La grenouille qui se *peut* faire aussi grosse que le bœuf

Philippe FÉVRIER*, Laurent LINNEMER **

RÉSUMÉ. – Une entreprise fait souvent face au dilemme suivant : investir dans un « petit projet » où en cas de réussite le gain est modeste mais où les pertes restent modérées en cas d'échec, ou alors se lancer dans un « grand projet » avec un gain plus important mais aussi des pertes plus conséquentes si le projet échoue. Nous étudions ce choix dans le cas où succès et échecs dépendent d'une part de l'habileté intrinsèque de l'entreprise et d'autre part du choix d'un concurrent (en position de suiveur) qui peut s'engager ou pas dans le « grand projet » et dont l'habileté est inconnue *a priori*. Un résultat surprenant émerge : une entreprise de type faible se lance dans le « grand projet » tout comme une entreprise de type fort tandis qu'une entreprise de type moyen préfère le « petit projet ». La firme en position de suiveur sélectionne toujours le petit projet lorsqu'elle est de type faible, le grand projet si elle est d'un type élevé et choisit aléatoirement sinon. L'asymétrie d'information empêche dans ces circonstances la sélection du meilleur : un leader plus faible que son suiveur peut se retrouver seul sur le grand projet.

The frog which can be as big as an ox

ABSTRACT. – Quite often, a firm has to decide between investing in a safe project ("small") where rewards and losses remain moderate and a risky alternative ("big") where the rewards and the losses are larger. We study such a choice in a context where the probability of success depends both on the intrinsic ability of the firm and on the choice of an other firm which is a follower. The ability of the follower is unknown to the leader and *vice-versa*. We show that a leader with a poor ability selects the big project as well as a leader with a very high ability. On the other hand a leader with a medium ability prefers the small project. When weak the follower chooses the small project, when of medium ability it chooses randomly and when of high ability it selects the big project. Information asymmetry, though, prevents the selection of the best firm: a leader with a lower ability can deter competition form a medium or weak follower by selecting the big project.

---

* INSEE et CREST-LEI-GRECSTA ; philippe.fevrier@ensae.fr.
** Université Montpellier 1, laurent.linnemer@univ-montp1.fr. Faculté des Sciences Économiques, Avenue de la Mer CS 79606, 34960 Montpellier cedex 2.
Nous remercions vivement Anne PERROT, Romain LESUR et Michael VISSER pour leurs remarques constructives. Cet article a été rédigé lorsque le second auteur était membre du CREST-LEI.
JEL Classification : C72, L1.

1 Introduction

Dans la fable « La grenouille qui se *veut* faire aussi grosse que le bœuf », Jean de La Fontaine (Livre 1, Fable 3) décrit l'échec d'un vaniteux qui aurait aimé cacher sa véritable nature et susciter une admiration indue. Bien que La Fontaine ne s'intéresse qu'à la nature humaine dans la tradition des moralistes français, il semble que certaines entreprises sont dans la situation de la grenouille de la fable. En passant pour une firme qui produit de la meilleure qualité, ou qui a un meilleur bilan, ou un meilleur projet, une entreprise peut (en jouant sur des asymétries d'information) espérer accroître son profit. Toutefois, comme pour la grenouille, si la « tromperie » échoue, les conséquences peuvent être dramatiques. Nous développons un modèle où à l'équilibre une firme de faible qualité imite une firme de bonne qualité et réussit à décourager l'entrée d'un concurrent. Dans notre modèle la grenouille réussit à se faire passer pour un bœuf !

La sélection d'un nouveau projet dépend tout autant de la capacité à le mener à bien avec succès que de la présence éventuelle d'un concurrent. Dans un tel contexte et en présence d'asymétries d'information, le fait même de choisir un projet joue un rôle de signal qui peut décourager des concurrents potentiels. Nous nous intéressons au cas où une firme (dont la « force » est inconnue) peut, en choisissant la taille de son projet, écarter des concurrents. En fait, la simple décision de concourir pour un projet (plutôt que de ne pas le faire) signale l'habileté de l'entreprise.

Dans certains cas, ce problème prend une grande importance, en particulier, lorsque qu'il n'y a qu'un seul gagnant. Si plusieurs entreprises sont en concurrence sur un appel d'offres, par exemple, une seule l'emportera et les autres encourront des pertes (dues aux coûts de soumission). De même, si plusieurs firmes se lancent dans une course au brevet, seule la première à déposer le brevet bénéficiera d'un profit de monopole tandis que les autres auront dépensé pour rien les frais de recherche. Même s'il est possible que deux entreprises se lancent en même temps dans un nouveau programme de recherche ou encore que deux firmes répondent en même temps à un appel d'offres, il est plus vraisemblable qu'un des deux acteurs prenne une telle décision avant l'autre. Dans un tel contexte (et si la décision de celui qui joue en premier n'est pas secrète) plusieurs questions émergent. Tout d'abord pour la firme qui décide en second : Faut-il participer à un appel d'offres sachant qu'un concurrent a déjà déposé une offre ? Faut-il se lancer dans une course au brevet si une autre entreprise a déjà décidé de le faire ? Mais aussi pour la firme en position de leader : Étant donné ses capacités à gagner la compétition le leader doit-il se lancer ou pas dans le projet ? Réussit-il à décourager l'entrée et à limiter la concurrence ?

Notre modèle fournit les réponses suivantes à ces questions : le leader doit toujours s'engager dans la compétition s'il est très faible ou très fort. S'il est de force intermédiaire il peut avoir intérêt à ne pas concourir. L'entreprise qui décide en second ne doit pas participer si elle est faible, toujours concourir si elle est très forte et elle peut adopter une stratégie mixte entre les deux. Si la stratégie de la firme en second n'est pas surprenante, celle du leader est plus spectaculaire notamment lorsqu'elle est très faible. À l'équilibre, il est optimal pour une firme très faible en position de leader de tenter un « coup de bluff » en se lançant dans la compétition.

Nous étudions en fait un modèle plus général où le choix du leader ne consiste pas simplement à décider entre participer ou pas à une compétition mais consiste à choisir la taille d'un projet [1]. Afin de garder un modèle simple tout en fournissant des intuitions intéressantes, nous nous limitons au cas où le leader peut choisir entre deux types de projets : un grand ou un petit [2].

Le fait qu'une entreprise soit en position de leader peut s'expliquer de plusieurs manières. Par exemple, imaginons un laboratoire de recherche qui cherche à déposer un brevet. Il peut choisir entre se lancer dans une course pour un brevet modeste ou alors ambitieux (récompense plus grande mais coûts plus importants en cas d'échec). Il annonce publiquement son choix. S'il choisit de viser le grand brevet, un laboratoire concurrent doit prendre la décision de se lancer dans la course ou pas. Appliqué à cette situation, notre modèle prédit qu'un laboratoire peu performant se lance toujours dans la course au brevet ambitieux et qu'il décourage parfois la concurrence. Cette intuition est certes obtenue dans un cadre très simple, mais elle s'étend au cadre plus traditionnel où la recherche aboutit de manière stochastique. Il existe de nombreux modèles de course aux brevets mais l'accent est souvent mis sur l'effort de R&D comme dans PÉREZ-CASTRILLO et VERDIER [1991] ou encore BLOCH et MARKOWITZ [1996] dans le cadre d'une recherche en plusieurs étapes.

L'autre situation bien illustrée par notre modèle est la suivante. Imaginons une entreprise de conseil qui propose à une entreprise un projet d'étude qui peut être modeste ou ambitieux. L'entreprise met ce projet en concurrence en lançant un appel d'offres. Un concurrent potentiel peut alors proposer un projet similaire. Néanmoins, s'il anticipe que le projet déjà déposé est de qualité élevée tandis que son propre projet est de qualité faible, il préfère renoncer. Cette tentation du concurrent à abandonner la compétition pour ne pas en subir les coûts pousse le leader à proposer un projet ambitieux alors même qu'il est de qualité basse.

Notre modèle est fondamentalement un modèle de bluff. Ce phénomène apparaît dans d'autres jeux. Le plus connu est, évidemment, le jeu de poker. Un jeu de poker simplifié a d'ailleurs été analysé par VON NEUMANN et MORGENSTERN (1944) [3]. Toutefois ce jeu décrit une situation très particulière et de plus il est à somme nulle. Certains modèles de réputation à la *chain store paradox* reposent également sur du bluff (voir SORIN [1995]).

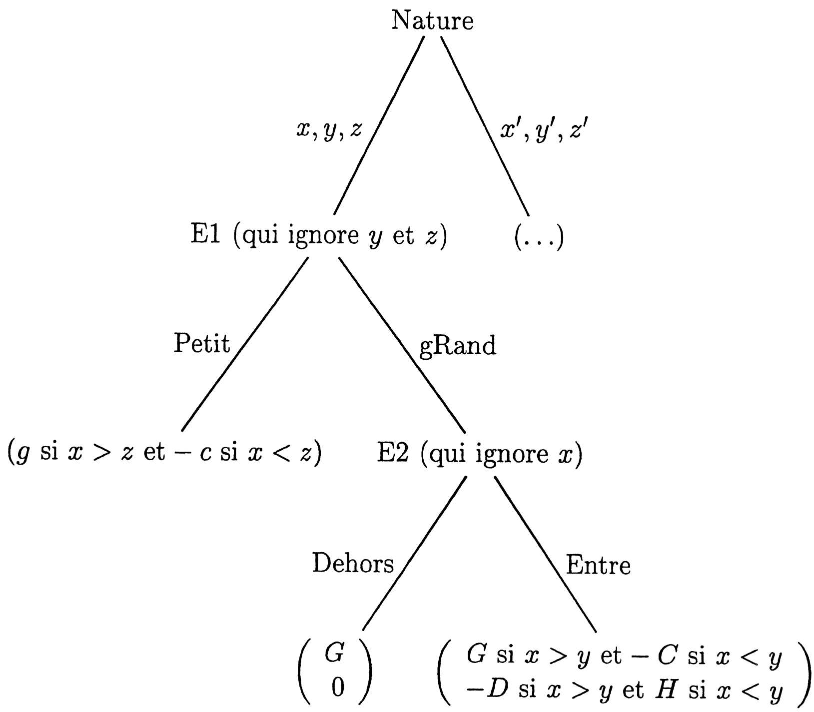
L'article est organisé de la manière suivante. La section 2 présente le modèle formel dont l'équilibre bayésien parfait est déterminé dans la section 3. Les propriétés de l'équilibre sont discutées dans la section 4. La section 5 présente une extension de notre modèle et la section 6 conclut.

1. Un projet peut consister à répondre à un appel d'offres plus ou moins complexe ou à se lancer dans une course au brevet dans un domaine plus ou moins difficile.
2. Remarquons que dans le cas limite où le petit projet ne rapporte et ne coûte rien nous sommes bien ramenés à un choix entre concourir ou pas.
3. Chapitre IV, section 19. Voir aussi BINMORE (1992) chapitre 12.

2 Le modèle

La (les) situation(s) économique(s) que nous avons à l'esprit peuvent être illustrées à l'aide du jeu suivant décrit schématiquement par la figure 1 [4].

FIGURE 1
Choix d'un projet : arbre du jeu



La nature détermine le type x de l'entreprise E1 selon une loi uniforme sur $[0,1]$. La valeur de x qui correspond à la « qualité » ou encore à « l'habileté » de E1 appartient à l'intervalle $[0,1]$. La valeur de x est indépendante du projet choisi [5]. Si $x = 0$, le projet de E1 (grand ou petit) est le plus mauvais possible. Au contraire, si $x = 1$ le projet de E1 est le meilleur possible. L'entreprise E1 prend connaissance de x et décide de « lancer » un gRand (R) ou un Petit (P) projet. Si elle choisit un petit projet, alors la nature détermine

4. Dans la section 4.2 nous étudions le cas où E1 et E2 jouent simultanément et dans la section 5 celui où le petit projet n'est pas automatiquement concurrencé.

5. Cette hypothèse peut sembler restrictive car on peut penser que pour réaliser un bon projet il faut une habileté supérieure. En fait, l'important est la capacité de E1 relative à celle de la concurrence. Imaginons par exemple que si x est la qualité du petit projet, alors celle du grand projet est $ax + b$. Comme un petit projet n'est jamais comparé avec un grand, il n'est pas restrictif de supposer que $a = 1$ et $b = 0$.

$z \in [0,1]$ (la qualité du petit projet concurrent) selon une loi de probabilité uniforme. Le petit projet de E1 est un succès si et seulement si $x > z$ [6]. En cas de succès, E1 gagne $g \geqslant 0$ tandis que si son petit projet échoue, elle perd $c \geqslant 0$. Si l'entreprise E1 choisit un grand projet plutôt qu'un petit, alors la nature sélectionne $y \in [0,1]$ (la valeur du grand projet concurrent) selon une loi de probabilité uniforme [7]. L'entreprise E2 apprend la valeur de y et décide ou pas de concurrencer le grand projet de E1. Si elle décide de ne pas concurrencer E1 (« Dehors »), alors l'entreprise E1 réalise un gain G et E2 un gain (une perte) normalisé à zéro. En revanche, si E2 concurrence le projet de E1 (« Entre »), alors les gains sont les suivants. Si $x > y$ (resp. $x < y$), alors E1 gagne G (resp. E2 gagne H) et E2 perd D (resp. E1 perd C) [8].

Par définition, un petit projet est moins rentable qu'un grand projet en cas de succès : $0 \leqslant g < G$. Toutefois l'échec est plus cuisant avec un grand plutôt qu'un petit projet : $0 \leqslant c < C$. Pour l'entreprise E2, il est supposé que $H > 0$ et que $D > 0$. En revanche, il n'est pas fait d'hypothèse particulière sur la position de H vis-à-vis de G ni de C par rapport à D.

Notre modèle illustre trois situations économiques différentes. Tout d'abord, la mise en place d'un monopole naturel avec entrée séquentielle. En effet, imaginons qu'un marché ne soit rentable que pour une seule firme (concurrence à la Bertrand plus coût fixe de production). Plaçons nous, de plus, dans le cas particulier où $g = c = 0$. Les firmes E1 et E2 ont toutes les deux le choix d'entrer ou pas, mais E1 prend sa décision avant E2. Si les deux firmes entrent, elles apprennent le coût marginal de production de leur concurrent (par exemple x et y peuvent mesurer les productivités relatives des firmes : soit c_1 (resp. c_2) le coût marginal de production de E1 (resp. E2), alors $\Pr[c_1 < c_2] = 1$ si $x > y$ et 0 si $x < y$) et comme pour produire il faut dépenser un coût fixe supplémentaire, la moins efficace sort du marché et la plus efficace reste en monopole. Une autre interprétation possible de x et de y est en termes de qualité. Si x (resp. y) est le niveau de qualité du produit de E1 (resp. E2) et si les prix sont fixes (marché réglementé) alors seule l'entreprise avec la qualité la plus élevée aura des consommateurs.

Lorsque c et g ne sont pas nuls, la situation est un peu la même sauf que E1 possède une option de sortie plus ou moins attractive selon son type. Il aurait été possible d'offrir à E2 une option de sortie du même ordre que celle dont dispose E1. Cela n'aurait pas changé nos résultats. Nous avons préféré ne pas le faire pour garder l'accent sur la dimension « dissuasion de l'entrée ». Il suffit que, pour E2, « entrer en concurrence » avec E1 soit plus coûteux en cas d'échec que l'option « rester en dehors » pour que nos résultats restent valides. Une telle situation peut s'obtenir de différentes manières, la plus simple étant celle qui consiste à normaliser à 0 le gain de E2 s'il n'entre pas.

La seconde interprétation du modèle est en termes de course au brevet. Imaginons que $t_1 = 1 - x$ (resp. $t_2 = 1 - y$) mesure la rapidité avec laquelle E1 (resp. E2) met au point son prototype et dépose un brevet. La première entreprise à déposer un brevet acquière un pouvoir de monopole sur son

6. Tout au long de l'article les événements du type $x = z$ qui arrivent avec une probabilité nulle sont ignorés. Typiquement, si $x = z$ l'entreprise E1 gagne g avec une chance sur deux.

7. On aurait pu supposer que $y = z$ sans que nos résultats soient modifiés. Toutefois, la résolution est simplifiée par l'introduction de z indépendant de y.

8. Si $x = y$, alors E1 gagne G (resp. E2 gagne H) avec la probabilité $1/2$ et perd C (resp. D) avec la même probabilité.

exploitation. Notre modèle étudie le comportement des firmes lorsque l'une d'entre elles dispose de l'avantage de pouvoir lancer la première la course au brevet.

L'appel d'offres est la troisième situation illustrée par notre modèle. Dans ce cas, le modèle a deux interprétations : soit l'entreprise E2 est en concurrence avec E1 dans l'appel d'offres, soit elle est le commanditaire du projet. La présence d'un concurrent n'est donc pas nécessaire pour faire fonctionner notre modèle. Dans cette deuxième interprétation, la firme E1 propose un petit projet ou un grand projet. S'il s'agit d'un petit projet, sa qualité est toujours évaluée et il n'est accepté que si elle dépasse les exigences de E2 ($x > y$). En revanche, s'il s'agit d'un grand projet, la direction est enthousiaste (préférence des dirigeants pour les grands projets (*white elephants*)) et souhaite le mettre en œuvre (sans vérifier si $x > y$ ou pas). Le contrôleur financier (par exemple) doit donner son avis. S'il impose une expertise coûteuse à l'entreprise, il se place dans une situation délicate car il retarde la mise en route du projet. S'il s'avère que le projet était de bonne qualité, il est donc pénalisé ($-D < 0$) en revanche si le contrôle révèle que E1 proposait un projet de mauvaise qualité la direction le récompense ($H > 0$).

3 Équilibre

Puisqu'il s'agit d'un jeu séquentiel, nous concentrons notre attention sur la détermination des équilibres bayésiens parfaits. Un équilibre bayésien parfait consiste d'une part en une stratégie comportementale $\sigma_1(.)$ pour l'entreprise E1, c'est-à-dire une fonction qui à tout x associe la probabilité $\sigma_1(x)$ avec laquelle l'entreprise E1 de type x choisit le grand projet ; d'autre part, en une stratégie comportementale $\sigma_2(.)$ pour l'entreprise E2, c'est-à-dire une fonction qui à tout y associe la probabilité $\sigma_2(y)$ avec laquelle l'entreprise E2 de type y choisit « Entre » sachant que E1 a sélectionné le grand projet. Par définition de l'équilibre, σ_1 et σ_2 doivent être des meilleures réponses l'une à l'autre. Comme nous sommes dans un cadre d'équilibre bayésien parfait l'entreprise E2 forme des croyances sur le type de l'entreprise E1 et elle les utilise pour déterminer son choix optimal. Si l'action observée par E2 fait partie du chemin d'équilibre, la règle de Bayes s'applique. Dans cet article, la règle de Bayes s'applique toujours. Nous noterons $\mu_2^*(X \mid R)$ la probabilité (assignée par E2) que le type de E1 (x) soit inférieur à X conditionnellement au choix du grand projet (R).

Nous pouvons distinguer *a priori* trois types d'équilibres. Tout d'abord celui où l'entreprise E1 choisit le grand projet quel que soit son type. Ensuite le cas où seuls les types élevés choisissent le grand projet tandis que les types faibles sélectionnent le petit. Enfin, le cas (le plus surprenant) dans lequel les types les plus faibles comme les plus forts se lancent dans le projet le plus ambitieux tandis que les types intermédiaires choisissent le petit projet. Ces trois situations vont être étudiées successivement. Nous commençons toutefois par résoudre le jeu en information parfaite afin de fournir un point de repère.

3.1 Préliminaire

Il est important de commencer par définir la notion de rentabilité de chaque projet et c'est l'objet du lemme 1. Deux grandeurs, $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$, qui jouent un rôle crucial dans la détermination des équilibres y sont introduites.

> LEMME 1 : *Il existe* $\widetilde{x} \in [0,1]$ *tel que pour tout x inférieur (resp. supérieur) à* $\widetilde{x}$*, l'espérance de gain du petit projet est supérieure (resp. inférieure) à celle d'un grand projet concurrencé.*
> *Il existe* $\widetilde{y} \in [0,1]$ *tel que pour tout y inférieur (resp. supérieur) à* $\widetilde{y}$*, l'espérance de gain liée à l'entrée, sachant que E1 choisit le grand projet quel que soit x, est négative (resp. positive).*

DÉMONSTRATION. Notons $E_P = -(1-x)\,c + xg$ l'espérance de gain du petit projet pour une entreprise E1 de type x. De la même manière, soit $E_R = -(1-x)\,C + xG$ l'espérance de gain du grand projet pour E1 lorsque E2 entre toujours. Il est facile de vérifier que

$$E_P \geqslant E_R \Leftrightarrow x \leqslant \widetilde{x} = \frac{C-c}{C-c+G-g}$$

De la même manière, notons $E_E = -(1-y)\,D + yH$ l'espérance de gain de E2 qui choisit d'entrer lorsque E1 choisit le grand projet quel que soit x. Il est immédiat que

$$E_E \leqslant 0 \Leftrightarrow y \leqslant \widetilde{y} = \frac{D}{D+H}$$

FIGURE 2
Espérances de gains pour E1 lorsque E2 entre toujours

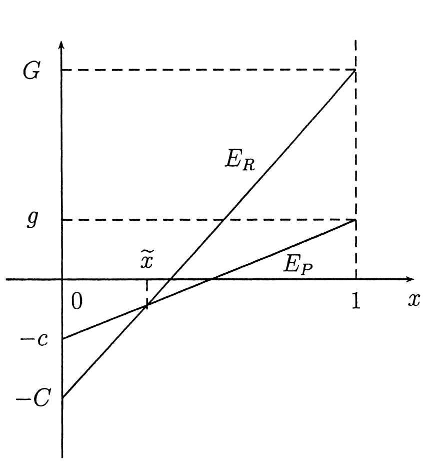
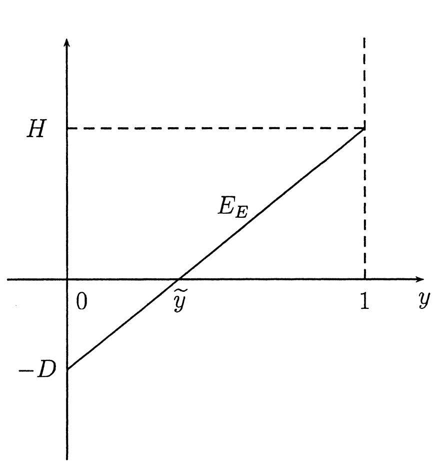


FIGURE 3
Espérances de gains pour E2 lorsque E1 choisit toujours le grand projet



La figure 2 montre comment varient les espérances de gain de E1 en fonction de x. Clairement, si $x = 0$ le petit projet a une meilleure espérance de gain que le grand (il limite les pertes). En revanche, si $x = 1$ le grand projet domine le petit. Comme les deux espérances sont des fonctions (affines) croissantes avec x, il existe une probabilité seuil $\widetilde{x}$, telle qu'en dessous le petit projet est préféré et inversement au dessus. La figure 2 est similaire pour l'entreprise E2, la comparaison se faisant entre 0 et l'espérance de gain E_E en cas d'entrée.

Les valeurs seuils $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ varient de manière intuitive avec les paramètres. Si C tend vers c, alors $\widetilde{x}$ tend vers 0. En effet, si la perte en cas d'échec est la même pour les deux projets, il est toujours préférable de choisir le grand projet qui rapporte plus en cas de succès. En revanche, si G tend vers g, $\widetilde{x}$ tend vers 1 : le grand projet est toujours moins avantageux que le petit (même gains mais pertes plus grandes).

3.2 Points de référence

Dans l'étude d'un jeu à information asymétrique, il est souvent utile de décrire quelle en serait l'issue si l'information était plus symétrique. Cela fournit un point de référence à partir duquel les résultats peuvent être interprétés. Ici, nous pouvons supprimer l'asymétrie d'information à deux niveaux : tout d'abord nous envisageons le cas où les types de E1 et E2 sont connus de tous avant que les décisions ne soient prises.

Si E1 connaît le type de E2 avant de sélectionner un projet et sait que E2 connaît son type, son choix est particulièrement simple. Si $x > y$, il choisit le grand projet et E2 décide de ne pas entrer. En revanche, si $x < y$, E1 choisit le petit projet et s'il choisissait le grand, alors E2 déciderait d'entrer. En effet, puisque la compétition est coûteuse tandis que son issue est parfaitement prévisible, elle n'a jamais lieu et seule la firme la plus forte investit dans le grand projet.

Nous supposons ensuite que E1 doit faire son choix dans l'ignorance du type de E2, tandis que E2 entre ou pas après avoir observé le type de E1. La firme E2 dispose donc d'un avantage informationnel qui compense en quelque sorte sa position de suiveur. La situation où E1 prend sa décision en ignorant le type de E2 mais en sachant que E2 connaîtra le sien avant de décider d'entrer ou pas conduit à un résultat plus intéressant. Du point de vue de E1, ce cas de figure est identique à celui où E2 entre toujours. En effet, E2 entre si et seulement si $x < y$ et gagne la compétition. S'il entrait quel que soit y, l'espérance de gain de E1 serait identique (il perdrait effectivement si $x < y$ et il gagnerait si $x > y$) la seule différence est que lorsque E1 gagne, E2 n'a pas de coût. Étant donnée la stratégie de E2, E1 choisit le grand projet si $x > \widetilde{x}$ et sélectionne le petit si $x < \widetilde{x}$. Ce résultat correspond à l'intuition : si E1 est fort, il n'a pas peur de la compétition et il se lance dans le grand projet et inversement s'il est faible.

3.3 Tout le monde voit en grand

La proposition 1 précise pour quelles valeurs des paramètres il existe un équilibre bayésien parfait où l'entreprise E1 choisit le grand projet quel que soit son type. Nous ne détaillons pas les croyances de E2 qui sont triviales puisque E1 choisit le grand projet quelque soit son type.

PROPOSITION 1 : *Si $\widetilde{y} \geqslant \widetilde{x}$, alors il existe un unique équilibre bayésien parfait caractérisé par :*

$$\forall x \in [0,1]\,,\ \sigma_1^*(x) = 1,\ \sigma_2^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < \widetilde{y} \\ 1 & \text{si } y \geqslant \widetilde{y} \end{cases} \text{ et } \mu_2^*(X \mid R) = X$$

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord que pour tout x, $x \in [0,1]$, $\sigma_1^*(x) = 1$. Il est clair que $\mu_2^*(X \mid R) = X$ et l'espérance de gain d'une entreprise E2 de type y qui joue E s'écrit :

$$\pi_2\left(y, E, \sigma_1^*\right) = H \int_0^y dx - D \int_y^1 dx = -D + (D + H)\, y$$

L'entreprise E2 joue donc E si et seulement si cela lui assure une espérance de gain supérieure ou égale à zéro soit si $y \geqslant \widetilde{y} = \frac{D}{D+H}$.

Supposons maintenant que la stratégie de l'entreprise E2 de type y consiste à rester dehors si $y < \widetilde{y}$ et à entrer si $y \geqslant \widetilde{y}$. L'espérance de profit d'une entreprise E1 de type x qui choisit le grand projet s'écrit

$$\pi_1\left(x, R, \sigma_2^*\right) = \begin{cases} G \displaystyle\int_0^{\widetilde{y}} dy - C \int_{\widetilde{y}}^1 dy & = -C + (C+G)\,\widetilde{y} \quad \text{si } x < \widetilde{y} \\ G \displaystyle\int_0^{\widetilde{y}} dy + G \int_{\widetilde{y}}^x dy - C \int_x^1 dy & = -C + (C+G)\,x \quad \text{si } x \geqslant \widetilde{y} \end{cases}$$

tandis que son espérance de profit liée au petit projet est

$$\pi_1(x, P) = \int_0^x g dz - \int_x^1 c dz = (g + c)\, x - c$$

Il est immédiat de vérifier que si $\pi_1\left(\widetilde{y}, R, \sigma_2^*\right) \geqslant \pi_1(\widetilde{y}, P)$, alors pour tout x, $\pi_1\left(x, R, \sigma_2^*\right) \geqslant \pi_1(x, P)$. Or, (sous réserve que $G > g$ et $H > 0$)

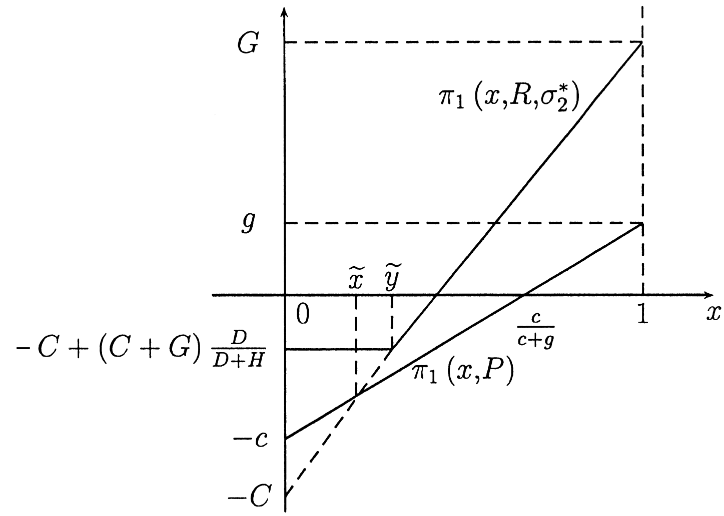
$$\pi_1\left(\widetilde{y}, R, \sigma_2^*\right) \geqslant \pi_1(\widetilde{y}, P) \Leftrightarrow \frac{D}{H} \geqslant \frac{C - c}{G - g} \Leftrightarrow \widetilde{y} \geqslant \widetilde{x}$$

L'unicité est prouvée avec la démonstration de la proposition 3.

La figure 4 représente l'espérance de gain de E1 lorsque E2 joue σ_2^* [9]. Cet équilibre émerge dans le cas où en moyenne la rentabilité du grand projet (en

9. Notons que sur cette figure $\frac{D}{D+H}$ est inférieur à $\frac{c}{c+g}$ et donc $-C + (C+G)\,\frac{D}{D+H}$ est négatif. Si $\frac{D}{D+H}$ était supérieur à $\frac{c}{c+g}$, alors $-C + (C+G)\,\frac{D}{D+H}$ serait positif.

FIGURE 4
Espérances de gains à l'équilibre si $\tilde{x} < \tilde{y}$



concurrence) est plus importante pour E1 que pour E2, c'est-à-dire lorsque $\tilde{y} > \tilde{x}$. Puisque E1 choisit toujours le grand projet, E2 n'entre (par définition de $\tilde{y}$) que si $y \geqslant \tilde{y}$. Il en résulte que pour tout $x \leqslant \tilde{y}$ l'espérance de gain de E1 est constante : elle gagne G avec la probabilité $\tilde{y}$ et perd C avec la probabilité $1 - \tilde{y}$. En revanche, pour $x \geqslant \tilde{y}$ l'espérance de gain dépend de x et il s'agit exactement de l'espérance de gain de E1 lorsque E2 entre toujours. En effet, si $y < x$ l'espérance de gain de E1 n'est pas affectée par la décision de E2. Il en découle que le grand projet est préférable au petit si et seulement si $x \geqslant \tilde{x}$ ce qui est bien le cas puisque $\tilde{y} > \tilde{x}$.

3.4 Les bons d'un côté les mauvais de l'autre

Dans cette section, nous montrons qu'il n'existe pas d'équilibre où E1 choisit le grand projet si et seulement si son type x est supérieur à un certain seuil. c'est-à-dire que l'équilibre qui prévaut lorsque E1 ignore le type de E2 mais E2 connaît le type de E1, disparaît lorsque E2 ignore le type de E1. En information (réciproquement) asymétrique, il n'existe pas d'équilibre où les mauvais types sélectionnent le petit projet tandis que les types élevés optent pour le grand projet. La proposition 2 précise ce point.

PROPOSITION 2 : *Il n'existe pas d'équilibre bayésien parfait du type*

$$\sigma_1^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \hat{x} \\ 1 & \text{si } x \geqslant \hat{x} \end{cases}$$
$$\text{avec } \hat{x} > 0$$

DÉMONSTRATION. Si E1 joue une stratégie à seuil, $\widehat{x}$, alors $\mu_2^*(X \mid R) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < \widehat{x} \\ \dfrac{X-\widehat{x}}{1-\widehat{x}} & \text{sinon.} \end{cases}$ et l'espérance de gain de E2 s'écrit s'il entre

$$\pi_2\left(y,E,\sigma_1^*\right) = \begin{cases} -D & \text{si } y \leqslant \widehat{x} \\ H\displaystyle\int_{\widehat{x}}^{y} \frac{dx}{1-\widehat{x}} - D\int_y^1 \frac{dx}{1-\widehat{x}} & \text{si } y \geqslant \widehat{x} \end{cases}$$

et donc (il est facile de vérifier que) la meilleure réponse de E2 est

$$\sigma_2^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < \widehat{y} \\ 1 & \text{si } y \geqslant \widehat{y} \end{cases}$$

avec

$$\widehat{y} = \frac{D+\widehat{x}H}{D+H} > \widehat{x}$$

ce qui signifie que E2 n'entre jamais pour $y < \widehat{y}$. Mais alors, l'espérance de gain liée au grand projet est constante pour tout $x \leqslant \widehat{y}$, et comme en $\widehat{y}$ le grand projet est préféré puisque $\widehat{y} > \widehat{x}$, c'est que le grand projet est préféré pour tout x. Nous sommes donc ramené à la proposition 1.

Ce résultat négatif, souligne que d'une certaine manière, il n'existe pas d'équilibre « révélateur » où le choix « grand projet » signale un type fort tandis que le choix « petit projet » révèle un type faible. À l'équilibre certains types faibles doivent « imiter » le comportement des types forts.

3.5 De l'audace !

Dans cette section, nous étudions en détail le cas où les types les plus faibles comme les plus forts se lancent dans le projet le plus ambitieux tandis que les types intermédiaires choisissent le petit projet. À un tel équilibre, l'entreprise E1 de type faible joue sur un « bluff ». Elle s'engage de manière audacieuse dans le grand projet en anticipant que l'entreprise E2 restera dehors avec une probabilité suffisamment élevée. La proposition 3 établit qu'il n'existe qu'un seul équilibre bayésien parfait. Plus exactement, il n'existe qu'une seule famille d'équilibres bayésiens parfaits.

PROPOSITION 3 : Si $\widetilde{x} \geqslant \widetilde{y}$, alors les stratégies d'équilibres ont la forme suivante :

$$\sigma_1^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x < y_0 \\ 0 & \text{si } y_0 \leqslant x \leqslant y_1 \\ 1 & \text{si } y_1 < x \leqslant 1 \end{cases} \text{ et } \sigma_2^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant y < y_0 \\ [0,1] & \text{si } y_0 \leqslant y \leqslant y_1 \\ 1 & \text{si } y_1 < y \leqslant 1 \end{cases}$$

avec

$$y_0 = \frac{\widetilde{y}}{1-\widetilde{y}}\,(1-\widetilde{x}) = \frac{D}{H}\frac{G-g}{(G-g)+(C-c)}$$

$$y_1 = \widetilde{x} = \frac{C-c}{(G-g)+(C-c)}$$

$$\sigma_2^* \text{quelconque sur } [y_0, y_1] \text{ telle que } \int_{y_0}^{y_1} \sigma_2^*(y)\, dy$$
$$= I = \left(\frac{c+g}{C+G}\right) \frac{H(C-c) - D(G-g)}{H[(C-c)+(G-g)]}$$
$$\text{et } \mu_2^*(X \mid R) = \begin{cases} \dfrac{X}{1-y_1+y_0} & \text{si } X < y_0 \\ \dfrac{y_0}{1-y_1+y_0} & \text{si } y_0 < X < y_1 \\ \dfrac{y_0+X-y_1}{1-y_1+y_0} & \text{si } y_1 < X. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Voir l'annexe A.

FIGURE 5
Espérances de gains pour E1 à l'équilibre avec bluff

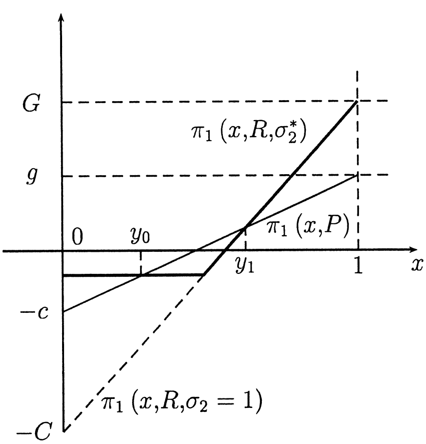
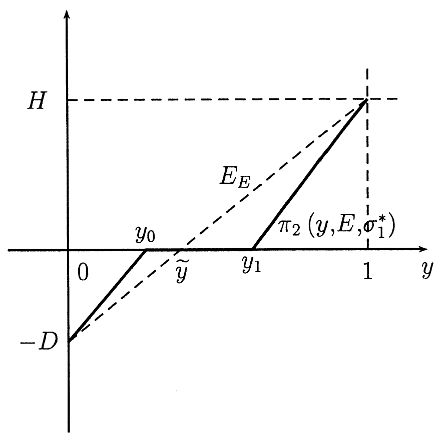


FIGURE 6
Espérances de gains pour E2 à l'équilibre avec bluff



Les figures 5 et 6 montrent les espérances de gains à l'équilibre de la proposition 3 pour chacun des joueurs et permettent de donner l'intuition du résultat.

Tout d'abord, le comportement de E2 est assez facile à comprendre lorsque y est proche de 0 ou de 1. Si y est proche de zéro, il n'entre pas puisqu'en moyenne E1 sera toujours plus fort que lui. En revanche si y est proche de 1, E2 tente sa chance. Puisque E2 n'entre jamais si $y < y_0$, l'espérance de gain de E1 est constante pour tout $x < y_0$. Et puisque E2 entre toujours si $y > y_1$, l'espérance de gain de E1 lorsque $x > y_1$ correspond exactement à l'espérance de E1 lorsque E2 entre toujours. Or, (voir lemme 1) face à un adversaire toujours présent, E1 préfère le grand projet si et seulement si $x > \widetilde{x}$. Il est donc cohérent de trouver $y_1 = \widetilde{x}$. Lorsque x est petit, nous avons vu que l'espérance de gain liée au grand projet était constante. Comme justement à l'équilibre E2 n'entre pas trop souvent, un type $x = 0$ préfère le grand projet au petit. Toutefois, l'espérance de gain liée au petit projet est croissante avec x, il arrive un point ($x = y_0$) où le petit projet devient plus intéressant que le grand et donc une entreprise E1 de type intermédiaire préfère choisir le petit projet (sinon nous serions dans le cas de la proposition 1).

La partie la moins intuitive du résultat est le comportement de E2 entre y_0 et y_1. Quel que soit $y_0 < y < y_1$, une entreprise E2 de type y sait qu'elle n'aura pas d'adversaire « équivalent ». Soit elle a un adversaire plus faible $x < y_0$ soit un adversaire plus fort $x > y_1$. Donc quel que soit $y_0 < y < y_1$, une entreprise E2 de type y a le même gain s'il entre. Or, il est facile de voir qu'il est impossible que pour ces types E2 entre toujours ou n'entre jamais. En effet, si elle entrait toujours, une entreprise E1 de type $x = y_0$ ne serait indifférente entre le grand et le petit projet que si $y_0 = \widetilde{x}$, mais alors $y_0 = y_1$ c'est-à-dire que E1 entrerait toujours (proposition 1) ce qui n'est pas possible ici. Si E2 n'entre jamais pour $y_0 < y < y_1$, cela veut dire que E2 n'entre jamais pour $0 < y < y_1$, et il est donc impossible que E1 ne choisisse pas le grand projet pour $y_0 < x < y_1$. Il en résulte que E2 doit jouer en stratégie mixte pour $y_0 < y < y_1$, et cette stratégie mixte doit être telle qu'elle laisse une entreprise E1 de type y_0 indifférente entre le grand et le petit projet. Cette condition ne définit pas une unique stratégie comportementale $\sigma_2^* (y)$ pour $y_0 < y < y_1$. Sur la figure 5, il a été supposé que E2 jouait selon une stratégie à seuil : ne pas entrer si $y_0 < y < \widehat{y}$, et entrer si $\widehat{y} < y < y_1$ (avec $\widehat{y}$ bien choisi). Toutefois comme la seule chose qui compte est la valeur de l'intégrale $I = \int_{y_0}^{y_1} \sigma_2^* (y)\, dy$, d'autres (une infinité d'autres) fonctions σ_2^* conviendraient. Sur la figure 5 cela changerait la forme de l'espérance de gain de E1 pour $y_0 < x < y_1$. Au lieu d'avoir une droite horizontale puis une droite croissante, on aurait dans un cadre plus général une fonction croissante qui partirait du point $(y_0, G - (C + G)\, I)$ et qui arriverait au point $(y_1, Gy_1 - C\,(1 - y_1))$ mais qui resterait toujours inférieure à la droite $\pi_1 (x, P)$.

4 Discussion

Dans cette section, nous discutons tout d'abord les propriétés de l'équilibre. Nous étudions en particulier l'émergence de tel ou tel type d'équilibre en fonction des valeurs des paramètres. Nous déterminons ensuite l'issue du jeu où les décisions ne sont plus prises de manière séquentielle mais de manière simultanée.

4.1 Propriétés de l'équilibre

La première propriété frappante de notre modèle est que quel que soit l'équilibre qui apparaît, l'entreprise E1 de type le plus faible se lance toujours dans le grand projet. En effet, si $\widetilde{x} < \widetilde{y}$, l'équilibre est celui de la proposition 1 et E1 choisit le grand projet quel que soit son type. Ou alors, si $\widetilde{x} > \widetilde{y}$, l'équilibre est celui de la proposition 3 et E1 choisit le grand projet pour $x < y_0$ et donc en particulier si $x = 0$. Ce résultat, à première vue contre intuitif, s'explique bien : si E1 est de type $x = 0$, elle est sure de perdre $-c$ en choisissant le petit projet. En revanche en sélectionnant le grand projet, elle bénéficie du fait qu'en espérance E2 va abandonner la compétition.

Les figures 7 et 8 montrent quel équilibre prévaut en fonction des valeurs des paramètres. Tout d'abord la figure 7 représente y_0 et y_1 en fonction de $\widetilde{x}$. La valeur seuil y_1 est une droite croissante avec $\widetilde{x}$, tandis que y_0 est une droite décroissante, dont la pente et l'ordonnée à l'origine dépendent du paramètre $\widetilde{y}$. Plus précisément elles sont égales à $\dfrac{\widetilde{y}}{1-\widetilde{y}} = \frac{D}{H}$. Toutefois, il n'est pas forcément très facile d'interpréter le paramètre $\widetilde{x}$. Pour contourner cette difficulté, il est possible de représenter, comme dans la figure 8, y_0 et y_1 comme des fonctions de $\tau_1 = \dfrac{\widetilde{x}}{1-\widetilde{x}} = \frac{C-c}{G-g}$. Le rapport τ_1 (entre l'accroissement des pertes et celui des gains lorsque E1 passe du petit au grand projet) mesure l'accroissement du risque qu'il y a à choisir le grand projet plutôt que le petit. Par exemple, si $C = c$ et $G > g$, il est clair que le grand projet domine le petit et dans ce cas le rapport est nul traduisant l'idée que le grand projet ne présente aucun risque par rapport au petit. En revanche si $C > c$ tandis que $G = g$, alors c'est le petit projet qui domine le grand, et le rapport est infini. Il est important de remarquer que $D/H > \tau_1 \Leftrightarrow \widetilde{y} > \widetilde{x}$. La figure 8 montre que lorsque τ_1 est inférieur à D/H, alors le grand projet est sélectionné quel que soit x. En revanche lorsque τ_1 dépasse D/H, le grand projet n'est plus choisi que par les types faibles $x < y_0$ et forts $x > y_1$. Si τ_1 tend vers l'infini, alors y_0 tend vers 0 et y_1 tend vers 1.

Si E1 choisi le grand projet, et lorsque $\tau_1 > \frac{D}{H}$, alors son type est en moyenne égal à

FIGURE 7
Variation de y_0 et y_1 en fonction de $\tilde{x}$

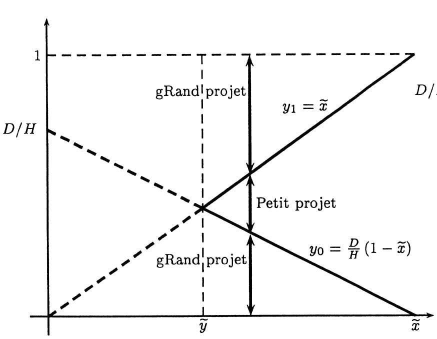
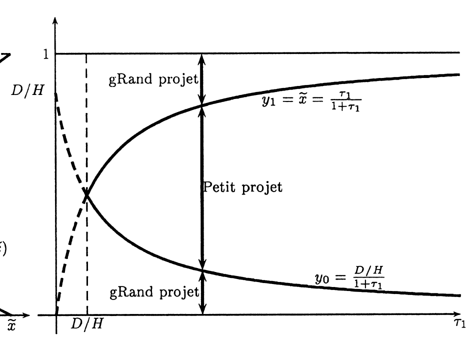


FIGURE 8
Variation de y_0 et y_1 en fonction de $\tau_1 = \frac{C-c}{G-g}$

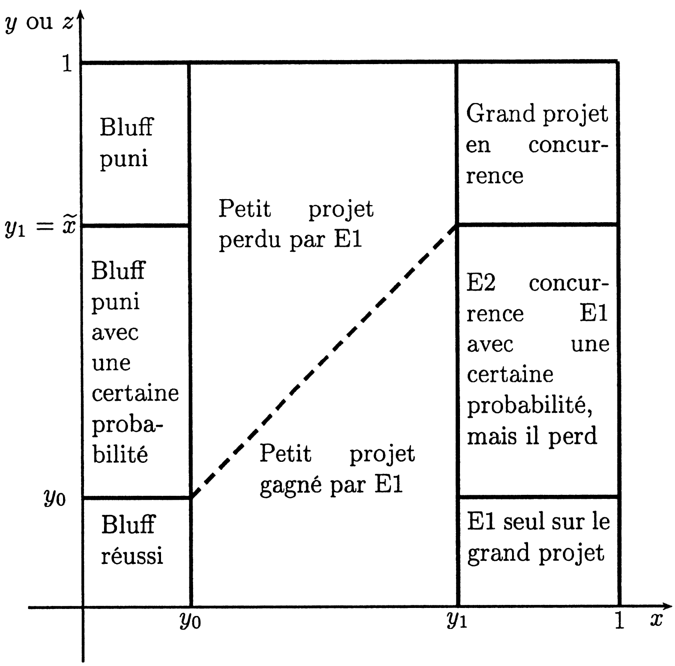


$$E\left[x|R\right]=\frac{\left(\frac{D}{H}\right)^2+1+2\tau_1}{2\left(1+\frac{D}{H}\right)(1+\tau_1)}$$

Il est facile de vérifier que $E\left[x|R\right] > 1/2$ si et seulement si $H > D$. Il en résulte que si $D > H$, alors une entreprise E1 qui choisit le grand projet est en moyenne moins forte qu'une entreprise E1 qui choisit le petit projet. De plus, $E\left[x|R\right]$ est une fonction strictement croissante de τ_1 si $D < H$ et une fonction strictement décroissante si $D > H$.

La figure 9 présente l'issue du jeu en fonction de la valeur du type de E1 et de celui de E2 (ou en fonction de z si E1 choisit le petit projet). La figure illustre le cas où $\widetilde{x} > \widetilde{y}$.

FIGURE 9
***Isue du jeu selon** x **et** y*



Lorsque $x < y_0$, E1 choisit le grand projet, il s'agit d'une certaine manière d'un bluff puisque (à l'équilibre) cette stratégie n'est payante que si E2 n'entre pas. Si $y < y_0$, E2 évite la compétition est donc le bluff est réussi. En revanche, si $y > y_1$, E2 entre et il gagne. Dans ce cas le bluff est puni. Enfin, si $y_0 < y < y_1$, E2 entre avec la probabilité $\sigma_2^*(y)$ et donc le bluff réussi ou échoue selon que E2 entre ou pas.

Pour $y_0 < x < y_1$, l'entreprise E1 préfère sélectionner le petit projet. Ce choix conduit à un gain si $z < x$ et à une perte si $z > x$ d'où la droite en pointillé.

Enfin, si $y_1 < x$, l'entreprise E1 se décide pour le grand projet. Comme son type est plutôt élevé, il ne s'agit pas d'un bluff mais d'une volonté de profiter d'un x grand pour gagner la compétition. Cette stratégie est couronnée de succès tant que $y < y_1$ (que E2 décide alors d'entrer ou pas) tandis qu'elle peut conduire à un échec si $y > x > y_1$.

4.2 Comparaison avec un jeu simultané

La présence de bluff à l'équilibre est liée au caractère séquentiel des choix. Si E1 et E2 choisissent simultanément leurs actions, le bluff disparaît comme le montre la proposition 4.

PROPOSITION 4 : *Dans le jeu simultané, les équilibres sont les suivants*

Si $\widetilde{x} \leqslant \widetilde{y}$, *alors pour tout* x, $\sigma_1^*(x) = 1$ *; si* $y < \widetilde{y}$ *alors* $\sigma_2^*(y) = 0$ *et* $\sigma_2^*(y) = 1$ *sinon.*

Si $\widetilde{x} \geqslant \widetilde{y}$, *alors pour tout* y, $\sigma_2^*(y) = 1$ *; si* $x < \widetilde{x}$ *alors* $\sigma_1^*(x) = 0$ *et* $\sigma_1^*(x) = 1$ *sinon.*

DÉMONSTRATION. Par analogie avec les preuves des propositions 1 et 3.

L'équilibre est le suivant : la firme dont le seuil de rentabilité est le plus bas entre toujours (*i.e.* s'il s'agit de E1 elle choisit le grand projet, et s'il s'agit de E2 elle entre) tandis que l'autre n'entre que si son type est supérieur à son seuil de rentabilité. c'est-à-dire la firme dont les incitations à entrer (resp. choisir le grand projet) sont les plus fortes *a priori* se comporte de la manière la plus ambitieuse tandis que l'autre s'adapte.

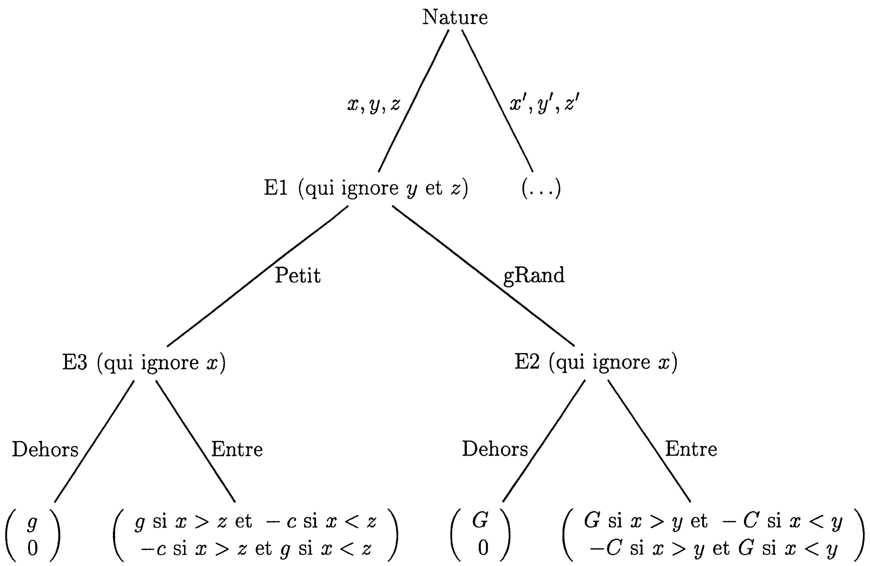
Lorsque $\widetilde{x} \leqslant \widetilde{y}$ l'équilibre du jeu simultané est le même que l'équilibre du jeu séquentiel (voir proposition 1). En revanche, lorsque $\widetilde{x} \geqslant \widetilde{y}$ l'équilibre est modifié et en particulier le bluff disparaît. Dans ce dernier cas, l'entreprise E2 entre quel que soit son type.

5 Extension

Notre modèle présente une asymétrie entre le petit projet et le grand projet. Le petit projet est toujours concurrencé tandis que le grand projet ne l'est que si E2 décide d'entrer. Il s'agit d'un choix de modélisation délibéré. L'accent est mis sur le fait que le choix du grand projet peut décourager la concurrence. Dans cette section, nous montrons que notre résultat (existence d'un bluff à l'équilibre) est maintenu lorsque la concurrence sur le petit projet dépend de la décision d'entrer ou pas d'une firme E3 qui observe le choix de E1. Toutes les situations économiques illustrées par notre premier modèle (dissuasion de l'entrée, course au brevet, appel d'offres) le sont aussi par ce modèle plus général.

La figure 10 décrit de manière informelle l'arbre de ce nouveau jeu. Pour simplifier, nous supposons dans cette section qu'un projet (petit ou grand) coûte et rapporte le même montant à chaque concurrent.

FIGURE 10
Choix d'un projet : arbre du jeu



PROPOSITION 5 : *Les équilibres bayésiens parfaits du jeu où l'entrée peut être dissuadée sur le petit et le grand projet sont les suivants :*
Si $\widetilde{x} < \widetilde{y}$*, alors E1 choisit le grand projet quel que soit la valeur de x, E2 n'entre que si* $y \geqslant \widetilde{y}$ *et E3 entre toujours* ($\mu_2^* (X \mid R) = X$ *et* $\mu_3^* (X \mid P) = 1$*).*
Si $\widetilde{x} > \widetilde{y}$*, alors les stratégies d'équilibre sont les suivantes :*

$$\sigma_1^* = \begin{cases} [0,1] & si\ 0 \leqslant x < y_0 \\ 0 & si\ y_0 \leqslant x \leqslant y_1 \\ 1 & y_1 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$avec \int_0^{y_0} \sigma_1^* (x)\, dx = I_1 = \frac{C}{G} \left(\frac{G - g}{G - g + C - c} \right)$$

$$\sigma_2^* = \begin{cases} 0 & si 0 \leqslant y < \widehat{z} \\ [0,1] & si\ \widehat{z} \leqslant y \leqslant y_1 \\ 1 & y_1 < y \leqslant 1 \end{cases}$$

$$avec \int_{\widehat{z}}^{y_1} \sigma_2^* (y)\, dx = I_2 = \frac{g\,(gC - cG)}{G\,(G + C)\,(G - g + C - c)}$$

$$et\ \mu_2^* (X \mid R) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^X \sigma_1^* (x)\, dx}{1 - y_1 + I_1} & si\ X < y_0 \\ \dfrac{I_1}{1 - y_1 + I_1} & si\ y_0 < X < y_1 \\ \dfrac{I_1 + X - y_1}{1 - y_1 + I_1} & si\ y_1 < X. \end{cases}$$

$$\sigma_3^* = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leqslant z < \widehat{z} \\ 1 & \widehat{z} < z \leqslant 1 \end{cases}$$

avec

$$y_0 \in [I_1, \widehat{z}]\,,\ y_1 = \frac{C-c}{G-g+C-c}\ et\ \widehat{z} = \frac{Gc\,(C-c) + gC\,(G-g)}{G\,(g+c)\,(G-g+C-c)}$$

$$et\ \mu_3^*\,(X \mid P) = \begin{cases} \dfrac{X - \int_0^X \sigma_1^*\,(x)\,dx}{y_1 - I_1} & si\ X < y_0 \\ \dfrac{X - I_1}{y_1 - I_1} & si\ y_0 < X < y_1 \\ 1 & si\ y_1 < X. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Voir l'annexe B.

En particulier, lorsque $y_0 = I_1$, on retrouve un équilibre analogue à celui de la proposition 3 où les types de E1 les plus faibles et les plus forts prennent le grand projet avec certitude. Pour les autres valeurs de y_0, l'intuition reste la même, les types moyens de E1 prennent le petit projet tandis que les types les plus forts et une proportion I_1 des plus faibles s'engagent dans le grand projet. De manière plus générale, tous ces équilibres reposent sur un bluff des types faibles.

6 Conclusion

Nous avons montré que la présence d'asymétrie d'information perturbe de manière inattendue une situation relativement simple. En effet, si E2 est en information parfaite [10], E1 choisit le grand projet si et seulement si il a un type élevé ce qui est intuitif. En revanche, lorsque E2 ignore le type de E1, cette séparation bon/mauvais disparaît à l'équilibre. Soit E1 choisit le grand projet quel que soit son type, soit E1 opte pour le grand projet s'il est de type faible ou de type fort mais préfère le petit projet s'il est de type intermédiaire. Il en résulte qu'à l'équilibre, le choix du grand projet signale de manière ambiguë l'habileté de l'entreprise E1 : les entreprises de type faible bluffent.

Une extension possible de notre modèle serait de considérer la situation où la compétition ne conduit pas à un résultat aussi drastique en termes de gain (un seul vainqueur). En particulier, explorer les cas où le gain en cas de compétition dépend non seulement de qui est le plus fort mais aussi de l'écart des forces. Par exemple, si la compétition consiste en une concurrence à la BERTRAND (avec $1 - x$ le coût marginal de la firme E1 et $1 - y$ celui de E2), la firme E1 avec le coût marginal le plus bas ($x > y$) emporte tout le marché

10. c'est-à-dire la situation où E2 connaît le type de E1 avant de choisir d'entrer ou pas mais où E1 ignore le type de E2 avant de sélectionner un projet.

mais sa marge est $y - x$. Il en résulte bien que la taille du gain varie avec l'écart $y - x$. L'intuition est qu'un phénomène de bluff devrait persister dans un tel modèle. Toutefois, il n'est pas forcément réaliste qu'une fois les deux entreprises entrées x et y soient connaissance commune. Si après l'entrée E2 continue d'ignorer x et E1 ne connaît pas y, il faudrait alors utiliser les résultats de Spulber [1995] sur la concurrence à la Bertrand avec coûts inconnus.

▼

• Références

BINMORE K. (1992). – *Fun and Games*, D. C. Health and Company, Lexington, Massachusetts.

BLOCH F., MARKOWITZ P. (1996). – Optimal disclosure delay in multistage R&D competition, *International Journal of Industrial Organization*, 14(2), p. 159-79, April 1996.

PÉREZ-CASTRILLO D., VERDIER T. (1991). – La structure industrielle dans une course au brevet avec coûts fixes et coûts variables, *Revue économique*, 42(6), p. 1111-1140, Novembre 1991.

SORIN S. (1995). – Bluff et réputation, *Revue d'économie politique*, 105(4), p. 583-600, Juillet-Août 1995.

SPULBER D. (1995). – Bertrand competition when rivals' costs are unknown, *Journal of Industrial Economics*, 43(1), p. 1-11, March 1995.

VON NEUMANN J., MORGENSTERN O. (1944). – *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944.

Annexes

A Preuve de la proposition 3

Les croyances sont toujours déduites de manière triviale à l'aide de la règle de Bayes et elles seront donc omises dans la démonstration.

Soit $\pi_1(x,P)$ l'espérance de profit d'une entreprise E1 de type x qui choisit le petit projet (P). Il est immédiat que

$$\pi_1(x,P) = \int_0^x g\,dz - \int_x^1 c\,dz = (g+c)\,x - c.$$

En revanche, l'espérance de gain de E1, notée $\pi_1(x,R,\sigma_2)$, si elle joue R (gRand projet) dépend de la stratégie $\sigma_2(.)$ de E2. Il vient :

$$\pi_1(x,R,\sigma_2) = G\int_0^x \sigma_2(y)\,dy - C\int_x^1 \sigma_2(y)\,dy + G\int_0^1 (1-\sigma_2(y))\,dy$$

L'expression de cette espérance de gain se simplifie légèrement en

$$\pi_1(x,R,\sigma_2) = G - (G+C)\int_x^1 \sigma_2(y)\,dy.$$

Étant données ces espérances de gains, la stratégie de E1 est facile à déterminer : si l'espérance de gain est plus élevée avec l'une des deux stratégies, alors il faut jouer cette stratégie avec une probabilité égale à 1, tandis que si les espérances sont identiques E1 est libre de choisir la probabilité avec laquelle il joue R. Formellement :

$$\sigma_1^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \pi_1(x,R,\sigma_2) < \pi_1(x,P) \\ [0,1] & \text{si } \pi_1(x,R,\sigma_2) = \pi_1(x,P) \\ 1 & \text{si } \pi_1(x,R,\sigma_2) > \pi_1(x,P) \end{cases}$$

Le choix de l'entreprise E2 est le suivant. Soit elle reste en dehors de la compétition et elle a un profit nul. Soit elle entre dans la course et elle obtient H ou $-D$ selon les valeurs de x et de y. En espérance elle obtient si elle entre :

$$\pi_2(y,E,\sigma_1) = H\int_0^y \frac{\sigma_1(x)}{\int_0^1 \sigma_1(x)dx}dx - D\int_y^1 \frac{\sigma_1(x)}{\int_0^1 \sigma_1(x)dx}dx$$

En effet, il faut tenir compte (révision bayésienne) du fait que x n'est plus distribué entre 0 et 1 selon une loi uniforme mais (compte tenu que E1 a joué R) selon la densité $\frac{\sigma_1(x)}{\int_0^1 \sigma_1(x)dx}$. Après simplification cela conduit à :

$$\pi_2(y,E,\sigma_1) = H - \frac{H+D}{\int_0^1 \sigma_1(x)\,dx}\int_y^1 \sigma_1(x)\,dx$$

Le joueur 2 entre si cela lui assure une espérance de gain positive. Formellement :

$$\sigma_2^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \pi_2(y,E,\sigma_1) < 0 \\ [0,1] & \text{si } \pi_2(y,E,\sigma_1) = 0 \\ 1 & \text{si } \pi_2(y,E,\sigma_1) > 0 \end{cases}$$

Il est facile de remarquer que la dérivée de $\pi_2(y,E,\sigma_1)$ par rapport à y s'écrit

$$\frac{\partial \pi_2(y,E,\sigma_1)}{\partial y} = \frac{H+D}{\int_0^1 \sigma_1(x)\,dx}\sigma_1(y) \geqslant 0$$

il en résulte donc que la fonction $\pi_2(y,E,\sigma_1)$ est croissante (au sens large) avec y. De plus, il est facile de vérifier que :

$$\pi_2(0,E,\sigma_1) = -D < 0, \text{ et } \pi_2(1,E,\sigma_1) = H > 0$$

Il existe donc (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) $0 < y_0 < 1$ et $0 < y_1 < 1$, $y_0 \leqslant y_1$ tels que $\pi_2(y,E,\sigma_1) < 0$ pour $0 \leqslant y < y_0$, $\pi_2(y,E,\sigma_1) = 0$ pour $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, et $\pi_2(y,E,\sigma_1) > 0$ pour $y_1 < y \leqslant 1$. La stratégie optimale de E2 peut donc s'exprimer en termes de ces valeurs y_0 et y_1 :

$$\sigma_2^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant y < y_0 \\ [0,1] & \text{si } y_0 \leqslant y \leqslant y_1 \\ 1 & \text{si } y_1 < y \leqslant 1 \end{cases}$$

En utilisant à nouveau le fait que $\frac{\partial \pi_2\left(y,E,\sigma_1^*\right)}{\partial y} = \frac{H+D}{\int_0^1 \sigma_1^*(x)dx}\sigma_1^*(y)$, et en utilisant le fait que (par définition de y_0 et y_1) pour tout y, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, $\pi_2\left(y,E,\sigma_1^*\right) = 0$, il vient que

$$\forall y,\ y_0 \leqslant y \leqslant y_1,$$
$$\frac{\partial \pi_2\left(y,E,\sigma_1^*\right)}{\partial y} = \frac{H+D}{\int_0^1 \sigma_1^*(x)\,dx}\sigma_1^*(y) = 0 \Rightarrow \sigma_1^*(y) = 0.$$

En outre,

$$\forall x,\ x < y_0,\ \pi_1\left(x,R,\sigma_2^*\right) = G - (G+C)\int_x^1 \sigma_2^*(y)\,dy$$

se simplifie en

$$G - (G+C)\int_{y_0}^1 \sigma_2^*(y)\,dy$$

et donc

$$\forall x,\ x < y_0,\ \pi_1\left(x,R,\sigma_2^*\right) \text{ est constant.}$$

Par définition, y_0 est la plus petite valeur de y telle que la dérivée de $\pi_2\left(y, E, \sigma_1^*\right)$ s'annule. On a donc qu'en y_0^-, $\left.\frac{\partial\pi_2\left(y,E,\sigma_1^*\right)}{\partial y}\right|_{y=y_0^-} > 0$. c'est-à-dire que $\sigma_1^*\left(y_0^-\right) > 0$. Or cela n'est possible que si $\pi_1\left(y_0^-, R, \sigma_2\right) \geqslant \pi_1\left(y_0^-, P\right)$. Mais alors, pour tout $x < y_0^-$, il vient que :

$$\pi_1\left(x, R, \sigma_2^*\right) = \pi_1\left(y_0^-, R, \sigma_2^*\right) \geqslant \pi_1\left(y_0^-, P\right) > \pi_1\left(x, P\right)$$

et donc que

$$\forall x,\ x < y_0, \quad \sigma_1^*\left(x\right) = 1.$$

D'autre part, pour tout $x > y_1$, il vient

$$\pi_1\left(x, R, \sigma_2^*\right) = G - (G + C)\int_x^1 dy$$

Il s'agit donc d'une fonction affine, strictement croissante avec x de pente $G + C$. Par ailleurs, l'espérance de gain $\pi_1\left(x, P\right)$ est aussi une fonction affine, strictement croissante avec x mais de pente $g + c$. Or $g + c < G + C$, il en résulte donc que

$$\left(\pi_1\left(y_1^+, R, \sigma_2^*\right) \geqslant \pi_1\left(y_1^+, P\right)\right) \Rightarrow \left(\pi_1\left(x, R, \sigma_2^*\right) > \pi_1\left(x, P\right)\right)$$

et donc que

$$\forall x,\ x > y_1, \quad \sigma_1^*\left(x\right) = 1.$$

La stratégie d'équilibre de E1 est donc entièrement déterminée (évidemment, elle dépend des valeurs de y_0 et de y_1 qui ne sont toujours pas déterminées. On remarque aussi que le cas $y_0 = y_1$ est bien défini, il correspond au cas où E1 choisit toujours le grand projet) :

$$\sigma_1^*\left(x\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x < y_0 \\ 0 & \text{si } y_0 \leqslant x \leqslant y_1 \\ 1 & \text{si } y_1 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Pour terminer, il faut caractériser la stratégie de E2 de trouver les valeurs de y_0 et de y_1 et de déterminer plus précisément $\sigma_2^*\left(y\right)$ pour y compris entre y_0 et y_1. Pour cela, on remarque que étant donné σ_1^*, il vient tout d'abord que

$$\int_0^1 \sigma_1\left(x\right) dx = 1 - y_1 + y_0.$$

et ensuite que

$$\pi_2\left(y, E, \sigma_1^*\right) = \begin{cases} H - (H + D)\dfrac{1 - y_1 + y_0 - y}{1 - y_1 + y_0} & \text{si } 0 \leqslant y < y_0 \\ H - (H + D)\dfrac{1 - y_1}{1 - y_1 + y_0} & \text{si } y_0 \leqslant y \leqslant y_1 \\ H - (H + D)\dfrac{1 - y}{1 - y_1 + y_0} & \text{si } y_1 < y \leqslant 1 \end{cases}$$

Pour finir, il faut distinguer deux cas. Soit $y_0 = y_1$ et on retrouve le résultat de la proposition 1. Soit $y_0 < y_1$ et alors pour tout y compris entre y_0 et y_1, on a par définition de y_0 et de y_1 que $\pi_2\left(y,E,\sigma_1^*\right) = 0$. Il en résulte que

$$H - (H + D)\,\frac{1 - y_1}{1 - y_1 + y_0} = 0 \text{ soit } Hy_0 + Dy_1 = D$$

De plus, soit

$$I = \int_{y_0}^{y_1} \sigma_2^*\,(y)\,dy.$$

On a pour $x = y_0$ et pour $x = y_1$ que l'entreprise E1 réalise le même profit quelque soit le projet qu'elle sélectionne d'où d'une part

$$\begin{aligned}\pi_1\left(y_0,R,\sigma_2^*\right) = \pi_1\,(y_0,P) &\Leftrightarrow (g + c)\,y_0 - c \\ &= (G + C)\,y_1 - C - (G + C)\,I\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\pi_1\left(y_1,R,\sigma_2^*\right) = \pi_1\,(y_1,P) \Leftrightarrow (g + c)\,y_1 - c = (G + C)\,y_1 - C$$

soit un système de trois équations à trois inconnues à résoudre qui conduit à :

$$\begin{aligned}y_0 &= \frac{D}{H}\frac{G - g}{(G - g) + (C - c)} = \frac{1 - \widetilde{x}}{1 - \widetilde{y}}\widetilde{y} \\ y_1 &= \frac{C - c}{(G - g) + (C - c)} = \widetilde{x} \\ \int_{y_0}^{y_1} \sigma_2^*\,(y)\,dy &= \left(\frac{c + g}{C + G}\right)\frac{H\,(C - c) - D\,(G - g)}{H\,[(C - c) + (G - g)]}\end{aligned}$$

Sous la condition, $\widetilde{x} > \widetilde{y}$, il est immédiat que $y_0 < y_1$.

B Extension

Si $\widetilde{x} < \widetilde{y}$, la démonstration est la même que la démonstration précédente. La seule différence est qu'il faut définir les croyances de E3 lorsque E1 choisit le petit projet. Comme cela n'arrive pas à l'équilibre, la règle de BAYES ne s'applique pas et nous fixons arbitrairement la croyance de E3 de telle sorte à ce qu'il soit incité à entrer. Par exemple, $\mu_3\,(X|P) = 1$.

Si $\widetilde{x} > \widetilde{y}$, la démonstration est plus complexe que la démonstration précédente. Pourtant, les arguments employés sont du même type et il y sera fait référence autant que possible pour ne pas alourdir la démonstration qui suit. De plus les croyances s'obtiennent toujours à l'aide de la règle de BAYES et elles peuvent être omises dans la démonstration.

Le profit de E2 s'écrit s'il entre :

$$\pi_2\,(y,E,\sigma_1) = G - \frac{G + C}{\int_0^1 \sigma_1\,(x)\,dx}\int_y^1 \sigma_1\,(x)\,dx$$

le même raisonnement que dans l'annexe A montre donc qu'il existe y_0 et y_1 avec $0 < y_0 \leqslant y_1 < 1$ tels que

$$\sigma_2^* (y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant y < y_0 \\ [0,1] & \text{si } y_0 \leqslant y \leqslant y_1 \\ 1 & \text{si } y_1 < y \leqslant 1 \end{cases}$$

et

$$\forall x \in \left]y_0,y_1\right[,\ \sigma_1^* (x) = 0$$

De même, le profit de E3 s'écrit s'il entre :

$$\pi_3 (z,E,\sigma_1) = g - \frac{g+c}{\int_0^1 (1-\sigma_1 (x))\, dx} \int_z^1 (1-\sigma_1 (x))\, dx$$

toujours le même raisonnement, appliqué cette fois-ci à π_3, montre donc qu'il existe z_0 et z_1 avec $0 < z_0 \leqslant z_1 < 1$ tels que

$$\sigma_3^* (z) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant z < z_0 \\ [0,1] & \text{si } z_0 \leqslant z \leqslant z_1 \\ 1 & \text{si } z_1 < z \leqslant 1 \end{cases}$$

et

$$\forall x \in \left]z_0,z_1\right[,\ \sigma_1^* (x) = 1$$

Il en résulte que trois cas doivent être distingués. Tout d'abord $y_0 \neq y_1$ et $z_0 \neq z_1$. Ensuite $y_0 = y_1$ et $z_0 \neq z_1$. Enfin $y_0 \neq y_1$ et $z_0 = z_1$.

Cas $y_0 \neq y_1$ et $z_0 \neq z_1$

Notons que les intervalles $[y_0,y_1]$ et $[z_0,z_1]$ sont forcément disjoints puisque σ_1^* est nul sur l'un et égal à 1 sur l'autre. Supposons, par exemple, que $y_0 < y_1 < z_0 < z_1$ (le cas $z_1 < y_0$ se traite de manière analogue). Comme dans la partie A, en y_0^- on a que $\sigma_1^* \left(y_0^-\right) > 0$ et que $\pi_1 \left(y_0^-,R,\sigma_2^*\right) \geqslant \pi_1 \left(y_0^-,P,\sigma_3^*\right)$. De même, on démontre que $\pi_1 \left(z_0^-,R,\sigma_2^*\right) \leqslant \pi_1 \left(z_0^-,P,\sigma_3^*\right)$.

Or, pour tout $z \leqslant z_0$, $\sigma_3^* (z) = 0$, donc pour tout $x \leqslant z_0$, $\pi_1 \left(x,P,\sigma_3^*\right)$ est une fonction constante. On en déduit donc que $\pi_1 \left(y_0^-,R,\sigma_2^*\right) \geqslant \pi_1 \left(y_0^-,P,\sigma_3^*\right) = \pi_1 \left(z_0^-,P,\sigma_3^*\right) \geqslant \pi_1 \left(z_0^-,R,\sigma_2^*\right)$. Mais comme π_1 est une fonction croissante et que $y_0 < z_0$, on a aussi que $\pi_1 \left(y_0^-,R,\sigma_2^*\right) \leqslant \pi_1 \left(z_0^-,R,\sigma_2^*\right)$. On peut donc en conclure que π_1 est une fonction constante sur l'intervalle $[y_0,z_0[$.

Or, pour que π_1 soit constant, il est nécessaire que E2 ne rentre pas jusqu'à z_0 c'est-à-dire $\sigma_2^* (y) = 0$ pour $y \in \left]y_0,z_0\right[$. Ceci est contradictoire avec le fait que $\sigma_2^* (y) = 1$ pour tout y supérieur à y_1.

Le cas $y_0 \neq y_1$ et $z_0 \neq z_1$ est donc impossible.

Cas $y_0 = y_1 = \widehat{y}$ et $z_0 \neq z_1$

Un raisonnement similaire à celui du cas précédent montre que $\widehat{y}$ ne peut ni être inférieur à z_0, ni supérieur à z_1. $\widehat{y}$ appartient donc nécessairement à l'intervalle $[z_0, z_1]$.

Sur l'intervalle $[z_0, z_1]$, $\sigma_1^*(x) = 1$ c'est-à-dire que le grand projet est préféré au petit projet. Or, pour x plus grand que z_1, $\pi_1\left(x, R, \sigma_2^*\right)$ est une fonction affine de pente $G + C$, tandis que $\pi_1\left(x, P, \sigma_3^*\right)$ est une fonction affine de pente $g + c < G + C$. On en déduit donc que $\sigma_1^*(x) = 1$ pour $x \in [z_0, 1]$. Or, par définition de z_0, E3 est indifférent entre entrer ou pas pour $z = z_0$. Ceci est impossible puisqu'une entreprise E3 se type z_0 serait sûr de gagner en entrant.

Le cas $y_0 = y_1 = \widehat{y}$ et $z_0 \neq z_1$ est donc impossible.

Cas $y_0 \neq y_1$ et $z_0 = z_1 = \widehat{z}$

On peut montrer en utilisant l'argument détaillé dans le cas ($y_0 \neq y_1$ et $z_0 \neq z_1$) que $\widehat{z}$ appartient à $[y_0, y_1]$ et que $\sigma_2^*(y) = 0$ pour y inférieur à $\widehat{z}$.

Pour x plus grand que y_1, $\pi_1\left(x, R, \sigma_2^*\right)$ est une fonction affine de pente $G + C$, tandis que $\pi_1\left(x, P, \sigma_3^*\right)$ est une fonction affine de pente $g + c < G + C$. Or en y_1^+, $\pi_1\left(y_1^+, R, \sigma_2^*\right) \geqslant \pi_1\left(y_1^+, P, \sigma_3^*\right)$ et on en déduit donc que $\sigma_1^*(x) = 1$ pour $x \in [y_1, 1]$.

Par définition de $\widehat{z}$, $\pi_3\left(\widehat{z}, E, \sigma_1^*\right) = 0 = g - \frac{g+c}{y_1 - I_1}(y_1 - \widehat{z})$ où $I_1 = \int_0^{y_0} \sigma_1^*(x)\, dx$. On obtient alors

$$\frac{y_1 - \widehat{z}}{y_1 - I_1} = \frac{g}{g + c}$$

Par définition de y_0 et y_1, E2 est indifférent entre entrer ou pas entre ces valeurs. On en déduit donc $\pi_2\left(y, E, \sigma_1^*\right) = 0 = G - \frac{G+C}{1 - y_1 + I_1}(1 - y_1)$ soit

$$C = C y_1 + G I_1$$

L'entreprise E1 est indifférente entre entrer ou pas en $x = y_0$. Or, $\pi_1\left(y_0, P, \sigma_3^*\right) = (g + c)\widehat{z} - c$ et $\pi_1\left(y_0, R, \sigma_2^*\right) = (G + C)\, y_1 - C - (G + C)\, I_2$ où $I_2 = \int_{\widehat{z}}^{y_1} \sigma_2^*(y)\, dy$. On obtient donc

$$(g + c)\widehat{z} - c = (G + C)\, y_1 - C - (G + C)\, I_2$$

Enfin, E1 est indifférente entre entrer ou pas en $x = y_1$. Et $\pi_1\left(y_1, P, \sigma_3^*\right) = \pi_1\left(y_1, R, \sigma_2^*\right)$ se réduit à

$$y_1 = \frac{C - c}{G - g + C - c}$$

La valeur de I_1 s'en déduit

$$I_1 = \frac{C}{G}\left(\frac{G-g}{G-g+C-c}\right)$$

Les valeurs de z et de I_2 s'en déduisent en utilisant les équations précédentes :

$$\widehat{z} = \frac{Gc\,(C-c) + gC\,(G-g)}{G\,(g+c)\,(G-g+C-c)},\ I_2 = \frac{g\,(gC-cG)}{G\,(G+C)\,(G-g+C-c)}$$

En revanche, la valeur de y_0 et de la fonction $\sigma_1^*(x)$ pour $x \in [0, y_0]$ ne peuvent pas être déterminées indépendamment l'une de l'autre. Elles sont liées par l'équation

$$I_1 = \int_0^{y_0} \sigma_1^*(x)\, dx$$

cette équation impose tout de même que $y_0 \geqslant I_1$ et donc que $\widehat{z} \geqslant I_1$.

De même, la fonction σ_2^* n'est pas totalement définie sur l'intervalle $]y_0, y_1[$, mais doit vérifier

$$I_2 = \int_{\widehat{z}}^{y_1} \sigma_2^*(y)\, dy$$

Il est facile de vérifier que $I_2 \geqslant 0$ et que $I_1 \leqslant \widehat{z} \leqslant y_1$ si et seulement si $\widetilde{x} \geqslant \widetilde{y}$.

Il existe donc un continuum d'équilibres, que l'on peut indicer par $y_0 \in [I_1, \widehat{z}]$, comme présenté dans l'énoncé de la proposition.