente la fonction  $\tanh(x)$  pour laquelle un seul point fixe est généré, et  $\tanh(3x)$ , qui génère trois points fixes. Le résultat est soit une convergence de l'opinion vers 0, soit vers une valeur proche de 1. Dans ce cas, un simple seuil critique<sup>6</sup> assure la transition entre la convergence globale vers  $\vec{0}_n$  et la convergence vers  $(u, u)$  ou  $(-u, -u)$ , où  $u$  est solution positive de  $u = \tanh(\omega \cdot u)$ .

Nous retrouvons ce type de bifurcation dans un certain nombre de situation d'interdépendance exposées ci-dessous. Evidemment le cas  $n = 1$  n'a pas d'interprétation particulière, si ce n'est que soit l'agent s'auto-influence au point que son opinion s'établisse définitivement, soit l'agent a peu d'inertie, auquel cas l'indécision doit être interprétée comme le fait que l'agent ne prend pas position au regard de son opinion initiale.

Le mécanisme décrit précédemment se généralise à trois situations en termes de matrices d'influence :

$$\begin{cases} \forall (i, j) \in N^2, & \omega_{ij} = \omega \\ \forall (i, j) \in N^2, & \omega_{ij} = \omega_j \\ \forall (i, j) \in N^2, & \omega_{ij} = \omega_i \end{cases}$$

Dans les trois cas,  $\xi = 0$  et  $\zeta = \rho = \sum_{i \in N} \omega_i$ . Le premier cas correspond à une matrice uniforme de terme général  $\omega$ . Quand la matrice est positive, la convergence du système est basée sur un seuil critique d'intensité des liens  $\omega_c = \frac{1}{n}$ . En effet,  $\rho(\Omega) = n \cdot \omega$ . Si  $\omega$  est plus petit ou égal au seuil, toutes les utilités tendent vers 0. Au-dessus du seuil, toutes les utilités convergent vers un point fixe, indépendamment de leur valeur initiale, à part leur signe final, qui est le signe de l'activité globale  $U^0$ . Dans cette situation encore, on passe directement de  $\vec{0}_n$  à  $\vec{u}_n$  ou  $-\vec{u}_n$ , où  $\vec{u}_n = (u, \dots, u)$ ,  $u = \tanh(\omega n \cdot u)$ . C'est alors le signe de  $U^0$  qui détermine l'état absorbant atteint. Ce résultat correspond aux effets de masse critique des modèles à interaction globale ou des modèles à seuil.

Nous étendons dans les deux autres cas la classe des matrices compatibles avec une bifurcation de type *Pitchfork*. Les structures de graphes étudiées sont de deux types. Soit l'influence qu'exerce chaque agent sur ses voisins a une intensité constante (les agents influencés pouvant recevoir des intensités

---

6. La bifurcation assurant le passage d'un point fixe attracteur à 3 points fixes, le point initialement attracteur devenant source et les deux autres étant attracteurs, est appelée *Pitchfork*.

distinctes), soit chaque agent est influencé par des sources de même intensité (les niveaux d'influence délivrés par un agent pouvant être distincts). Ces structures régulières rendent possible la coexistence d'opinions différenciées sur le long terme, quoique de même signe (en ce sens nous pouvons parler de *consensus*, réservant l'usage du mot « diversité » aux opinions de signe opposé). Dans les deux cas, on retrouve le résultat de grégarisme global lié à l'existence d'un seuil. Quand les liens sont différenciés, l'effet de réseau est plus palpable à réceptivités individuelles homogènes, bien que l'on puisse relâcher cette condition.

CAS 1 : Soit la matrice d'influence  $\Omega$  telle que  $\forall(i, j) \in N^2, \omega_{ij} = \omega_i$ . Le spectre de la matrice d'influence, noté  $Sp(\Omega)$ , est  $\{0, \dots, 0, \omega_1 + \dots + \omega_n\}$ . Le vecteur nul devient un point source quand  $(\omega_1 + \dots + \omega_n) > 1$ . Dans ce cas, on sait que  $U^{t+1} = \sum_{i=1}^{i=n} \tanh(\omega_i \cdot U^t)$ . La fonction de récursion est  $g(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \tanh(\omega_i \cdot x)$  qui est une fonction  $C^\infty$ , strictement croissante, bornée. Les opinions tendent alors vers  $u_i^\infty = \tanh(\omega_i \cdot U^\infty)$  où  $U^\infty$  est solution de  $g(x) = x$ . L'exemple montre que l'hétérogénéité des relations d'influence peut faire basculer le comportement qualitatif du système.

CAS 2 : Soit la matrice d'influence  $\Omega$  telle que  $\forall(i, j) \in N^2, \omega_{ij} = \omega_j$  et réintroduisons, pour ce seul cas, dans l'écriture du modèle les réceptivités individuelles. Alors, notant  $Z^t = \sum_{j=1}^{j=n} \omega_j \cdot u_j^t$ ,  $Z^{t+1} = \sum_{i=1}^{i=n} \omega_i \tanh(\beta_i \cdot Z^t)$ . Le même principe que celui défini dans le cas 1 nous permet de déterminer une bifurcation de type *Pitchfork* en  $Z^t$ , d'où les valeurs finales des opinions individuelles  $u_i^\infty = \tanh(\beta_i \cdot Z^\infty)$  avec  $Z^\infty = 0$  quand  $\sum_i \beta_i \cdot \omega_i \leq 1$ . Dans ce cas, une hétérogénéité des opinions sur le long terme peut être imputée à la seule hétérogénéité des réceptivités individuelles.

## 4.2 Diversité

Nous donnons ici un exemple où les interactions positives peuvent générer de la diversité sur le long terme. Pour cela, nous mettons en évidence le phénomène dans le cas le plus simple possible, à savoir une interaction à 2 agents, puis nous examinons dans quelle mesure on peut généraliser ce résultat.

Soit  $n = 2$  et  $\Omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $(a, b, c, d) \in (\mathbb{R}_+)^4$ . Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} x_1^{t+1} = \tanh(a \cdot x_1^t + b \cdot x_2^t) \\ x_2^{t+1} = \tanh(c \cdot x_1^t + d \cdot x_2^t) \end{cases}$$

Il n'est pas possible de substituer une des deux coordonnées pour réduire le problème à une équation. Les points fixes *potentiels* vérifient

$$\begin{cases} x = \frac{1}{c} \left[ \tanh^{-1} \left( \frac{1}{b} \tanh^{-1}(x) - \frac{a}{b}x \right) - \frac{d}{b} \tanh^{-1}(x) + \frac{ad}{b}x \right] \\ y = \frac{1}{b} \left[ \tanh^{-1} \left( \frac{1}{c} \tanh^{-1}(x) - \frac{d}{c}x \right) - \frac{a}{c} \tanh^{-1}(x) + \frac{ad}{c}x \right] \end{cases}$$

Pour autant, nous mettons en évidence un cas simple induisant des opinions finales différenciées, du point de vue de leur amplitude et de leur signe. Soit la matrice d'influence  $\Omega = \begin{pmatrix} \omega & \varepsilon \\ \varepsilon & \omega \end{pmatrix}$ , avec  $\omega > \varepsilon > 0$ . Pour ce système  $2 \times 2$ , le spectre de la matrice d'influence  $\Omega$  est  $Sp(\Omega) = \{\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon\}$ . Notons que  $\rho = \omega + \varepsilon$  et  $\zeta = \xi = \omega - \varepsilon$ . Le système dynamique s'écrit

$$\begin{cases} x_1^{t+1} = \tanh(\omega \cdot x_1^t + \varepsilon \cdot x_2^t) \\ x_2^{t+1} = \tanh(\varepsilon \cdot x_1^t + \omega \cdot x_2^t) \end{cases}$$

Sachant que  $|\tanh(x)| < |x|$  pour tout  $x \neq 0$ , il est clair que  $\|x^{t+1}\|_2 < (\omega + \varepsilon) \cdot \|x^t\|_2$ . Ainsi, lorsque  $\rho \leq 1$ , l'application contracte tous les points initiaux vers le vecteur nul, unique point fixe. Nous retrouvons le résultat de la proposition 1. Le système s'écrit à l'état stationnaire

$$\begin{cases} \tanh^{-1}(x_1) = \omega \cdot x_1 + \varepsilon \cdot x_2 \\ \tanh^{-1}(x_2) = \varepsilon \cdot x_1 + \omega \cdot x_2 \end{cases}$$

qui produit les deux équations suivantes :

$$(1) \quad \tanh^{-1}(x_1) - \tanh^{-1}(x_2) = \zeta \cdot (x_1 - x_2)$$

$$(2) \quad \tanh^{-1}(x_1) = \omega \cdot x_1 + \varepsilon \cdot x_2$$

Ce sont ces deux dernière équations que nous utilisons pour déterminer des points fixes. La fonction  $\text{Arctanh}$  est définie sur l'ouvert  $] -1, 1[$ , elle est impaire, croissante de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Elle est convexe sur  $]0, 1[$ , et sa pente à l'origine vaut 1.

Si  $\zeta \leq 1$ , l'équation (1) ne peut être satisfaite par aucun couple de points *distincts* issus de  $] -1, 1[$ . Dès lors, les seuls points fixes du système sont solution de

$$\tanh^{-1}(x_1) = \rho \cdot x_1$$

*i.e.* le vecteur nul et les points  $(x_1^*, x_1^*)$  et  $(-x_1^*, -x_1^*)$  où  $x_1^*$  est l'unique solution strictement positive de  $\tanh^{-1}(x_1) = \rho \cdot x_1$ . Les conditions initiales sur les opinions déterminent l'état stationnaire. En tous les cas, la situation finale est une situation d'unanimité.

Si  $\zeta > 1$ , l'équation (1) est satisfaite par une infinité de couples de points *distincts* issus de  $] -1, 1[$ . Cependant, ces points doivent aussi vérifier l'équa-

tion (2). Soit  $x_2^* > 0$  la valeur d'équilibre de la seconde coordonnée (positive sans perte de généralité). Comme  $\omega > \zeta$ , satisfaire l'équation (2) peut (pas toujours cependant ; il faut que  $\omega$  soit suffisamment grand) induire jusqu'à trois valeurs possibles pour  $x_1^*$ , valeurs non symétriques par rapport à l'origine (à cause du terme positif  $\varepsilon \cdot x_2^*$ ). Nous nous plaçons dans cette hypothèse, et nous nous concentrons sur la possibilité d'un point fixe tel que  $x_1^* x_2^* < 0$ . L'unique valeur positive de  $x_1^*$  induit l'existence d'un point fixe d'unanimité (si  $x_1^* > 0$  il existe  $x_2^* > 0$  résolvant (1)). Choisissons un point d'intersection négatif entre la fonction  $\tanh^{-1}(x)$  et la droite  $\omega \cdot x + \varepsilon \cdot x_2^*$ . Pour satisfaire l'équation (1), il suffit alors de tracer la droite de pente  $\zeta \in ]1, \omega[$  et passant par  $x_1^*$ , dont l'intersection avec la fonction  $\tanh^{-1}$  induit la présence d'une ou deux valeurs pour  $x_2^*$  dont la plus grande est assurément positive, comme l'illustre la figure 4.2 (voir à la fin de l'article).

Les points fixes  $x_2^* > 0$  sont racines de la fonction

$$\tanh^{-1}(x) - \zeta \cdot x - [\tanh^{-1}(x_1^*) - \zeta \cdot x_1^*]$$

où  $x_1^*$  résout (2). Le franchissement de la valeur 1 par  $\zeta$  produit donc une possible diversité des opinions. La proposition suivante résume la situation :

**PROPOSITION 3 :** *Dans l'exemple décrit ci-dessus, si  $\zeta > 1$ , alors apparaît la possibilité d'un état stationnaire où les opinions des deux agents sont de signe opposé.*

**Remarque :** une analyse classique de la matrice jacobienne montre qu'il existe une plage continue de paramétrage garantissant l'existence d'une zone de l'espace de dimension au moins 1 dont les points sont localement attirés vers le point fixe  $(x_1^*, x_2^*)$ . Ceci est valable pour la solution négative concernant  $x_1^*$ . L'analyse révèle essentiellement la sensibilité des bassins d'attraction au signe de  $(\zeta - 1)$ . Nous ne développons pas ce calcul simple par manque d'espace.

L'analyse se généralise aisément à une matrice  $n \times n$  composée de deux sous-blocs diagonaux uniformes de terme général  $\omega$  et de même taille  $\frac{n}{2}$ , le reste de la matrice étant occupé par le seul élément  $\varepsilon$  ; le système se réduit alors à deux équations, où l'on aurait remplacé dans (1) et (2) les termes  $x_i$  par  $\frac{n}{2}x_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . La situation correspond à des sous-groupes fortement intra-connectés et faiblement interconnectés. On peut encore généraliser à deux sous-blocs de taille  $p$  et  $n - p$ , et le système s'écrirait à l'état stationnaire

$$\begin{cases} \tanh^{-1}(x_1) = p\omega \cdot x_1 + (n - p)\varepsilon \cdot x_2 \\ \tanh^{-1}(x_2) = p\varepsilon \cdot x_1 + (n - p)\omega \cdot x_2 \end{cases}$$

ou bien encore

$$\begin{cases} \tanh^{-1}(x_1) - \tanh^{-1}(x_2) = \zeta [p \cdot x_1 - (n - p) \cdot x_2] \\ \tanh^{-1}(x_1) = \omega p \cdot x_1 + \varepsilon (n - p) \cdot x_2 \end{cases}$$

La détermination d'un point fixe exhibant la diversité reste similaire au cas précédent ; assumant  $x_2^* > 0$ , la seconde équation génère de possibles valeurs négatives de  $x_1^*$  (intersection de  $\tanh^{-1}(x)$  et de la droite  $\omega p \cdot x + \varepsilon(n - p)x_2^*$ ), et l'on détermine la valeur positive de  $x_2^*$  en réutilisant la première équation en incorporant  $x_1^*$  (l'intersection avec abscisse positive de  $\tanh^{-1}(x)$  et de la droite  $\zeta(n - p) \cdot x + [\tanh^{-1}(x_1^*) - \zeta p x_1^*]$  existe toujours si le terme  $\zeta(n - p)$  est suffisamment grand).

En revanche, la généralisation de l'analyse à un nombre quelconque  $q \geq 3$  de sous-blocs de taille  $p_1, \dots, p_q$  ne se réduit pas à un système  $2 \times 2$ , et il est plus délicat d'en rendre compte simplement par représentation graphique. Pour autant, les primitives du problème sont les mêmes<sup>7</sup> et il faudrait résoudre le système suivant à  $q$  équations :

$$\forall i \in \{1, \dots, q\}, \tanh^{-1}(x_i) = p_i \omega \cdot x_i + (n - p_i) \varepsilon \cdot \sum_{j \neq i} x_j$$

Le comportement du système dépend alors du paramétrage de la matrice d'influence et de la distribution  $\{p_i\}_{i \in \{1, \dots, q\}}$ .

## 5 Conclusion

---

Nous avons développé un modèle d'agents non stratégiques en interaction. Les spécificités du modèle sont le cumul d'influence auquel chaque agent est soumis, ainsi que le caractère simultané des révisions d'opinions. Nous avons établi une source de diversité des opinions d'agents en interaction qui est imputable à la structure d'un réseau social et avons montré qu'une étude affinée des relations d'influence directe permet de dégager des situations de comportements individuels autonomes ou interdépendants. Des opinions finales de signe opposé peuvent apparaître dans les cas de forte interdépendance, l'équilibre sélectionné dépendant des conditions sur le spectre entier de la matrice d'influence et de la distribution des opinions initiales. Cependant, trois arguments viennent nuancer les résultats présentés ici.

En premier lieu, il serait intéressant d'accroître le degré de rationalité des agents, et de tester la robustesse des effets de structure, en notant aussi qu'il existe une littérature émergente sur la formation de réseaux stratégiques (voir JACKSON et WOLINSKY [1996] pour un article séminal). Plus généralement, une approche synthétique des modèles à seuils reste à établir (voir CONLISK *et al.* [2001]).

En deuxième lieu, la question de la vitesse de convergence et de la significativité du « long terme » doivent être posées. Ainsi, les structures du type *Small-World* sont connues comme accélérant les vitesses de diffusion (voir WATTS [1999] pour une introduction aux *Small-Worlds*) et il serait particulièrement intéressant de dégager des indices de performance structurelle et de les rapprocher de cette littérature.

---

7. Par continuité, la diversité peut bien sûr s'instaurer quand  $\varepsilon$  tend vers 0, auquel cas les influences entre sous-groupes disparaissent.

En troisième lieu, les réseaux économiques et sociaux sont complexes, leur développement combinant événements historiques et auto-organisation. Dans tous les cas, les réseaux exogènes sont une approche fruste de leur description. L'étude de systèmes évolutifs peut être utile pour examiner les propriétés structurales des réseaux d'influence les plus susceptibles d'émerger d'un processus d'interaction. C'est ici la question de la formation des réseaux sociaux dont il est question (voir DEROÏAN [2001b et 2002] dans le cadre de ce modèle). ▼

FIGURE 4.1

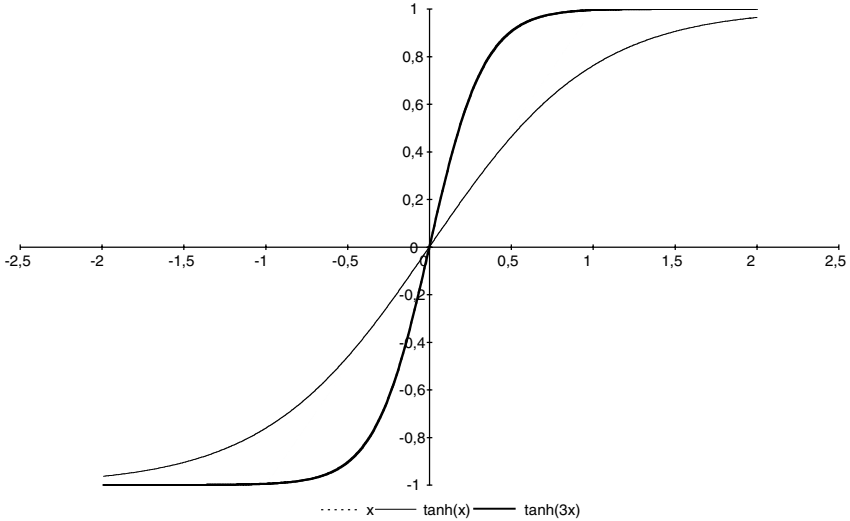
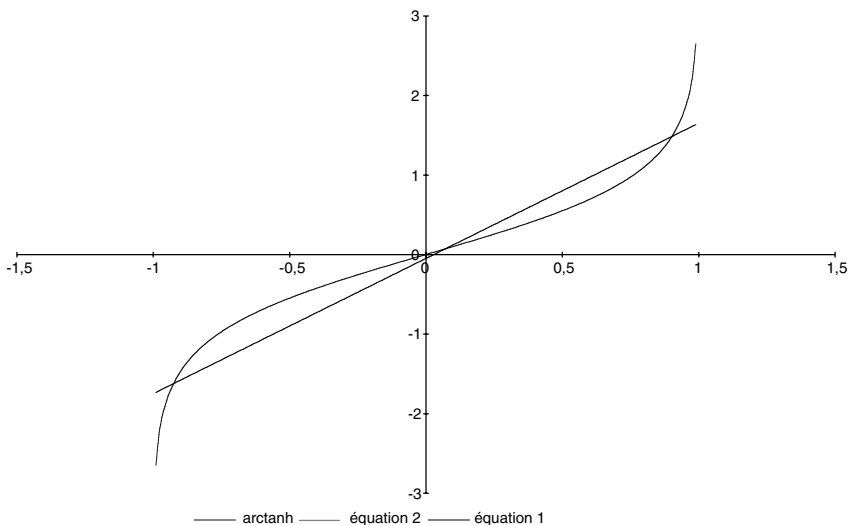


FIGURE 4.2

***1 < pente de l'équation 1 < pente de l'équation 2***

***équation 2  $\cap$  Arctanh  $\rightarrow x_1^* < 0$***

***équation 1  $\cap$  Arctanh  $\rightarrow x_2^* > 0$***



## • Références

- ARTHUR W.B., LANE D. (1993). – « Information Contagion », *Structural Change an Economic Dynamics*, 4, p. 81-104.
- BALA V., GOYAL S. (1998). – « Learning from Neighbours », *Review of Economic Studies*, 65, p. 595-621.
- BECKER G. S. (1991). – « A Note on Restaurant Pricing and Other Examples of Social Influences on Price », *Journal of Political Economy*, 99, p. 1109-1116.
- BERNHEIM D. B. (1993). – « A Theory of Conformity », *Journal of Political Economy*, 102, p. 841-877.
- BLUME L. E. (1993). – « The Statistical Mechanics of Strategic Interaction », *Games and Economic Behavior*, 5, p. 387-424.
- CHWE M. (2000). – « Communication and Coordination in Social Networks », *Review of Economic Studies*, 67, p. 1-16.
- COHENDET P. (1995). – « Networks, Diffusion of Technologies and Irreversibilities », *Annales Télécommunication*, 50, p. 234-245.
- CONLISK J., GONG J.-C., TONG C. H. (2000). – « Imitation and the Dynamics of Norms », *Mathematical Social Sciences*, 40, p. 197-213.
- CONLISK J., GONG J.-C., TONG C. H. (2001). – « Actions Influenced by a Social Network », *Journal of Evolutionary Economics*, 11, p. 277-305.
- DALLE J. M. (1995). – « Dynamiques d'Adoption, Coordination et Diversité : la Diffusion des Standards Technologiques », *Revue Economique*, 46, p. 1081-1098.
- DALLE J. M., FORAY D. (1999). – « Quand les Agents Sont-Ils Négligeables (ou Décisifs) ? », in *Réseau et Coordination*, Callon M. et al. (Ed.), Economica.
- DAVID P. A., FORAY D. (1994). – « Dynamics of Competitive Technology Diffusion through Local Network Structures: The Case of EDI Document Standards », p. 63-78, in *Evolutionary Economics and Chaos Theory: New Directions in Technology Studies*, Peter M. Allen et al. (Ed.), New York: St. Martin's Press.
- DEROÏAN F. (2001a). – « Lock-out in Social Networks », p. 77-92, in A. Kirman et J.-B. Zimmermann (Ed.) *Economics with Heterogeneous Interacting Agents*, Springer, coll. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.
- DEROÏAN F. (2001b). – « Morphogenesis of Social Networks and Coexistence of Technologies », *Economics of Innovation and New Technology*, 10, p. 428-447.
- DEROÏAN F. (2002). – « Formation of Social Networks and Diffusion of Innovations », *Research Policy*, 10, p. 835-846.
- DEROÏAN F., ZIMMERMANN J.-B. (2001). – « Cumul d'Influence et Réseaux Sociaux », *Revue d'Economie Industrielle*, 96, p. 7-27.
- DURLAUF S. N. (1993). – « Nonergodic Economic Growth », *Review of Economic Studies*, 60, p. 349-366.
- DURLAUF S. N. (1997). – « Statistical Mechanics Approaches to Socioeconomic Behavior », in Arthur W. B., Durlauf S. N., Lane D. (Ed.), *The Economy as an Evolving Complex System II*, Addison Wesley, Reading, MA.
- ELLISON G. (1993). – « Learning, Local Interaction, and Coordination », *Econometrica*, 61, p. 1047-1071.
- ELLISON G. (2000). – « Basins of Attraction, Long-Run Stochastic Stability, and the Speed of Step-by-Step Evolution », *Review of Economic Studies*, 67, p. 17-45.
- ELLISON G., FUDENBERG D. (1995). – « Word-of-Mouth Communication and Social Learning », *Quarterly Journal of Economics*, 110, p. 93-125.
- FÖLLMER H. (1974). – « Random Economies with Many Interacting Agents », *Journal of Mathematical Economy*, 1, p. 51-62.
- GRANOVETTER M. (1978). – « Threshold Models of Collective Behavior », *American Journal of Sociology*, 83, p. 1420-1443.
- HOPFIELD J. (1982). – « Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities », *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 79, p. 2554-2558.

- HORS I. (1995) . – « Des Modèles de Transition de Phase en Economie », *Revue Economique*, 46, p. 817-826.
- JACKSON M., WOLINSKY A. (1996). – « A Strategic Model of Economic and Social Networks », *Journal of Economic Theory*, 71, p. 44-74.
- KANDORI M., MAILATH G., ROB R. (1993). – « Learning, Mutation, and Long Run Equilibrium in Games », *Econometrica*, 61, p. 29-56.
- KEYNES J. M. (1936) . – *The general Theory of Employment, Interest and Money*, New York, Hrtcourt ; 1973 réimprimé comme vol. 7 de *The collected writings of John Maynard Keynes*, London, Macmillan.
- KIRMAN A. (1993). – « Ants, Rationality and Recruitment », *Quarterly Journal of Economics*, 58, p. 137-156.
- KIRMAN A. (1999). – « Aggregate Activity and Economic Organisation », *Revue Européenne des Sciences Sociales*, 37, p. 189-230.
- MORRIS S. (2000). – « Contagion », *Review of Economic Studies*, 67, p. 57-78.
- ORLÉAN A. (1995). – « Bayesian Interactions and Collective Dynamics of Opinion: Herd Behavior and Mimetic Contagion », *Journal of Economic Behavior and Organization*, 28, p. 257-274.
- ROGERS E. (1995) . – *Diffusion of Innovations*, The Free Press, New York, Fourth Edition.
- SHELLING T. (1978) . – *Micromotives and Macrobaviors*, Norton, London.
- STEYER A., ZIMMERMANN J.-B. (1998) . – « On the Frontier: Structural Effects in a Diffusion Model Based on Influence Matrices », in Cohendet, Llerena et Stahn (Ed.), *The Economics of Networks*, Springer-Verlag.
- TOPOL R. (1991). – « Bubbles and Volatility of Stock Prices: Effect of Mimetic Contagion », *Economic Journal*, 101, p. 786-800.
- VALENTE T. W. (1995) . – *Network Models of the Diffusion of Innovations*, Cresskill, NJ: Hampton Press.
- WATTS D. J. (1999). – « Networks, Dynamics, and the Small-World Phenomenon », *American Journal of Sociology*, 105, p. 493-527.
- YOUNG H. P. (1998) . – *Strategy and Social Structure: An Evolutionary Theory of Institutions*, Princeton: Princeton University Press.