ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 73 – 2004

Rôle de la transformation des probabilités dans la combinaison d'actifs risqués

Jean-Pascal GAYANT *

RÉSUMÉ. – Dans cet article, nous étudions la combinaison optimale d'actifs risqués dans le modèle « Rank Dependant Expected Utility » afin de mettre en évidence les influences respectives de l'aversion probabiliste pour le risque et de la décroissance de l'utilité marginale. Nous montrons que l'aversion probabiliste pour le risque conduit le décideur à minimiser le risque encouru tandis que la décroissance de l'utilité marginale l'incite à rechercher le meilleur compromis entre risque et rendement.

The role of the probability distortion in the combination of risky assets

ABSTRACT. – In this paper we study the combination of risky assets in a portfolio in the Rank Dependent Expected Utility model to exhibit the respective influences of probabilistic risk aversion and decreasing marginal utility. We show that the two properties act differently : probabilistic risk avesion leads the decision maker to minimize the risk brought upon whereas decreasing marginal utility incite her to obtain the best compromise between return and risk.

---

* Je tiens à remercier Arnaud CHÉRON, François LANGOT, Jean-Marc TALLON et deux rapporteurs anonymes pour leurs commentaires avisés. Toute erreur ou approximation est de mon entière responsabilité.
JEL Classification : D81
G.A.I.N.S, Université du Maine, Faculté de Droit et des Sciences Économiques, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans Cedex 9.

1 Introduction

Depuis l'avènement du modèle RDEU (Rank Dependent Expected Utility), une généralisation du modèle d'Espérance d'Utilité (EU) dans laquelle le décideur est susceptible de « transformer » les probabilités objectives des résultats (QUIGGIN [1982] ; YAARI [1987]) quelques auteurs se sont efforcés de nuancer la traditionnelle équivalence entre aversion pour le risque et concavité de la fonction d'utilité (CHATEAUNEUF et COHEN [1994] ; CHEW, KARNI et SAFRA [1987] ; COHEN [1995] ; COURTAULT et GAYANT [1998] ; LANSBERGER et MEILIJSON [1994] ; QUIGGIN [1992] ; SEGAL et SPIVAK [1990)] ; WAKKER [1994]). Dans le modèle RDEU, en effet, il est opportun de distinguer l'aversion probabiliste pour le risque, attitude déterminée par les caractéristiques d'une fonction de transformation des probabilités, et la décroissance de l'utilité marginale, attitude relative aux gains et aux pertes, sans rapport particulier avec le facteur risque. Dans cette perspective, il semble alors intéressant de s'interroger sur les influences respectives de l'aversion probabiliste pour le risque et de la décroissance de l'utilité marginale dans différents problèmes de décision dans le risque.

Dans cet article, nous nous proposons d'explorer cette question dans le problème de combinaison optimale d'actifs financiers. Cependant, étant donnée la complexité de la spécification du modèle RDEU, l'étude du choix de portefeuille ne sera pas menée dans le cas général mais dans deux cas particuliers « polaires » du modèle RDEU, en l'occurrence le modèle EU et la « Dual Theory » (DT) de YAARI [1987]. Ce projet a déjà été partiellement initié, en particulier par YAARI lui-même et par DOHERTY et EECKHOUDT [1995]. Dans son article fondateur, YAARI s'intéresse au choix d'un agent désireux de constituer son portefeuille à partir d'un unique actif risqué et d'un actif certain de rendement nul (la monnaie) dans un modèle où la fonction représentative des préférences du décideur n'est pas linéaire relativement aux probabilités mais l'est relativement aux résultats. Il démontre que le décideur détiendra soit uniquement de l'actif risqué, soit uniquement de l'actif certain. Ce comportement est à l'exact opposé de la « diversification universelle » souhaitée par le décideur possédant une fonction d'utilité concave dans le modèle EU. YAARI voit dans ces deux comportements opposés deux positions extrêmes et conjecture que les comportements réels se situent quelque part entre ces deux extrémités. YAARI évoque enfin le cas d'un portefeuille de 3 actifs, en l'occurrence 1 actif certain et 2 actifs risqués indépendants et identiquement distribués. Il indique, sans le démontrer, que le portefeuille optimal dans le modèle DT sera soit uniquement constitué d'actif certain, soit uniquement constitué d'une combinaison à parts égales des deux actifs risqués, ce qui, en l'espèce, constitue une diversification. Cette voie est ensuite explorée par DOHERTY et EECKHOUDT dans un article consacrée à la demande d'assurance. Ces derniers examinent, dans le modèle DT, le comportement de demande d'assurance (contrat de co-assurance) d'un décideur confronté à deux risques, l'un assurable et l'autre non. Ils montrent qu'en dépit de la linéarité du critère de décision relativement aux résultats, une solution intérieure peut être choisie, c'est à dire le choix d'une assurance partielle du premier risque. Par extension ceci suggère qu'un décideur peut donc choisir de diversifier son portefeuille d'actifs risqués, conformément à l'intuition de YAARI.

Nous allons tenter de rassembler ces éléments disparates afin d'examiner l'influence de l'aversion probabiliste pour le risque, d'une part, et de la décroissance de l'utilité marginale, d'autre part, sur la combinaison optimale d'actifs financiers. L'utilisation des modèles duaux DT et EU permet d'isoler sans ambiguïté le rôle des deux phénomènes : l'influence de l'aversion probabiliste pour le risque est mise en évidence dans le modèle DT, l'influence de la décroissance de l'utilité marginale est mise en lumière dans le modèle EU. La comparaison de ces deux influences apportera des éléments de réponse à la question suivante : la concavité de l'utilité provoque-t-elle les mêmes effets que l'aversion probabiliste pour le risque (auquel cas les interprétations traditionnelles de la décroissance de l'utilité marginale demeurent valides) ? Si tel n'est pas le cas, quels sont alors les rôles et influences spécifiques de chacun des phénomènes dans les décisions de choix de portefeuille ?

Nous allons montrer qu'il existe de réelles différences entre les influences respectives de ces deux phénomènes, et que ces différences se traduisent, en particulier, dans le mode de diversification du portefeuille. Ainsi, un comportement de type MaxiMin (Maximisation du paiement Minimum), s'il constitue un « cas limite » dans le modèle EU, est un comportement « standard » dans le modèle DT.

2 Les différentes notions d'aversion pour le risque

Nous allons, dans cette section préliminaire, donner des définitions intrinsèques – par « intrinsèque » il faut entendre « indépendante de tout modèle de représentation numérique des préférences » – de l'aversion pour le risque (ou aversion « faible » pour le risque) et de l'aversion pour un accroissement de risque (ou aversion « forte » pour le risque).

Soit Ω un ensemble fini et exhaustif d'états de la nature et $((E_1), (E_2),\ldots,(E_n))$ une partition de Ω. Soit $X = (x_1, E_1; x_2, E_2; \ldots; x_n, E_n)$ une variable aléatoire réelle telle que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Nous supposons connue la distribution de probabilités sur l'ensemble des états de la nature : ainsi, le décideur connaît les valeurs $P(E_1) = p_1$, $P(E_2) = p_2$, ..., $P(E_n) = p_n$. On désigne par $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

• Aversion pour le risque :

Un agent a de l'aversion pour le risque (ou est adversaire du risque ou riscophobe) s'il préfère à toute loterie le gain de son espérance mathématique avec certitude.

Autrement dit, un agent possédant une relation binaire $\succsim$ définie sur l'ensemble des distributions de probabilité $\mathcal{L}$ est adversaire du risque si :

$$\forall L_X = (x_i, p_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathcal{L}, (E(X), 1) \succsim L_X.$$

• Aversion pour un accroissement de risque :

La définition de cette notion nécessite de recourir à l'utilisation du concept d'« étalement à moyenne constante » (*mean preserving spread*) :

Étant données deux variables aléatoires X et Y dont les espérances sont respectivement $E(X)$ et $E(Y)$, on dira que Y se déduit de X par un étalement à moyenne constante, noté $Y\ MPS\ X$ si :

i) $E(X) = E(Y)$

ii) X domine Y au sens de la dominance stochastique du second ordre c'est-à-dire que $\forall x \subset \Re$, $\int_{-\infty}^{x} P(X > t)\mathrm{d}t \geqslant \int_{-\infty}^{x} P(Y > t)\mathrm{d}t$.

Un agent a de l'aversion pour un accroissement de risque si, quelles que soient deux variables aléatoires telles que l'une se déduit de l'autre par un étalement à moyenne constante, il préfère toujours la moins étalée.

Autrement dit, un agent possédant une relation binaire $\succsim$ définie sur $\mathcal{L}$ est adversaire d'un accroissement de risque si : $\forall L_X, L_Y \in \mathcal{L}$ telles que $Y\ MPS\ X$, alors $L_X \succsim L_Y$.

THÉORÈME : *Un agent adversaire d'un accroissement de risque sera aussi adversaire du risque. La réciproque est fausse.*

La preuve de ce théorème est triviale : il s'agit simplement de considérer le cas de deux variables aléatoires telles que l'une se déduit de l'autre par un étalement à moyenne constante et où la moins étalée est une variable dégénérée, c'est à dire donnant avec certitude un résultat précis (évidemment égal à l'espérance mathématique de la variable). Si l'agent préfère toujours la variable la moins étalée, et donc ici la variable dégénérée, il préférera toujours également le gain de son espérance mathématique avec certitude.

Dans le cadre du modèle EU, ces deux notions d'aversion pour le risque sont équivalentes à la même propriété de concavité de la fonction d'utilité. Ce résultat suggère, en particulier, qu'il suffise d'envisager toute variable certaine comme un cas particulier (dégénéré) de variable aléatoire. Ce « raccourci » se retrouve dans le problème de la combinaison d'actifs financiers, puisque la question de la combinaison d'un actif certain et d'un actif risqué est convenablement cernée lorsqu'elle est envisagée comme un simple cas particulier de la combinaison de 2 actifs risqués.

Ceci est l'un des reproches adressés au modèle EU par les promoteurs du modèle RDEU. Les travaux expérimentaux indiquent qu'il existe un traitement spécifique des variables certaines dans les mécanismes de décision ; cette spécificité invalide même parfois les prescriptions comportementales du modèle d'espérance d'utilité : ainsi, un décideur préférant une variable certaine X à une variable aléatoire Y, peut cependant préférer la variable aléatoire Y' à la variable aléatoire X', alors même que les distributions de probabilité $L_{X'}$ et $L_{Y'}$ des variables X' et Y' sont des combinaisons linéaires convexes, respectivement, des distributions de probabilité L_X et L_Y avec une même distribution de probabilité L_Z. Cette violation de l'axiome d'indépendance est parfois qualifiée « d'effet de certitude » : l'attrait de la certitude est susceptible, dans certains cas, d'entraîner un basculement des préférences. Le fameux paradoxe d'Allais en est une illustration. Dans le modèle RDEU, la présence d'une transformation non nécessairement linéaire des probabilités permet d'expliquer cet effet de certitude : soit par une altération très intense des probabilités au voisinage de la certitude, soit même par l'existence d'une discontinuité de la fonction.

Dans le modèle RDEU, et dans son cas particulier le modèle DT, puisqu'il faut envisager un traitement différencié des variables certaines et des variables risquées au sens strict, la question de la combinaison d'un actif certain et d'un actif risqué devra être examinée séparément du problème de la combinaison de deux ou plusieurs actifs risqués.

Présentons maintenant le modèle RDEU et ses cas particuliers de manière détaillée.

3 Le modèle RDEU et ses cas particuliers, les modèles EU et DT

Conformément aux axiomes du modèle RDEU, l'évaluation par la fonction représentative des préférences de la variable aléatoire X ayant pour distribution de probabilité $L_X = (x_1, p_1; x_2, p_2; ...; x_n, p_n)$ est :

$$\mathrm{RDEU}(X) = u(x_1) + \sum_{i=2}^{n} [u(x_i) - u(x_{i-1})]\phi\left(\sum_{j=i}^{n} p_j\right)$$

où les fonctions croissantes u et ϕ sont des transformations non nécessairement linéaires respectivement des résultats et des probabilités. La fonction de transformation des probabilités ϕ est telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$. La forme de cette fonction représentative des préférences (où ce sont les cumuls de probabilité qui sont transformés) permet d'exclure toute violation de la dominance stochastique du premier ordre (Quiggin [1982]).

Le cas particulier où la fonction ϕ est égale à la fonction identité est le modèle EU. En effet, la fonction représentative des préférences devient :

$$\mathrm{RDEU}(X) = u(x_1) + \sum_{i=2}^{n} [u(x_i) - u(x_{i-1})]\left(\sum_{j=i}^{n} p_j\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) = \mathrm{EU}(X)$$

Le cas particulier où la fonction u est égale à la fonction identité est le modèle dual de Yaari [1987], noté DT. Dans ce modèle, la fonction représentative des préférences devient :

$$\mathrm{RDEU}(X) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1})\phi\left(\sum_{j=i}^{n} p_j\right) = \mathrm{DT}(X)$$

Caractériser l'aversion pour le risque dans le modèle RDEU est plus délicat que dans le modèle EU. Dans le cas où u est concave, il existe une condition nécessaire et suffisante de l'aversion pour le risque : il faut et il suffit que $\forall p \in [0; 1]$, $\phi(p) \leqslant p$. En revanche, dans le cas où u n'est plus concave, il existe seulement une condition suffisante de l'aversion pour le risque. Pour simplifier, cette condition exige que la fonction ϕ soit « plus convexe que » la fonction u (CHATEAUNEUF et COHEN [1994]).

L'aversion pour un accroissement de risque se caractérise, dans le modèle RDEU, par la combinaison de la convexité de ϕ et de la concavité de u. Il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante. Remarquons que la concavité requise de u n'est pas stricte. Ainsi, un décideur possédant une fonction d'utilité linéaire et une fonction ϕ convexe est adversaire d'un accroissement de risque. Cette propriété nous interroge sur la capacité de la fonction d'utilité à « porter » les caractéristiques du comportement vis-à-vis du risque dans le modèle RDEU (puisque la fonction ϕ assume, en tout ou partie, cette tâche). On peut même, par répercussion, soulever des interrogations sur cette même capacité de la fonction d'utilité dans le cadre du modèle EU, appréhendé comme un cas particulier du modèle RDEU...

Pour fixer les idées, nous pouvons nous intéresser au cas *d'un individu possédant une fonction d'utilité linéaire* en récapitulant que :

– Le décideur est adversaire du risque $\Longleftrightarrow\ \forall\, p \in [0; 1],\ \phi(p) \leqslant p$

– Le décideur est adversaire d'un accroissement de risque $\Longleftrightarrow \phi$ est convexe

En d'autres termes, dans le modèle DT, un décideur possédant une fonction de transformation des probabilités située sous la première bissectrice sera adversaire du risque. Si cette fonction est convexe, il sera même adversaire d'un accroissement de risque.

Dans ces deux cadres particuliers, EU et DT, nous allons maintenant examiner les déterminants de la constitution d'un portefeuille d'actifs financiers. En nous penchant sur la combinaison de deux ou plusieurs actifs risqués, nous allons montrer que la diversification peut être commandée aussi bien par l'aversion probabiliste pour le risque que par la décroissance de l'utilité marginale. Mais, les deux logiques de décision semblent être de natures différentes : tandis que l'aversion probabiliste pour le risque conduit le décideur, le plus souvent, à combiner les actifs risqués de manière à maximiser le paiement minimum [1], la décroissance de l'utilité marginale conduit à choisir un compromis entre risque et rendement ne conduisant jamais à l'élimination de la « part » du risque relative aux pires résultats.

1. Puisque le modèle RDEU peut être dérivé du modèle plus général de décision en incertitude non nécessairement probabilisée « Choquet Expected Utility » de SCHMEIDLER [1989] (*cf.* WAKKER [1990]), on sait que le comportement MaxiMin peut apparaître dans le modèle RDEU (l'opérateur « Min » étant un cas particulier de capacité de CHOQUET). Ce comportement MaxiMin, s'il est répandu dans le modèle DT, n'est qu'un cas limite (improbable) dans le modèle EU.

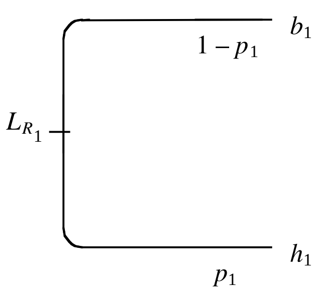
4 Cadre d'étude général : la combinaison de deux actifs dans le modèle RDEU

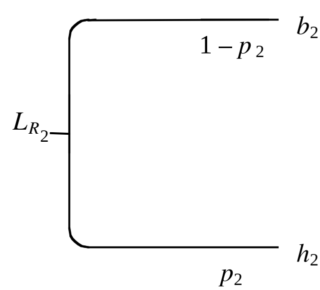
Soit un décideur possédant une richesse w. Cette richesse est investie soit en un premier actif risqué dont le rendement (aléatoire) est R_1 soit en un second actif, risqué ou certain, dont le rendement (aléatoire ou certain) est R_2. La fraction de la richesse consacrée au premier actif risqué est notée α ($\alpha \in [0; 1]$) ; la fraction consacrée au second actif est $(1 - \alpha)$. La richesse finale du décideur sera donc :

$$w_{\text{finale}} = w\{\alpha(1 + R_1) + (1 - \alpha)(1 + R_2)\} = w + w[\alpha R_1 + (1 - \alpha)R_2]$$

Le rendement de chaque actif ne peut prendre que deux valeurs, une valeur basse b_i et une valeur haute h_i ($b_i \leqslant h_i$, $i = 1{,}2$). Le cas où le second actif est certain sera traité en supposant simplement que $b_2 = h_2$. Pour éliminer d'emblée les cas dénués d'intérêt (cas où l'un des deux actifs serait dominé par l'autre), nous allons supposer que $b_2 < h_1$ et $b_1 < h_2$.

En outre, nous supposerons que le 1^er^ actif aura un rendement h_1 si un événement E_1 se réalise et un rendement b_1 si l'événement E_1^c se réalise. Le 2^nd^ actif aura un rendement h_2 si un événement E_2 se réalise et un rendement b_2 si l'événement E_2^c se réalise. Les probabilités des événements E_1 et E_2 sont respectivement p_1 et p_2 (la distribution de probabilité de la variable aléatoire R_i est $L_{R_i} = (b_i, (1 - p_i); h_i, p_i), i = 1{,}2)$.





Pour un décideur satisfaisant aux axiomes du modèle RDEU, l'évaluation de la richesse finale dépend de l'ordre des différents résultats possibles : $\alpha b_1 + (1 - \alpha)b_2$, $\alpha h_1 + (1 - \alpha)b_2$, $\alpha b_1 + (1 - \alpha)h_2$, et $\alpha h_1 + (1 - \alpha)h_2$. D'après nos hypothèses, nous pouvons déduire que le plus petit résultat est $\alpha b_1 + (1 - \alpha)b_2$ et que le plus grand est $\alpha h_1 + (1 - \alpha)h_2$. Il existe donc trois cas possibles :

i) $\alpha h_1 + (1 - \alpha)b_2 > \alpha b_1 + (1 - \alpha)h_2 \iff \alpha > \dfrac{(h_2 - b_2)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)}$

ii) $\alpha h_1 + (1-\alpha)b_2 = \alpha b_1 + (1-\alpha)h_2 \Longleftrightarrow \alpha = \dfrac{(h_2 - b_2)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)}$

iii) $\alpha h_1 + (1-\alpha)b_2 < \alpha b_1 + (1-\alpha)h_2 \Longleftrightarrow \alpha < \dfrac{(h_2 - b_2)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)}$

Dans la suite, nous désignerons par α_0 ce seuil : $\alpha_0 = \dfrac{(h_2 - b_2)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)}$. Remarquons que puisque, par hypothèse $b_1 < h_1$ et $b_2 \leqslant h_2$, $0 \leqslant \alpha_0 < 1$. L'évaluation de la richesse finale est donc [2] :

– Cas (i) : $\mathrm{RDEU}(w_{\text{finale}}) = u\{w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)b_2]\}$
$\cdot\{1 - \phi[P(E_1 \cup E_2)]\} + u\{w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)h_2]\} \cdot \{\phi[P(E_1 \cup E_2)$
$-\phi[P(E_1)]\} + u\{w + w[\alpha h_1 + (1-\alpha)b_2]\} \cdot \{\phi[P(E_1) - \phi[P(E_1 \cap E_2)]\}$
$+u\{w + w[\alpha h_1 + (1-\alpha)h_2] \cdot \phi[P(E_1 \cap E_2]\}$

– Cas (ii) : RDEU $(w_{\text{finale}}) = u\{w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)b_2]\}$
$\cdot\{1 - \phi[P(E_1 \cup E_2)]\} + u\{w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)h_2]\}.\{\phi[P(E_1 \cup E_2)$
$-\phi[P(E_1 \cap E_2)]\} + u\{w + w[\alpha h_1 + (1-\alpha)h_2]\} \cdot \phi[P(E_1 \cap E_2)]$.

– Cas (iii) :

$$\begin{aligned}\mathrm{RDEU}(w_{\text{finale}}) = {} & u\{w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)b_2]\} \cdot \{1 - \phi[P(E_1 \cup E_2)]\} \\ & +u\{w + w[\alpha h_1 + (1-\alpha)b_2]\} \cdot \{\phi[P(E_1 \cup E_2) - \phi[P(E_2)]\} \\ & +u\{w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)h_2]\} \cdot \{\phi[P(E_2) - \phi[P(E_1 \cap E_2)]\} + u\{w + w \\ & [\alpha h_1 + (1-\alpha)h_2]\} \cdot \phi[P(E_1 \cap E_2)].\end{aligned}$$

La décision optimale de l'investisseur sera déterminée en maximisant cette fonction objectif $\mathrm{RDEU}(w_{\text{finale}})$ relativement à la variable α. Dans les 2 sections suivantes, nous allons examiner les choix du décideur dans les 2 cas particuliers duaux du modèle RDEU : le modèle EU et le modèle DT.

5 Influence de la décroissance de l'utilité marginale : combinaison d'actifs dans le modèle EU

Dans le modèle EU, l'écriture de la fonction objectif ne dépend pas de l'ordre des résultats. Ainsi, l'évaluation de la richesse finale est simplement égale à :

2. Les expressions ci-dessous possèdent ceci d'inhabituel que les événements eux-mêmes apparaissent dans l'écriture de la fonction RDEU. Elles peuvent être obtenues en dérivant le modèle RDEU du modèle « Choquet Expected Utility » de SCHMEIDLER [1989].

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EU}(w_{\text{finale}}) = {} & u\{w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)b_2]\} \cdot P(E_1^c \cap E_2^c) \\
& + u\{w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)h_2]\} \cdot P(E_1^c \cap E_2) \\
& + u\{w + w[\alpha h_1 + (1-\alpha)b_2]\} \cdot P(E_1 \cap E_2^c) \\
& + u\{w + w[\alpha h_1 + (1-\alpha)h_2] \cdot P(E_1 \cap E_2)
\end{aligned}
$$

Comme le note YAARI, la concavité de u conduit à une « diversification universelle » dans ce modèle. Ce résultat bien connu peut être, par exemple, mis en évidence avec une fonction d'utilité quadratique (conduisant donc à une décroissance de l'utilité marginale). Rappelons qu'avec une telle fonction quadratique, le critère EU se réduit alors à un critère « Espérance-Variance ». Il suffit alors de s'appuyer sur le Modèle D'évaluation des Actifs Financiers (MEDAF ou CAPM) initié par MARKOWITZ [1952] pour établir que le portefeuille optimal est nécessairement diversifié (voir, par exemple, EECKHOUDT et GOLLIER [1992]). Ce qu'il est intéressant de retenir, à la suite de ce résultat, c'est la manière dont le décideur possédant une utilité marginale décroissante va choisir de diversifier son portefeuille. Cette combinaison sera réalisée en égalisant les satisfactions marginales des rendements des deux actifs. Ce qui incite le décideur à diversifier son portefeuille, c'est le souhait de ne pas détenir un actif en si grande quantité que le surcroît de satisfaction qu'il procure devienne plus faible que celui procuré par l'autre actif.

Cette motivation se retrouve évidemment dans le problème de la combinaison d'un actif risqué et d'un actif sans risque, puisque, dans le cadre EU, il n'y a aucune réserve à traiter ce problème comme un cas particulier du précédent. Rappelons brièvement les développements qui conduisent à cette issue :

Selon nos hypothèses, R_1 est l'actif risqué au sens strict et R_2 est l'actif dont le rendement est certain, c'est-à-dire que $b_2 = h_2 = r$. Pour éliminer les cas dénués d'intérêt, nous allons supposer que $b_1 < r < h_1$. On peut écrire l'espérance d'utilité de la richesse finale comme :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EU}(w_{\text{finale}}) = {} & (1-p_1) \cdot u\{w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)r]\} \\
& + p_1 \cdot u\{w + w[\alpha h_1 + (1-\alpha)r]\}
\end{aligned}
$$

Si l'on annule la dérivé première de cette expression par rapport à α, on obtient la condition d'optimalité du premier ordre :

$$
\begin{aligned}
& w(1-p_1)(b_1 - r)u'\{w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)r]\} \\
& \qquad + wp_1(h_1 - r)u'\{w + w[\alpha h_1 + (1-\alpha)r]\} = 0
\end{aligned}
$$

En outre, puisque la dérivé seconde de l'espérance d'utilité de la richesse finale est :

$$
\begin{aligned}
& w^2(1-p_1)(b_1 - r)^2 u''\{w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)r]\} \\
& + w^2 p_1(h_1 - r)^2 u''\{w + w[\alpha h_1 + (1-\alpha)r]\}
\end{aligned}
$$

la condition du second ordre, la négativité de la dérivé seconde, est vérifiée si u'' est négative, c'est-à-dire lorsque l'utilité marginale est décroissante (hypothèse que nous avons choisie de retenir).

Examinons la dérivé première de l'espérance d'utilité. Dans cette expression, qui est la somme de deux termes, le premier est négatif puisque $b_1 < r$, et le second est positif puisque $r < h_1$. Quelle valeur de α peut alors vérifier cette condition du premier ordre ? Cette condition est équivalente à :

$$(1 - p_1)(r - b_1)u'\{w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)r]\}$$
$$= p_1(h_1 - r)u'\{w + w[\alpha h_1 + (1-\alpha)r]\}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{u'\{w + w[\alpha h_1 + (1-\alpha)r]\}}{u'\{w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)r]\}} = \frac{(1-p_1)(r-b_1)}{p_1(h_1 - r)}$$

Puisque u'' est négative, $u'\{w + w[\alpha h_1 + (1-\alpha)r]\}$ est nécessairement inférieur ou égal à $u'\{w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)r]\}$. Pour que la condition ci-dessus soit vérifiée, les deux termes de l'égalité doivent donc nécessairement être inférieurs ou égaux à 1. On en déduit :

$$\frac{(1-p_1)(r-b_1)}{p_1(h_1-r)} \leqslant 1 \Longleftrightarrow (1-p_1)(r-b_1) \leqslant p_1(h_1 - r)$$
$$\Longleftrightarrow r - b_1 - p_1 r + p_1 b_1 \leqslant p_1 h_1 - p_1 r$$
$$\Longleftrightarrow r - b_1 \leqslant p_1 h_1 - p_1 b_1$$
$$\Longleftrightarrow p_1 \geqslant \frac{r - b_1}{h_1 - b_1}$$

L'optimum est donc atteint pour :

– $\alpha = 0$ si $p_1 \leqslant \dfrac{r-b_1}{h_1-b_1}$

– $\alpha \in]0\,;1[$ si $\dfrac{r-b_1}{h_1-b_1} < p_1 < 1$

– $\alpha = 1$ si $p_1 = 1$.

On constituera effectivement son portefeuille optimal en détenant à la fois de l'actif risqué et de l'actif sans risque (sauf si l'actif risqué est trop peu rentable). Remarquons que si nous faisons varier marginalement le(s) paramètre(s) de la fonction d'utilité supposée deux fois continûment différentiable, la valeur optimale de α va elle aussi varier marginalement. Ceci est aussi valable pour le problème plus général de la combinaison de deux actifs risqués.

Ces résultats bien connus ne se répliquent pas dans le cadre du modèle DT : c'est ce que nous allons maintenant mettre en évidence.

6 Influence de l'aversion probabiliste pour le risque : combinaison d'actifs dans le modèle DT

Reprenons le problème général de la combinaison de deux actifs risqués exposé dans la section 4 et montrons que dans le modèle DT un décideur peut préférer un portefeuille constitué des deux actifs risqués, c'est-à-dire un portefeuille diversifié. Il suffit de trouver un cas particulier pour lequel cette proposition est vérifiée. Choisissons le cas de variables aléatoires anti-comonotones, c'est-à-dire parfaitement négativement corrélés : l'avantage que présente une combinaison de variables aléatoires non comonotones est évidemment une réduction du risque encouru par le décideur. Dans le cadre de notre étude, où les distributions de probabilité des variables aléatoires R_1 et R_2 ne comportent que 2 résultats, l'illustration du problème de sélection de variables aléatoires non comonotones sera triviale, puisque nous sommes réduits à traiter le cas où $E_1^c = E_2$ (et donc $E_2^c = E_1$). Mais nous soulevons ici, implicitement, la question-clé du problème de la combinaison des actifs : la réussite de la diversification d'un portefeuille réside dans la sélection des actifs en fonction de leurs degrés de comonotonie mutuels d'une part et dans le choix des proportions dans lesquelles ces actifs sont combinés d'autre part.

Supposons donc que le décideur soit en mesure de combiner deux actifs R_1 et R_2 tels que $E_1^c = E_2$. Dans ce cas, le portefeuille du décideur est assimilable à un actif unique dont le rendement est $\alpha h_1 + (1-\alpha) b_2$ si l'événement E_1 se réalise et $\alpha b_1 + (1-\alpha) h_2$ si l'événement E_1^c se réalise, l'ordre de ces deux résultats demeurant inconnu. L'évaluation de la richesse finale devient :

$$\text{i) } \mathrm{DT}(w_{\text{finale}}) = w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)h_2]\cdot[1-\phi(p_1)] + w[\alpha h_1 + (1-\alpha)b_2]\cdot\phi(p_1) \qquad \text{si } \alpha > \alpha_0,$$

$$\text{ii) } \mathrm{DT}(w_{\text{finale}}) = w + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)h_2] = w + w[\alpha h_1 + (1-\alpha)b_2] \qquad \text{si } \alpha = \alpha_0,$$

$$\text{iii) } \mathrm{DT}(w_{\text{finale}}) = w + w[\alpha h_1 + (1-\alpha)b_2]\cdot[1-\phi(1-p_1)] + w[\alpha b_1 + (1-\alpha)h_2]\cdot\phi(1-p_1) \qquad \text{si } \alpha < \alpha_0.$$

Nous cherchons à déterminer la valeur de α qui maximise cette évaluation. L'étude de cette fonction nous apprend qu'elle est linéaire par intervalles, c'est-à-dire linéaire sur $[0\,;\alpha_0]$ puis sur $[\alpha_0\,;1]$. En effet, si l'on dérive les trois expressions ci-dessus relativement à α, on obtient des constantes positives, nulles ou négatives. On peut établir que :

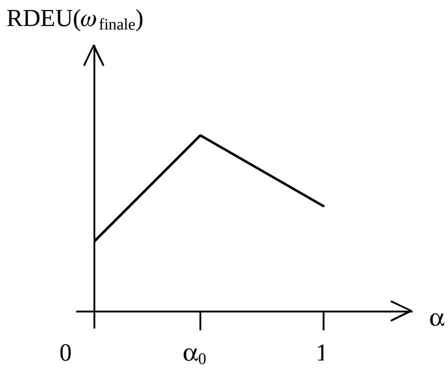
$$- \frac{\partial \mathrm{RDEU}(w_{\text{finale}})}{\partial \alpha} > 0 \quad \text{si} \quad \alpha > \alpha_0 \text{ et } \phi(p_1) > \frac{(h_2 - b_1)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)}$$

$$\text{ou } \alpha < \alpha_0 \text{ et } \phi(1-p_1) < \frac{(h_1 - b_2)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)}$$

$$- \frac{\partial \mathrm{RDEU}(w_{\text{finale}})}{\partial \alpha} < 0 \quad \text{si} \quad \alpha > \alpha_0 \text{ et } \phi(p_1) < \frac{(h_2 - b_1)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)}$$

$$\text{ou } \alpha < \alpha_0 \text{ et } \phi(1-p_1) > \frac{(h_1 - b_2)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)}$$

On en déduit qu'en fonction des valeurs de $\phi(p_1)$ et de $\phi(1-p_1)$, l'évaluation de la richesse finale ne peut présenter que deux types de profils selon les valeurs de α :

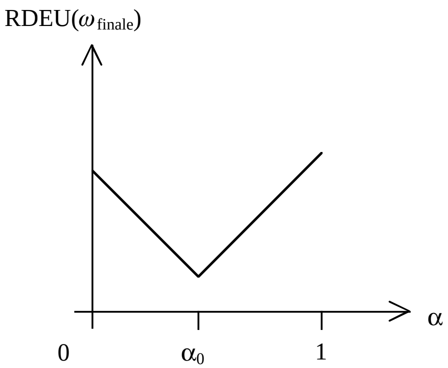


Profil de RDEU (w_{finale}) si

$$\phi(p_1) < \frac{(h_2 - b_1)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)}$$

et

$$\phi(1 - p_1) < \frac{(h_1 - b_2)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)}$$



Profil de RDEU (w_{finale}) si

$$\phi(p_1) > \frac{(h_2 - b_1)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)}$$

et

$$\phi(1 - p_1) > \frac{(h_1 - b_2)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)}$$

Dans le premier des deux profils [3], l'évaluation de la richesse finale passe par un maximum en α_0. Il est donc évident qu'un portefeuille diversifié peut être demandé par ce décideur dont la fonction d'utilité est linéaire : dans le cas où à la fois $\phi(p_1) < \frac{(h_2 - b_1)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)}$ et $\phi(1 - p_1) < \frac{(h_1 - b_2)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)}$, la valeur optimale de α est $\alpha_0 \in]0\,;1[$. Dans ce cas, où les deux actifs sont parfaitement négativement corrélés, le rendement du portefeuille est alors certain et égal à $\alpha b_1 + (1 - \alpha)h_2$, $= \alpha h_1 + (1 - \alpha)b_2$. Si les deux actifs n'étaient pas parfaitement corrélés, le rendement du portefeuille ne serait pas certain, mais le décideur pourrait néanmoins préférer un portefeuille diversifié, en particulier un portefeuille pour lequel **le paiement minimum est maximisé** (*cf.* GAYANT [2002]).

Quelle forme de la fonction de transformation des probabilités peut conduire au choix d'un portefeuille diversifié ? Dans le cas ci-dessus, on déduit immédiatement (en sommant les deux inégalités

3. Ce profil est similaire à celui établi par DOHERTY et EECKHOUDT [1995], page 167, pour mettre en évidence l'existence possible d'une solution intérieure.

$$\phi(p_1) < \frac{(h_2 - b_1)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)} \quad \text{et } \phi(1 - p_1) < \frac{(h_1 - b_2)}{(h_1 - b_1) + (h_2 - b_2)})$$

qu'une condition nécessaire au choix de la diversification est que $\phi(p_1) + \phi(1 - p_1) < 1$. Cette condition est vérifiée par tout adversaire du risque.

Remarquons que si nous faisons varier marginalement le(s) paramètre(s) de la fonction de transformation des probabilités, supposée deux fois continûment différentiable, la valeur optimale de α va soit **ne pas se modifier** soit « **plonger** » **à 0 ou 1** (dans le cas où les valeurs de $\phi(p_1)$ et $\phi(1 - p_1)$ viendraient à franchir les bornes déterminées ci-dessus). Ceci constitue une différence majeure avec le résultat obtenu dans le cadre EU. Même si cette discontinuité dans le comportement du décideur soulève des réserves quant au réalisme du rudimentaire modèle DT, elle conforte l'idée qu'existe une différence de nature entre la diversification obtenue sous l'hypothèse d'utilité marginale décroissante dans EU et la diversification obtenue sous l'hypothèse d'aversion probabiliste pour le risque dans DT.

Les réserves quant au réalisme du modèle DT sont encore renforcées lorsque nous observons, à la suite de YAARI, qu'en aucun cas l'aversion probabiliste pour le risque ne conduit à combiner un actif risqué et un actif certain dans le modèle DT :

Reprenons le cadre dans lequel R_1 est l'actif risqué au sens strict et R_2 est l'actif dont le rendement est certain égal à r (avec $b_1 < r < h_1$). On peut écrire l'évaluation de la richesse finale dans le modèle DT comme :

$$\begin{aligned} \mathrm{DT}(w_{\text{finale}}) &= \{w + w[\alpha b_1 + (1 - \alpha)r]\} \cdot [1 - \phi(p_1)] \\ &\quad + \{w + w[\alpha h_1 + (1 - \alpha)r]\}\phi(p_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{DT}(w_{\text{finale}}) &= w + w[\alpha b_1 + (1 - \alpha)r] \\ &\quad + \phi(p_1)w\{[\alpha h_1 + (1 - \alpha)r] - [\alpha b_1 + (1 - \alpha)r]\} \end{aligned}$$

$$\mathrm{DT}(w_{\text{finale}}) = w(1 + r) + w\alpha(b_1 - r) + \phi(p_1)w\alpha(h_1 - b_1)$$

$$\mathrm{DT}(w_{\text{finale}}) = w(1 + r) + w[(b_1 - r) + \phi(p_1)(h_1 - b_1)]\alpha$$

Puisque la fonction objectif est linéaire en α, le maximum sera atteint pour $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Concrètement, il existe une valeur seuil de $\phi(p)$ au dessus de laquelle l'individu investit l'intégralité de sa richesse dans l'actif risqué, et en dessous de laquelle il place tout en actif au rendement certain.

Le maximum est atteint pour $\alpha = 1$ lorsque $[(b_1 - r) + \phi(p_1)(h_1 - b_1)] > 0$. Ceci est équivalent à :

$$\begin{aligned} &\phi(p_1)(h_1 - b_1) > r - b_1 \\ \iff &\phi(p_1) > \frac{r - b_1}{h_1 - b_1} \end{aligned}$$

Le terme de droite de cette inéquation est la valeur seuil de $\phi(p_1)$ à partir de laquelle l'investissement en actif risqué est jugé suffisamment attractif. Tout se passe comme si l'investisseur comparait l'équivalent certain de la variable aléatoire R_1 (c'est-à-dire la valeur numérique $\mathrm{EC}(R_1)$) et le rendement certain r en adoptant la règle de décision suivante :

– si EC $(R_1) > r$, l'actif risqué est préféré.

– si EC $(R_1) < r$, l'actif sans risque est préféré.

Aucune diversification n'est possible (sauf dans le cas où, fortuitement, EC $(R_1) = r)$.

On peut être surpris de constater qu'un adversaire du risque choisisse un portefeuille homogène (c'est-à-dire un portefeuille soit uniquement constitué de l'actif risqué, soit uniquement constitué de l'actif sans risque), ou, en d'autres termes, qu'il « mette tous ses œufs dans le même panier ». Ceci est pourtant conforme à la définition intrinsèque de l'aversion pour le risque, dans laquelle on formule un choix binaire entre une perspective risquée et une issue certaine. L'éventuelle « réduction du risque » à laquelle aspire l'adversaire du risque est obtenue de manière drastique : en éliminant complètement du portefeuille le titre risqué ! *A contrario*, cela signifie que seule la non-linéarité de la satisfaction marginale du décideur peut susciter le désir de mixer actif risqué et actif sans risque.

7 Conclusion

L'observation de différences sensibles entre le comportement d'un adversaire du risque dans le modèle DT (désireux de limiter au maximum les risques encourus, par un « plongeon » vers l'actif certain ou par un comportement MaxiMin) et le comportement d'un décideur possédant une fonction d'utilité concave dans le modèle EU (désireux d'égaliser les satisfactions marginales des titres combinés) conforte la position du modèle RDEU : celui-ci possède, grâce à son fort niveau de généralité, l'atout d'appréhender une plus grande variété de comportements vraisemblables. Ainsi, il autorise les comportements MaxiMin sans nécessairement, en contrepartie, être frappé de la « malédiction » des comportements binaires (les « plongeons »). Par exemple, il permet d'expliquer le choix simultané d'un actif sans risque et de deux ou plusieurs actifs risqués selon une combinaison telle que soit maximisé le paiement minimum du lot de titres risqués : le désir de sécurité du « bon père de famille » est ainsi assouvi à un double niveau.

Même si la complexité de la spécification du modèle RDEU rend les tentatives d'édification d'une typologie des décisions de choix de portefeuille difficiles, ce modèle ouvre certainement de nouveaux thèmes d'investigations à la littérature financière. Au minimum, la concavité de la fonction d'utilité ne saurait y conserver le statut de vecteur exclusif de l'aversion pour le risque. ▾

• Références

CHATEAUNEUF A., COHEN M. (1994). – « Risk-Seeking with diminishing marginal Utility in a non expected Utility Model », *Journal of Risk and Uncertainty*, 9, p. 77-91.

CHEW S.E., KARNI E., SAFRA Z. (1987). – « Risk Aversion in the Theory of expected Utility with rank dependent Probabilities », *Journal of Economic Theory*, 42, p. 370-380.

COHEN M. (1995). – « Risk Aversion Concepts in expected – and non-expected – Utility Models », *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, 20, p. 73-91.

COURTAULT J.-M., GAYANT J.-P. (1998). – « Local Risk Aversion in the Rank Dependent Expected Utility Model: First Order versus Second Order effects », *Economics Letters*, 59, p. 207-212.

DOHERTY N., EECKHOUDT L. (1995). – « Optimal Insurance without Expected Utility: the Dual Theory and the Linearity of Insurance Contracts », *Journal of Risk and Uncertainty*, 10, p. 157-179.

EECKHOUDT L., GOLLIER C. (1992). – « Les Risques Financiers », *Ediscience International*.

GAYANT J.-P. (2002). – « Aversion probabiliste pour le risque et comportement Maximin dans la combinaison d'actifs risqués », Document de Travail, GAINS, Université du Maine.

LANSBERGER M., MEILIJSON I. (1994). – « Comonotone allocations, Bickel-Lehman dispersion and the Arrow-Pratt measure of risk aversion », *Annals of Operations Research*, 52, p. 97-106.

MARKOWITZ H. (1952). – « Portfolio Selection », *Journal of Finance*, 6, p. 77-97.

QUIGGIN J. (1982). – « A Theory of Anticipated Utility », *Journal of Economic Behavior and Organisation*, 3 , p. 323-343.

QUIGGIN J. (1992). – « Increasing Risk : Another Definition », *in* A. Chikan (Ed.) Progress in Decision, Utility and Risk Theory, Kluwer, Dordrecht.

SCHMEIDLER D. (1989). – « Subjective Probability and Expected Utility without Additivity », *Econometrica*, 57, p. 571-587.

SEGAL U., SPIVAK A. (1990). – « First Order versus Second Order Risk Aversion », *Journal of Economic Theory*, 51, p. 111-125.

WAKKER P. (1990). – « Under stochastic Dominance, Choquet Expected Utility and Anticipated Utility are identical », *Theory and Decision*, 29, p. 119-132.

WAKKER P. (1994). – « Separating marginal Utility and probabilistic Risk Aversion », *Theory and Decision,* 36, p. 1-44.

YAARI M. (1987). – « The Dual Theory of Choice under Risk », *Econometrica*, 55, p. 95-105.