ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 74 – 2004

Éducation, croissance et exclusion des chômeurs âgés dans un modèle d'appariement

Bruno DECREUSE, Pierre GRANIER *

RÉSUMÉ. – Ce travail analyse les liens entre éducation, croissance et emploi dans un modèle d'appariement où l'éducation, la croissance et l'emploi sont endogènes. Deux hypothèses essentielles caractérisent notre approche. D'une part, le capital humain des nouvelles générations augmente régulièrement sous l'effet d'une externalité dans le processus éducatif. D'autre part, la création d'un poste de travail requiert l'achat d'une unité de ressource dont le prix est indexé sur la croissance économique. La conjonction de ces deux hypothèses donne lieu à l'exclusion du marché du travail des chômeurs âgés. Dans ce contexte, l'éducation augmente le taux de croissance, réduit le taux de chômage, mais avive les difficultés rencontrées par les chômeurs âgés. Nous mettons également en évidence l'émergence d'équilibres multiples, que l'on ne peut classer selon le critère de PARETO.

Education, growth and exclusion of aged unemployed in a matching model

ABSTRACT. – This paper analyses the relationships between education, growth and employment in a search model where education, employment and growth are endogenous. A vintage human capital model is developped, in which individuals lose skills in relative terms as new better skilled generations enter the economy. This phenomenon is due to the presence of an externality in the education process. On the supply side, firms incur a growth-indexed cost to create a new job. As a consequence, keeping a job vacant has an option value that grows at a constant rate in equilibrium, thereby implying that old unemployed are rejected from the search activity. Education increases growth, lowers the unemployment rate, but shortens the critical age below which unemployed individuals become unemployable. We also exhibit multiple equilibria, that cannot be PARETO-ranked.

---

* Bruno DECREUSE : EUREQua - Maison des Sciences Economiques, 106-112 bd de l'Hôpital, 75647 Paris cedex 13, France. E-mail : decreuse@univ-paris1.fr
Pierre GRANIER : GREQAM - 2 rue de la charité 13002 Marseille, France. E-mail : granier@ehess.cnrs-mrs.fr
Nous remercions Omar LICANDRO, Philippe MICHEL, Henri SNEESSENS, les participants aux séminaires « générations imbriquées » du GREQAM ainsi que deux rapporteurs anonymes de cette revue. Les erreurs résiduelles restent de notre unique ressort.

1 Introduction

Il est largement admis que l'éducation constitue un déterminant essentiel des performances individuelles sur le marché du travail, tant en termes de rémunération que de durée des épisodes d'emploi et de chômage. Il est également souvent considéré, encore que cela soit davantage discuté [1], que l'éducation contribue également à l'amélioration des performances économiques collectives en favorisant la croissance et en réduisant le chômage structurel. LAING PALIVOS et WANG [1995] et BURDETT et SMITH [2002] pour ne citer qu'eux ont dans cette optique mis l'accent sur l'existence d'un cercle vertueux liant l'éducation à la croissance économique et/ou à l'emploi. D'un côté, une amélioration des perspectives d'emploi accroît le rendement salarial de l'éducation et encourage de ce fait une hausse des investissements éducatifs individuels. D'un autre côté, une augmentation de l'effort éducatif agrégé accroît la productivité moyenne de la force de travail et favorise la conception et la diffusion du progrès technologique, ce qui stimule la création d'emploi.

Cette vision des relations entre l'éducation et les performances du marché du travail peut paraître exagérément optimiste. Il est ainsi possible qu'un niveau d'éducation globalement plus important accroîsse les inégalités *intra-générationnelles* entre travailleurs de niveau éducatifs différents si cela conduit davantage de firmes à adopter des technologies accessibles aux seuls travailleurs qualifiés. SNOWER [1995] et SAINT-PAUL [1996] mettent en évidence un tel mécanisme dans le cadre d'un marché du travail dual. Ils montrent qu'une augmentation de la proportion de travailleurs qualifiés dans l'économie se traduit par un déplacement des ressources productives qui s'opère au détriment des travailleurs dépourvus de qualifications pour lesquels le risque de chômage – voire d'exclusion totale du marché du travail – s'aggrave. Dans la même veine, ACEMOGLU [1999] étudie l'influence d'une augmentation de la proportion de travailleurs qualifiés sur les choix technologiques des firmes et relie l'accroissement des inégalités salariales et la baisse du salaire des moins qualifiés observés aux Etats-Unis aux effets induits de l'augmentation du nombre relatif de travailleur éduqués.

Cet article s'intéresse aux effets de l'éducation sur les inégalités *intergénérationnelles*. Le progrès économique est susceptible de s'accompagner d'une obsolescence des compétences individuelles dès lors que les qualifications acquises durant la jeunesse se déprécient lorsque de nouvelles technologies qui requièrent des qualifications différentes se diffusent. L'idée générale qui est développée dans cet article est qu'en contribuant à produire de nouvelles connaissances, l'éducation participe au processus d'obsolescence des anciennes compétences. Dans ces conditions, le rôle moteur de l'éducation dans la croissance économique et la réduction du chômage peut trouver sa contrepartie dans l'amplification des phénomènes d'exclusion des travailleurs âgés.

1. Une partie de la discussion concerne le mode d'influence de l'éducation sur la croissance (voir par exemple BENHABIB et SPIEGEL [1994]). Une question importante est ainsi de savoir si le capital humain entre directement dans la fonction de production ou si l'éducation facilite l'adaptation au changement technologique comme le défendent NELSON et PHELPS [1966].

De nombreuses études empiriques attestent des difficultés d'insertion rencontrées par les chômeurs âgés sur les marchés du travail d'une grande majorité des pays industrialisés. MACHIN et MANNING [1999] indiquent ainsi que l'incidence du chômage de longue durée est dans tous les pays sensiblement plus importante parmi les chômeurs âgés avec un écart souvent supérieur à 50 % entre les chômeurs de plus de 45 ans et ceux âgés de 25 à 45 ans. COHEN et DUPAS [2000] calculent pour la France et les Etats-Unis le pourcentage de chômeurs n'ayant pas retrouvé d'emploi un an après la perte du dernier. Ils montrent que ce pourcentage est 4 fois plus important parmi les hommes âgés de 50 à 60 ans que parmi leurs homologues de 25 à 30 ans. Un constat similaire est fait par FARBER [1997] sur la base de données américaines couvrant la période 1981-1995. Il trouve que les travailleurs licenciés âgés de 45 à 64 ans ont une probabilité sensiblement plus faible de retrouver un emploi dans les années qui suivent leur licenciement que les travailleurs âgés de 35 à 44 ans. A partir d'un découpage par âge plus fin, RODRIGUEZ et ZAVODNY [2000] montrent que le taux de retour à l'emploi baisse dès la classe d'âge 45-50 ans et, suivant les périodes, dès 40 ans. Les estimations de l'influence de l'âge sur le retour à l'emploi des travailleurs licenciés confirment le sens des observations précédentes. RODRIGUEZ et ZAVODNY [2000] et ABBRING *et al* [1999] utilisent les données du *Displaced Workers Survey* et montrent que cette influence est significativement et fortement négative à partir de 50 ans, que l'estimation concerne le probabilité de retour à l'emploi ou la durée de non emploi. Un résultat similaire est obtenu par CHAN et STEVENS [2001] qui utilisent les données du *Health and Retirement Study* et par KRIECHEL et PFANN [2002] sur données Hollandaises.

Si les chômeurs âgés connaissent manifestement des difficultés particulières pour retrouver un emploi, ils subissent également une perte de revenu relativement plus importante lorsqu'ils en retrouvent un. KRIECHEL et PFANN [2002] estiment la perte de salaire subie par les travailleurs licenciés à la fois sur le premier emploi retrouvé et 3 années après le licenciement. Les résultats indiquent que l'âge est la seule caractéristique individuelle qui exerce une influence significative (positive) sur cette perte, cette influence étant particulièrement marquée 3 ans après le licenciement et ce dès 40 ans. ABBRING *et al* [1999] obtiennent des résultats comparables sur données américaines.

La proximité de l'âge de départ à la retraite susceptible d'influer sur les comportements d'embauche des employeurs et sur les comportements de recherche des chômeurs constitue une explication possible et assez intuitive aux constats précédents. L'existence de coûts d'embauche peut dissuader les firmes de recruter un travailleur proche de l'âge de départ à la retraite. De même, les gains attendus de l'occupation d'un emploi augmentent avec l'horizon de vie active de sorte que l'effort de recherche d'emploi peut diminuer à mesure que cet horizon se rapproche. Un tel mécanisme est décrit par LJUNGQVIST et SARGENT [2002]. Une explication, davantage complémentaire qu'alternative est que les avancées technologiques détruisent partiellement le capital humain spécifique accumulé par les travailleurs âgés. AGHION et HOWITT [1998, chapitre 9] montrent que dans un tel contexte des conflits d'intérêt peuvent opposer les générations à propos du rythme de diffusion des innovations.

Les travaux empiriques qui étudient les effets du changement technologique sur la situation économique des travailleurs âgés s'intéressent principalement aux décisions de cessation d'activité. JUHN [1992] montre que l'accroissement de la dispersion des revenus qui peut être attaché au changement technologique a contribué au retrait plus précoce du marché du travail des travailleurs âgés les moins éduqués. BARTEL et SICHERMAN [1993], et AHITUV et ZEIRA [2000] croisent des mesures sectorielles concernant les gains de productivité et des données individuelles. Ils montrent que le changement technique exerce une influence négative relativement sensible sur la participation des travailleurs âgés même si dans certains secteurs l'accroissement induit des salaires peut avoir un effet positif sur la participation. FRIEDBERG [2001] observe que les travailleurs âgés utilisent moins fréquemment d'ordinateurs, alors que ceux qui en utilisent quittent plus tard le marché du travail. Soit les travailleurs qui n'utilisent pas d'ordinateur n'ont pas les compétences requises et quittent le marché du travail en raison des difficultés qu'ils éprouvent à valoriser leurs qualifications, soit les travailleurs âgés qui utilisent des ordinateurs souhaitent quitter tardivement le marché du travail et il est en conséquence rentable pour eux de se former à l'utilisation d'ordinateurs. Les estimations réalisées à l'aide de variables instrumentales suggèrent que l'utilisation d'ordinateurs affecte directement la probabilité de retrait du marché du travail, ce qui va dans le sens de la première interprétation.

Les travaux de BAUMOL et WOLF [1998] se distinguent des précédents en étudiant l'influence du progrès technique sur la durée du chômage des travailleurs âgés. Ils mettent en évidence une corrélation positive entre différents indicateurs de progrès technique et la durée des épisodes de chômage des travailleurs âgés.

Cet article examine les interactions entre l'éducation la croissance et l'exclusion des travailleurs âgés en introduisant un processus d'obsolescence des compétences au sein d'un modèle d'appariement avec éducation et croissance endogènes. Notre modèle incorpore deux hypothèses majeures. Premièrement, le niveau de capital humain (et l'efficacité productive) des nouvelles générations entrant sur le marché du travail progresse régulièrement grâce à l'accumulation des connaissances. Le vieillisssement engendre ainsi une perte *relative* de capital humain. Deuxièmement, la création d'un nouveau poste requiert l'achat préalable d'une unité de ressource dont le prix est indexé sur la croissance (nous supposons qu'il est proportionnel au salaire moyen de l'économie à chaque instant). Sur un sentier de croissance régulier, la valeur d'option associée au rejet d'un candidat dans le but de poursuivre la recherche d'un travailleur plus productif augmente ainsi avec le temps.

Ces deux hypothèses induisent le rejet des candidatures émanant des chômeurs âgés. En effet, si les compétences individuelles demeurent figées à la suite de l'investissement éducatif, ce n'est pas le cas de la valeur d'option associée au rejet d'une candidature, qui croît au même rythme que le capital humain des entrants. Nous montrons ainsi qu'il existe un âge limite au-delà duquel tout chômeur devient à proprement parler inemployable.

Au niveau macroéconomique, l'éducation exerce deux influences contraires sur l'exclusion des travailleurs âgés. D'une part, la productivité moyenne de la force de travail s'accroît avec l'éducation en raison de l'entrée sur le marché du travail à chaque instant de nouvelles générations plus productives. Cela stimule la création d'emploi au travers d'un effet de capitalisation, réduisant ainsi la masse de chômeurs pouvant être victimes d'exclusion. D'autre part, l'éducation accélère la croissance et avec elle le rythme d'obsolescence des compétences, avec pour conséquence une réduction de l'âge limite d'employabilité. Ces deux effets sont susceptibles de dominer tour à tour, de sorte que la relation entre exclusion et éducation est non monotone et avec elle la relation entre taux de chômage agrégé et taux d'activité des travailleurs âgés.

Au niveau microéconomique, les choix éducatifs privés obéissent à une double motivation. D'une part, bénéficier du flux de revenu le plus élevé possible ; d'autre part, demeurer employable le plus longtemps possible. Les choix privés interagissent entre eux au travers des décisions de création d'emploi et des critères de recrutement des firmes. Ces interactions se traduisent par l'émergence de phénomènes de complémentarité stratégique selon lesquels l'investissement éducatif des uns affecte positivement l'investissement éducatif des autres. Nous mettons ainsi en évidence l'existence possible d'équilibres multiples. Dans la mesure où les équilibres avec éducation élevée sont caractérisés par un taux de chômage faible, mais également par un âge limite d'employabilité bref, il n'est pas possible de les ordonner selon le critère de PARETO. Envisageons par exemple le passage d'un équilibre « bas » où les investissements éducatifs sont peu importants, à un équilibre « haut » où les investissements éducatifs sont plus élevés. Un tel changement a deux effets : augmentation du taux de sortie du chômage, et réduction de l'âge limite d'employabilité. Les travailleurs les plus jeunes valorisent davantage l'augmentation du taux de sortie du chômage, et sont donc bénéficiaires du changement. En revanche, les générations plus âgées sont plus sensibles à la réduction de l'âge limite d'employabilité, de sorte que le changement induit une dégradation de leur situation.

Le cadre analytique utilisé rapproche cet article de la contribution [2] de LAING, PALIVOS et WANG [1995]. L'une des principales différences concerne les effets de la croissance économique qui engendre ici un processus d'obsolescence des compétences absent du travail de LAING *et al.* Ces derniers considèrent que l'éducation permet l'assimilation d'une fraction d'un stock – supposé constant – de connaissances publiques et conditionne la capacité à bénéficier d'effets d'apprentissage durant l'emploi. Comme tous les chômeurs bénéficient du même niveau de capital humain, aucun mécanisme endogène d'exclusion ne peut émerger. Il n'y a donc pas de conflit d'intérêt entre les différentes générations présentes sur le marché du travail : toutes bénéficient d'un accroissement de l'investissement éducatif, qui attire davantage de firmes sur le marché.

L'hypothèse essentielle qui distingue notre approche des précédentes est que le stock de connaissances publiques que l'éducation permet d'assimiler n'est pas constant mais augmente régulièrement au cours du temps sous l'effet d'une externalité à la AZARIADIS et DRAZEN [1990]. Cette accumulation des connaissances sous-tend à la fois le processus de croissance et le processus d'exclusion. La productivité ne s'améliore donc pas régulièrement sur tous les emplois existants dans l'économie, elle ne progresse qu'en fonction de l'arrivée sur le marché du travail de nouvelles générations de travailleurs plus performants. De ce point de vue, cet article se rapproche des travaux d'AGHION et HOWITT [1994] et de MORTENSEN et PISSARIDES [1998] qui lient le processus de croissance à l'apparition de nouvelles générations d'équipements plus productifs à l'origine d'une destruction endogène des technologies plus

2. Voir aussi POSTEL-VINAY [1997].

anciennes devenues obsolètes. Ce mécanisme de destruction créatrice suppose que les travailleurs bénéficient en permanence des compétences leur permettant d'utiliser les technologies les plus récentes. Nous adoptons un point de vue inverse en supposant figées les compétences de sorte que la croissance ne s'accompagne pas de la destruction des technologies les plus anciennes mais de l'exclusion des chômeurs les plus âgés.

Afin de simplifier l'analyse, le fonctionnement du modèle est d'abord présenté en supposant comme LAING *et al* l'absence de destruction des emplois. Cette hypothèse simplificatrice peut prêter à confusion dans la mesure où l'âge des chômeurs se confond alors avec leur ancienneté au chômage : l'obsolescence des compétences peut ainsi apparaître tout autant liée à la durée passée au chômage qu'au vieillissement. Cette hypothèse est relachée en section 5 sans que cela affecte les principaux résultats qualitatifs. Le reste de l'article est organisé comme suit : le cadre analytique est présenté dans la section 2. La section 3 analyse les liens entre l'éducation, la croissance et l'exclusion à éducation exogène. L'effort éducatif est endogénéisé en section 4. La dernière section conclue. Les preuves des propositions sont toutes renvoyées en annexe.

2 Le modèle

L'économie comprend un unique secteur productif constitué d'un continuum de taille endogène de petites firmes identiques associées chacune à un emploi unique pouvant être vacant ou occupé. La population, de mesure $N(t)$ à l'instant t, est constituée d'agents à durée de vie infinie. En outre, $nN(t)$ agents naissent à chaque instant, de sorte que $n > 0$ est le taux de croissance de la population. Ces agents s'éduquent, puis entament leur vie active au chômage. Les individus comme les firmes sont neutres vis-à-vis du risque et escomptent le temps au taux $\rho > 0$. On désigne par L_t et U_t les nombres d'employés et de chômeurs, alors que $u \equiv U_t / (U_t + L_t)$ est le taux de chômage stationnaire et $E = 1 - (L_t + U_t) / N_t$ est le taux d'exclusion (d'inactivité). En l'absence de destruction exogène des emplois seuls les chômeurs n'ayant jamais occupé d'emploi peuvent être exclus du marché du travail. On reviendra sur cette hypothèse en section 5.

2.1 Education et capital humain

On désigne par $H(t)$ le capital humain agrégé de l'économie à l'instant t, et par $H(\tau,s)$ le capital humain d'un individu né en τ ayant réalisé un investissement éducatif s. Le rendement de l'investissement éducatif dans la production de capital humain est supposé dépendre du capital humain agrégé dans l'économie au moment de l'investissement. Plus précisément, on suppose :

$$H(\tau,s) = sH(\tau) / [nN(\tau)] \tag{2.1}$$

Ce processus de formation du capital humain individuel est très similaire à celui retenu par LAING *et al* [1995]. On obtient dans leur modèle l'équation (2.1) en notant s la proportion de connaissance publique absorbée par un individu d'éducation s et $H(\tau)/[nN(\tau)]$ ce stock de connaissance publique. L'unique différence est donc qu'ici le stock de connaissances publiques est proportionel au capital humain agrégé et n'est donc pas constant [3]. Le capital humain agrégé s'écrit :

$$H(t) = \int_{-\infty}^{t} nN(z)\, H(z,s(z))\, dz \tag{2.2}$$

d'où on tire, en combinant les équations (2.1) et (2.2), le taux de croissance du capital humain agrégé qui s'écrit :

$$g(t) = \frac{dH/dt}{H} = s(t) \tag{2.3}$$

Ce taux de croissance se confond avec l'effort éducatif des entrants. Ainsi, le capital humain agrégé croît à taux constant, et il en va de même du capital humain des nouvelles générations.

2.2 Appariements

On suppose que les exclus ne se livrent à aucune activité de recherche sur le marché du travail. La fonction d'appariement qui décrit le processus de rencontre sur le marché du travail a donc pour arguments la mesure des chômeurs U_t et celle des emplois vacants v_t. En notant M_t le flux de rencontres à l'instant t, on a :

$$M_t = m(U_t, v_t) \tag{2.4}$$

La fonction m a toutes les propriétés d'une technologie néoclassique. Elle est au moins deux fois continuement différentiable, strictement croissante et concave en chacun de ses arguments, et homogène de degré 1. Elle satisfait aux conditions d'INADA ainsi qu'aux conditions de bord : $m(x_1, 0) = m(0, x_2) = 0$, pour tout x_1 et tout x_2 positifs ou nuls.

La technologie d'appariements est non-discriminante. Les rencontres sont donc réparties de façon équiprobable parmi les chômeurs d'une part, et parmi les postes vacants d'autre part. On note $\theta \equiv v/U$ la tension du marché du travail. Le taux d'obtention d'un emploi μ vaut ainsi $\mu \equiv \mu(\theta) = m(1,\theta)$, alors que le taux de recrutement des firmes est $\eta \equiv \eta(\theta) = m(1,\theta)/\theta$. Les propriétés de la fonction d'appariement impliquent que μ est une fonction strictement croissante alors que η est une fonction strictement décroissante. De plus, $\lim_{\theta\to\infty} \mu(\theta) = \lim_{\theta\to 0} \eta(\theta) = \infty$, et $\mu(0) = \lim_{\theta\to\infty} \eta(\theta) = 0$.

3. Le capital humain agrégé doit être divisé par la mesure de la population pour s'assurer d'un taux de croissance constant. Nous avons divisé en sus par le taux de croissance démographique de manière à ce que ce dernier n'affecte pas le taux de croissance. Cette hypothèse qui n'a aucune autre conséquence peut être justifiée au travers d'une externalité de congestion.

2.3 Production et rémunération

Le flux de production engendré par un travailleur de capital humain H vaut $2yH$, $y > 0$. La valeur actualisée des flux de production futurs est donc $2YH$, où $Y \equiv y/\rho$. On suppose pour simplifier que cette valeur est partagée de façon égale entre le travailleur et la firme. En notant $W_\tau(s)$ la valeur actualisée des flux de revenu d'un salarié né en τ d'éducation s, et $J_\tau(s)$ la valeur actualisée des flux de profits réalisés par l'employeur d'un tel salarié il vient :

$$W_\tau(s) = V_\tau(s) = YH(\tau, s) \tag{2.5}$$

La création d'un poste vacant nécessite l'achat préalable d'une unité de capital productif dont le coût est K_t. Pour que le taux de chômage reste constant sur un sentier de croissance équilibrée, il est nécessaire que K_t soit indexé sur la croissance. Nous suivons PISSARIDES [1990] en supposant qu'il est proportionnel au salaire moyen $\overline{w}_t$ de l'économie à toute date t, *i.e.* $K_t = k_0\overline{w}(t)$, $k_0 > 0$. En notant $\overline{H}(t)$ le *capital humain moyen des chômeurs* à l'instant *t*, le salaire moyen à cette date peut s'écrire :

$$\overline{w}(t) = y\overline{H}(t)\int_{-\infty}^{t} n\exp[-(n+g)\tau]\,d\tau = \overline{H}(t)\,yn/(n+g) \tag{2.6}$$

En posant pour simplifier $K_0 \equiv k_0 yn/(n+g)$, le coût de création d'un emploi vacant s'écrit simplement $K_t = K_0\overline{H}(t)$.

On suppose que la loi interdit tout licenciement, de sorte qu'un individu embauché l'est éternellement. Cette hypothèse simplificatrice est justifiée par la présence du coût en capital. En l'absence de coût de licenciement, les employeurs auraient intérêt à continuer leur recherche et à licencier leur travailleur en cas de rencontre avec un chômeur plus productif. Cette possibilité aurait évidemment d'importantes conséquences sur le mécanisme d'exclusion. Sous cette hypothèse, la valeur d'un poste vacant V_t est définie par :

$$\rho V_t = \eta\left[\mathbb{E}\left(J_{t-a}(s) \mid J_{t-a}(s) \geqslant V_t\right) - V_t\right] + dV_t/dt \tag{2.7}$$

L'expression (2.7) est usuelle : un poste vacant est un actif financier dont le rendement ρV_t est égal à la « probabilité » de pourvoir le poste multipliée par le gain net réalisé à cette occasion, plus la variation du prix de l'actif. Il est important de remarquer que le poste n'est pourvu qu'à la condition que le travailleur rencontré engendre un profit $J_{t-a}(s)$ supérieur à la valeur du poste si il reste vacant. C'est pourquoi l'opérateur d'espérance est conditionnel à l'événement $J_{t-a}(s) \geqslant V_t$.

L'entrée de nouvelles firmes étant libre, la tension s'ajuste de manière à égaliser à chaque instant la valeur d'un emploi vacant et le coût de création d'un nouveau poste. Soit :

$$V_t = K_t \tag{2.8}$$

---

4. Nous nous débarassons ainsi d'un effet potentiel de la croissance qui consiste à réduire le coût de création d'un poste vacant à niveau de capital humain agrégé donné.

Cette condition permet de « boucler » le modèle lorsqu'on la combine avec l'équation (2.7) qui détermine la valeur d'un poste vacant.

2.4 Flux et stocks

La variable Δ désigne l'âge limite à partir duquel les chômeurs deviennent inemployables. Cette variable est endogène et sera déterminée dans les sections suivantes. La mesure des chômeurs évolue selon

$$dU/dt = nN(t) - \mu U - nN(t - \Delta)\exp[-\mu\Delta] \tag{2.9}$$

Le flux d'entrée au chômage est composé uniquement des entrants sur le marché du travail. Le flux de sortie comprend les embauches, ainsi que la cohorte de chômeurs qui atteint l'âge Δ. La dynamique de l'emploi est décrite par :

$$dL/dt = \mu U \tag{2.10}$$

et le taux d'exclusion se définit résiduellement, soit $E = 1 - (L + U)/N$. En résolvant ces différentes équations, on obtient

$$u = n/(\mu + n), E = \exp[-(\mu + n)\Delta] \text{ et } L = (1 - u)(1 - E)N \tag{2.11}$$

Le taux de chômage augmente avec le taux d'entrée dans la force de travail et diminue avec le taux de sortie du chômage. Il ne dépend pas de l'âge limite d'employabilité dans la mesure où il n'y a pas de destruction d'emploi, et les travailleurs employables ont tous la même probabilité d'embauche. En raison des propriétés de la fonction d'appariement, le taux de chômage est une fonction strictement décroissante et convexe de la tension du marché du travail. Le taux d'exclusion est égal à la probabilité $\exp[-\mu\Delta]$ d'atteindre l'âge limite d'employabilité au chômage, multipliée par le poids $\exp[-n\Delta]$ des cohortes d'âge supérieur ou égal à Δ dans la population globale. L'emploi est une fonction strictement croissante du taux de sortie du chômage et de l'âge limite d'employabilité.

3 Equilibre avec croissance exogène

Dans cette section, nous supposons que l'investissement éducatif $s > 0$ est donné.

3.1 Ages des chômeurs

On note ϕ la distribution stationnaire des âges parmi les individus employables.

Proposition 1 : Distribution des âges des chômeurs

Pour tout $a \in [0, \Delta]$,

$$\phi(a) = (\mu + n) \frac{\exp[-(\mu + n) a]}{1 - \exp[-(\mu + n) \Delta]} \tag{3.1}$$

La distribution des âges parmi les individus employables est celle d'une loi exponentielle tronquée en Δ. L'âge moyen parmi les chômeurs vaut ainsi :

$$\mathbb{E}(a \mid a \leqslant \Delta) = \frac{1}{\mu + n} [1 - \Delta\phi(\Delta)] \tag{3.2}$$

L'âge moyen augmente avec Δ, et diminue avec μ.

3.2 Tension

Le capital humain moyen des chômeurs $\overline{H}(t)$ est défini par :

$$\overline{H}(t) = \int_0^\Delta \phi(a) H(t - a, s) \, da \tag{3.3}$$

d'où, compte tenu des équations (2.1) et (2.3),

$$\overline{H}(t) = sH(0) \int_0^\Delta \phi(a) e^{g(t-a)} da \tag{3.4}$$

Le capital humain moyen des chômeurs croît donc ainsi au même taux g que le capital humain agrégé. Compte tenu de la condition de profit nul (2.8), la valeur d'un emploi vacant croît également au taux g. En reportant ce résultat dans l'équation (2.7) et en utilisant le fait que $V_t = K_t$, on obtient :

$$K_0 = \frac{\eta(\theta)}{\rho - g} [Y - K_0] \tag{3.5}$$

L'expression (3.5) s'interprète aisément. Le membre de gauche est la valeur d'un poste vacant déflatée du niveau moyen du capital humain parmi les individus employables. L'achat d'un poste vacant constitue un investissement qui produit des dividendes. Le flux de dividendes anticipés à chaque instant est $\eta [Y - K_0] \overline{H}(t)$, c'est-à-dire la probabilité de recruter un travailleur multipliée par le gain net réalisé à cette occasion. Ce flux de dividendes croît au taux g, en raison de l'entrée de travailleurs plus productifs à chaque instant du temps. Le taux d'actualisation effectif est donc ρ, le taux d'intérêt, minoré du taux de croissance des dividendes g. C'est l'effet de capitalisation de la croissance, qui se traduit essentiellement par une baisse du prix du temps [5].

5. L'effet de capitalisation transite ici par l'entrée de nouvelles générations sans cesse plus productives, et non par la diffusion du progrès technique sur les postes existants comme dans le modèle de Pissarides [1990].

Comme Y et K_0 sont donnés, c'est le taux de recrutement η qui s'ajuste pour garantir l'égalité (3.5). La tension du marché du travail résoud ainsi :

$$\text{(LE)} \qquad \eta(\theta) = (\rho - g)\, \frac{K_0}{Y - K_0}$$

PROPOSITION 2 : TENSION

(i) *Il existe un unique* $\overline{\theta} \equiv \overline{\theta}(g, y, K_0, \rho)$ *qui résoud (LE) si et seulement si* $Y > K_0$ *et* $g \in [0, \rho[$.

(ii) $\partial\overline{\theta}/\partial g > 0,\ \partial\overline{\theta}/\partial\Delta = 0$

(iii) $\partial\overline{\theta}/\partial y > 0,\ \partial\overline{\theta}/\partial\rho < 0,\ \partial\overline{\theta}/\partial K_0 < 0$

L'existence d'une unique tension résulte des propriétés de la fonction d'appariement : le taux de recrutement décroît strictement avec le ratio du nombre de postes vacants sur le nombre de chômeurs [6]. Nous présentons au point (ii) la statique comparative par rapport aux autres endogènes du modèle, et au point (iii) la statique comparative par rapport aux paramètres exogènes. (ii) L'effet de capitalisation mis en exergue précédemment implique que la tension augmente avec le taux de croissance du capital humain. En effet, le profit anticipé lié à la détention d'un poste vacant augmente avec le taux de croissance du capital humain agrégé. Cet effet stimule l'entrée de nouvelles firmes. La probabilité de pourvoir chaque poste s'ajuste alors de façon à garantir la condition de profit nul. L'âge limite d'employabilité, tout comme la distribution des âges des chômeurs n'affectent pas la tension. La raison tient au fait que le profit anticipé déduit d'une embauche est proportionnel au capital humain moyen des chômeurs. Or, le coût de création d'un nouveau poste est proportionnel au salaire moyen. Comme le salaire moyen est lui-même proportionnel au capital humain moyen des chômeurs, les deux effets se compensent et la composition par âge des chômeurs n'affecte pas les décisions d'entrée des firmes. (iii) Les effets du flux de production y, du taux d'escompte ρ et du coût K_0 usuels.

3.3 Age limite d'employabilité

Etant donnée la stratégie de réserve des firmes, un chômeur est employable lorsqu'il engendre un profit supérieur à la valeur du poste si celui-ci reste vacant. Formellement, un individu d'âge a et d'éducation s est employable à la date t à la condition nécessaire et suffisante que $J_{t-a}(s) \geqslant V_t$. Or, la condition de profit nul implique que $V_t = K_0\overline{H}(t)$. Dès lors, la condition d'employabilité s'écrit

$$\text{(3.6)} \qquad YH(t-a, s) \geqslant K_0\overline{H}(t)$$

6. $g = 0$ est inclus dans la condition d'existence dans la mesure où nous n'avons pas encore imposé $g = s$.

Le coût de création d'un nouveau poste confère une valeur d'option au fait de rejeter une candidature dans le but de poursuivre la recherche d'un travailleur plus productif. Un candidat à l'embauche n'est donc employable qu'à la condition d'engendrer un profit supérieur à cette valeur d'option.

Or, on sait que

$$\overline{H}(t) = \int_0^{\Delta} \phi(\alpha) H(t-\alpha, s)\, d\alpha \tag{3.7}$$

En combinant ces deux dernières expressions avec l'équation (2.1) qui définit le capital humain individuel, la condition (3.6) s'écrit encore

$$Y \exp[-ga] \geqslant K_0 \int_0^{\Delta} \phi(\alpha) \exp[-g\alpha]\, d\alpha \tag{3.8}$$

Par conséquent, l'âge limite d'employabilité, si il existe, résout

$$Y \exp[-g\Delta] = K_0 \int_0^{\Delta} \phi(\alpha) \exp[-g\alpha]\, d\alpha \tag{AE}$$

PROPOSITION 3 : AGE LIMITE D'EMPLOYABILITÉ

(i) Il existe un unique $\overline{\Delta} \equiv \overline{\Delta}(g,\theta,y,K_0,\rho,n)$ *qui résoud (AE) si et seulement si* $Y > K_0$.

(ii) $\partial\overline{\Delta}/\partial g < 0$, $\partial\overline{\Delta}/\partial\theta < 0$

(iii) $\partial\overline{\Delta}/\partial y > 0$, $\partial\overline{\Delta}/\partial K_0 < 0$, $\partial\overline{\Delta}/\partial\rho < 0$, $\partial\overline{\Delta}/\partial n < 0$

L'exclusion des chômeurs âgés résulte de l'entrée perpétuelle sur le marché du travail de nouvelles générations dont le capital humain est sans cesse plus élevé. En effet, comme le coût de création de nouveaux postes est proportionnel au capital humain des entrants, la valeur d'option associée au rejet d'une candidature dans le but de recruter un travailleur plus productif croît au taux constant g. Dans la mesure où le capital humain individuel demeure figé une fois l'investissement éducatif effectué, il existe un âge au-delà duquel l'embauche du travailleur ne permet pas de couvrir la valeur du poste laissé à l'état vacant.

Deux critiques peuvent être formulées à l'encontre de ce mécanisme d'exclusion. Premièrement, dans cette version simplifiée du modèle, les individus embauchés ne peuvent perdre leur emploi. Ainsi, seuls les individus n'ayant jamais occupé d'emploi peuvent devenir exclus. Au-delà de son caractère irréaliste, une telle hypothèse engendre une ambiguïté dans l'interprétation du mécanisme d'obsolescence du capital humain individuel : c'est tout autant l'âge que la durée du chômage qui conduisent à l'exclusion du marché du travail. Or, si c'est la durée du chômage, le mécanisme évoqué paraît peu crédible : la croissance n'a pas d'effet sur une période aussi brève, typiquement au voisinage de deux ans pour les épisodes de chômage les plus longs. Pour répondre à cet argument, nous proposons en section 5 une extension où tous les postes de travail sont soumis à un risque de destruction exogène. Sans ambiguïté, l'âge est le seul facteur d'obsolescence (relative).

Deuxièmement, les salaires résultent dans notre approche d'un simple partage du produit. Ils sont donc rigides, puisqu'ils ne répondent pas à la dégradation des opportunités externes du travailleur à mesure qu'il vieillit. Dans ces conditions, la rigidité des salaires constitue-t-elle le déterminant ultime de l'exclusion des chômeurs âgés ? La réponse est négative. Pour le comprendre, considérons le surplus total créé à la date t par un appariement lorsque le travailleur est d'âge a : $2YH\,(t-a) - V_t$. La relation d'emploi ne peut prendre place qu'à condition que ce surplus soit positif, c'est-à-dire que $2YH\,(t-a) \geqslant K_0\overline{H}\,(t)$, lorsque l'on tient compte de la condition de profit nul. Or, lorsque le chômeur dépasse l'âge ∇ déterminé par $2YH\,(t-\nabla) = K_0\overline{H}\,(t)$, le surplus créé par son embauche est négatif. Aucune firme ne désire embaucher un tel travailleur, même si elle obtient la totalité du surplus créé par l'appariement. Ainsi, la rigidité salariale ne peut être tenue pour responsable de l'exclusion des chômeurs âgés dans notre modèle.

A nouveau, nous distinguons la statique comparative par rapport aux autres endogènes du modèle – point (ii) – de la statique comparative par rapport aux paramètres exogènes – point (iii). (ii) Le taux de croissance définit le rythme d'obsolescence du capital humain individuel. Par conséquent, l'âge limite d'employabilité diminue avec le taux de croissance de l'économie. Il devient arbitrairement grand lorsque le taux de croissance tend vers 0 – il n'y a plus de déqualification relative des compétences individuelles –, et tend vers 0 lorsque le taux de croissance tend vers l'infini. L'âge limite d'employabilité décroît avec la tension du marché du travail. En effet, la tension conditionne le taux de sortie du chômage, qui diminue l'âge moyen des chômeurs. Le rajeunissement des chômeurs s'accompagne alors d'une hausse de leur capital humain moyen. Les critères de sélection des firmes incorporent cette augmentation et deviennent donc plus sévères.

(iii) Le taux de croissance de la population joue un rôle similaire à la tension. Une hausse du taux de croissance de la population se traduit en effet par un rajeunissement de la population des chômeurs, et donc par une hausse de leur capital humain moyen. Les autres paramètres ont des effets intuitifs : ceux qui augmentent le ratio Y/K_0 tendent à allonger l'âge limite d'employabilité, alors que ceux qui le réduisent tendent à le raccourcir.

3.4 Chômage, croissance et exclusion

L'équilibre à éducation exogène résout simultanément les relations (LE) et (AE) en imposant $g = s$.

PROPOSITION 4 : EQUILIBRE AVEC ÉDUCATION EXOGÈNE

(i) *Il existe un unique équilibre si et seulement si* $s \in\,]0, \rho[$ *et* $Y > K_0$

(ii) $d\theta^*/ds > 0,\ d\Delta^*/ds < 0$

La condition nécessaire et suffisante (i) d'existence d'un unique équilibre ne fait que concaténer les deux conditions nécessaires et suffisantes d'existence des courbes (LE) et (AE). Comme la tension déduite de la courbe (LE) ne dépend pas de l'âge limite d'employabilité, alors que l'âge limite d'employabilité tiré de (AE) est strictement décroissant avec la tension, l'équilibre est unique.

Le point (ii) décrit l'impact de l'éducation sur la tension et l'âge limite d'employabilité. L'effet sur la tension ne fait que traduire l'effet de capitalisation de la croissance que nous avons souligné dans la proposition 2. L'effet sur l'âge limite d'employabilité peut s'appréhender de la façon suivante :

$$\text{(3.9)} \qquad \frac{d\Delta^*}{ds} = \underbrace{\frac{\partial\overline{\Delta}\left(g,\theta^*\right)}{\partial g}}_{\substack{\text{obsolescence du capital humain} \\ (-)}} + \underbrace{\frac{\partial\overline{\Delta}\left(g,\theta^*\right)}{\partial\theta}\frac{d\theta^*}{ds}}_{\substack{\text{réduction de l'âge moyen des chômeurs} \\ (-)}}$$

L'éducation affecte l'âge limite d'employabilité par deux canaux distincts : par l'intermédiaire de son effet direct sur le rythme d'obsolescence du capital humain individuel et par le biais de l'effet de capitalisation de la croissance qui accélère la sortie du chômage, avec pour conséquence un rajeunissement de la population des chômeurs. Ces deux effets sont de signe négatif.

Des effets de l'éducation sur la tension et l'âge limite d'employabilité, on déduit l'impact de l'éducation sur le taux de chômage et le taux d'exclusion. Le taux de chômage est une fonction strictement décroissante de la tension. Par conséquent, il décroît strictement avec l'éducation.

Formellement, l'effet sur le taux d'exclusion est décrit par :

$$\text{(3.10)} \qquad \frac{dE}{ds} = -\left[\Delta^*\mu'\left(\theta^*\right)\frac{d\theta^*}{ds} + \left(\mu\left(\theta^*\right)+n\right)\frac{d\Delta^*}{ds}\right]E$$

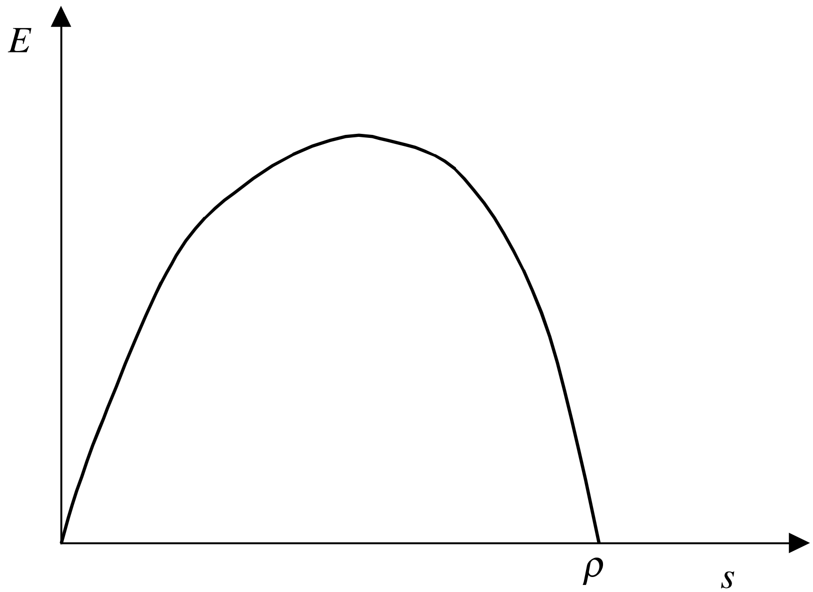
L'éducation exerce au total deux influences antagonistes. D'une part, elle augmente la sortie du chômage, ce qui réduit la probabilité d'atteindre l'âge Δ^* au chômage. D'autre part, elle raccourcit l'âge limite d'employabilité, ce qui à taux de sortie du chômage donné accroît l'exclusion. Si l'effet global est ambigu, on sait que Δ^* devient arbitrairement élevé lorsque g devient arbitrairement faible, alors que la tension et donc le taux de sortie du chômage demeurent finis. Ainsi l'exclusion est extrêmement faible pour des taux de croissance proches de 0. A l'autre extrême, le taux de sortie du chômage devient arbitrairement élevé lorsque le taux de croissance se rapproche du taux d'escompte ρ ; l'âge limite d'employabilité reste fini. L'exclusion est donc négligeable lorsque le taux de croissance est important. L'influence de l'éducation sur le taux d'exclusion est donc non monotone.

La figure 1 représente le taux d'exclusion en fonction de l'éducation. L'exclusion croît avec l'éducation pour des faibles valeurs de l'éducation, mais décroît pour des valeurs plus importantes [7].

---

7. La courbe admet des pentes infinies aux bornes de l'intervalle $]0,\rho[$, et sa continuité garantit l'existence d'un maximum. On ne peut toutefois exclure l'existence de plusieurs extrema locaux. Bien entendu, cela n'affecte en rien notre discussion.

FIGURE 1
Education et taux d'exclusion



Deux économies croissant à taux distincts peuvent engendrer un même taux d'exclusion. Dans la première où l'éducation et la croissance sont de niveaux réduits, l'exclusion résulte de la faiblesse du taux de sortie du chômage. Dans la seconde où l'éducation et la croissance sont de niveaux importants, l'exclusion traduit le rythme élevé de déclassement du capital humain individuel.

4 Equilibre avec croissance endogène

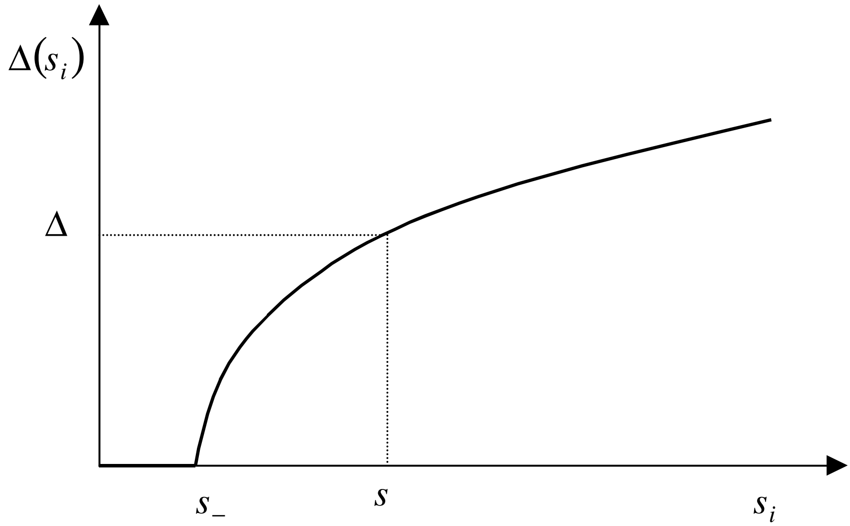
Nous considérons maintenant le choix optimal d'éducation qui détermine le rythme de croissance endogène de l'économie. Nous nous plaçons dans la perspective d'un équilibre de NASH symétrique. Un agent particulier i envisage donc son éducation s_i en considérant celle des autres donnée et égale à $s > 0$.

4.1 Age limite d'employabilité individuel

On désigne par Δ l'âge limite d'employabilité commun aux autres travailleurs, et par $\Delta(s_i)$ l'âge limite d'employabilité du travailleur i. L'âge Δ résulte toujours de

(4.1) $$Y \exp[-g\Delta] = K_0 \int_0^{\Delta} \phi(\alpha) \exp[-g\alpha]\, d\alpha$$

FIGURE 2
Education et âge limite d'employabilité individuels



L'individu d'éducation s_i et d'âge a est employable lorsque le profit déduit de son embauche dépasse la valeur du poste laissé à l'état vacant. Soit, compte tenu de la condition de profit nul :

$$(4.2) \quad s_i Y \exp[-ga] \geqslant K_0 s \int_0^{\Delta} \phi(\alpha) \exp[-g\alpha] \, d\alpha = sY \exp[-g\Delta]$$

L'âge limite d'employabilité individuel vaut ainsi

$$(4.3) \qquad \Delta(s_i) = \begin{cases} \Delta + \dfrac{1}{g} \ln \dfrac{s_i}{s} \text{ si } s_i \geqslant s \exp[-g\Delta] \\ \quad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La figure 2 représente cette fonction.

Tant que l'éducation s_i est inférieure à $s_- \equiv s \exp[-g\Delta]$, l'âge limite d'employabilité individuel est nul. Il croît ensuite sans limite, égalant l'âge limite d'employabilité des autres agents lorsque $s_i = s$.

4.2 Investissement éducatif

L'investissement éducatif dépend de son coût et de son bénéfice. Nous supposons que le coût de l'éducation dépend de l'effort éducatif s et du stock de connaissances $H(\tau)$ disponibles au moment τ du choix éducatif selon [8]

8. Le coût de l'éducation doit augmenter avec la croissance économique pour qu'il existe un sentier de croissance régulier. Dans la mesure où l'individu absorbe une fraction du stock de connaissances publiques disponibles à sa naissance, il est raisonnable de supposer que le coût de l'éducation évolue proportionellement à ce stock.

$$C\left(s,H\left(\tau\right)\right)\equiv c_0 C\left(s\right)H\left(\tau\right) \tag{4.4}$$

où $c_0 > 0$ est un paramètre d'échelle de la fonction de coût. La fonction C est strictement croissante, strictement convexe, au moins deux fois dérivable, avec $C\left(0\right)=C'\left(0\right)=0$.

Le bénéfice de l'éducation est égal à la valeur actualisée des flux de revenus anticipés en début de vie active. Soit $R_a\left(s\right)$ la valeur de la recherche d'emploi d'un chômeur d'âge a et d'éducation s, déflatée du capital humain agrégé à la naissance de l'individu :

$$\rho R_a\left(s\right)=\mu\left[W_0\left(s\right)-R_a\left(s\right)\right]+\partial R_a\left(s\right)/\partial a \tag{4.5}$$

avec $R_a\left(s\right)=0$ pour tout $a\geqslant\Delta\left(s\right)$. Ainsi, pour tout âge $a\leqslant\Delta\left(s\right)$,

$$R_a\left(s\right)=\frac{\mu}{\rho+\mu}\left\{1-\exp\left[-\left(\rho+\mu\right)\left(\Delta\left(s\right)-a\right)\right]\right\}Ys$$

La valeur de la recherche d'emploi correspond à une fraction de l'utilité du travailleur Ys en cas d'obtention d'un emploi. Cette fraction décroît avec l'âge, c'est-à-dire à mesure que le travailleur se rapproche de l'âge limite d'employabilité.

L'éducation optimale résulte du programme de maximisation suivant :

$$\widehat{s_i}\in\arg\max_{s_i\geqslant 0}\left\langle R_0\left(s_i\right)-c_0 C\left(s_i\right)\right\rangle \tag{P}$$

sous la contrainte (4.3).

PROPOSITION 5 : EFFORT ÉDUCATIF OPTIMAL

Si le problème (P) admet une solution intérieure, alors

$$\frac{\mu Y}{\rho+\mu}\left\{1+\frac{\rho+\mu-g}{g}\exp\left[-\left(\rho+\mu\right)\Delta\left(\widehat{s_i}\right)\right]\right\}=c_0 C'\left(\widehat{s_i}\right) \tag{4.6}$$

Comme nous n'avons rien imposé sur l'éducation s commune aux autres travailleurs, le problème de maximisation n'admet pas systématiquement de solution intérieure. Cependant, à l'équilibre symétrique, tous les individus choisissent le même investissement éducatif et celui-ci résulte de la condition du premier ordre (4.6)[9]. L'éducation optimale résulte alors de l'égalité entre le bénéfice marginal et le coût marginal de l'éducation ; soit

9. Nous décrivons ainsi la fonction de réaction individuelle au voisinage de l'équilibre symétrique.

$$\underbrace{\frac{\mu}{\rho+\mu}\left[1-\exp\left[-(\rho+\mu)\,\Delta\left(\widehat{s_i}\right)\right]\right]Y}_{\text{rendement salarial}}$$
$$+\underbrace{Y\mu s_i\,\Delta'\left(\widehat{s_i}\right)\exp\left[-(\rho+\mu)\,\Delta\left(\widehat{s_i}\right)\right]}_{\text{rendement sur l'employabilité}}=\underbrace{c_0C'\left(\widehat{s_i}\right)}_{\text{coût marginal}}$$

Le bénéfice marginal est composé de deux termes, qui renvoie aux deux motivations qui guident l'individu dans son investissement éducatif : revenu et employabilité. Le premier terme correspond dans un environnement frictionnel au rendement salarial usuel dans la théorie du capital humain. Le second terme est plus original : l'éducation individuelle permet en effet d'accroître l'âge limite d'employabilité. Cependant, ce second rendement revêt une importance quantitative négligeable pour des valeurs réalistes des paramètres [10] : le motif d'exclusion retardée en fin de carrière n'affecte que très peu les choix éducatifs effectués en début de carrière.

Compte tenu de cette dernière remarque, l'éducation optimale est voisine de celle qui résoud

$$\frac{\mu}{\rho+\mu}Y\approx c_0C'\left(\widehat{s_i}\right) \tag{4.7}$$

Ainsi, l'investissement éducatif tend à augmenter avec le taux de sortie du chômage, parce que celui-ci réduit la période anticipée de chômage au cours de laquelle le capital humain demeure inusité.

4.3 Education, tension et durée d'employabilité

A l'équilibre symétrique, on a $\widehat{s_i}=s=s^*$, et $\Delta\left(\widehat{s_i}\right)=\Delta=\Delta^*$. La définition 1 rappelle les différentes équations qui constituent l'équilibre avec effort éducatif endogène.

DÉFINITION 1 : EQUILIBRE AVEC ÉDUCATION ENDOGÈNE

Un équilibre est défini par un quadruplet $\left(s^*,g^*,\theta^*,\Delta^*\right)\in\mathbb{R}_+^*\times[0,\rho[\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ *qui résout*

$$g=s \tag{CH}$$
$$\eta(\theta)=(\rho-g)\,K_0/\left(Y-K_0\right) \tag{LE}$$
$$Y\exp[-g\Delta]=K_0\int_0^{\Delta}\frac{(\mu(\theta)+n)\exp[-(\mu(\theta)+n+g)\,a]}{1-\exp[-(\mu(\theta)+n)\,\Delta]}da \tag{AE}$$
$$c_0C'(s)=\frac{\mu(\theta)\,Y}{\rho+\mu(\theta)}\left\{1+\frac{\rho+\mu(\theta)-g}{g}\exp[-(\rho+\mu(\theta))\,\Delta]\right\} \tag{EO}$$

10. Prenons $\mu=2{,}0$, ce qui implique une durée moyenne des épisodes de chômage de 6 mois, $g=2\%$, et $\rho=5\%$. Suposons que l'éducation optimale se traduise par une durée d'employabilité de 30 ans. Alors le terme $\frac{\mu}{g}\exp[-(\rho+\mu)\,\Delta(\widehat{s},.)]\approx 100e^{-60}\approx 0$.

L'équation (CH) rappelle que le taux de croissance est égal à l'effort éducatif. L'équation de libre entrée (LE) lie la tension du marché du travail au taux de croissance du capital humain. L'âge limite d'employabilité est déterminé par l'équation (AE). Enfin, l'éducation optimale résulte de (EO).

A partir des équations (CH) et (LE), on peut exprimer le taux de croissance g et la tension θ comme des fonctions (strictement croissantes) de s, soit $g \equiv s$ et $\theta \equiv \Theta(s)$. Le calcul de l'équilibre se ramène ainsi à la détermination simultanée d'un âge limite d'employabilité Δ^* et d'un effort éducatif $s^* \in]0, \rho[$ qui résolvent simultanément (AE) et (EO).

A partir de l'équation (EO), on peut exprimer l'âge limite d'employabilité en fonction de l'éducation. Sous réserve qu'une telle solution existe, on a

$$\Delta = -\frac{1}{\rho + \mu(\Theta(s))} \ln\left\{\frac{s}{\rho + \mu(\Theta(s)) - s}\left[\frac{c_0}{Y}\frac{\rho + \mu(\Theta(s))}{\mu(\Theta(s))}C'(s) - 1\right]\right\} \tag{4.8}$$

PROPOSITION 6 : EQUILIBRE AVEC ÉDUCATION ENDOGÈNE

(i) Il existe au moins un équilibre non trivial si $c_0 C'(\rho) > Y$

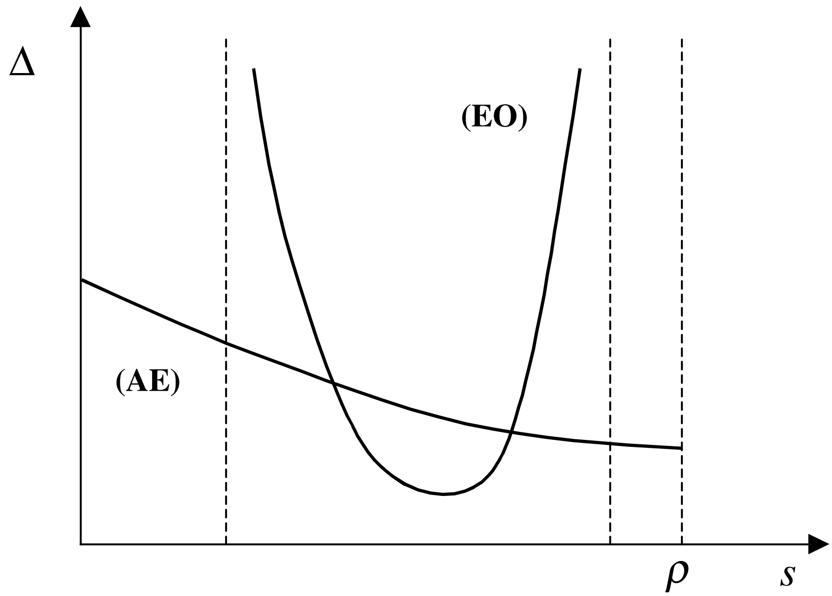
(ii) Lorsque $c_0 C'(\rho) < Y$*, ou il existe plusieurs équilibres génériques non triviaux, ou il n'en existe aucun*

Pour qu'un équilibre existe, il est nécessaire que $s < \rho$. Or, à tension donnée, l'investissement éducatif qui découle de (4.6) ne satisfait pas nécessairement à cette condition. La condition *suffisante* d'existence d'un équilibre (i) stipule que l'investissement éducatif $s = \rho$ ne peut être choisi, parce qu'il s'avère trop coûteux pour être rentable. Dans un tel cas de figure, $c_0 C'(\rho)$ est le coût marginal de l'éducation, alors que Y en est le bénéfice marginal puisque μ tend vers l'infini lorsque g tend vers ρ.

La présence de deux mécanismes multiplicateurs est susceptible d'induire l'existence d'équilibres multiples, ce que stigmatise la partie (ii) de la proposition 6, et ce que représente la figure 3 [11]. D'une part, une éducation plus élevée attire davantage de firmes sur le marché du travail par le biais de l'effet de capitalisation discuté précédemment ; la tension du marché du travail est donc plus importante, ce qui renforce les incitations à investir en capital humain. Ce mécanisme est similaire à celui mis en avant par LAING *et al* [1995]. D'autre part, une éducation plus élevée accélère le processus de déclassement relatif des compétences individuelles ; la nécessité de s'éduquer dans le but de demeurer employable longtemps en est accrue. Ce mécanisme rappelle celui de SAINT-PAUL [1996], où, dans un modèle dual du marché du travail, une augmentation de la proportion de qualifiés détériore le bien-être des non-qualifiés, ce qui accroît le rendement de la qualification.

11. Lorsque $c_0 C'(\rho) < Y$, la courbe (EO) dessine systématiquement un $\cup$ dans le plan (s, Δ). Cependant, les courbes (AE) et (EO) ne se coupent pas nécessairement. A la suite de la preuve de la proposition 6 en annexe, nous montrons qu'il est toujours possible d'abaisser arbitrairement la courbe (EO) sans affecter la courbe (AE), ce qui garantit qu'une situation comme celle décrite par la figure 3 peut émerger.

FIGURE 3
Multiplicité d’équilibres



Une autre conséquence importante que l'on peut tirer de la présence de ces deux externalités est que l'on ne peut statuer facilement sur l'efficacité sociale de l'équilibre décentralisé. En effet, si les générations les plus jeunes pourraient bénéficier d'une augmentation du niveau moyen de formation au travers de la hausse induite du taux de sortie du chômage, ce n'est pas le cas des chômeurs âgés davantage sensibles à la réduction de l'âge limite d'employabilité. De la même manière, si plusieurs équilibres coexistent, on ne peut les ordonner selon le critère de PARETO : à un taux de chômage faible correspond nécessairement un âge limite d'employabilité bref, et à un âge limite d'employabilité élevé correspond toujours un taux de chômage important. Il y a donc un conflit d'intérêt entre travailleurs jeunes et travailleurs plus âgés quant au niveau d'éducation désirable de la force de travail.

5 Destruction des emplois

En l'absence de destruction des emplois, l'âge des chômeurs se confond avec leur ancienneté au chômage, laissant planer un doute sur l'interprétation du mécanisme d'exclusion. Cette hypothèse est relachée dans cette section sans conséquence sur les principaux résultats qualitatifs exposés en section 3. En particulier, le taux de chômage décroît avec l'éducation, alors que l'âge limite au delà duquel un chômeur devient inemployable tend à diminuer.

Chaque poste de travail est soumis à un risque de destruction constant $q > 0$, que le poste soit vacant ou occupé. La destruction d'un poste occupé engendre deux cas de figure. Si le travailleur est suffisamment jeune, il rejoint le groupe des chômeurs et entame instantanément la recherche d'un nouvel emploi. En revanche, si l'âge du travailleur a dépassé l'âge limite d'employabilité, le travailleur rejoint le groupe des exclus.

5.1 Distribution des âges parmi les chômeurs

La prise en compte de la destruction des emplois affecte essentiellement la distribution des âges parmi les chômeurs. Nous présentons succinctement l'évolution de cette dernière. On désigne par $N(a,t)$ la population d'âge inférieur ou égal à a à la date t, et par $L(a,t)$ et $U(a,t)$ les stocks d'employés et de chômeurs correspondant. Par construction, $U(a,t) + L(a,t) = N(a,t)$ pour $a \leqslant \Delta$. En outre,

(5.1) $$\partial N(a,t)/\partial a + \partial N(a,t)/\partial t = nN(t)$$

(5.2) $$\partial U(a,t)/\partial a + \partial U(a,t)/\partial t = nN(t) + qL(a,t) - \mu U(a,t)$$

Au cours du temps, le nombre de chômeurs d'âge inférieur ou égal à a s'accroît du nombre des entrants dans la population, du nombre de travailleurs d'âge inférieur ou égal à a venant de perdre leur emploi, mais se déprécie du nombre de ceux qui parviennent à trouver un emploi, et de ceux qui changent de catégorie d'âge sous l'effet du vieillissement.

Pour une population stationnaire, on a

(5.3) $$\partial N(a,t)/\partial t = nN(a,t) \text{ et} \partial U(a,t)/\partial t = nU(a,t)$$

Cette équation jointe aux précédentes, nous permet de déduire l'évolution du nombre de chômeurs d'âge inférieur ou égal à a :

(5.4) $$\partial U(a,t)/\partial a = nN(t) + qN(t)\left(1 - e^{-na}\right) - (\mu + q + n)U(a,t)$$

Par conséquent,

(5.5) $$U(a,t) = N(t)\left\{\frac{q+n}{\mu+q+n} - \frac{q}{\mu+q}e^{-na} - \frac{\mu n}{(\mu+q+n)(\mu+q)}e^{-(\mu+q+n)a}\right\}$$

A partir de cette expression, nous pouvons établir le résultat suivant.

PROPOSITION 7 : DISTRIBUTION DES ÂGES DES CHÔMEURS

Pour tout $a \in [0, \Delta]$,

(5.6) $$\phi(a) = \frac{n(\mu + q + n)\left[qe^{-na} + \mu e^{-(\mu+q+n)a}\right]}{(q+n)(\mu+q) - q(\mu+q+n)e^{-n\Delta} - \mu n e^{-(\mu+q+n)\Delta}}$$

On vérifie facilement que cette fonction de densité coïncide avec celle mise en exergue en proposition 1 lorsque $q = 0$.

5.2 Equilibre

La tension du marché du travail et l'âge limite d'employabilité se déduisent de raisonnements similaires aux sous-sections 3.2 et 3.3. Nous obtenons ainsi [12]

$$\text{(LEbis)} \qquad \eta(\theta) = (\rho + q - g)\,\frac{Y}{Y - K_0}$$

$$\text{(AEbis)} \qquad Y e^{-g\Delta} = K_0 \int_0^{\Delta} \phi(a)\, e^{-ga} da$$

Compte tenu du risque de destruction du capital installé, la valeur d'un poste vacant est escomptée au taux $\rho + q - g$, plutôt que $\rho - g$. De la même manière, la valeur actualisée des flux de production déflatée du capital humain du travailleur vaut maintenant $Y \equiv y/(\rho + q)$ plutôt que y/ρ. La tension résulte toujours de la condition de profit nul, alors que l'âge limite d'employabilité résulte de l'égalité entre la valeur actualisée des flux de profit engendrés par l'embauche d'un travailleur ayant atteint l'âge limite et le coût de création d'un nouveau poste.

PROPOSITION 8 : EQUILIBRE AVEC DESTRUCTION DES EMPLOIS

(i) Il existe un unique équilibre si et seulement si $Y > K_0$ *et* $s \in]0, \rho + q[$

(ii) $d\theta^*/ds > 0$ *et* $d\Delta^*/ds \lesseqgtr 0$

La condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité (i) stipule à nouveau que le coût de création d'un poste doit être inférieur à la valeur actualisée des flux de profit, et que le taux d'escompte effectif des revenus attendus de la détention d'un poste vacant doit être positif.

A l'instar du cas sans destruction des emplois, l'éducation affecte positivement la tension. Cependant, l'éducation exerce un effet *a priori* ambigu sur l'âge limite d'employabilité. Pour le comprendre, décomposons l'impact de la croissance sur l'âge limite d'employabilité comme en section 3 :

$$\text{(5.7)} \qquad \frac{d\Delta^*}{ds} = \underbrace{\frac{\partial \overline{\Delta}\left(s, \theta^*\right)}{\partial s}}_{\substack{\text{obsolescence du capital humain} \\ (-)}} + \underbrace{\frac{\partial \overline{\Delta}\left(s, \theta^*\right)}{\partial \theta} \frac{d\theta^*}{ds}}_{\substack{\text{effet sur l'âge moyen des chômeurs} \\ (?)}}$$

12. On vérifie que le salaire moyen est toujours proportionnel au capital humain moyen des chômeurs. En effet, $\overline{w}_t = \overline{H}(t)\, y \frac{n+q}{n+q+g}$. Nous pouvons donc conserver l'interprétation du coût K_t en terme de salaire moyen.

L'effet direct de la croissance est toujours négatif : l'âge limite d'employabilité est d'autant plus faible que le rythme de déqualification des compétences individuelles est élevé. Cependant, l'effet indirect qui transite par une hausse induite du taux de sortie du chômage vers l'emploi est maintenant de signe incertain. En l'absence de destruction des emplois, l'âge moyen des chômeurs diminue toujours avec le taux de sortie du chômage. Ce n'est plus le cas lorsque la destruction des emplois est prise en compte. Intuitivement, le taux de sortie du chômage exerce deux effets sur l'âge moyen des chômeurs. D'une part, il réduit la durée moyenne des épisodes de chômage de chaque cohorte. Ce premier effet tend à réduire l'âge moyen parmi les chômeurs. D'autre part, il diminue la part de ceux qui n'ont jamais travaillé parmi les chômeurs au profit de la part de ceux qui ont déjà occupé un emploi, mais qui l'ont perdu. Comme les seconds sont en moyenne plus âgés que les premiers, ce deuxième effet tend à augmenter l'âge moyen des chômeurs.

Toutefois, cette ambiguïté théorique ne joue qu'un rôle mineur quant aux effets du taux de croissance sur l'âge limite d'employabilité. En effet, l'éducation est toujours le moteur de l'exclusion : l'âge limite d'employabilité devient arbitrairement élevé à mesure que l'éducation se rapproche de 0.

6 Conclusion

Cet article étudie les liens entre l'éducation, la croissance et le fonctionnement du marché du travail pouvant engendrer un processus d'exclusion des chômeurs âgés. Deux hypothèses majeures différencient notre approche de travaux antérieurs. D'une part, l'éducation permet l'aquisition d'une fraction d'un stock public de connaissances qui croît régulièrement au cours du temps en raison d'une externalité similaire à AZARIADIS et DRAZEN [1990]. Les compétences aquises durant la scolarité sont figées, de sorte que la croissance induit un processus de déqualification relative du capital humain individuel. D'autre part, la création d'un nouveau poste de travail requiert l'achat préalable d'une unité de ressource dont le prix est indexé sur la croissance économique. Cet achat confère une valeur d'option au fait de poursuivre la recherche d'un travailleur adéquat, valeur d'option progressant régulièrement avec le capital humain agrégé. Ces deux hypothèses impliquent qu'il existe un âge limite au-delà duquel tout chômeur voit sa candidature rejetée par l'ensemble des firmes.

Dans ce contexte, un effort éducatif plus important intensifie la croissance et favorise la création d'emploi tout en racourcissant l'âge limite d'employabilité des travailleurs. Ainsi, l'éducation entraîne deux effets externes de signes contraires sur l'emploi et le bien-être. D'une part, elle permet de réduire le taux de chômage des jeunes travailleurs et des travailleurs d'âge intermédiaire ; d'autre part, elle avive les phénomènes d'exclusion dont sont victimes les chômeurs plus âgés. Nous montrons alors que la relation entre l'éducation et le taux d'exclusion est non-monotone.

Au niveau microéconomique, les choix éducatifs privés obéissent à une double motivation. D'une part, bénéficier du flux de revenu le plus élevé possible ; d'autre part, demeurer employable le plus longtemps possible. Les choix privés interagissent entre eux au travers des décisions de création d'emploi et des critères de recrutement des firmes. Ces interactions se traduisent par l'émergence de phénomènes de complémentarité stratégique selon lesquels l'investissement éducatif des uns affecte positivement l'investissement éducatif des autres. Nous mettons ainsi en évidence l'existence possible d'équilibres multiples. Dans la mesure où les équilibres avec éducation élevée sont caractérisés par un taux de chômage faible, mais également par un âge limite d'employabilité bref, il n'est pas possible de les ordonner selon le critère de PARETO. ▼

• Références

ABBRING J.H., VAN DEN BERG G.J., GAUTIER P.A., VAN LOMWEL A.G., VAN OURS J.C., RUHM C.J. (1999). – « Displaced workers in the United States and the Netherlands », miméo.

ACEMOGLU D.T. (1996). – « A microfoundation for social increasing returns », *Quarterly Journal of Economics*, 41, p. 525-533.

ACEMOGLU D.T. (1999). – « Changes and unemployment and wage inequality: an alternative theory and some evidence », *American Economic Review*, 89, p. 1259-1278.

AGHION P., HOWITT P. (1994). – « Growth and unemployment », *Review of Economic Studies*, 61, p. 477-494.

AGHION P., HOWITT P. (1998). – Endogenous growth theory, MIT Press.

AHITUV A., ZEIRA J. (2000). – « Technical progress and early retirement », CEPR Discussion Paper 2614.

AZARIADIS C., DRAZEN A. (1990). – « Threshold externalities in economic development », *Quarterly Journal of Economics*, 101, p. 501-526.

BARTEL A., SICHERMAN N. (1993). – « Technological change and retirement decisions of older workers », *Journal of Labor Economics*, 11, p. 162-183.

BAUMOL W.J., WOLF E.N. (1998). – « The side-effects of progress: how technical change increases the duration of unemployment », Public Policy Brief No 41, Jerome Levy Economics Institute.

BENHABIB J., SPIEGEL M.M. (1994). – « The role of human capital in economic development: evidence from aggregate cross-country data », *Journal of Monetary Economics*, 34, p. 143-173.

BURDETT K., SMITH E. (2002). – « The low skill trap », *European Economic Review*, 46, p. 1439-1451.

CHAN S., STEVENS A.H. (2001). – « Job loss and employment patterns of older workers », *Journal of Labor Economics*, 19, p. 484-521.

COHEN D., DUPAS P. (2000). – « Trajectoires comparées des chômeurs en France et aux Etats-Unis », *Economie et Statistique*, 332-333, p. 17-26.

FARBER H.S. (1997). – « The changing face of job loss in the United States, 1981-1995 », *Brooking papers on Economic Activity: Microeconomics*, p. 55-128.

FRIEDBERG L. (2001). – « The impact of technological change on older workers: evidence from data on computer use », *Industrial and Labor Relations Review*, à paraître.

JUHN C. (1992). – « Decline of male labor market participation: the role of declining market opportunities », *Quarterly Journal of Economics*, 107, p. 79-122.

KRIECHEL B., PFANN A. (2002). – « Heterogeneity among Displaced Workers », miméo.

LAING D., PALIVOS T., WANG P. (1995). – « Learning, matching and growth », *Review of Economic Studies*, 62, p. 115-129.

LJUNGQVIST L., SARGENT T.J. (2002). – « The European employment experience », miméo.

MACHIN S., MANNING A. (1999). – « The causes and consequences of longterm unemployment in Europe », Handbook of Labor Economics, 3C, p. 3085-3139, North-Holland.

MORTENSEN D.T., PISSARIDES C. (1998). – « Technological progress, job creation, and job destruction », *Review of Economic Dynamics*, 1, p. 733-753.

NELSON R.R., PHELPS E.S. (1966). – « Investment in humans, technological change, and economic growth », *American Economic Review*, 56.

PISSARIDES C. (1990). – Equilibrium unemployment theory, Oxford: Basil Blackwell.

POSTEL-VINAY F. (1997). – « Unemployment, education and growth », Document de travail MAD.

RODRIGUEZ D., ZAVODNY M. (2000). – « Are Displaced Workers now finished at age forty? », *Economic Review*, 2, Federal Reserve Bank of Atlanta, p. 33-47.

SAINT-PAUL G. (1996). – Dual labor market: a macroeconomic perspective, MIT Press.

SNOWER D. (1995). – « The low-skill, bad-job trap », In Acquiring skills: market failures, their symptoms and policy responses, Alison Booth and Dennis Snower, eds. Cambridge, MA, Cambridge University Press.

ANNEXES

A Preuves

PREUVE DE LA PROPOSITION 1 : On désigne par $u(a)$ la densité non normalisée de la durée du chômage, par U la mesure du nombre de chômeurs, et par L la mesure du nombre de travailleurs employés, étant entendu que U et L sont déflatés du niveau de la population. Par construction, $u(a) = ne^{-\mu a}$, *i.e.* le flux d'entrée au chômage multiplié par la probabilité d'être encore au chômage. Le stock de chômeurs vaut quant à lui $U = \int_0^\Delta u(a)\, da$. Par conséquent, la densité de la durée du chômage est $\phi(a) = u(a) / \int_0^\Delta u(\alpha)\, d\alpha$ lorsque $a \leqslant \Delta$. Le calcul fournit l'expression (3.1) de la proposition 1. ■

PREUVE DE LA PROPOSITION 2 : Immédiat, compte tenu des propriétés de la fonction η induites par les propriétés de la fonction d'appariement. ■

PREUVE DE LA PROPOSITION 3 : Considérons la fonction $\Lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que

(A.1) $$\Lambda(\Delta) = Ye^{-g\Delta} - K_0 \int_0^\Delta \phi(a)\, e^{-ga} da$$

L'âge limite d'employabilité, si il existe, résoud $\Lambda\left(\overline{\Delta}\right) = 0$. Par la suite, nous écrirons explicitement $\phi(a,\Delta)$ pour signifier la dépendance de la distribution ϕ vis-à-vis de Δ, et nous noterons $\Phi(a,\Delta) \equiv \int_0^a \phi(\alpha,\Delta)\, d\alpha$.

(i) En utilisant la règle de L'HÔPITAL, on a $\Lambda(0) = Y - K_0$. D'autre part, $\lim_{\Delta\to\infty} \Lambda(\Delta) = -\lim_{\Delta\to\infty} K_0 \int_0^\Delta \phi(a,\Delta)\, e^{-ga} da < 0$. Deux cas sont envisageables. Si $Y \leqslant K_0$, ou il n'existe aucun $\overline{\Delta} > 0$ tel que $\Lambda\left(\overline{\Delta}\right) = 0$, ou il en existe un avec $\Lambda'\left(\overline{\Delta}\right) = 0$, ou il en existe au moins deux. Si $Y > K_0$, il existe au moins un $\overline{\Delta} > 0$ tel que $\Lambda\left(\overline{\Delta}\right) = 0$. Or,

(A.2)
$$\Lambda'(\Delta) = -gYe^{-g\Delta} - K_0 \left\{ \phi(\Delta,\Delta)\, e^{-g\Delta} + \int_0^\Delta \phi_\Delta(a,\Delta)\, e^{-ga} da \right\}$$

Cependant,

(A.3) $$\phi_\Delta(a,\Delta) = -\phi(\Delta,\Delta)\, \phi(a,\Delta)$$

Par conséquent,

(A.4)
$$\Lambda'(\Delta) = -gYe^{-g\Delta} + K_0\phi(\Delta,\Delta)\left\{\int_0^{\Delta}\phi_{\Delta}(a,\Delta)\,e^{-ga}da - e^{-g\Delta}\right\}$$

Si il existe au moins un $\overline{\Delta} > 0$ tel que $\Lambda\left(\overline{\Delta}\right) = 0$, on a

(A.5)
$$\Lambda'\left(\overline{\Delta}\right) = e^{-g\overline{\Delta}}\left\{-gY + \phi\left(\overline{\Delta},\overline{\Delta}\right)(Y - K_0)\right\}$$

Il suit que $\Lambda'\left(\overline{\Delta}\right) < 0$ si $Y \leqslant K_0$, ce qui n'est pas compatible avec l'existence de $\overline{\Delta}$. Nous montrons maintenant que $gY > \phi\left(\overline{\Delta},\overline{\Delta}\right)(Y - K_0)$ lorsque $Y > K_0$, ce qui induit l'unicité de $\overline{\Delta}$. A cette fin, intégrons par parties l'intégrale de l'expression (A.1). Il vient :

(A.6)
$$K_0\int_0^{\Delta}\phi(a)\,e^{-ga}da = K_0e^{-g\Delta} + gK_0\int_0^{\Delta}\Phi(a,\Delta)\,e^{-ga}da$$

Dans la mesure où

(A.7)
$$\phi(a,\Delta) = \frac{(\mu+n)\,ne^{-(\mu+n)a}}{\mu+n-ne^{-(\mu+n)a}}\Phi(a,\Delta)$$

on a aussi $\phi(a,\Delta) > \phi(\Delta,\Delta)\,\Phi(a,\Delta)$. A partir de la définition de $\overline{\Delta}$, *i.e.* $\Lambda\left(\overline{\Delta}\right) = 0$, il vient

(A.8)
$$(Y - K_0)\,e^{-g\overline{\Delta}} = gK_0\int_0^{\overline{\Delta}}\Phi\left(a,\overline{\Delta}\right)e^{-ga}da < gK_0\int_0^{\overline{\Delta}}\frac{\phi\left(a,\overline{\Delta}\right)}{\phi\left(\overline{\Delta},\overline{\Delta}\right)}e^{-ga}da$$

qui implique $(Y - K_0)\,\phi\left(\overline{\Delta},\overline{\Delta}\right) < gY$, l'inégalité recherchée.

(ii) Le signe de $\overline{\Delta}'_g(.)$ et celui de $\overline{\Delta}'_\mu(.)$ sont donnés, respectivement, par $\Lambda'_g\left(\overline{\Delta},.\right)$ et $\Lambda'_\mu\left(\overline{\Delta},.\right)$. Ainsi,

(A.9)
$$\Lambda'_g\left(\overline{\Delta},.\right) = -\overline{\Delta}Ye^{-g\overline{\Delta}} + K_0\int_0^{\overline{\Delta}}\phi(a)\,ae^{-ga}da$$

En utilisant le fait que $\Lambda\left(\overline{\Delta},.\right) = 0$, il vient

(A.10)
$$\Lambda'_g\left(\overline{\Delta},.\right) = -K_0\int_0^{\overline{\Delta}}\phi(a)\left(\overline{\Delta} - a\right)e^{-ga}da < 0$$

D'autre part,

$$\Lambda'_{\mu}\left(\overline{\Delta},.\right) = -K_0 \int_0^{\overline{\Delta}} \phi'_{\mu}(a)\, e^{-ga} da$$

Or,

$$\text{(A.11)} \qquad \phi'_{\mu}(a) = \phi(a)\,(\overline{a} - a)$$

où $\overline{a} \equiv \mathbb{E}\left(a \mid a \leqslant \overline{\Delta}\right) = \dfrac{1}{\mu + n} - \overline{\Delta}\dfrac{e^{-(\mu+n)\overline{\Delta}}}{1 - e^{-(\mu+n)\overline{\Delta}}}$. Donc

$$\begin{aligned}
\Lambda'_{\mu}\left(\overline{\Delta},.\right) &= -K_0 \int_0^{\overline{\Delta}} \phi(a)\,(\overline{a} - a)\, e^{-ga} da \\
&= K_0 \left[\mathbb{E}\left(ae^{-ga} \mid a \leqslant \overline{\Delta}\right) - \mathbb{E}\left(a \mid a \leqslant \overline{\Delta}\right)\mathbb{E}\left(e^{-ga} \mid a \leqslant \overline{\Delta}\right)\right] \\
&= K_0 cov\left(a, ae^{-ga} \mid a \leqslant \overline{\Delta}\right) < 0
\end{aligned}$$

car e^{-ga} est décroissante en a.

(iii) Un calcul similaire au précédent montre que $\Lambda'_n\left(\overline{\Delta},.\right) < 0$. Les effets de y, ρ et K_0 sont immédiats. ■

PREUVE DE LA PROPOSITION 4 : (i) Le résultat suit des propositions 2 et 3.

(ii) Le fait que $d\theta^*/ds > 0$ est une conséquence du fait que $\partial\overline{\theta}/\partial g > 0$ dans la proposition 2. La dérivée de Δ^* par rapport à s est donnée dans le corps du texte. Elle est sans ambiguïté négative. ■

PREUVE DE LA PROPOSITION 5 : Remarquons d'abord que la fonction $R_0(s) - c_0 C(s)$ est strictement concave. Ainsi, toute solution intérieure est caractérisée par l'unique solution de la condition du premier ordre. Cette condition s'écrit

$$\text{(A.12)} \qquad R'_0(\widehat{s_i}) = c_0 C'(\widehat{s_i})$$

Or,

$$\text{(A.13)} \quad R'_0(s_i) = \frac{\mu Y}{\rho + \mu}\left[1 - e^{-(\rho+\mu)\Delta(s_i)}\right] + \mu Y s_i \Delta'(s_i)\, e^{-(\rho+\mu)\Delta(s_i)}$$

alors que

$$\text{(A.14)} \qquad \Delta'(s_i) = \frac{1}{g s_i}$$

L'expression (4.6) s'obtient en reportant (A.14) dans (A.13) et en factorisant par $\mu Y/(\rho + \mu)$. ■

PREUVE DE LA PROPOSITION 6 : Désignons par $\Delta_{eo}(s)$ la solution de l'équation (EO), alors que $\Delta_{ae}(s)$ désigne la solution de l'équation (AE). Un équilibre est un $s^* \in]0,\rho[$ qui vérifie $\Delta_{eo}\left(s^*\right) = \Delta_{ae}\left(s^*\right) > 0$. Par la suite, nous noterons pour simplifier $\mu(s) \equiv \mu(\Theta(s))$.

(i) La fonction Δ_{ae} est continue strictement décroissante sur $]0,\rho[$, avec $\lim_{s\to\rho} \Delta_{ae}(s) = \frac{1}{\rho}\ln\frac{Y}{K_0} > 0$. La fonction Δ_{eo} est définie sur tout intervalle de $[0,\rho]$ où

$$\text{(A.15)} \quad 0 < G(s) \equiv \frac{\rho+\mu(s)}{\mu(s)} \frac{sY^{-1}}{\rho+\mu(s)-s}\left[c_0 C'(s) - \frac{\mu(s) Y}{\rho+\mu(s)}\right] < 1$$

La fonction G est continue sur $]0,\rho[$. Elle est négative pour des valeurs de s proches de 0, et, par hypothèse, elle est positive pour des valeurs de s suffisamment proches de ρ, avec $\lim_{s\to\rho} G(s) = 0$. Par continuité, il existe $s_m < \rho$ tel que $G(s_m) = 0$ et $G(s) > 0$ pour tout $s \in]s_m,\rho[$. Comme $\lim_{s\to s_m} \Delta_{eo}(s) = \infty$ et $\lim_{s\to\rho} \Delta_{eo}(s) = 0$, Δ_{ae} et Δ_{eo} se coupent au moins une fois sur $]s_m,\rho[$ et il existe au moins un équilibre non trivial.

(ii) Rappelons d'abord que G est négative pour des valeurs de s proches de 0. Par conséquent, si $c_0 C'(\rho) < Y$, ou $G(s) \leqslant 0$ pour tout $s \in]0,\rho[$, ce qui implique qu'il n'existe pas d'équilibre, ou il existe s_1 et s_2, $0 < s_1 < s_2 < \rho$, tels que $G(s) > 0$ pour tout$s \in]s_1,s_2[$, et $G(s_1) = G(s_2) = 0$. Comme $\lim_{s\to s_1} \Delta_{eo}(s) = \lim_{s\to s_2} \Delta_{eo}(s) = \infty$ et comme Δ_{ae} est strictement décroissante sur $]s_1,s_2[$, ou Δ_{eo} et Δ_{ae} se coupent (génériquement) à au moins deux reprises sur $]s_1,s_2[$, ou elles ne se coupent pas.

(iii) Nous présentons une condition suffisante d'existence d'équilibres multiples. A cette fin, supposons sans perte de généralités que la fonction d'appariement s'écrive $Bm(x_1,x_2)$, $B > 0$. Le taux de sortie du chômage μ est alors une fonction de B et de s, soit $\mu \equiv \mu(B,s)$.

Il existe au moins deux équilibres non triviaux si $c_0 C'(\rho) < Y$ et B est suffisamment « petit ».

Une condition suffisante pour qu'il existe plusieurs équilibres est que la courbe Δ_{eo} atteint l'axe des abcisses alors que $c_0 C'(\rho) < Y$. La courbe Δ_{eo} admet alors deux asymptotes verticales et décrit complètement $\mathbf{R}_+$ à deux reprises. Elle coupe donc Δ_{ae} au moins deux fois. Formellement, il faut s'assurer qu'il existe $s \in]0,\rho[$ tel que $G(s) > 1$. Cette condition s'écrit encore $c_0 C'(s) > Y\mu(B,s)/s > c_0 C'(\rho)\mu(B,s)/s$; soit $\mu(B,s) < sC'(s)/C'(\rho)$. Or, on vérifie facilement que, pour tout $s \in]0,\rho[$, $\mu_1'(B,s) > 0$, $\lim_{B\to 0} \mu(B,s) = 0$ et $\lim_{B\to\infty} \mu(B,s) = \infty$. Ainsi, pour toute valeur de s, il est possible de rendre $\mu(B,s)$ arbitrairement petit. En particulier, tel que $\mu(B,s) < sC'(s)/C'(\rho)$. ■

PREUVE DE LA PROPOSITION 7 : Soit $U(a) \equiv U(a,t)/N(t)$. La densité ϕ vaut simplement $\phi(a) = U'(a)/U(\Delta)$. Le calcul donne l'expression (5.6).■

PREUVE DE LA PROPOSITION 8 : (i) On procède de façon similaire aux propositions 2 à 4. Il vient immédiatement qu'il existe un unique $\theta^* > 0$ si et seulement si $Y > K_0$ et $s \in]0, \rho + q[$. A partir de (AEbis), on peut définir un unique $\overline{\Delta} \equiv \overline{\Delta}(g,\theta)$ à la condition nécessaire et suffisante que $Y > K_0$. Pour le prouver, il suffit de reprendre la preuve du point (i) de la proposition 3, en remarquant cette fois que

(A.16)
$$\phi(a,\Delta) = \frac{n(\mu+q+n)\left[qe^{-na} + \mu e^{-(\mu+q+n)a}\right]}{(q+n)(\mu+q) - q(\mu+q+n)e^{-na} - \mu n e^{-(\mu+q+n)a}} \Phi(a,\Delta)$$

Ce qui implique $\phi(a,\Delta) > \phi(\Delta,\Delta)\,\Phi(a,\Delta)$, et le reste de la preuve suit. ■