ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 73 – 2004

Soutenabilité des tarifications non linéaires

Philippe BERNARD*, Jérôme WITTWER**

RÉSUMÉ. – SHARKEY & SIBLEY [1993] ont démontré la soutenabilité de *tous* les optima redistributifs *dans un cadre de tarification binôme optionnel*. Les résultats présentés dans ce papier montrent que leurs conclusions ne sont pas toujours valides en tarification non linéaire. Après la présentation d'un exemple numérique illustrant ces résultats négatifs, on démontre leurs robustesses au relâchement de la définition de la soutenabilité utilisée par SHARKEY & SIBLEY.

Sustainability and non linear pricing

ABSTRACT. – In a partial equilibrium framework, SHARKEY and SIBLEY [1993] show paradoxally that all redistributive optimal two-part pricings are sustainable. They also suggest the extension of their main result to *non-linear* pricing. In this paper, it is shown that in fact their result doesn't extend generally to non-linear pricing. First, a numerical example yielding negative results is put forward, secondly, the robustness of this negative result to variations of equilibrium solutions is analyzed.

* Correspondance : Philippe BERNARD, EURIsCO, Université Paris Dauphine, 75 775 Paris cedex 16, tel : 01.44.05.42.94 , e-mail : bernard@dauphine.fr.
** Jérome WITTWER, EURIsCO-LEGOS.

1 Introduction

Il est désormais bien connu que la tarification des services publics (et para-publics) est un complément utile des outils fiscaux dès lors que les pouvoirs publics sont contraints par l'imperfection de l'information. Certains auteurs ont ainsi montré que la tarification pouvait être utilisée pour relâcher les contraintes d'incitation et donc renforcer l'efficacité redistributive de la fiscalité sur le revenu [1].

Cependant, si le planificateur peut souhaiter utiliser la tarification publique à des fins redistributives, il est aussi amené à ouvrir à la concurrence ces marchés par souci d'efficacité allocative. Cette ouverture ne contraint-elle pas totalement ou partiellement la poursuite de ces objectifs normatifs ? L'écrémage pratiqué par la concurrence n'oblige-t-elle pas les pouvoirs publics à abandonner les objectifs redistributifs de la tarification publique discriminante ?

Si la littérature sur la soutenabilité est vaste, les travaux s'intéressant à la soutenabilité des tarifications discriminantes sont moins nombreux. Le plus important d'entre eux est sans doute celui de SHARKEY & SIBLEY [6]. Leur cadre d'analyse est un cadre d'équilibre partiel où l'unique bien est produit par un monopole naturel à l'aide d'une technique à coût marginal non décroissant et à coût moyen décroissant. Les consommateurs sont dotés de fonctions d'utilité quasi-linéaires vérifiant la condition de croisement unique à la SPENCE-MIRLEES. Par ailleurs, le monopole naturel ainsi que ses concurrents potentiels pratiquent une tarification binôme optionnelle, c'est-à-dire proposent un menu de contrats spécifiant le prix de l'abonnement et le prix unitaire de consommation. Les auteurs démontrent alors, assez paradoxalement, que tous les optima redistributifs [2] sont soutenables.

Ils suggèrent également, sans développement, l'extension de ce résultat à la tarification *non-linéaire* :

> *« Our argument in theorem 6 applies equally well to the outlay-consumption model, and therefore extends the sustainability result in that model to the case of non decreasing marginal costs. » (SHARKEY & SIBLEY [6], p. 222)*

L'objectif de ce papier est de réexaminer cette conjecture et plus précisément d'en cerner le domaine de validité. En effet, nous le verrons, les résultats de SHARKEY & SIBLEY ne s'étendent pas à la tarification non-linéaire aussi simplement que semblent le suggérer les auteurs. Cette difficulté est la contrepartie de la plus grande capacité redistributive de la tarification non linéaire.

1. Voir [2] ou EDWARDS *et alii.* [3] et NAVA *et alii.* [5] pour des papiers s'intéressant plus largement aux effets redistributifs de la taxation des biens.
2. Les auteurs distinguent la classe des optima redistributifs définie comme la classe des tarifications optimales obtenues en maximisant une fonction d'utilité linéaire dont les poids sont strictement ordonnés au bénéfice des demandes les plus faibles.

Le plan du papier est le suivant. Après avoir défini le cadre d'analyse, la seconde section analyse le problème de la soutenabilité. Dans la section suivante, une simulation numérique illustre l'exigence des conditions de soutenabilité. Dans la quatrième section, la robustesse des résultats de la deuxième section est étudiée en affaiblissant la notion de soutenabilité grâce à deux notions d'équilibre étudiées dans la littérature sur la concurrence en contrats en économie de l'assurance (WILSON [9] et KAHN & MOOKHERJEE [4]). Enfin, en conclusion, nous comparons ces résultats à ceux de SHARKEY & SIBLEY.

2 Le cadre d'analyse

Le cadre est celui de SHARKEY & SIBLEY [6]. La population I comprend N agents, $i = 1,...,N$ qui diffèrent notamment par leurs préférences [3]. Celles-ci sont représentées par des fonctions d'utilités quasi-linéaires :

(1) $$U_i(q,v) = V_i(q) - v,\ i = 1,...,N$$

où q est la quantité consommée du bien, v son coût. Pour chaque i, la fonction V_i est strictement concave :

(2) $$V_i'(q) > 0,\ V_i''(q) < 0$$

et vérifie, sans perte de généralité :

(3) $$V_i(0) = 0$$

Les individus sont supposés différer les uns des autres par leurs dispositions marginales à payer. L'utilité marginale est plus précisément supposée fonction décroissante de l'indice :

(4) $$V_i'(q) > V_{i+1}'(q)$$

Cette propriété de monotonicité assure la vérification, dans notre cadre quasi-linéaire, de la condition (à la SPENCE-MIRRLESS) de croisement unique des courbes d'indifférence.

Le bien de consommation est produit à l'aide d'une technique de production résumée par la fonction de coût suivante :

(5) $$C(Q) = F + c.Q,\ c,F > 0$$

3. On pourrait sans difficulté étendre les résultats de cette étude au cas où les indices représentent des types de consommateur, chaque type pouvant être représenté par un nombre fini quelconque d'agents.

où Q est la quantité produite, c est le coût marginal (constant), F le coût fixe [4]. Cette technique est commune au monopole en place et aux entrants potentiels.

L'entreprise en place, le « monopole », pratique une tarification non linéaire et propose donc aux consommateurs un menu de contrats. Par application du principe de révélation, le menu de contrats est de la forme : $(v_i, q_i)_{i=1}^{N}$, où (v_i, q_i) est le lot proposé à l'agent i, q_i étant sa quantité, v_i son prix [5] – $q_i \geqslant 0$, $v_i \geqslant 0$. On peut noter que la tarification non linéaire autorise des *contrats subventionnés* au sens de la définition suivante :

DÉFINITION 1 : *Le contrat (v_i, q_i) est dit* subventionné *si son paiement ne couvre pas le supplément de coût entraîné, i.e. :*

$$v_i < c.q_i \tag{6}$$

Cette subvention des contrats n'est possible que dans les limites imposées par le respect des contraintes du monopole. Celui-ci doit en effet à la fois équilibrer sa contrainte budgétaire :

$$\sum_{i=1}^{N} v_i \geqslant C\left(\sum_{i=1}^{N} q_i\right) \tag{7}$$

et offrir des contrats respectant les contraintes de participation :

$$V_i(q_i) - v_i \geqslant 0,\ i = 1,...,N \tag{8}$$

et d'incitation :

$$V_i(q_i) - v_i \geqslant V_i(q_j) - v_j,\ i,j = 1,...,N \tag{9}$$

Tout menu de contrats $(v_i, q_i)_{i=1}^{N}$ vérifiant les contraintes (7), (8), (9) est appelé un *menu possible*. Cette définition des menus possibles est généralisée à toute coalition, *i.e.* à tout sous-ensemble de I :

DÉFINITION 2 : *Pour toute coalition $C \subset I$, un menu de contrats $(q_i, v_i)_{i \in C}$ est possible pour C si :*

$$\sum_{i \in C} v_i \geqslant C\left(\sum_{i \in C} q_i\right) \tag{10}$$

$$V_i(q_i) - v_i \geqslant 0,\ i \in C \tag{11}$$

$$V_i(q_i) - v_i \geqslant V_i(q_j) - v_j,\ i,j \in C \tag{12}$$

4. Les coûts d'entrée et de sortie du marché sont donc supposés nuls.
5. Le prix étant entendu ici, et dans la suite du papier, comme le montant total payé par l'usager.

Enfin, le monopole en place est contrôlé par les pouvoirs publics. Son objectif, confondu avec celui du planificateur social, est de maximiser une fonction d'utilité collective linéaire :

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i . U_i \ (q_i, v_i) \ , \ 0 \leqslant \alpha_i < \infty$$

Son programme [6] s'écrit donc :

$$(15) \qquad \begin{cases} \max\limits_{((v_i,q_i))_{i=1}^{N}} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i . U_i \ (q_i, v_i) \\ \textit{sous les contraintes} : \\ (7), \ (8), \ (9) \end{cases}$$

Parmi l'ensemble de ces fonctions d'utilité collective, une classe intéressante pour l'analyse normative est celle vérifiant la restriction suivante :

$$(16) \qquad \alpha_i < \alpha_{i+1}, \forall i < N$$

Comme le poids d'un agent dans la fonction d'utilité collective est d'autant plus important que sa disposition marginale à payer est faible, le menu optimal de contrats obtenu sous la restriction (16) est qualifié de *redistributif*. Notre objectif est d'analyser la soutenabilité de ces optima et donc de nous interroger sur la compatibilité entre l'objectif normatif du planificateur social et la concurrence potentielle.

3 Soutenabilité et redistribution

Tout entrant dispose d'une technique de production similaire à celle du monopole (relation 5) et propose à l'ensemble des consommateurs un menu de contrats. S'il existe un sous-ensemble non vide J ($\subset I$) d'agents qui acceptent sa proposition et sélectionnent donc un élément du menu, on peut comprendre l'entrée d'une entreprise concurrente comme la constitution d'une coalition d'agents associée à un menu de contrats. Ainsi, on définit les déviations comme une coalition et un menu de contrats possible

6. Pour assurer qu'il existe une solution intérieure aux différents programmes, on supposera que :

$$(14) \qquad \lim_{q \to \infty} V_1^{'}(q) < c \text{ et } V_N^{'}(0) > c$$

et que le coût fixe est suffisamment faible.

DÉFINITION 3 : *Une déviation* $\left(J; \left(v_j^d, q_j^d\right)_{j \in J}\right)$ *est un sous-ensemble non vide d'agents* J ($\subset I$) *associé à un menu possible de contrats* $\left(v_i^d, q_i^d\right)_{i \in J}$.

Par définition d'un menu de contrats possible pour une coalition (définition 2 page 3), les contraintes d'incitation, de participation et budgétaire sont vérifiées à l'intérieur de la déviation. Pour être une réelle menace, une déviation doit naturellement être profitable à ses membres sans attirer les autres types. On dira donc à l'instar de SHARKEY & SIBLEY qu'un menu possible $(v_i, q_i)_{i=1}^N$ est soutenable s'il n'existe pas de telles déviations :

DÉFINITION 4 : *Une* déviation $\left(J; \left(v_j^d, q_j^d\right)_{j \in J}\right)$, *avec* $J \subset I$, *constitue un* blocage *du menu possible* $(v_i, q_i)_{i=1}^N$ *si elle est à la fois avantageuse pour ses membres :*

(17) $$\forall i \in J : V_i(q_i^d) - v_i^d > V_i(q_i) - v_i$$

et non infiltrable :

(18) $$\forall i \in I \backslash J : V_i(q_i) - v_i \geqslant V_i(q_j^d) - v_j^d, \forall\, j \in J$$

DÉFINITION 5 : *Un menu possible* $(v_i, q_i)_{i=1}^N$ *est soutenable au sens de* SHARKEY & SIBLEY *s'il n'existe pas de* blocage *de* $(v_i, q_i)_{i=1}^N$.

Comme le menu soutenable est un menu robuste aux déviations profitables unilatérales (des coalitions), cette notion de soutenabilité renvoie à l'équilibre de NASH (ou du noyau). En effet, les agents n'appartenant pas à la coalition sont supposés inertes et donc le problème de la viabilité budgétaire de leurs contrats est ignoré. En ce sens, elle est une solution forte comme la littérature sur la concurrence en contrats initiée par ROTHSCHILD & STIGLITZ l'a amplement montrée. Aussi, nous sommes conduits à nous interroger sur la vacuité de cette solution.

Une propriété essentielle pour discuter de cette question est la structure consécutive de l'ensemble des agents subventionnés : en effet, pour tout menu optimal redistributif $\left(v_i^*, q_i^*\right)_{i=1}^N$, si le contrat $\left(v_i^*, q_i^*\right)$ est subventionné, alors tous les contrats d'indices supérieurs le sont également [7] :

(19) $$c.q_i^* > v_i^* \Rightarrow \forall j > i : c.q_j^* > v_j^*$$

7. Pour la démonstration, voir l'annexe (propriété 3, page 19).

Comme le montre la démonstration de la proposition suivante, cette propriété de diffusion du subventionnement permet de mettre en évidence l'existence de blocage aux menus de contrats optimaux :

PROPOSITION 1 : *Tout menu optimal redistributif* $\left(v_i^*, q_i^*\right)_{i=1}^{N}$ *dont au moins un contrat est subventionné n'est pas soutenable au sens de* SHARKEY & SIBLEY.

PREUVE : Soit $(q_i, v_i)_{i=1}^N$ un tel menu. La propriété 2 (en annexe) nous assure que, pour tout optimum redistributif, les contraintes d'incitation montantes sont serrées :

$$\forall i = 1,...,N-1 : V_i\left(q_i^*\right) - v_i^* = V_i\left(q_{i+1}^*\right) - v_{i+1}^*$$

Par hypothèse, il existe au moins un contrat subventionné mais le respect de la contrainte budgétaire rend impossible que tous les agents le soient. Si s^* est l'indice du dernier contrat participant au financement du coût fixe, la propriété de diffusion des subventions (propriété 3 en annexe) nous assure que :

(20) $$\forall i > s^* : c.q_i^* \geqslant v_i^*;\ \forall i \leqslant s^* : c.q_i^* < v_i^*$$

On propose alors la déviation $\left(J; \left(v_i^d, q_i^d\right)_{i \in J}\right)$, la coalition J étant définie par l'ensemble des agents participant au financement du coût fixe :

(21) $$J = \left\{1,...,s^*\right\}$$

les quantités des anciens contrats étant conservées :

(22) $$\forall i \in J : q_i^d = q_i^*$$

Compte tenu de la relation (20), la contrainte budgétaire de la coalition J est lâche :

$$\sum_{i \in J} v_i > F + c.\sum_{i \in J} q_i^d$$

Par conséquent, il existe $\eta_1 > 0$ tel que toute diminution uniforme η des prix des contrats inférieure à η_1 vérifie toujours cette contrainte budgétaire. On définit alors les prix des nouveaux contrats proposés de la manière suivante :

(23) $$\forall i \in J : v_i^d = v_i - \eta,\ 0 < \eta < \eta_1$$

Comme la baisse des prix est uniforme, la quasi-linéarité des fonctions d'utilité assurent que les contraintes d'incitation demeurent vérifiées. Par conséquent, tout menu $\left(v_i^d,q_i^d\right)_{i\in J}$ ainsi obtenu est un menu *possible* pour la coalition J. Assurons-nous maintenant que l'on peut proposer une déviation non infiltrable.

Comme le contrat s^*, à la différence du contrat s^*+1, participe au financement du coût fixe, ces deux contrats sont différents :

$$\frac{v_{s^*}^*}{q_{s^*}^*} > c \geqslant \frac{v_{s^*+1}^*}{q_{s^*+1}^*} \Rightarrow \left(v_{s^*}^*,q_{s^*}^*\right) \neq \left(v_{s^*+1}^*,q_{s^*+1}^*\right)$$

Le respect des contraintes d'incitation impose alors nécessairement que [8] :

$$q_{s^*}^* > q_{s^*+1}^*,\ v_{s^*}^* > v_{s^*+1}^*$$

Pour des contrats différents, la contrainte d'incitation montante de l'agent s^* et la contrainte d'incitation descendante de l'agent s^*+1 ne peuvent être simultanément serrées. Par conséquent :

(24) $$V_{s^*+1}\left(q_{s^*+1}^*\right) - v_{s^*+1}^* > V_{s^*+1}\left(q_{s^*}^*\right) - v_{s^*}^*$$

Comme les quantités sont ordonnées en raison des contraintes d'incitation :

$$q_1^* \geqslant q_2^* \geqslant \ldots \geqslant q_{N-1}^* \geqslant q_N^*$$

l'inéquation (24) combinée à la propriété de monotonicité stricte des dispositions marginales à payer (éq. (4)) assure que nécessairement :

$$\forall i > s^*,\ \forall j \leqslant s^* : V_i\left(q_i^*\right) - v_i^* > V_i\left(q_j^*\right) - v_j^*$$

Par conséquent, toutes choses égales par ailleurs, il existe $\eta_2 > 0$ pour lequel toute réduction de prix η inférieure à η_2 n'attire aucun agent subventionné :

$$\begin{aligned} \exists\eta_2 &> 0\ \ t.q.\ \ \forall\eta \in \left]0,\eta_2\right[: \\ \forall i &> s^*,\ \forall j \leqslant s^* : V_i\left(q_i^*\right) - v_i^* > V_i\left(q_j^*\right) - \left(v_j^* - \eta\right) \end{aligned}$$

Par conséquent, si les prix de la déviation vérifient :

(25) $$\forall i \in J : v_i^d = v_i - \eta,\ 0 < \eta < \inf\{\eta_1,\eta_2\}$$

alors la déviation $\left(J;\left(v_i^d,q_i^d\right)_{i\in J}\right)$ vérifiant (21), (22), (23) est un blocage du menu optimal redistributif $\left(v_i^*,q_i^*\right)_{i\in I}$. ■

8. Voir en annexe la propriété 1 (page 17).

Ce résultat est très largement la conséquence de la structure consécutive des contrats subventionnés. En effet, une contrainte forte limitant les déviations profitables est l'infiltration (rel. (18) de la définition 3). Lorsque la coalition déviante est très éclatée, il est alors nécessaire de vérifier que tout agent entrant dans la coalition de blocage ne va pas y attirer les agents dont les dispositions marginales sont très proches des siennes. Les contraintes à vérifier peuvent alors être à la fois nombreuses et très contraignantes. La structure consécutive des agents subventionnés permet de relâcher très largement ce type de contrainte : il suffit en effet de vérifier que le premier agent subventionné ne soit pas attiré.

Pour illustrer l'importance du problème posé par les contrats subventionnés, un exemple numérique est maintenant proposé.

4 Exemple numérique

On considère une économie à trois agents $i = 1,2,3$ dont les fonctions d'utilité quasi-linéaires sont ordonnées :

$$V_i(q) = \gamma_i (q)^{1-\frac{1}{e}}$$

La fonction de coût du monopole est :

$$C(Q) = c.Q + F$$

Le programme redistributif du planificateur est d'après les résultats précédents :

$$\begin{cases} \max \alpha_1 S_1(q_1,v_1) + \alpha_2 S_2(q_2,v_2) + \alpha_3 S_3(q_3,v_3) \\ s.c.: \\ UIC_1 : V_1(q_1) - v_1 \geqslant V_1(q_2) - v_2 \\ DIC_2 : V_2(q_2) - v_2 \geqslant V_2(q_1) - v_1 \\ UIC_2 : V_2(q_2) - v_2 \geqslant V_2(q_3) - v_3 \\ DIC_3 : V_3(q_3) - v_3 \geqslant V_3(q_2) - v_2 \\ c.(q_1 + q_2 + q_3) + F \leqslant v_1 + v_2 + v_3 \end{cases}$$

où :

$$S_i(q_j,v_j) := V_i(q_j) - v_j$$

UIC_i et DIC_i sont les contraintes d'incitation montante et descendante de l'agent i.

Étant assurés, d'après ce qui précède, que les contraintes d'incitation montantes UIC_1 et UIC_2 sont serrées ainsi que la contrainte budgétaire, nous pouvons substituer ces contraintes dans la fonction objectif. Celle-ci s'écrit alors uniquement en fonction des quantités :

$$
\begin{aligned}
W\left(q_1,q_2,q_3\right) = {} & \gamma_1\left(q_1\right)^{1-\frac{1}{e}} \\
& + \left[3\left(\alpha_2+\alpha_3\right)-1\right]\gamma_2\left(q_2\right)^{1-\frac{1}{e}} \\
& + 3\alpha_3\gamma_3\left(q_3\right)^{1-\frac{1}{e}} + \left[2-3\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\right] \\
& \gamma_1\left(q_2\right)^{1-\frac{1}{e}} + \left[1-3\alpha_3\right]\gamma_2\left(q_3\right)^{1-\frac{1}{e}} \\
& - \left[F+c\left(q_1+q_2+q_3\right)\right]
\end{aligned}
$$

Si les contraintes descendantes sont lâches, alors l'optimum redistributif est déterminé par les conditions de premier ordre de la maximisation libre de W. Après calcul, les quantités optimales sont les suivantes :

$$q_1 = \left(\gamma_1\right)^e \left(\frac{e-1}{ce}\right)^{-e}$$

$$q_2 = \left(\frac{e-1}{ce}\right)^e \left(3\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\left(\gamma_2-\gamma_1\right)-\gamma_2+2\gamma_1\right)^e$$

$$q_3 = \left(\frac{e-1}{ce}\right)^e \left(3\alpha_3\gamma_3+\left[1-3\alpha_3\right]\gamma_2\right)^e$$

Ces quantités ne sont pertinentes que dans la mesure où les contraintes d'incitation descendantes sont vérifiées. Lorsque la contrainte UIC_1 est serrée, la contrainte DIC_2 le sera uniquement si $q_1 \geqslant q_2$. Or, on vérifie que pour les pondérations redistributives, cette condition est toujours vérifiée [9]. De même, la contrainte DIC_3 sera vérifiée uniquement si $q_2 \geqslant q_3$. Après calcul, ceci est équivalent à vérifier que :

$$\alpha_3 \leqslant \frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_3+\gamma_1-2\gamma_2}\left[\frac{2}{3}-\alpha_2\right]$$

Pour les pondérations ne vérifiant pas cette inégalité, le programme du planificateur se réécrit de la manière suivante :

$$
\begin{cases}
\max W\left(q_1,q_2,q_3\right) \\
s.c.: \\
q_3 = q_2
\end{cases}
$$

Les conditions de premier ordre sont donc désormais :

$$\frac{\partial}{\partial q_1}W = 0,\ \frac{\partial}{\partial q_2}W + \frac{\partial}{\partial q_3}W = 0$$

9. En effet :

$$
\begin{aligned}
q_1 & \geqslant q_2 \Leftrightarrow \gamma_1 \geqslant 3\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\left(\gamma_2-\gamma_1\right)-\gamma_2+2\gamma_1 \\
-\gamma_2+\gamma_1 & \leqslant 3\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\left(\gamma_1-\gamma_2\right) \\
1 & \leqslant 3\left(\alpha_2+\alpha_3\right)
\end{aligned}
$$

Cette dernière inégalité est alors vérifiée car, comme $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$, $\alpha_1 < \frac{1}{3}$ et donc $\alpha_2+\alpha_3 > \frac{2}{3}$.

ce qui conduit aux valeurs optimales suivantes pour les contrats 2 et 3 :

$$
\begin{aligned}
q_1 &= (\gamma_1)^e \left(\frac{e-1}{ce}\right)^{-e} \\
q_2 &= q_3 = \left(\frac{e-1}{2ce}\right)^{e} (2\gamma_1 - 3[\gamma_1-\gamma_2]\alpha_2 - 3[\gamma_1-\gamma_3]\alpha_3)^e
\end{aligned}
$$

Pour les valeurs numériques suivantes :

$$\gamma_1 = 42,\ \gamma_2 = 28,\ \gamma_3 = 23,\ e = 2,\ c = 1,\ F = 60$$

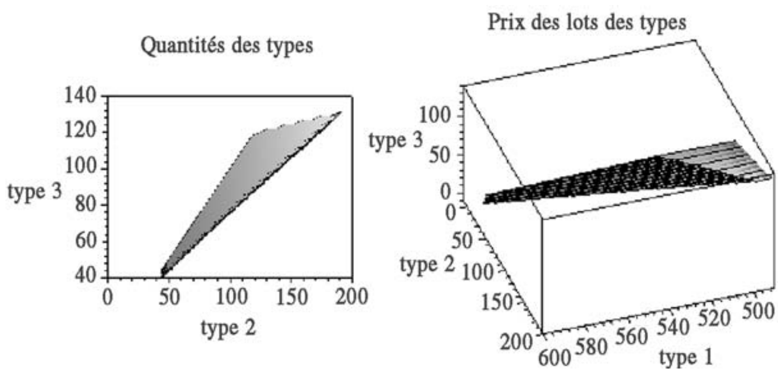
les résultats obtenus sur les quantités et les prix en décrivant l'ensemble des valeurs possibles des poids, sous la restriction $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$, sont reproduits sur le graphique 1 [10]. En dépit des contraintes d'incitation et de la présence de contrats mélangeants pour les agents 2 et 3 (graphique 1), la tarification non-linéaire donne manifestement une certaine latitude dans la redistribution du surplus.

Le graphique le plus intéressant pour notre propos est le graphique 2 sur lequel sont représentés les couples (α_2, α_3) pour lesquels certains des contrats optimaux sont subventionnés. Comme les paramètres possibles pour les optima redistributifs vérifient les contraintes suivantes :

$$\alpha_3 < 1 - \alpha_2,\ \alpha_3 > \alpha_2 \ et\ \alpha_3 > 1 - 2\alpha_2$$

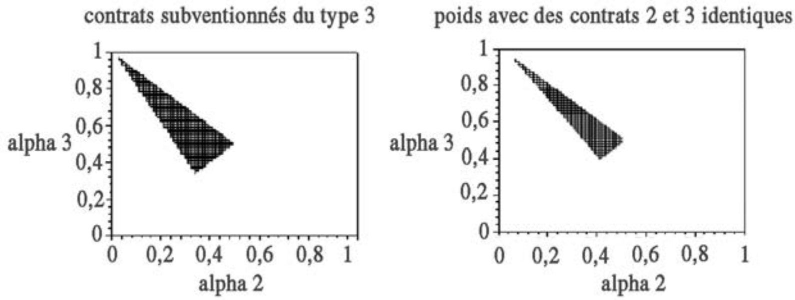
on peut vérifier que tous les *optima redistributifs de cet exemple numérique comprennent des contrats subventionnés et sont donc non soutenables*. Il semble donc que le problème de la soutenabilité des optima redistributifs ne soit pas nécessairement négligeable.

GRAPHIQUE 1
Quantités et prix des contrats optimaux



10. La quantité q_1 est bien sûr invariante aux poids α_i et égale à 441.

GRAPHIQUE 2
Poids (α_2,α_3) ***donnant des contrats subventionnés***



Néanmoins, comme nous l'avons noté, la notion de soutenabilité est une notion forte. Les solutions plus faibles de la littérature sur la concurrence en contrat (WILSON, KAHN & MOOKHERJEE) peuvent constituer un affaiblissement raisonnable de la notion de soutenabilité à la SHARKEY & SIBLEY.

5 Robustesse

La notion de soutenabilité à la SHARKEY & SIBLEY est, comme nous l'avons dit, inspirée de la notion d'équilibre de NASH. Comme le montre la littérature des contrats, cet équilibre est très exigeant.

Lorsqu'une déviation bloquante se forme, les agents exclus sont supposés conserver leurs contrats initiaux que ceux-ci demeurent ou non profitables. Il semble pourtant naturel d'exiger que les contrats des types non déviants demeurent, pour le monopole contesté, financièrement viables. Cette exigence qui affaiblit la notion d'équilibre est, dans le cadre de l'assurance, celle proposée par WILSON [8]. Pour des raisons très analogues, on peut démontrer que dans le contexte de la tarification non linéaire cet affaiblissement ne suffit à rendre soutenable tous les menus optimaux redistributifs [11].

Une autre manière d'affaiblir la notion de soutenabilité est de prendre en compte les réactions des membres de la coalition : en effet, lorsqu'une déviation se forme, rien ne garantit que pour une partie de la coalition déviante il n'existe pas une déviation ultérieure encore plus avantageuse pour elle. Ainsi,

11. Voir notre document de travail [1].

dans le blocage de la proposition 1, il est possible que certains des nouveaux contrats soient subventionnés. Si tel est le cas, en adaptant les arguments de la démonstration de la proposition 1, une sous-déviation réalisée par une partie de la coalition déviante J est alors réalisable. La crédibilité du blocage proposé est donc remise en cause. Il est souhaitable d'amender la notion de soutenabilité en imposant une stabilité interne aux déviations bloquantes.

Dans la théorie de l'assurance, KAHN & MOOKHERJEE [4] ont proposé une telle solution. Pour l'appliquer à notre cadre, introduisons la notion de *blocage robuste* :

DÉFINITION 6 : $\left(J; \left(v_j^d, q_j^d\right)_{j \in J}\right)$ *est un* blocage robuste *du menu possible* $(v_i, q_i)_{i=1}^N$ *si :*

(i) $\left(J; \left(v_j^d, q_j^d\right)_{j \in J}\right)$ *est un* blocage *du menu possible* $(v_i, q_i)_{i=1}^N$ *;*

(ii) il n'existe aucun blocage $\left(K; \left(v_j^{sd}, q_j^{sd}\right)_{j \in K}\right)$ *du menu*

$((v_i, q_i)_{i \in I \setminus J}, (v_j^d, q_j^d)_{j \in J})$*, avec* $K \subset J$.

DÉFINITION 7 : *Un menu possible* $(v_i, q_i)_{i=1}^N$ *est soutenable* au sens de KAHN & MOOKHERJEE *s'il n'existe aucun blocage robuste* $\left(J; \left(v_j^d, q_j^d\right)_{j \in J}\right)$.

En dépit du relâchement de la notion d'équilibre, le résultat de non-existence demeure si l'on introduit l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 1 : Pour tout optimum redistributif $\left(q_i^*, v_i^*\right)$, $\forall k \in \left\{1, \ldots, s^*\right\}$:

$$\sum_{i=1}^{k} v_i^* \neq C\left(\sum_{i=1}^{k} q_i^*\right)$$

Le nombre d'agents étant fini, l'ensemble des caractéristiques étant quelconque, cette hypothèse sera « génériquement » vérifiée [12].

12. Comme tous les agents $1, \ldots, s^*$ contribuent au financement du coût fixe et que le profit $\sum_{i=1}^{s^*} v_i^* - C\left(\sum_{i=1}^{s^*} q_i^*\right) > 0$, il existe au plus un agent j $(< s^*)$ pour lequel $\sum_{i=1}^{j} v_i^*$ $-C\left(\sum_{i=1}^{j} q_i^*\right) = 0$. On peut conjecturer que toute perturbation des fonctions d'utilité élimine ce cas.

PROPOSITION 2 : *Sous l'hypothèse 1, aucun menu optimal redistributif* $(v_i^*, q_i^*)_{i=1}^N$ *comprenant des contrats subventionnés n'est soutenable au sens de K-M.*

PREUVE : La démonstration sélectionne dans un premier temps une *plus petite* coalition bloquante possible et montre dans un deuxième temps, par contradiction, que certaines des déviations construites pour cette coalition sont nécessairement robustes.

(1) En se limitant aux agents appartenant à $\{1,...,s^*\}$, on détermine l'ensemble Ψ des coalitions pour lesquelles il existe un menu possible, robuste aux infiltrations, dégageant un profit *strictement* positif et offrant un niveau d'utilité supérieur ou égal au niveau u_i^* atteint à l'optimum ; une coalition K appartenant à ce groupe est une coalition pour laquelle la valeur du programme suivant :

$$P_M(K) : \begin{cases} \max\limits_{(q_i, v_i)_{i\in K}} \sum_{i\in K} v_i - C\left(\sum_i q_i\right) \\ t.q. : \\ V_i(q_i) - v_i \geqslant u_i^* \\ V_i(q_i) - v_i \geqslant V_i\left(q_j\right) - v_j, \ \forall i, j \in K \\ V_i\left(q_i^*\right) - v_i^* \geqslant V_i\left(q_j\right) - v_j, \ \forall i \in I\backslash K, \forall j \in K \end{cases}$$

est *strictement* positive.

Une propriété élémentaire de ce programme est qu'une de ses solutions est définie par les contrats optimaux. En effet, si $\left(q_i^*, v_i^*\right)_{i\in K}$ n'était pas une solution du programme $P_M(K)$, alors les solutions $(q_i, v_i)_{i\in K}$ de $P_M(K)$ dégageraient un surplus budgétaire strictement plus élevé que $\left(q_i^*, v_i^*\right)_{i\in K}$ tout en assurant aux agents de K une utilité supérieure ou égale à leur niveau optimal u_i^*. Par conséquent, si l'on complète le menu $\left(q_i^*, v_i^*\right)_{i\in I\backslash K}$ par $(q_i, v_i)_{i\in K}$, on obtiendrait un menu possible pour l'ensemble des agents qui dégagerait un surplus budgétaire strictement positif. Par une répartition uniforme de ce surplus, on serait donc capable d'augmenter le surplus de tous les agents tout en conservant les contraintes d'incitation. Ceci contredirait donc l'optimalité de $\left(q_i^*, v_i^*\right)_{i\in I}$.

Pour déterminer les coalitions appartenant à Ψ, il suffit donc de déterminer les coalitions K dont le menu optimal $\left(q_i^*, v_i^*\right)_{i\in K}$ dégage un profit strictement positif, *i.e.* :

$$\sum_{i\in K} v_i^* > C\left(\sum_{i\in K} q_i^*\right)$$

Par définition de s^*, on sait que Ψ est non-vide car, pour la coalition $\{1,...,s^*\}$, le menu $\left(q_i^*, v_i^*\right)_{i=1,...,s^*}$ vérifie cette condition.

(2) Parmi les éléments de Ψ, on s'intéresse aux coalitions comprenant le moins d'agents possible. Si la taille minimale est n la coalition $\{1,...,n\}$ est

une de ces plus petites coalitions. En effet, lorsque les quantités sont ordonnées et les contraintes d'incitation montantes sont serrées, alors le prix moyen est nécessairement décroissant :

$$\frac{v_i^*}{q_i^*} \geqslant \frac{v_{i+1}^*}{q_{i+1}^*}$$

avec une inégalité stricte si les contrats sont distincts ; à taille donnée de la coalition, le profit dégagé sera donc d'autant plus élevé que les agents ont une forte demande. Par conséquent, si la taille minimale est n, le profit dégagé par la coalition $\{1,...,n\}$ sera supérieur au profit de toute coalition de même taille ; on peut donc toujours sélectionner comme plus petite coalition une coalition consécutive comprenant le type 1 que l'on notera C.

(3) Le menu optimal $\left(q_i^*, v_i^*\right)_{i \in C}$ associé à la coalition C assure un profit strictement positif :

$$\sum_{i \in C} v_i^* > C\left(\sum_{i \in C} q_i^*\right)$$

Pour les membres de C, on construit alors un menu *possible*, robuste aux infiltrations, assurant à chacun de ses membres une utilité *strictement* supérieure à u_i^*.

(3-i) Si le contrat du dernier agent de C, que l'on note c, est différent du contrat du premier agent du complémentaire :

$$\left(q_c^*, v_c^*\right) \neq \left(q_{c+1}^*, v_{c+1}^*\right)$$

alors les contraintes d'infiltration sont lâches (voir plus haut) :

$$\forall i \in I \backslash C, \forall j \in C : V_i\left(q_i^*\right) - v_i^* > V_i\left(q_j^*\right) - v_j^*$$

On peut alors construire une déviation par rapport au menu optimal en redistribuant uniformément une partie du profit aux agents de C. Autrement dit, il existe $\overline{\eta} > 0$ tel que pour $\forall \eta \in]0, \overline{\eta}[$ le menu $\left(q_i^*, v_i^* - \eta\right)_{i \in C}$ soit possible, robuste à l'infiltration et améliore strictement l'utilité de chaque membre de C. En conséquence, la déviation $D(\eta) := \left(C; \left(q_i^*, v_i^* - \eta\right)_{i \in C}\right)$ constitue un blocage du menu optimal.

(3-ii) Si le contrat de l'agent c est identique à celui de $c+1$:

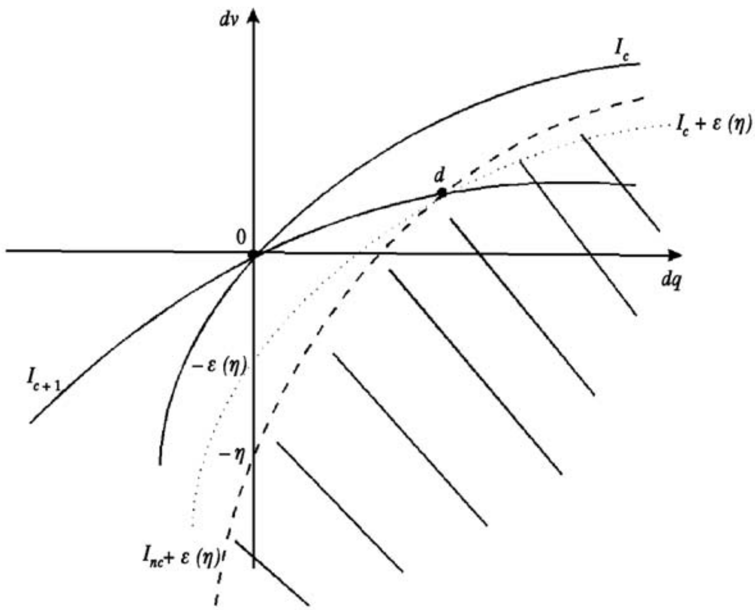
$$\left(q_c^*, v_c^*\right) = \left(q_{c+1}^*, v_{c+1}^*\right)$$

la contrainte d'infiltration est serrée :

$$V_{c+1}\left(q_{c+1}^*\right) - v_{c+1}^* = V_{c+1}\left(q_c^*\right) - v_c^*$$

Pour construire un blocage du menu optimal, il est alors nécessaire de modifier les quantités et les prix du menu de la coalition C pour augmenter l'utilité des membres de C tout en empêchant l'infiltration. Pour ce faire on distingue parmi les membres de C ceux dont les contrats sont différents de celui de c (s'ils existent), *i.e*. le sous-ensemble $\{1,...,nc\}$. À ces agents, on propose alors une baisse uniforme η du prix de leurs contrats préservant les contraintes d'incitation et suffisamment faible pour n'attirer aucun des autres agents. Cette baisse du prix assure que ces agents préfèrent désormais strictement leurs contrats au contrat de l'agent c. Ceci assure que l'ensemble B_η :

FIGURE 3
L'ajustement des contrats dans le cas où les contrats des agents c et $c+1$ sont identiques



$$B_\eta = \left\{(dq,dv) \in \Re_+^2 : u_{nc}^* + \eta \geqslant V_{nc}\left(q_c^* + dq\right) - \left(v_c^* + dv\right)\right\}$$

est non vide. Sur la figure 3, B_η correspond à la zone non hachurée située au dessus de $I_{nc} + \eta$, la courbe d'indifférence de l'agent nc après mise en place du rabais uniforme η. Avec la propriété de croisement unique à la SPENCE-MIRRLEES, on constate sur le graphique qu'il existe dans B_η une zone comprise entre I_c et I_{c+1} dans laquelle augmente l'utilité de l'agent c sans attirer l'agent $c+1$ [13]. Ainsi, on peut sélectionner l'ajustement correspondant au point d [14], c'est-à-dire à l'intersection de I_{c+1} et $I_{nc} + \eta$, qui définit de nouveaux contrats $(q_i(\eta), v_i(\eta))$, $i = nc+1,...,c$. À cet ajustement correspond un accroissement du surplus de l'agent c, noté $\varepsilon(\eta)$ [15].

Par ailleurs, on peut toujours trouver une valeur $\overline{\eta}$ suffisamment faible telle que, pour tout $\eta \in]0,\overline{\eta}[$, la contrainte budgétaire demeure satisfaite.

13. I_c et I_{c+1} sont les courbes d'indifférence des agents c et $c+1$ définis par les contrats optimaux.

14. Pour η suffisamment petit, l'existence de d est assuré.

15. Evidemment, le surplus des agents $nc+1,...,c-1$ s'accroît de plus de $\varepsilon(\eta)$.

$\forall \eta \in]0,\overline{\eta}[$, il existe donc un menu $(q_i(\eta), v_i(\eta))_{i\in C}$ possible, non infiltrable, qui augmente l'utilité de tous les agents de la coalition. On note alors $D(\eta) := \left(C; (q_i(\eta), v_i(\eta))_{i\in C}\right)$ le blocage du menu optimal.

(4) Montrons maintenant par contradiction que l'on peut trouver un $\eta > 0$ telle que $D(\eta)$ soit une déviation bloquante robuste.
Supposons donc que pour tout $\eta \in]0,\overline{\eta}[$ il existe une une sous-déviation interne bloquant $D(\eta)$; notons-les $SD(\eta) = \left(SC(\eta); \left(q_i^{sd}(\eta), v_i^{sd}(\eta)\right)_{i\in SC(\eta)}\right)$, $SC(\eta) \subset C$. Nécessairement, comme il existe un nombre fini de coalition, une coalition SC apparaît une infinité de fois. On extrait alors la sous-suite correspondante : $SD(\eta_q) = \left(SC; \left(q_i^{sd}(\eta_q), v_i^{sd}(\eta_q)\right)\right)$. Il est possible d'extraire une sous-suite de menus convergeante [16] :

$$\left(q_i^{sd}(\eta_{q_n}), v_i^{sd}(\eta_{q_n})\right)_{i\in SC} \to \left(q_i^{sd}, v_i^{sd}\right)_{i\in SC}, \text{ si } \eta_{q_n} \to 0$$

Par continuité, la sous-déviation $SD = \left(SC; \left(q_i^{sd}, v_i^{sd}\right)_{i\in SC}\right)$ vérifie la contrainte budgétaire ainsi que les contraintes d'incitation et d'infiltration (par rapport au menu optimal) et offre un niveau d'utilité supérieur ou égal à u_i^*.

(5) Comme pour la coalition SC, le menu $(q_i^*, v_i^*)_{i\in SC}$ est solution du programme $P_M(K)$, si $\left(q_i^{sd}, v_i^{sd}\right)$ dégage un profit positif ou nul, alors le profit obtenu avec $(q_i^*, v_i^*)_{i\in SC}$ est également positif ou nul (en utilisant l'argument utilisé au point (1)). Comme l'économie vérifie l'hypothèse 1, on a donc :

$$\sum_{i\in SC} v_i^* > C\left(\sum_{i\in SC} q_i^*\right)$$

Ceci contredit la minimalité de D. ■

Finalement la concurrence potentielle rend improbable la concrétisation des optima redistributifs comprenant des agents subventionnés puisque les affaiblissements de la notion d'équilibre proposés par WILSON et KAHN & MOOKHERJEE ne suffisent pas à rendre soutenables ces optima. On note ici une différence avec la concurrence en contrats en économie de l'assurance : dans le cadre standard de ROTSCHILD & STIGLITZ (SPENCE [7]), les équilibres à la WILSON sont en effet compatibles avec la subvention de certains agents. Cette différence avec notre cadre d'économie industrielle a notamment pour raison l'existence d'un coût fixe qui rend budgétairement non viable la coalition non déviante. En revanche, cet argument n'est pas pertinent pour l'équilibre à la KAHN-MOOKHERJEE qui repose sur la stabilité interne de la coalition déviante. Et de fait, en économie de l'assurance, par construction (KAHN-MOOKHERJEE [4]), les déviations stables éliminent également toute subvention.

16. Car l'ensemble des menus possibles et non infiltrables est un compact.

6 Conclusion

SHARKEY & SIBLEY [1993] ont, rappelons-le, démontré la soutenabilité de *tous* les optima redistributifs dans un cadre de tarification binôme optionnel. Les résultats présentés plus haut démontrent qu'en tarification non linéaire certains optima redistributifs, voire tous, ne sont pas soutenables. Cette divergence ne doit pas surprendre : en effet, en tarification binôme optionnel, les contraintes d'incitation imposent des prix unitaires supérieurs au coût marginal, ce qui interdit naturellement toute subvention. On pourrait d'ailleurs montrer en adaptant les arguments de SHARKEY & SIBLEY (preuve du théorème 5, page 221, de [6]) à la tarification non linéaire qu'en l'absence de subvention tout menu optimal redistributif est soutenable au sens de la définition 5. La possibilité ou non d'obtenir des contrats optimaux subventionnés est donc crucial pour l'étude de la soutenabilité des tarifications discriminantes. Comme l'illustre notre exemple numérique, la tarification non linéaire est suffisamment puissante pour autoriser un subventionnement quelque soit le degré de redistribution imposé par le planificateur. La contrepartie de cette efficacité redistributive est une instabilité des tarifications optimales en situation de concurrence potentielle.

Alors que le résultat *séduisant* de SHARKEY & SIBLEY laisse imaginer que les objectifs redistributifs et allocatifs sont compatibles sans régulation, les résultats présentés ici tendent au contraire à remettre la cause la possibilité de concilier ces deux objectifs sans régulation. Plus précisément, il pourrait être utile dans certains cas, pour assurer la soutenabilité des tarifications redistributives, d'imposer des contraintes sur les menus offerts, tant sur les quantités que sur les prix. ▼

• Références

[1] BERNARD Ph., WITTWER J. (2000). – Soutenabilité des tarifications non linéaires, Document de travail, EURIsCO, juillet 2000.

[2] BOADWAY R., MARCHAND M. (1995). – The use of public expenditures for redistributive purposes, *Oxford Economic Papers*, 47, p. 45-59, 1995.

[3] EDWARDS J., KEEN M., TUOMALA M. (1994). – Income tax, commodity taxes and public good provision: A brief guide. *Finanzarchiv*, 51, p. 472-97, 1994.

[4] KAHN C., MOOKHERJEE D. (1995). – Coalition-proof equilibrium in an adverse selection insurance economy, *Journal of Economic Theory*, 66, p. 113-38, 1995.

[5] NAVA M., SCHROYEN F., MARCHAND M. (1996). – Optimal fiscal and public expenditure policy in a two-class economy, *Journal of Public Economics*, 61, p. 119-37, 1996.

[6] SHARKEY W., SIBLEY D. (1993). – Optimal non-linear pricing with regulatory preference over customer type, *Journal of Public Economics*, 50, p. 197-229, 1993.

[7] SPENCE M. (1978). – Product differentiation and performance in insurance markets, *Journal of Public Economics*, 10, p. 427-47, 1978.

[8] WILSON C. (1977). – A model of insurance markets with incomplete information, *Journal of Economic Theory*, 16, p. 167-207, 1977.

[9] WILSON C. (1980). – The nature of equilibrium in markets with adverse selection, *Bell Journal of Economics*, 11, p. 108-30, 1980.

Annexe : démonstrations

Par souci de simplification, dans les démonstrations nous adopterons les notations suivantes.

Pour tout menu de contrats $((v_i,q_i))_{i=1}^{N}$, on note :

– UIC_i la contrainte d'incitation ascendante de l'agent i :

$$V_i(q_i) - v_i \geqslant V_i(q_{i+1}) - v_{i+1} \tag{26}$$

– DIC_i sa contrainte d'incitation descendante :

$$V_i(q_i) - v_i \geqslant V_i(q_{i-1}) - v_{i-1} \tag{27}$$

– $IC_{i/j}$ est la contrainte d'incitation de l'agent i assurant que celui-ci n'a pas intérêt à choisir le contrat j :

$$V_i(q_i) - v_i \geqslant V_i(q_j) - v_j \tag{28}$$

PROPRIÉTÉ 1 : *Soit* $((v_i,q_i))_{i=1}^{N}$ *un menu de contrats ;*

(i) si $\forall i < n$*, les contraintes d'incitation* UIC_i *et* DIC_{i+1} *sont vérifiées alors* $\forall i < n,\ q_i \geqslant q_{i+1}$ *;*

(ii) pour deux types i *et* j $(i < j)$*, si les contraintes* $IC_{i/j}$ *et* $IC_{j/i}$ *sont simultanément vérifiées, alors nécessairement :*

$$q_i \geqslant q_j$$

(iii) si les deux contraintes $IC_{i/j}$ *et* $IC_{j/i}$ *sont simultanément vérifiées, mais que l'une de ces contraintes est lâche, alors nécessairement* $q_i > q_j$.

PREUVE : (i) À tout optimum, les contraintes d'incitations sont vérifiées. Par conséquent, pour tout $(i,i+1)$:

$$\begin{array}{rcl} V_i(q_i) - v_i & \geqslant & V_i(q_{i+1}) - v_{i+1} \\ V_{i+1}(q_i) - v_i & \leqslant & V_{i+1}(q_{i+1}) - v_{i+1} \end{array}$$

et donc :

$$V_i(q_i) - V_i(q_{i+1}) \geqslant v_i - v_{i+1} \geqslant V_{i+1}(q_i) - V_{i+1}(q_{i+1})$$

d'où :

$$V_i(q_i) - V_i(q_{i+1}) \geqslant V_{i+1}(q_i) - V_{i+1}(q_{i+1})$$

Lorsque les dispositions marginales sont ordonnées (relation 4), ceci n'est possible que si :

$$q_i \geqslant q_{i+1}$$

(ii) Immédiat après (i) ;
(iii) Les deux contraintes $IC_{i/j}$ et $IC_{j/i}$ sont supposées simultanément vérifiées et l'une lâche. Si $q_i = q_j$ il est immédiat que $v_i = v_j$ ce qui implique que les deux contraintes sont trivialement actives ; contradiction.

> PROPRIÉTÉ 2 : *Si* $((v_i,q_i))_{i=1}^N$ *est un menu optimal redistributif, alors nécessairement toutes les contraintes d'incitation montantes des types successifs sont serrées.*

PREUVE : Soit $((v_i,q_i))_{i=1}^N$ un menu optimal redistributif.

(1) Soit quatre agents i, j, k, l :

$$i < j < k < l$$

Démontrons que si :

$$V_j\left(q_j\right) - v_j > V_j\left(q_k\right) - v_k$$

alors nécessairement :

$$V_i\left(q_i\right) - v_i > V_i\left(q_l\right) - v_l$$

Le menu étant incitatif, et une des deux contraintes $IC_{j/k}$ et $IC_{k/j}$ étant inactive, alors nécessairement d'après la propriété 1 :

$$q_i \geqslant q_j > q_k \geqslant q_l$$

Les fonctions d'utilité V étant ordonnées, on a nécessairement :

$$\left.\begin{array}{r} V_k\left(q_k\right) - v_k \geqslant V_k\left(q_l\right) - v_l \\ q_k \geqslant q_l \end{array}\right\} \Rightarrow V_j\left(q_k\right) - v_k \geqslant V_j\left(q_l\right) - v_l$$

$$\left.\begin{array}{r} V_j\left(q_j\right) - v_j > V_j\left(q_k\right) - v_k \\ V_j\left(q_k\right) - v_k \geqslant V_j\left(q_l\right) - v_l \end{array}\right\} \Rightarrow V_j\left(q_j\right) - v_j > V_j\left(q_l\right) - v_l$$

et :

$$\left.\begin{array}{r} V_j\left(q_j\right) - v_j > V_j\left(q_l\right) - v_l \\ q_j \geqslant q_l \end{array}\right\} \Rightarrow V_i\left(q_j\right) - v_j > V_i\left(q_l\right) - v_l$$

d'où le résultat annoncé :

$$\left.\begin{array}{r} V_i\left(q_j\right) - v_j > V_i\left(q_l\right) - v_l \\ V_i\left(q_i\right) - v_i \geqslant V_i\left(q_j\right) - v_j \end{array}\right\} \Rightarrow V_i\left(q_i\right) - v_i > V_i\left(q_l\right) - v_l$$

(2) S'appuyant sur le résultat du point (1), on démontre que si la propriété n'est pas vérifié, alors il est possible de construire un menu possible augmentant la valeur de la fonction d'utilité collective. On procède pour cela de manière itérative suivante : partant de l'agent 1, on s'arrête au premier agent j

17. Puisque, pour tout i, on peut sélectionner le premier agent « supérieur » à i , notons-le j, qui ne vérifie pas cette propriété et le comparer à l'agent $j-1$ qui la vérifie.

18. Voir par exemple [6].

dont la contrainte UIC_j est lâche. On opère alors une augmentation uniforme des prix des contrats $1,...,j$ de η, η étant suffisamment faible pour que la contrainte UIC_j demeure lâche. Le surplus budgétaire ainsi réalisé égal à $j.\eta$ est uniformément redistribué. Comme nécessairement :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n \Rightarrow \eta \frac{j}{N} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i > j\eta \sum_{i=1}^{j} \alpha_i$$

la valeur de la fonction d'utilité collective augmente grâce à ce transfert. Contradiction.

PROPOSITION 3 : *Pour tout menu optimal redistributif* $\left(\left(v_i^*, q_i^*\right)\right)_{i=1}^N$, *si le contrat* $\left(v_i^*, q_i^*\right)$ *est subventionné, alors tous les contrats d'indices supérieurs le sont également :*

$$c.q_i^* > v_i^* \Rightarrow \forall j > i : c.q_j^* > v_j^* \tag{29}$$

Plus généralement, si le contrat $\left(v_i^*, q_i^*\right)$ *ne participe pas au financement du coût fixe, alors tous les contrats d'indices supérieurs ne participent pas à ce financement :*

$$c.q_i^* \geqslant v_i^* \Rightarrow \forall j > i : c.q_j^* \geqslant v_j^* \tag{30}$$

PREUVE : (1) Supposons que la proposition ne soit pas vraie. Sans perte de généralité, on peut supposer que [17] :

$$c.q_i^* > v_i^*, \; c.q_{i+1}^* \leqslant v_{i+1}^*$$

Par conséquent :

$$V_i\left(q_i^*\right) - c.q_i^* < V_i\left(q_i^*\right) - v_i^* \tag{31}$$

$$V_i\left(q_{i+1}^*\right) - c.q_{i+1}^* \geqslant V_i\left(q_{i+1}^*\right) - v_{i+1}^* \tag{32}$$

À l'optimum redistributif, comme les contraintes d'incitation montantes sont actives, nécessairement [18] :

$$c = V_1'\left(q_1^*\right) \leqslant V_i'\left(q_i^*\right)$$

Ainsi, sachant que les quantités sont ordonnées :

$$\begin{aligned}
V_i\left(q_i^*\right) - c.q_i^* &= \int_0^{q_i^*} \left[V_i'(q) - c\right] dq \\
&= \int_0^{q_{i+1}^*} \left[V_i'(q) - c\right] dq + \int_{q_{i+1}^*}^{q_i^*} \left[V_i'(q) - c\right] dq \\
&> \int_0^{q_{i+1}^*} \left[V_i'(q) - c\right] dq \\
&= V_i\left(q_{i+1}^*\right) - c.q_{i+1}^*
\end{aligned}$$

et donc :

$$V_i\left(q_i^*\right) - c.q_i^* > V_i\left(q_{i+1}^*\right) - c.q_{i+1}^* \qquad (33)$$

Les relations (31), (32) et (33) implique donc :

$$V_i\left(q_i^*\right) - v_i^* > V_i\left(q_{i+1}^*\right) - v_{i+1}^*$$

Evidemment ceci contredit l'hypothèse de départ selon laquelle les contraintes d'incitation montantes sont serrées. Contradiction.

(2) La démonstration pour les contrats ne participant pas à la couverture du coût repose sur les mêmes raisonnements.