ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 73 – 2004

Régime de retraite et chute de la natalité : évolution des mœurs ou arbitrage micro-économique ?

Claire LOUPIAS *, Bertrand WIGNIOLLE**

RÉSUMÉ. – Nous montrons que dans un modèle à générations imbriquées avec fécondité endogène, l'existence d'un système de retraite par répartition introduit une externalité négative sur les comportements de fécondité. L'état stationnaire optimal peut être décentralisé en introduisant un régime de retraite et un système d'allocations familiales. La comparaison du modèle aux faits stylisés montre que la chute de la natalité observée pourrait s'expliquer entièrement par les modifications de politique sociale mise en œuvre.

Pension scheme and fall in fertility: evolution of habits or microeconomic arbitrage?

ABSTRACT. – An overlapping generations model is examined, where fertility behaviors are endogenous. A PAYG pension scheme introduces an externality on fertility behaviors. The competitive equilibrium dynamics and the steady state are defined. Two instruments, pensions and child benefits, are necessary to decentralized the optimal stationary state. The comparison between the scenario of the model and historical facts shows that variations in welfare allowances may explain the totality of the decrease in fertility rates.

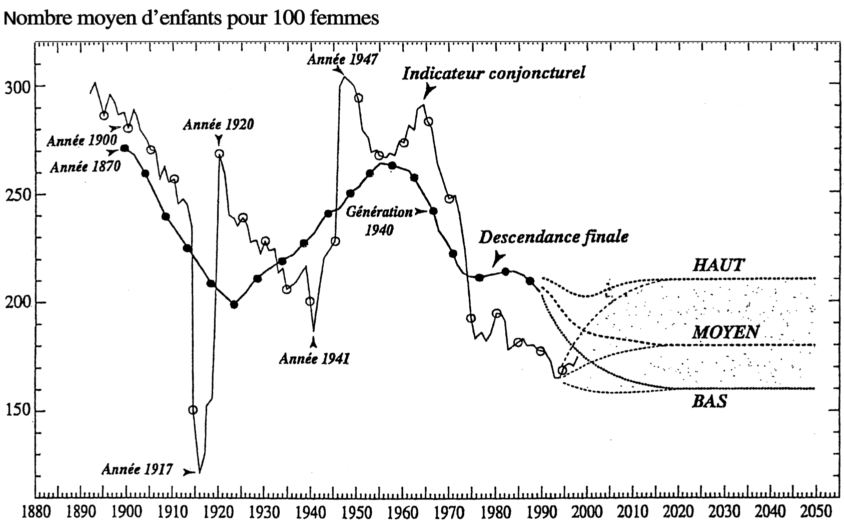
* C. LOUPIAS : Banque de France, DGEI-DEER-CRECH (41-1391), 75049 Paris cedex 01, et Université de La Rochelle, tél : 01 42 92 91 67
claire.loupias@banque-france.fr.
** B. WIGNIOLLE : EUREQua, Université de Paris I Panthéon-Sorbonne MSE, 106-112 bvd. de l'Hôpital, 75647 Paris cedex 13, tél : 01 44 07 81 98.
wignioll@univ-paris1.fr.

1 Introduction [1]

La France a commencé sa transition démographique dès le XVIII$^{\text{ème}}$ siècle bien avant l'Angleterre et l'Allemagne. L'indicateur conjoncturel de la fécondité et celui de la descendance finale ont varié de façon cyclique depuis lors [2]. La figure 1 présente ces évolutions depuis la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle [3].

FIGURE 1

France 1892-2050. Indicateur conjoncturel de la fécondité et descendance finale décalée de l'âge moyen de la maternité.
Observations jusqu'en 1998 – Projections d'Eurostat au-delà*



* Niveaux bas, moyen et haut de la fécondité.

NB : Les cercles indiquent les années d'observation (cercles creux) ou les générations (cercles pleins) dont le millésime est multiple de 5.

Source : ODE

---

1. Les auteurs remercient les participants du séminaire « modèles à générations imbriquées » et du colloque T2M, ainsi que deux rapporteurs anonymes, pour leurs remarques constructives.

2. La descendance finale d'une génération féminine est le nombre d'enfants mis au monde par cette génération de femmes au cours de leur vie féconde. Elle s'obtient en additionnant les divers taux de fécondité par âge, observés au cours du temps, pour une même génération de femmes, une fois terminée leur période de procréation. En revanche, en additionnant les taux de fécondité observés la même année aux différents âges féconds, on obtient l'indice conjoncturel de la fécondité.

3. La descendance finale est représentée décalée de l'âge moyen à la maternité. Ainsi, le point de la génération 1940 est représenté en 1965, ce qui signifie que l'âge moyen de procréation de cette génération était de 25 ans.

L'indicateur de descendance finale a diminué de 2,7 enfants par femme en 1900 à 2 au milieu des années 20, pour remonter à 2,6 à la fin des années 50, avant de redescendre ensuite à 2,1 au début des années 80, niveau auquel il est globalement resté depuis. L'indicateur conjoncturel a quant à lui diminué de 2,9 enfants par femme en 1965 à 1,65 fin 1993. Cette dernière chute de la natalité, en période de paix, est souvent attribuée à « l'évolution des mœurs ». Cependant cette période a aussi été caractérisée par une évolution très importante des systèmes et des niveaux de redistribution entre les générations. Le but de cet article est de montrer que les arbitrages micro-économiques, influencés par les modifications des transferts sociaux, peuvent suffire à expliquer la baisse de la natalité, sans recourir à l'argument d'un changement des mœurs [4].

L'après-guerre est caractérisé par l'instauration systématique de trois niveaux de solidarité : la santé, la famille et la vieillesse. Cependant, le poids relatif des allocations familiales par rapport aux prestations retraite a considérablement varié au cours du temps. Si le pouvoir d'achat des allocations familiales a augmenté d'environ 50 % entre 1955 et 1995, le PIB par habitant a été multiplié par plus de trois sur la même période, et le pouvoir d'achat de la retraite moyenne du régime général par 3,75 entre 1960 et 1995, de telle sorte que le pouvoir d'achat relatif des allocations familiales par rapport au niveau de vie a considérablement diminué. Le niveau des allocations familiales pour trois enfants est ainsi passé de 30 % du PIB par tête en 1950, à 21 % en 1960, 17 % en 1970, 15 % en 1980, et 14 % en 1995. Dans le même temps le niveau de la prestation retraite individuelle de base moyenne a augmenté de 18 % du PIB par habitant en 1960, à 23 % en 1970, 28 % en 1980, et 26 % en 1995. Le rapport entre les allocations familiales et la retraite a ainsi diminué de 117 % en 1960 à 74 % en 1970, et 53 % en 1980, niveau auquel il a globalement stagné depuis lors. Cette modification du pouvoir d'achat relatif des prestations se retrouve aussi au niveau des cotisations. Les taux de cotisation-vieillesse ont ainsi augmenté d'environ 8 % à 16 % entre 1967 et 1995 [5], tandis que le taux de cotisation aux allocations familiales passait d'environ 17 % en 1951 à 11 % en 1967 et 5 % en 1995.

La théorie économique nous enseigne que tout système de prélèvements ou de prestations qui influence les décisions prises par les agents entraîne par définition des distorsions sur les comportements économiques. Si l'on considère la fécondité comme endogène, les allocations familiales et le régime de retraite sont tout deux sources de distorsion. Les allocations familiales diminuent directement le coût apparent des enfants. Le système de retraite introduit une externalité : les agents ne prennent pas en compte l'effet positif de leur fécondité sur le montant de leur retraite. Notre but est précisément de montrer que les changements de politique de transferts pourraient suffire à expliquer les modifications de comportement de fécondité,

4. Nous laissons donc de côté les explications concurrentes de nature sociologique ou psychologique.

5. Ces chiffres sont exprimés en pourcentage du salaire brut, en ajoutant les taux de cotisation employeur et salarié, et en faisant la somme des taux s'appliquant uniquement sous le plafond et à la totalité du salaire.

sans recourir à l'hypothèse d'un changement des mœurs [6] ou des habitudes sociales[7].

Ces distorsions sont d'autant plus importantes que les montants en jeu sont élevés : l'ensemble des prestations retraites s'élève à environ 13 % du PIB, les allocations familiales à environ 4 % et les dépenses d'éducation à environ 6 %. Bien que les prestations familiales ne représentent qu'environ 4 % du PIB, le coût réel des enfants (hors éducation) est considérable, qu'il s'agisse du coût financier direct ou du coût en temps. GLAUDE et MOUTARDIER [1991] ont ainsi évalué qu'en 1989 le coût financier direct moyen par enfant était d'environ 4 100 francs par mois, pour une famille dont le budget moyen annuel était de 164 000 francs. Ce montant représente en fait la dépense supplémentaire nécessaire permettant à un ménage de maintenir son niveau de vie « en termes de biens et services » en passant d'une situation sans enfant à une situation avec enfant. Le coût d'un enfant serait de l'ordre de 30 % du coût d'un adulte, et il aurait augmenté entre 57 % et 17 %, en fonction du nombre d'enfants, pendant la décennie 80. Le coût en temps des enfants serait tout aussi important. BARNET-VERZAT [1996] estime ainsi que la perte de revenus salariaux d'une femme ayant trois enfants est de l'ordre d'un demi à un million de francs sur l'ensemble du cycle de vie. L'écart de revenu, par rapport à une situation sans enfant, sur l'ensemble du cycle de vie serait de – 20 % à – 40 % en fonction du niveau de qualification, les qualifications les plus faibles subissant les plus grosses pertes.

Si la littérature sur la croissance, l'épargne et les régimes de retraite a longtemps été fondée sur des modèles avec fécondité exogène (SAMUELSON [1958], DIAMOND [1965,1977], BARRO [1974], FELDSTEIN [1985], VEALL [1986]), les études empiriques récentes (CIGNO et ROSATI [1996], WANG, YIP, et SCOTESE [1994]) montrent que l'on ne peut pas rejeter l'hypothèse de fécondité endogène. Ces articles, ainsi que celui de NUGENT [1985], constituent de plus une contribution empirique au débat sur l'hypothèse dite « de la sécurité sociale » selon laquelle la hausse des prestations vieillesse aurait grandement contribué à la chute de la natalité.

Dans cet article, on considère un modèle avec fécondité endogène où les enfants entrent directement dans la fonction d'utilité des parents au même titre qu'un bien. Les agents sont de plus égoïstes au sens où il ne valorisent ni l'utilité de leurs ascendants, ni celle de leurs descendants. Ce cadre correspond à celui retenu par WILLIS [1973], RAZIN et BENZION [1975] et ECKSTEIN et WOLPIN [1985]. Il présente deux propriétés intéressantes. En premier lieu, ce cadre permet de définir de manière simple l'optimum social et de le comparer à l'équilibre décentralisé. En second lieu, il ne présente pas les propriétés peu satisfaisantes du modèle de fécondité endogène de BECKER et BARRO [1988] [8].

6. C'est-à-dire, dans le cadre d'un modèle économique, sans recourir à l'hypothèse d'un changement de préférences des agents.

7. Par habitudes sociales on entend le coût financier et le coût en temps des enfants. Considérer le coût en temps des enfants comme constant revient à supposer que le taux d'activité des femmes reste constant à natalité fixée, et qu'il augmente lorsque la fécondité diminue.

8. Une troisième voie pourrait consister à retenir une forme *ad-hoc* d'altruisme, par exemple en introduisant directement le montant du legs total dans la fonction d'utilité (« *joy-of-giving* »). L'inconvénient d'une telle forme est qu'elle ne permet pas de définir sans ambiguité l'état stationnaire optimal. De plus, elle aurait pour effet de compliquer le modèle, en rajoutant une dimension à la dynamique d'équilibre.

Dans ce dernier, le poids accordé à l'utilité de chaque enfant dépend du nombre d'enfants. Cette hypothèse entraîne que la consommation des parents augmente avec le coût des enfants et diminue avec le revenu, ce qui n'est évidemment pas corroboré par les faits [9].

Le but général du papier est d'étudier les externalités liées au régime de retraite.

Conformément aux observations empiriques évoquées ci-dessus, on considère que les enfants engendrent deux types de coûts : un coût en temps, qui diminue le temps de travail par adulte, et un coût financier forfaitaire par enfant. Deux types de prestations sociales sont étudiées : un régime de retraite par répartition et un système d'allocations familiales. Le financement de ces deux prestations est assuré par des cotisations proportionnelles au salaire. Les allocations familiales ont un impact direct sur les choix de fécondité, puisqu'elles allègent le coût des enfants. Les prestations vieillesse ont un impact indirect en créant une externalité : les parents ne prennent pas en compte l'effet positif de leur fécondité sur leur retraite. Enfin, les cotisations sociales diminuent le coût d'opportunité des enfants lorsque ces derniers engendrent un coût en temps.

Notre analyse se concentre sur les aspects intergénérationnels des transferts sociaux mis en oeuvre par des systèmes de retraite et d'allocations familiales. Nous n'étudions pas les problèmes d'inégalités intragénérationnelles, notamment le lien entre l'inégalité des revenus et le nombre d'enfants par famille [10]. Aussi considérons nous un agent représentatif par génération [11].

L'équilibre décentralisé est caractérisé en dynamique et à l'état stationnaire. On définit ensuite un optimum social stationnaire, qui généralise la règle d'or d'Allais-Samuelson-Diamond au cadre de fécondité endogène. On montre alors que l'optimum social peut être décentralisé grâce à un niveau optimal des prestations vieillesse et famille. Cet optimum social a les caractéristiques suivantes. Si le coût des enfants est uniquement forfaitaire, le montant des allocations familiales optimal pour l'ensemble des enfants sera égal au montant total des cotisations au régime de retraite. Le montant optimal des prestations familiales est par conséquent celui qui permet aux agents « d'internaliser exactement l'externalité » liée au système de retraite. On retrouve ainsi le résultat obtenu par SINN [1997] dans un cadre comptable. En revanche, lorsque les enfants induisent également un coût en temps, le montant optimal d'allocations familiales est plus faible. Ceci s'explique par le fait que les cotisations sociales ont pour effet de réduire le coût d'opportunité des enfants, puisqu'elles diminuent le salaire horaire net.

L'étude d'un cadre simplifié (production COBB DOUGLAS et utilité log linéaire) permet enfin d'obtenir la dynamique de l'économie concurrentielle, ainsi que les expressions explicites des paramètres optimaux de politique

9. Une autre manière d'engendrer un comportement endogène de fécondité consiste à le faire reposer sur des transferts intra familiaux. Chez CIGNO [1993], l'incitation à faire des enfants repose sur des normes sociales de dons aux parents âgés. Chez NISHIMURA et ZHANG [1992, 1995], ces transferts proviennent d'une hypothèse d'altruisme ascendant.

10. Quelques faits stylisés sur ce dernier point sont donnés par DESPLANQUES [1994].

11. Nous n'étudions pas non plus les liens entre les inégalités de développement, les niveaux de revenu et la fécondité. Ces phénomènes ont été étudiés notamment par BECKER, MURPHY et TAMURA [1990], DAHAN et TSIDDON [1998], WIGNIOLLE [1998], GALOR et WEIL [1999], DOCQUIER [1999] et KREMER et CHEN [2000].

économique à l'état stationnaire. Ce cadre permet deux types d'analyses. En premier lieu, l'évolution des mœurs peut être prise en compte en considérant un changement des préférences des agents ou des habitudes sociales (par exemple, une variation du coût en temps des enfants). En second lieu, il permet d'avoir un ordre de grandeur des effets sur la fécondité d'une variation relative des prestations, telle que la France l'a connue depuis le début des années 60. Notre étude ne s'attache qu'au second point : nous donnons quelques exemples numériques, qui montrent que la seule considération des variations de transferts sociaux peut suffire à expliquer la chute de la natalité.

L'étude des questions qui nous préoccupent a été en particulier abordée dans deux articles. SINN [1997] propose de lier les allocations retraite d'un ménage à sa propre fécondité, afin d'appliquer le principe de la « justice de la double obligation » aux couples sans enfant [12]. En effet, selon lui, les actifs ont deux types d'obligations : payer les cotisations sociales destinées aux retraités et prendre en charge l'éducation des enfants. Les agents sans enfant s'acquittent d'une obligation de moins que les autres et sont donc aptes à payer des cotisations supplémentaires. Le montant de ces cotisations doit être suffisant pour compenser la distorsion engendrée par le régime de retraite. Il doit donc être égal au montant des cotisations qu'auraient payés les enfants supplémentaires qui auraient été mis au monde en l'absence d'externalité. SINN propose de verser ces cotisations à un régime de retraite par capitalisation. L'accumulation accrue de capital physique viendrait ainsi compenser l'absence d'accumulation de capital humain [13]. Mais l'approche de SINN, qui prend comme donnés les comportements des agents, est purement comptable. Elle ne permet d'étudier ni les changements de comportements liés à des modifications de politique économique, ni les effets d'équilibre général.

ECKSTEIN et WOLPIN [1985] ont défini les premiers l'état stationnaire optimal d'un modèle à générations imbriquées avec fécondité endogène. On complète ici leur analyse en prenant en compte le coût en temps des enfants et en vérifiant, dans un cadre simplifié, les conditions sous lesquelles l'objectif du planificateur est concave. Ces auteurs montrent de plus que dans certains cas un système de retraite à contributions volontaires, dont le rendement serait égal au taux de croissance de la taille de la famille, permet de décentraliser l'état stationnaire optimal [14].

La suite de l'article est organisée de la façon suivante. La deuxième partie du papier présente le modèle utilisé ainsi que l'équilibre concurrentiel, la troisième l'état stationnaire optimal et sa décentralisation, la quatrième l'étude de l'économie dans le cas COBB-DOUGLAS. La cinquième section confronte le modèle aux faits stylisés. La sixième section donne les conclusions de l'étude, et la septième comporte les références bibliographiques. Enfin, une annexe technique est présentée dans la huitième section.

---

12. NISHIMURA et ZHANG [1995] proposent également de lier les prestations retraite au nombre d'enfants. Ils se situent cependant dans un cadre totalement différent dans lequel la fécondité endogène est liée aux mécanismes de transferts intra-familiaux.
13. La mise en œuvre d'une telle mesure va à l'encontre du principe de base de l'assurance vieillesse, qui est de permettre de faire face aux risques individuels. Cette mesure est en outre inapplicable, puisque l'observation du nombre d'enfants d'un individu ne peut intervenir qu'au milieu de sa vie active.
14. Ce système de retraites à rendement fonction de la taille de la famille pose les mêmes problèmes que celui proposé par SINN.

2 Le modèle

Nous considérons un modèle à générations imbriquées dans lequel les agents vivent durant deux périodes. En première période de vie, les agents travaillent, consomment, épargnent et choisissent le nombre d'enfants qu'ils vont mettre au monde. Ils élèvent également leurs enfants durant cette période, ce qui engendre des coûts. En deuxième période de vie, ils prennent leur retraite et consomment le montant de leurs prestations retraite ainsi que le fruit de leur épargne de première période de vie.

2.1 Les comportements des agents

2.1.1 Les ménages

Considérons les individus de la génération t, supposés être en nombre N_t. Chaque agent est doté d'une fonction d'utilité intertemporelle :

$$U(c_t, d_{t+1}, m_t) \tag{1}$$

c_t est la consommation de première période de vie [15], d_{t+1} est la consommation de deuxième période, et m_t est le nombre d'enfants mis au monde en première période de vie [16]. U est supposée deux fois continûment différentiable, et strictement concave. Elle est croissante en chacun de ses arguments et vérifie :

$$\lim_{c \to 0} U'_c = \lim_{d \to 0} U'_d = \lim_{m \to 0} U'_m = +\infty$$

Notre modèle ne prend pas en compte l'arbitrage travail-loisir au sens habituel du terme : le loisir n'entre pas dans la fonction d'utilité. La prise en compte explicite d'un arbitrage travail loisir compliquerait substantiellement le modèle : la dynamique de l'équilibre intertemporel comporterait une dimension supplémentaire, et la décentralisation de l'optimum nécessiterait un instrument de plus. En revanche, le modèle prend en considération l'arbitrage bien fécondité.

Les enfants entraînent deux types de coûts, supposés chacun proportionnels au nombre d'enfants : un coût fixe et un coût en temps. En première période de vie, l'agent reçoit un salaire w_t par unité de travail. Son temps de travail total est normalisé à une unité de temps. Mais une part qm_t de ce temps est absorbée par les enfants. L'offre de travail de l'agent $(1 - qm_t)$ dépend donc

15. Une simplification aurait pu consister à supprimer la consommation de première période de vie. Toutefois, la résolution n'est pratiquement pas facilitée. De plus, cette simplification supprime des cas de discussion intéressants : une économie sans système de retraite est nécessairement inefficace dans le cas où $\phi = 0$ pour des valeurs plausibles des paramètres de la fonction de production. (*cf.* section 4.4).

16. m_t est le nombre d'enfants par adulte. À l'instar de toute la littérature, on considère cette variable comme continue, ce qui est cohérent avec l'hypothèse d'un agent représentatif par génération.

négativement du nombre d'enfants. Elle est de ce fait endogène, bien que notre modèle ne prenne pas en compte d'arbitrage travail-loisir au sens usuel du terme. Les biens consommés étant liés au temps de travail, il y a un arbitrage indirect entre temps de travail et fécondité.

L'agent paie une taxe proportionnelle au taux τ_t, destinée à financer le système de retraites par répartition, ainsi qu'une taxe au taux σ_t destinée à financer les allocations familiales. Son revenu de première période est donc finalement : $w_t(1-qm_t)(1-\tau_t-\sigma_t)$. L'agent bénéficie d'un système d'allocations familiales lui assurant un montant de a_t par enfant. Enfin, le coût fixe lié aux enfants a pour expression ϕm_t. En notant s_t l'épargne de l'agent, sa contrainte budgétaire de première période est :

$$c_t + \phi m_t + s_t = w_t(1-qm_t)(1-\tau_t-\sigma_t) + a_t m_t \tag{2}$$

L'épargne est investie en capital productif, le facteur de rendement de celui-ci étant noté R_{t+1}. On suppose conformément à la littérature que les firmes ont la capacité de transformer sans coût du bien de consommation de la période t en du capital productif disponible en $t+1$.

En deuxième période de vie, l'agent en retraite dispose des ressources de son épargne de première période $R_{t+1}s_t$, et du montant de sa retraite θ_{t+1}. Sa contrainte budgétaire de deuxième période est donc :

$$d_{t+1} = R_{t+1}s_t + \theta_{t+1} \tag{3}$$

L'épargne, dans une économie avec régime de retraite par répartition, ne sert qu'à financer le surcroît de consommation de seconde période, non-financée par les prestations retraite.

En éliminant s_t entre les deux contraintes budgétaires, on obtient la contrainte budgétaire intertemporelle de l'agent :

(4)
$$c_t + \frac{d_{t+1}}{R_{t+1}} + (\phi + w_t q(1-\tau_t-\sigma_t) - a_t)\, m_t = w_t(1-\tau_t-\sigma_t) + \frac{\theta_{t+1}}{R_{t+1}}$$

Dans cette dernière équation, les différents termes influant sur le coût d'un enfant ont été regroupés.

La maximisation de la fonction d'utilité (1) sous la contrainte budgétaire intertemporelle (4), compte-tenu des hypothèses précédentes, conduit à une solution optimale intérieure vérifiant :

$$U_{c_t} = R_{t+1}U_{d_{t+1}} = \frac{U_{m_t}}{\phi + w_t q(1-\tau_t-\sigma_t) - a_t} \tag{5}$$

2.1.2 Les firmes

On suppose, pour simplifier, qu'il existe une seule firme représentative, se comportant de manière concurrentielle, à une période t. Elle produit l'unique bien de l'économie en quantité Y_t, avec une fonction de production utilisant les facteurs capital et travail, et à rendements constants. On note K_t la quantité de capital employée dans la production et L_t la quantité de travail. La fonction de production $F(.,.)$ vérifie les propriétés habituelles des fonctions de production néo-classiques : elle est homogène de degré un, deux fois continûment différentiable, concave, et satisfait aux conditions d'Inada.

$$Y_t = F(K_t, L_t) \tag{6}$$

On suppose que le capital se déprécie totalement au cours d'un cycle de production.

w_t est le coût d'une unité de travail, alors que le facteur de rémunération du capital est R_t. Les conditions du premier ordre du programme de la firme conduisent aux équations habituelles :

$$w_t = F'_L(K_t, L_t) \tag{7}$$

$$R_t = F'_K(K_t, L_t) \tag{8}$$

2.1.3 Système de retraite et politique familiale

Deux organismes déterminent la politique économique considérée dans le modèle : une caisse de retraites par répartition reçoit les cotisations (τ_t) et verse les pensions (θ_t); une caisse d'allocations familiales collecte la taxe au taux σ_t et verse les allocations (a_t).

À chaque période, la caisse du système de retraite par répartition touche les cotisations et verse les pensions de manière à avoir un budget équilibré. À une période t, l'économie comprend N_{t-1} agents vieux et $N_t = m_{t-1}N_{t-1}$ agents jeunes. L'équilibre budgétaire de la caisse de retraite est atteint lorsque :

$$N_{t-1}\theta_t = N_t w_t (1 - q m_t)\tau_t$$

On en déduit ainsi le montant des prestations retraites en fonction de la démographie, du salaire et du taux de cotisation :

$$\theta_t = m_{t-1} w_t (1 - q m_t)\tau_t \tag{9}$$

Cette dernière équation fait apparaître l'externalité liée au système de retraites : en choisissant le nombre de leurs enfants m_{t-1}, les agents de la génération $t-1$ ne prennent pas en compte l'effet bénéfique de leur fécondité sur le système de retraites. De plus, lorsque les enfants entraînent pour leur parent un coût en temps ($q \neq 0$), la présence d'une taxe proportionnelle aux salaires τ_t cause une distorsion dans le comportement des agents, en diminuant le coût des enfants.

La caisse d'allocations familiales verse les allocations et collecte les cotisations $w_t(1 - q m_t)\sigma_t$ de manière à avoir un budget équilibré à chaque période. On en déduit que :

$$w_t(1 - q m_t)\sigma_t = a_t m_t \tag{10}$$

L'équilibre budgétaire entraîne donc que les allocations familiales sont sans effet sur la richesse des agents *ex-post* (équation (4)). Mais elles entraînent une distorsion positive sur les comportements de fécondité [17].

On fait l'hypothèse que les budgets des deux caisses sont équilibrés à chaque période. L'émission d'une dette permettrait éventuellement de dissocier les cotisations des prestations. Toutefois, l'externalité liée au système de retraite resterait la même, puisqu'elle est liée au fait que les décisions individuelles des agents sont prises en tenant compte de coûts erronés.

2.2 L'Équilibre intertemporel

Écrivons l'équilibre sur les différents marchés, c'est-à-dire sur le marché du travail et sur celui du capital.

L'équilibre sur le marché du travail requiert : $L_t = N_t(1 - qm_t)$. On définit alors la variable k_t comme le capital par unité de travail :

$$k_t = \frac{K_t}{N_t(1 - qm_t)} \tag{11}$$

On en déduit le prix d'équilibre du travail et le facteur de rendement du capital :

$$w_t = F'_L(k_t, 1) \tag{12}$$

$$R_t = F'_K(k_t, 1) \tag{13}$$

L'équilibre sur le marché du capital impose que l'épargne productive des agents en t est investie dans la firme produisant en $t + 1$: $K_{t+1} = N_t s_t$. En recourant à la variable k_t, et en remplaçant s_t par son expression donnée par l'équation (2), on obtient [18] :

$$m_t k_{t+1}(1 - qm_{t+1}) = w_t(1 - qm_t)(1 - \tau_t) - c_t - \phi m_t \tag{14}$$

Et de façon équivalente, en remplaçant s_t par (3), on obtient une autre expression de l'équilibre du marché de l'épargne :

$$m_t k_{t+1}(1 - qm_{t+1}) = \frac{d_{t+1} - \theta_{t+1}}{R_{t+1}} \tag{15}$$

17. On a supposé que les prestations retraites et les allocations familiales relevaient de deux caisses différentes, chacune ayant un budget équilibré. De manière équivalente, il aurait été possible de ne considérer qu'un seul budget consolidé, avec une seule taxe sur les salaires finançant les deux types de prestation θ_t et a_t. On remarque en effet que les contraintes budgétaires de l'agent ne dépendent que de la somme $\tau_t + \sigma_t$.

18. Pour obtenir cette équation, l'on a également tenu compte de l'équilibre budgétaire de la caisse de retraite.

Finalement, il est possible de définir un équilibre intertemporel :

DÉFINITION : *Pour une suite donnée de paramètres* $(\tau_t,a_t)_{t\geqslant 0}$ *de politique économique*[19]*, et pour un stock initial de capital* K_0 *et des caractéristiques démographiques de la population initiale* (N_0,m_{-1}) *données, un équilibre intertemporel avec prévisions parfaites est défini par une suite* $(c_t,d_t,k_t,m_t,w_t,R_t)_{t\geqslant 0}$ *vérifiant, pour toute période* $t \geqslant 0$ *les équations suivantes :*

$$U_{c_t} = R_{t+1}U_{d_{t+1}} = \frac{U_{m_t}}{\phi + w_t q(1-\tau_t-\sigma_t) - a_t} \tag{16}$$

$$c_t + \frac{d_{t+1}}{R_{t+1}} + (\phi + w_t q(1-\tau_t))\, m_t = w_t(1-\tau_t) + \frac{m_t w_{t+1}(1-qm_{t+1})\tau_{t+1}}{R_{t+1}} \tag{17}$$

$$m_t k_{t+1}(1-qm_{t+1}) = w_t(1-qm_t)(1-\tau_t) - c_t - \phi m_t \tag{18}$$

$$w_t = F'_L(k_t,1) \tag{19}$$

$$R_t = F'_K(k_t,1) \tag{20}$$

$$\sigma_t = \frac{a_t m_t}{w_t(1-qm_t)} \tag{21}$$

et à la date $t=0$*, les deux conditions supplémentaires suivantes :*

$$(1-qm_0)k_0 = \frac{K_0}{N_0} \tag{22}$$

$$d_0 = m_{-1}R_0k_0(1-qm_0) + m_{-1}w_0(1-qm_0)\tau_0 \tag{23}$$

On remarque qu'à la date 0, la variable k_0 dépend du comportement de fécondité à cette date m_0. K_0 et N_0 étant deux variables prédéterminées, leur rapport K_0/N_0 est également prédéterminé. En revanche, k_0 est une variable « forward » du fait de sa dépendance vis-à-vis de m_0.

La consommation des premiers vieux comporte un premier terme représentant le revenu de leur épargne $m_{-1}R_0k_0(1-qm_0)$, et un second terme constitué de leur prestation vieillesse $m_{-1}w_0(1-qm_0)\tau_0$. m_{-1} est une variable prédéterminée en $t=0$. Si q était nul, d_0 ne dépendrait pas de m_0 et serait une variable déterminée uniquement par les conditions initiales K_0, N_0 et m_{-1}. En revanche, quand $q>0$, le choix de m_0 par les individus de géné-

19. On peut de manière équivalente prendre (τ_t,σ_t) comme paramètres de politique économique indépendants, et alors a_t est endogène. Ici, on a choisit (τ_t,a_t), et donc σ_t est endogène.

ration $t = 0$ détermine leur offre de travail $(1 - qm_0)$, et donc le revenu de l'épargne des vieux ainsi que leur retraite.

L'annexe (1) montre que la dynamique d'équilibre peut être écrite, sous la forme :

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= I_t\left(x_t, x_{t+1}^e, m_{t+1}^e\right) \\ m_t &= J_t\left(x_t, x_{t+1}^e, m_{t+1}^e\right) \end{aligned}$$

Dans ces équations, x_t désigne le rapport K_t/N_t, et les variables x_{t+1}^e et m_{t+1}^e sont les anticipations en t de x_{t+1} et m_{t+1}. Enfin, I_t et J_t sont des fonctions qui dépendent du temps t lorsque les variables τ_t et a_t en dépendent. x_t est une variable « backward », dépendant du passé, alors que m_t est une variable « forward », dépendant du futur.

Le membre de droite de la contrainte budgétaire intertemporelle (17) fait apparaître dans la richesse de l'agent un terme dépendant de m_t, qui représente le montant des retraites. Mais, ce terme est considéré comme une donnée par les agents, et il n'influence pas les conditions d'arbitrage (16). C'est ce terme qui traduit la présence d'une externalité liée au système de retraites.

Dans le cas où $q = 0$, les conditions d'arbitrage (16) ne dépendent pas du mode de prélèvement, c'est-à-dire des paramètres σ et τ. L'externalité liée au système de retraites pourrait alors être corrigée en choisissant a_t (et donc un taux de cotisation σ_t) de sorte que :

(24) $$a_t = \frac{w_{t+1}\tau_{t+1}}{R_{t+1}}$$

Les allocations familiales diminueraient alors le coût des enfants du montant actualisé correspondant au surcroît de cotisations qu'un enfant procure au système de retraite. Pour le niveau de a_t donné par (24), les parents seraient amenés à choisir, en prenant les prestations retraite comme données, le nombre d'enfants qu'ils auraient mis au monde sans prestations familiales mais en « internalisant » l'effet du système de retraites : c'est-à-dire en optimisant en étant conscients que leur revenu à la retraite est fonction de leur nombre d'enfants.

Dans le cas où $q \neq 0$, la correction de l'externalité est plus complexe. En effet, les conditions d'arbitrage (16) dépendent maintenant des paramètres du système fiscal τ et σ. Ce régime fiscal entraîne des distorsions dans le comportement des agents, en diminuant le coût d'opportunité lié aux enfants. Cette distorsion joue donc en sens inverse de celle introduite par les prestations retraites. La distorsion totale est moindre que dans le cas où $q = 0$.

2.3 Définition de l'état stationnaire

Nous étudions maintenant l'équilibre stationnaire de l'économie. Admettons que les paramètres de politique soient constants : $\tau_t = \tau$ et $a_t = a$ $\forall t$. À l'état stationnaire on a également $\sigma_t = \sigma$ constant. L'équilibre stationnaire peut alors être défini par l'ensemble des variables (c, d, k, m, w, R) vérifiant les équations suivantes :

$$U_c = RU_d = \frac{U_m}{\phi + wq(1-\tau-\sigma) - a} \tag{25}$$

$$c + \frac{d}{R} + \phi m = w(1-qm)\left(1 - \tau + \frac{m\tau}{R}\right) \tag{26}$$

$$mk(1-qm) = w(1-qm)(1-\tau) - c - \phi \tag{27}$$

$$w = F'_L(k,1) \tag{28}$$

$$R = F'_K(k,1) \tag{29}$$

$$w(1-qm)\sigma = am \tag{30}$$

Nous ferons par la suite l'hypothèse que, pour tout couple de paramètres de politique économique (τ,a), il existe un unique équilibre stationnaire vérifiant l'ensemble des équations précédentes.

En général, l'équilibre conccurentiel stationnaire n'est pas optimal, et l'objet de la section 3 est d'étudier ce problème en détail.

3 État stationnaire optimal et décentralisation

Nous caractérisons l'état stationnaire optimal de l'économie, qui, dans un cadre avec fécondité exogène correspondrait à la règle d'or. Un tel état est ici défini comme la situation maximisant l'utilité stationnaire d'un agent, sous la contrainte de ressources de l'économie stationnaire.

Nous examinons ensuite les propriétés d'efficacité des équilibres stationnaires concurrentiels de l'économie, lorsque ceux-ci différent de l'état stationnaire optimal. Dans un cadre de fécondité endogène, ces propriétés sont beaucoup plus complexes qu'en fécondité exogène.

Nous montrons enfin qu'il existe pour l'économie concurrentielle stationnaire un choix des paramètres de politique économique (τ,a) permettant de reproduire l'état stationnaire optimal.

3.1 L'état stationnaire optimal

La contrainte de ressources de l'économie à une période quelconque t a pour expression :

$$N_t c_t + N_{t-1} d_t + N_t \phi m_t + K_{t+1} = F\left(K_t, N_t(1-qm_t)\right)$$

Elle exprime que la production totale est répartie entre l'ensemble des consommations et l'investissement en capital. En divisant par N_t, on obtient :

$$(31) \quad c_t + \frac{d_t}{m_{t-1}} + \phi m_t + \frac{K_{t+1}}{N_t} = F\left(\frac{K_t}{N_t(1-qm_t)},1\right)(1-qm_t)$$

Finalement, en introduisant la variable $k_t = K_t / (N_t(1-qm_t))$, on obtient :

$$(32) \quad c_t + \frac{d_t}{m_{t-1}} + \phi m_t + k_{t+1} m_t (1-qm_{t+1}) = F(k_t,1)(1-qm_t)$$

Enfin, à l'état stationnaire, cette équation s'écrit :

$$(33) \qquad c + \frac{d}{m} + \phi m = (F(k,1) - mk)(1-qm)$$

L'état stationnaire optimal est donc solution du programme suivant :

$$\max_{(c,d,m,k)} U(c,d,m)$$
$$\text{s.c.} c + \frac{d}{m} + \phi m = (F(k,1) - mk)(1-qm)$$

Sous l'hypothèse que la solution optimale notée $(\widehat{c},\widehat{d},\widehat{m},\widehat{k})$ est intérieure, celle-ci vérifie l'ensemble des conditions suivantes [20] :

$$\begin{aligned} U_c &= \widehat{m} U_d \\ (34) \qquad &= \frac{U_m}{\widehat{k}(1-q\widehat{m}) + q\left(F\left(\widehat{k},1\right) - \widehat{m}\widehat{k}\right) + \phi - \frac{\widehat{d}}{\widehat{m}^2}} \end{aligned}$$

$$(35) \qquad \widehat{c} + \frac{\widehat{d}}{\widehat{m}} + \phi\widehat{m} = \left(F\left(\widehat{k},1\right) - \widehat{m}\widehat{k}\right)(1-q\widehat{m})$$

$$(36) \qquad F'_K\left(\widehat{k},1\right) = \widehat{m}$$

Les relations (34), (35) et (36) généralisent la « règle d'or » de Samuelson-Diamond au cadre de fécondité endogène. Elles caractérisent la solution du programme d'optimisation, sous réserve que celle-ci est intérieure. Nous admettrons par la suite qu'il existe une unique solution à l'ensemble de ces équations.

---

20. On vérifie immédiatement que la contrainte est qualifiée. En effet, son gradient ne peut être nul compte tenu de la dérivée par rapport à c qui vaut 1.

3.2 Efficacité de l'équilibre concurrentiel

Dans le modèle à générations imbriquées avec fécondité exogène, l'équilibre concurrentiel stationnaire peut être efficace ou inefficace, selon que l'économie est en sous-accumulation ou en sur-accumulation par rapport à la règle d'or. Plus précisément, en considérant m comme exogène, la règle d'or correspond à la valeur de k telle que $F'_K(k,1) = m.$ On sait alors qu'un équilibre concurrentiel stationnaire tel que $F'_K(k,1) > m$ (en sous-accumulation, qualifié d'efficace) est optimal au sens de Pareto : il n'est pas possible d'améliorer l'utilité d'une génération sans détériorer celle d'au moins une autre génération. Au contraire, un équilibre concurrentiel stationnaire tel que $F'_K(k,1) < m$ (en sur-accumulation, dit inefficace) n'est pas optimal au sens de Pareto : il est possible d'améliorer simultanément l'utilité de toutes les générations.

Dans le modèle avec fécondité endogène, les notions de sous-accumulation ou de sur-accumulation deviennent plus complexes à définir. En effet, l'étude de la Pareto-optimalité de l'équilibre concurrentiel se heurte au fait que la population est endogène, et donc que l'ensemble des agents varie selon la trajectoire d'équilibre considérée. Toutefois, nous pouvons montrer la propriété suivante : un état stationnaire de l'économie concurrentielle tel que $F'_K(k,1) < m$ est inefficace (au sens de Pareto) [21].

Pour montrer cette propriété, considérons la contrainte de ressources de l'économie (32). En partant de l'état stationnaire associé à (k,m) tels que $F'_K(k,1) < m,$ et en gardant m fixe, on montre qu'il est possible d'augmenter l'utilité de toutes les générations suivantes en diminuant $k.$ Posons $\widetilde{k} = (F'_K)^{-1}(m).$ À la période initiale $t = 0,$ partant de $k_0 = k,$ on constate qu'il suffit de choisir $k_1 = \widetilde{k}$ pour augmenter les ressources de l'économie. En gardant m fixé, (32) s'écrit alors en $t = 0$:

$$c_0 + \frac{d_0}{m} + \phi m = \left(F(k,1) - m\widetilde{k}\right)(1 - qm)$$

Comme $\widetilde{k} < k,$ on en déduit que $F(k,1) - m\widetilde{k} > F(k,1) - mk$: les ressources de l'économie sont augmentées. Il est donc possible d'augmenter à la fois c_0 et d_0 par rapport aux valeurs stationnaires c et d.

Si à toutes les périodes suivantes, on choisit $k_t = \widetilde{k},$ (32) s'écrit alors :

$$c_t + \frac{d_t}{m} + \phi m = \left(F\left(\widetilde{k},1\right) - m\widetilde{k}\right)(1 - qm)$$

Par définition de $\widetilde{k},$ on a $F\left(\widetilde{k},1\right) - m\widetilde{k} > F(k,1) - mk$ puisque $\widetilde{k}$ réalise le maximum de la fonction $F(k,1) - mk$ à m fixé. Il est donc possible d'augmenter à la fois c_t et d_t par rapport aux valeurs stationnaires c et d à toutes les périodes. On a donc bien montré que l'équilibre concurrentiel stationnaire de départ n'était pas Pareto-optimal.

---

21. Dans le cas $F'_K(k,1) > m,$ aucun résultat d'efficacité de l'équilibre concurrentiel n'a été montré à notre connaissance.

Lorsque $F'_K(k,1) < m$, sachant que $m \neq \widehat{m}$ et donc que $\widetilde{k} \neq \widehat{k}$, il n'est pas possible d'en déduire que $k > \widehat{k}$. Contrairement au cas de fécondité exogène, il est possible *a priori* d'être dans un état stationnaire inefficace, tout en ayant une intensité capitalistique k plus faible que celle de l'état stationnaire optimal.

3.3 Décentralisation de l'état stationnaire optimal

Nous allons montrer qu'il existe un choix des paramètres (τ,a) permettant de rendre optimal l'état stationnaire de l'économie concurrentielle.

PROPOSITION 1 : *Pour un choix des paramètres de politique économique* (τ,a) *vérifiant :*

(37)
$$\widehat{\tau} = \frac{(\widehat{d}/\widehat{m}) - \widehat{m}\widehat{k}(1-q\widehat{m})}{F'_L(\widehat{k},1)(1-q\widehat{m})}$$

(38)
$$\widehat{a} = \frac{1}{\widehat{m}}\left(\frac{\widehat{d}}{\widehat{m}} - \widehat{m}\widehat{k}(1-q\widehat{m})\right)(1-2q\widehat{m})$$
$$= \frac{\widehat{\tau}}{\widehat{m}} F'_L(\widehat{k},1)(1-q\widehat{m})\,(1-2q\widehat{m})$$

l'état stationnaire de l'économie concurrentielle correspond à l'état stationnaire optimal. On peut également préciser l'expression de $\widehat{\sigma}$ *:*

$$\widehat{\sigma} = \frac{1}{F'_L(\widehat{k},1)}\left(\frac{\widehat{d}}{\widehat{m}} - \widehat{m}\widehat{k}(1-q\widehat{m})\right)\left(\frac{1-2q\widehat{m}}{1-q\widehat{m}}\right)$$

DÉMONSTRATION : *Admettons dans un premier temps que l'état stationnaire de l'économie concurrentielle corresponde à l'état optimal :* $(\widehat{c},\widehat{d},\widehat{m},\widehat{k})$. *En sachant que l'équation (36) est vérifiée, et compte tenu de (28) et (29)* [22]*, on constate que (26) et (35) sont formellement identiques. L'équation (27) impose la valeur optimale de* τ *:*

$$\widehat{m}\widehat{k}(1-q\widehat{m}) = F'_L\left(\widehat{k},1\right)(1-q\widehat{m})(1-\tau) - \widehat{c} - \phi\widehat{m}$$

22. Et en utilisant de plus le fait que la fonction de production est homogène de degré 1, c'est-à-dire que : $\widehat{w} + \widehat{m}\widehat{k} = F(\widehat{k},1)$.

Cette dernière expression peut être obtenue sous une autre forme en éliminant $\widehat{c}$ à l'aide de (26). On obtient alors l'équation (37). Enfin, l'identification de (25) et (34) conduit à l'expression de $\widehat{a}$:

$$\phi + F_L'\left(\widehat{k},1\right) q(1-\widehat{\tau}-\widehat{\sigma}) - \widehat{a} = \widehat{k}(1-q\widehat{m}) + q\left(F\left(\widehat{k},1\right) - \widehat{m}\widehat{k}\right) + \phi - \frac{\widehat{d}}{\widehat{m}^2}$$

Compte tenu de l'expression de $\widehat{\tau}$ trouvée précédemment, et de l'expression de $\widehat{\sigma}$ en fonction de $\widehat{a}$ donnée par (30), on obtient finalement (38).

Réciproquement, supposons que les paramètres (τ,a) soient fixés par (37) et (38), σ étant défini à partir de (30). Alors, il est clair que $(\widehat{c},\widehat{d},\widehat{m},\widehat{k})$ sont solutions de l'ensemble des équations (25), (26), (27), (28) et (29), puisque celles-ci sont formellement identiques aux équations caractérisant l'optimum (34), (35) et (36). Comme par hypothèse, il existe un unique équilibre concurrentiel stationnaire pour tout couple (τ,a), on en déduit que le choix de $(\widehat{\tau},\widehat{a})$ permet à l'économie concurrentielle d'être à l'état stationnaire optimal.

Finalement, on précise l'expression de $\widehat{\sigma}$, conséquence immédiate de l'équilibre budgétaire de la caisse d'allocations familiales.

INTERPRÉTATION : La valeur optimale des paramètres de politique économique (τ,a) peut être aisément interprétée.

On remarque tout d'abord que $\widehat{\tau}$ aurait exactement la même expression dans un modèle dans lequel la fécondité serait exogène. Pour voir cette propriété, il suffit de constater que les conditions d'équilibre et d'optimalité du modèle avec fécondité exogène sont obtenues simplement en supprimant le dernier membre des équations (25) et (34), toutes les autres équations étant inchangées. Par conséquent, si τ n'influençait pas m, il suffirait d'un seul instrument pour décentraliser l'état stationnaire optimal : le régime de retraites. La distorsion vient donc bien de l'existence d'un mécanisme de fécondité endogène. L'on sait par ailleurs, dans le modèle avec fécondité exogène, que $\widehat{\tau}$ peut être positif ou négatif, selon que l'économie sans système de retraites est en sur ou sous accumulation. Une valeur positive de τ correspond à l'existence d'un régime de retraite par répartition, une valeur négative de τ, à une redistribution des retraités vers les actifs.

Dans notre cadre avec fécondité endogène, $\widehat{\tau}$ peut aussi être positif ou négatif, mais, l'interprétation en termes de sur et sous accumulation est beaucoup plus délicate, comme on l'a vu à la section 3.2 [23]. De plus, lorsque la fécondité est endogène, il est nécessaire d'introduire un instrument de politique économique supplémentaire : un système d'allocations familiales, représenté par le paramètre a. En effet, le système de retraite crée une externalité puisque les agents ne prennent pas en compte l'effet positif de leur fécondité sur le niveau de leur retraite. La présence d'un système d'allocations

23. D'une manière générale, les transferts optimaux dans une économie dépendent des valeurs relatives des paramètres de préférence des consommateurs et de technologie de production. La section suivante détaille ce point dans des cas particuliers du modèle étudié ici.

familiales présente donc l'intérêt de faire « internaliser cette externalité », en diminuant le coût lié aux enfants.

Dans le cas où $q = 0$, la taxation proportionnelle au taux σ qui finance le système d'allocations familiales n'introduit pas de distorsion dans les comportements des agents. On constate alors que $\widehat{am}$ doit être exactement égal au montant des cotisations payées par l'agent et destinées à financer le système de retraite. Ainsi, dans le cas particulier où $q = 0$, le montant optimal des allocations familiales, pour l'ensemble des enfants d'un foyer, doit être égal au montant des cotisations retraites du foyer, ce qui entraîne que les taux de cotisation aux systèmes de retraite et d'allocations familiales doivent être égaux : $\widehat{\sigma} = \widehat{\tau}$. Le coût apparent des enfants est alors ramené au coût social effectif.

Dans le cas où $q \neq 0$, l'on constate que $\widehat{am}$ est plus faible que le montant de la cotisation retraite. Cette propriété provient de ce que, lorsque les enfants entraînent un coût en temps, une taxe sur les salaires (ici τ) a pour effet de diminuer le coût d'opportunité du temps consacré aux enfants. De plus, le financement des allocations familiales au taux σ allège encore l'effet distorsif du système de retraites [24]. Ce dernier effet vient donc en partie corriger l'externalité liée au système de retraites.

4 Étude de cas particuliers

Sous les hypothèses présentées ci-dessous, on étudie maintenant l'état stationnaire optimal de l'économie, puis la dynamique et l'état stationnaire de l'économie concurrentielle. La comparaison de l'état stationnaire de l'économie concurrentielle avec l'état stationnaire optimal permettra finalement de donner l'expression optimale des paramètres de politique économique.

4.1 Les hypothèses

Nous considérons maintenant que les agents ont une utilité log-linéaire de la forme :

$$U(c_t, d_{t+1}, m_t) = \gamma_1 \ln c_t + \gamma_2 \ln d_{t+1} + \gamma_3 \ln m_t$$

avec $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$.

Afin d'étudier la dynamique, on considère dorénavant que les paramètres de politique économique τ et σ sont constants au cours du temps. Le programme d'un agent devient :

24. La propriété importante est que σ n'introduit pas de nouvelle distorsion, mais réduit en partie l'effet distorsif du système de retraite. En effet, la taxe σ (comme τ) réduit le salaire net, et par conséquent le coût d'opportunité du temps consacré aux enfants. Ceci compense l'externalité négative liée au système de retraites.

$$\max_{(c_t,d_{t+1},m_t)} \quad \gamma_1 \ln c_t + \gamma_2 \ln d_{t+1} + \gamma_3 \ln m_t$$
$$\text{s.c. } c_t + \frac{d_{t+1}}{R_{t+1}} + (w_t q(1-\tau-\sigma) + \phi - a_t)\, m_t = w_t(1-\tau-\sigma) + \frac{\theta_{t+1}}{R_{t+1}}$$

La solution vérifie :

$$\begin{aligned} c_t &= \gamma_1 \left[w_t(1-\tau-\sigma) + \frac{\theta_{t+1}}{R_{t+1}} \right] \\ d_{t+1} &= \gamma_2 R_{t+1} \left[w_t(1-\tau-\sigma) + \frac{\theta_{t+1}}{R_{t+1}} \right] \\ m_t\,(w_t q(1-\tau-\sigma) + \phi - a_t) &= \gamma_3 \left[w_t(1-\tau-\sigma) + \frac{\theta_{t+1}}{R_{t+1}} \right] \end{aligned}$$

À ce stade, il est instructif de considérer l'impact du système de retraite sur la fécondité *en équilibre partiel* [25]. On remarque que si

$$\frac{\theta_{t+1}}{R_{t+1}} < \frac{\phi - a_t}{q}$$

c'est-à-dire, si le niveau de redistribution des prestations sociales (vieillesse et famille) est assez faible, et si le coût en temps est faible, m_t est une fonction croissante de w_t. En particulier, si $q = 0$, cette condition est automatiquement vérifiée. Dans le cas contraire, m_t décroît avec w_t. Si le niveau des prestations retraites est élevé, m_t diminue donc avec w_t.

L'impact du système de retraite sur le taux d'activité par adulte $(1 - qm_t)$ est contraire à celui obtenu sur le taux de fécondité m_t. Si le niveau des prestations est faible, le taux d'activité diminue avec w_t. En revanche, s'il est élevé, le taux d'activité augmente avec w_t.

La dynamique d'équilibre est obtenue en remplaçant *ex-post* a_t et θ_{t+1}, en supposant que les budgets des caisses sont équilibrés, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} a_t m_t &= \sigma w_t(1 - qm_t) \\ \theta_{t+1} &= \tau m_t w_{t+1}(1 - qm_{t+1}) \end{aligned}$$

Le comportement du consommateur devient :

(39) $$c_t = \gamma_1 \left[w_t(1-\tau-\sigma) + \frac{\tau m_t w_{t+1}(1 - qm_{t+1})}{R_{t+1}} \right]$$

(40) $$d_{t+1} = \gamma_2 R_{t+1} \left[w_t(1-\tau-\sigma) + \frac{\tau m_t w_{t+1}(1 - qm_{t+1})}{R_{t+1}} \right]$$

$$m_t\,(w_t q(1-\tau-\sigma) + \phi) - \sigma w_t(1 - qm_t)$$

(41) $$= \gamma_3 \left[w_t(1-\tau-\sigma) + \frac{\tau m_t w_{t+1}(1 - qm_{t+1})}{R_{t+1}} \right]$$

25. La suite de cette section nous permettra finalement de dégager cet impact en équilibre général, à l'aide de simulations numériques.

La fonction de production est COBB-DOUGLAS :

$$F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

avec $0 < \alpha < 1$.

4.2 L'état stationnaire optimal

L'annexe 2 montre que l'état stationnaire optimal conduit à une solution intérieure (dans laquelle $m \neq 0$) seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$\alpha < \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_2} \tag{42}$$

Afin d'obtenir des expressions explicites, il est nécessaire de distinguer deux cas particuliers : le cas où les enfants n'entraînent qu'un coût fixe pour leur parent ($q = 0$) et le cas où seul le coût en temps existe ($\phi = 0$).

(43)

$q = 0$

$$\widehat{m} = \frac{\alpha^{\alpha}\left(1-\gamma_1-\alpha(1+\gamma_2)\right)^{1-\alpha}}{\left(\phi(1+\gamma_2)\right)^{1-\alpha}}$$

$$\widehat{k} = \frac{\alpha\phi(1+\gamma_2)}{1-\gamma_1-\alpha(1+\gamma_2)}$$

$\phi = 0$

$$\widehat{m} = \frac{1}{q}\left[\frac{1-\gamma_1-\alpha(1+\gamma_2)}{1-\alpha-\alpha\gamma_1+\gamma_2(1-2\alpha)}\right]$$

$$\widehat{k} = \left[\alpha q \frac{1-\alpha-\alpha\gamma_1+\gamma_2(1-2\alpha)}{1-\gamma_1-\alpha(1+\gamma_2)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Pour le cas $\phi = 0$, on vérifie aisément que l'expression $1-\alpha-\alpha\gamma_1+\gamma_2(1-2\alpha)$ est positive lorsque la condition (42) est satisfaite. L'état stationnaire optimal est donc bien défini dans les deux cas.

4.3 Étude de la dynamique et de l'état stationnaire concurrentiel

La dynamique de l'économie est entièrement caractérisée par un système de deux équations à deux variables k_t et m_t.

La première équation est déterminée en utilisant l'équilibre du marché de l'épargne (15) et l'expression de la consommation de deuxième période (40). On en déduit l'équation :

$$k_{t+1} m_t (1 - q m_{t+1}) \Gamma_2 = \gamma_2 (1-\alpha) k_t^{\alpha} (1-\tau-\sigma) \tag{44}$$

où l'on a posé :

$$\Gamma_2 = 1 + (1-\gamma_2)\tau \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

La seconde équation est déterminée à partir de la demande d'enfants (41) :

$$k_{t+1}m_t(1-qm_{t+1})\gamma_3\tau\frac{1-\alpha}{\alpha} = m_t\left[\phi+q(1-\alpha)k_t^\alpha(1-\tau)\right] - (1-\alpha)k_t^\alpha\Gamma_3 \tag{45}$$

avec :

$$\Gamma_3 = \gamma_3(1-\tau-\sigma)+\sigma$$

Les calculs suivants conduisent à une forme plus explicite de la dynamique. Le rapport de (44) et de (45) conduit à la relation statique suivante entre m_t et k_t :

$$m_t = \frac{\left[\gamma_3\tau\frac{1-\alpha}{\alpha}\gamma_2(1-\tau-\sigma)+\Gamma_2\Gamma_3\right](1-\alpha)k_t^\alpha}{\Gamma_2\left[\phi+q(1-\tau)(1-\alpha)k_t^\alpha\right]} \tag{46}$$

Lorsqu'aucun des deux paramètres (ϕ et q) n'est nul, m_t est donc une fonction monotone croissante de k_t. Il est alors possible de se ramener à une dynamique d'ordre 1.

En éliminant $(1-\alpha)k_t^\alpha$ entre les équations (44) et (45), on en déduit l'équation :

$$k_{t+1}(1-qm_{t+1})\left[\gamma_3\tau\frac{1-\alpha}{\alpha}+\frac{\Gamma_2\left(\Gamma_3-qm_t(1-\tau)\right)}{\gamma_2(1-\tau-\sigma)}\right] = \phi \tag{47}$$

Afin de comprendre la dynamique, il est préférable d'introduire la variable $x_t = K_t/N_t = k_t(1-qm_t)$ qui est prédéterminée à la période t. Le système d'équations (46, 47) s'écrit alors :

$$m_t = \frac{\gamma_3\tau\frac{1-\alpha}{\alpha}\gamma_2(1-\tau-\sigma)+\Gamma_2\Gamma_3}{\Gamma_2\left[\frac{\phi}{1-\alpha}x_t^{-\alpha}(1-qm_t)^\alpha+q(1-\tau)\right]} \tag{48}$$

$$x_{t+1} = \frac{\phi}{\gamma_3\tau\frac{1-\alpha}{\alpha}+\frac{\Gamma_2\left(\Gamma_3-qm_t(1-\tau)\right)}{\gamma_2(1-\tau-\sigma)}} \tag{49}$$

À la période t, x_t est prédéterminée et (48) détermine m_t. x_{t+1} est alors déterminée par (49).

Cette dynamique converge vers un état stationnaire (x,m). En particulier, m est défini implicitement par l'équation :

$$\frac{(1-qm)\left[\gamma_3\tau\frac{1-\alpha}{\alpha}+\frac{\Gamma_2\left(\Gamma_3-qm(1-\tau)\right)}{\gamma_2(1-\tau-\sigma)}\right]}{\left[(1-\alpha)\left(\gamma_3\tau\frac{1-\alpha}{\alpha}\gamma_2(1-\tau-\sigma)+\Gamma_2\Gamma_3-qm(1-\tau)\Gamma_2\right)\right]^{1/\alpha}} = \phi^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\left(\Gamma_2 m\right)^{-1/\alpha} \tag{50}$$

Dans les cas particuliers $q = 0$ ou $\phi = 0$, il est possible d'obtenir explicitement la dynamique des variables k_t et m_t. Ces deux cas extrêmes sont étudiés pour des raisons de simplicité technique. Il faut cependant noter que le cas $q = 0$ peut être interprété économiquement comme une situation dans laquelle le taux d'activité par adulte est de 100 % (c'est-à-dire, où personne n'arrête de travailler pour élever ses enfants) [26].

Cas particulier $q = 0$

Dans le cas particulier où $q = 0$, on constate que l'équation (47) détermine directement une valeur constante de k_{t+1} :

$$k_{t+1} = k = \frac{\phi}{\gamma_3 \tau \frac{1-\alpha}{\alpha} + \frac{\Gamma_2 \Gamma_3}{\gamma_2(1-\tau-\sigma)}} \tag{51}$$

Ainsi, partant de la date $t = 0$, le capital atteint son état stationnaire k dès la période 1 [27]. L'intensité capitalistique k augmente en ϕ. Autrement dit, plus le coût du capital humain est élevé, plus on lui substitue du capital physique. Dès la période 1, d'après (46), m_t est également stationnaire et vaut :

$$\begin{aligned} m_t &= m \\ &= \frac{(1-\alpha)\left(\gamma_3 \tau \dfrac{1-\alpha}{\alpha} \gamma_2(1-\tau-\sigma) + \Gamma_2 \Gamma_3\right)^{1-\alpha} [\gamma_2(1-\tau-\sigma)]^{\alpha}}{\Gamma_2 \phi^{1-\alpha}} \end{aligned} \tag{52}$$

Lorsque les enfants n'entraînent qu'un coût fixe pour leur parent, l'économie atteint donc l'état stationnaire en une période.

Cas particulier $\phi = 0$

Dans le cas particulier où $\phi = 0$, on constate que l'équation (46) détermine directement une valeur constante de m_t :

$$m_t = m = \frac{\gamma_3 \tau \dfrac{1-\alpha}{\alpha} \gamma_2(1-\tau-\sigma) + \Gamma_2 \Gamma_3}{q(1-\tau)\Gamma_2} \tag{53}$$

Le nombre d'enfants est donc constant. Il dépend de manière inversement proportionnelle du coût en temps q des enfants.

---

26. La section 5.1 présente quelques valeurs historiques de q pour différents pays industrialisés.

27. Le fait que l'ajustement se fasse en une période est lié à l'utilisation d'un modèle à générations imbriquées dans lequel les agents vivent deux périodes. Un modèle incluant plus de générations comporterait une dynamique d'ajustement plus longue, mais ne pourrait plus être résolu analytiquement.

Pour un ratio K_0/N_0 initial suffisamment faible (situation de l'économie française après la guerre), la première période de 30 ans correspond à une hausse du capital par tête.

Des effets plus proches des faits stylisés auraient pu être obtenus en introduisant des gains de productivité.

En revanche, l'intensité capitalistique suit une dynamique donnée par (44) :

$$k_{t+1}m(1-qm)\Gamma_2 = \gamma_2(1-\alpha)k_t^{\alpha}(1-\tau-\sigma)$$

avec m qui est donné par (53). Cette dynamique est monotone convergente vers un état stationnaire k tel que :

$$k^{1-\alpha} = \frac{\gamma_2(1-\tau-\sigma)(1-\alpha)}{m(1-qm)\Gamma_2} \tag{54}$$

Comme dans le cas précédent, on vérifie que l'intensité capitalistique augmente avec le coût des enfants.

4.4 Décentralisation de l'état stationnaire optimal

Dans les cas particuliers $q = 0$ et $\phi = 0$, on dispose d'une expression explicite de l'état stationnaire. Il est alors instructif d'identifier l'état stationnaire de l'économie concurrentielle à l'état stationaire optimal, afin de déterminer le montant stationnaire optimal des instruments de politique économique τ et σ.

Cas particulier $q = 0$

Dans ce cas, on sait que l'économie concurrentielle est à l'état stationnaire dès la première période. Dès la période 1, une politique économique adaptée peut alors conduire l'économie décentralisée à l'état stationnaire optimal. La comparaison de l'état stationnaire concurrentiel (équations (51) et (52)) avec l'état stationnaire optimal (43) conduit aux valeurs suivantes :

$$\widehat{\sigma} = \frac{\gamma_2(1-\alpha)-\alpha}{(1+\gamma_2)(1-\alpha)} = \widehat{\tau}$$

$$\widehat{a} = \frac{\phi\left[\gamma_2(1-\alpha)-\alpha\right]}{1-\gamma_1-\alpha(1+\gamma_2)} = \phi\left[1-\frac{\gamma_3}{1-\gamma_1-\alpha(1+\gamma_2)}\right]$$

$\widehat{\sigma}$ et $\widehat{\tau}$ ne dépendent pas de ϕ. Cette propriété repose sur les formes particulières retenues pour les fonctions de production et d'utilité.

Il existe une configuration des paramètres de l'économie pour laquelle l'équilibre concurrentiel stationnaire est optimal sans aucune intervention de l'Etat. On remarque en effet sur ces expressions que, si

$$\alpha = \frac{\gamma_2}{1+\gamma_2}$$

on a $\widehat{a} = \widehat{\sigma} = \widehat{\tau} = 0$. Pour cette configuration des paramètres, l'économie décentralisée stationnaire coïncide directement avec l'état stationnaire optimal. Il n'est donc pas nécessaire d'établir un système de retraites ($\widehat{\tau} = 0$), et en même temps, aucune externalité néfaste n'étant introduite, les allocations familiales sont inutiles ($\widehat{\sigma} = \widehat{a} = 0$).

Si $\alpha < \gamma_2/(1+\gamma_2)$, il est optimal d'introduire un système de retraites et par conséquent un système d'allocations familiales, puisque $\widehat{\sigma}$ et $\widehat{\tau}$ sont identiques. Il n'est donc pas optimal d'avoir un système de retraites par répartition sans allocations familiales. Si $\alpha > \gamma_2/(1+\gamma_2)$, il est optimal d'introduire un système de retraite négatif, et il est donc aussi optimal d'introduire des allocations familiales négatives [28].

Cas particulier $\phi = 0$

La comparaison de (53) et (54) avec (43) conduit aux valeurs suivantes :

$$\widehat{\sigma} = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\right) / \left(\frac{1+\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$$
$$\widehat{\tau} = \frac{\gamma_2}{(\gamma_1+\gamma_2)} - \frac{\alpha}{1-\alpha}$$
$$\widehat{a} = \frac{\widehat{\tau}}{\widehat{m}}(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\widehat{m}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-q\widehat{m})(1-2q\widehat{m})$$

Les paramètres $\widehat{\sigma}$ et $\widehat{\tau}$ ne dépendent pas de q. Cette propriété repose là encore sur les formes particulières retenues pour les fonctions de production et d'utilité.

Dans ce cas, c'est pour les valeurs des paramètres vérifiant :

$$\alpha = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + 2\gamma_2}$$

que l'on a à la fois $\widehat{\sigma} = \widehat{\tau} = 0$.

On peut vérifier que $\widehat{\sigma}$ et $\widehat{\tau}$ sont de même signe lorsque

$$\alpha > \frac{\gamma_3 - \gamma_1}{1-\gamma_1} \tag{55}$$

En effet, en comparant les expressions de $\widehat{\sigma}$ et $\widehat{\tau}$, l'inégalité (42) implique :

$$\frac{1+\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} - \frac{\alpha}{1-\alpha} > 0$$

Alors, pour que $\widehat{\sigma}$ et $\widehat{\tau}$ aient le même signe, il faut que :

$$\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2} > 0$$

condition qui équivaut à (55).

---

28. Le cas d'un système de retraite ou d'allocations familiales négatif est étudié par souci d'exhaustivité, même si nous ne connaissons pas d'exemple historique d'un tel système.
Toutefois, un système de retraite négatif est théoriquement analogue à une situation où toute la retraite est sous forme de capitalisation, et où les retraités paient des impôts. De même, les prestations familiales nettes peuvent être négatives, si la TVA sur les biens consommés par les enfants est supérieure aux allocations familiales.

La condition (55) est toujours vérifiée si $\gamma_3 < \gamma_1$. Comme dans le cas précédent, il est alors optimal d'introduire un système d'allocations familliales conjointement au régime de retraite.

En revanche, si la condition (55) n'est pas vérifiée, $\widehat{\sigma}$ et $\widehat{\tau}$ sont de signe contraire. Ainsi, si $\widehat{\tau} > 0$, il peut être optimal d'introduire un système de retraite, tout en désincitant la fécondité par une taxe $\widehat{\sigma} < 0$. Cette propriété étonnante *a priori* provient de ce que le système de retraite a maintenant un impact distorsif sur la décision d'avoir des enfants en diminuant leur coût. Cet effet peut donc être plus fort que l'effet d'externalité lié au système de retraite.

4.5 Simulation numérique

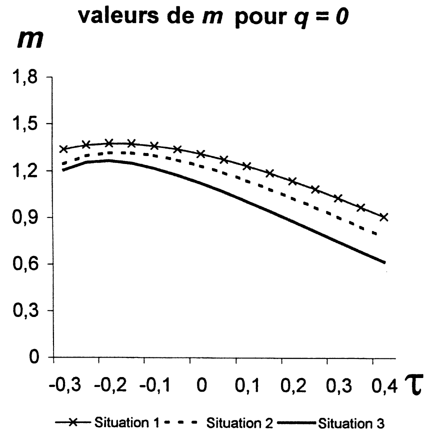
Afin de juger de l'influence des différentes mesures de politique économique sur la fécondité, on présente les résultats de simulations numériques dans chaque cas particulier $q = 0$ et $\phi = 0$. La méthode utilisée consiste à étudier les variations de m en fonction de τ et σ à l'état stationnaire, ceci pour différentes valeurs des paramètres de la fonction d'utilité $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Trois situations sont retenues : dans la première, les paramètres sont choisis de manière à ce qu'il serait optimal de mettre en place un système de retraites associé à des allocations familiales ; dans la seconde, l'économie sans système de retraites et d'allocations familiales atteint l'état stationnaire optimal ; enfin, pour la troisième, la politique optimale consisterait à introduire un système de transferts des vieux vers les jeunes (un système de retraites négatif) ainsi qu'un système de taxes sur les enfants (des allocations familiales négatives). $\alpha = 1/3$ dans tous les cas. Les paramètres sont choisis de manière à ce que l'ordre de grandeur de m soit aux alentours de 1, ce qui correspond à un taux de fécondité de l'ordre de 2, puisque m est le nombre d'enfants par adulte. Comme l'étude précédente l'a montré, la frontière entre ces trois situations n'est pas la même dans les deux cas particuliers $q = 0$ et $\phi = 0$. Aussi retenons-nous des valeurs différentes des paramètres de préférence dans ces deux cas.

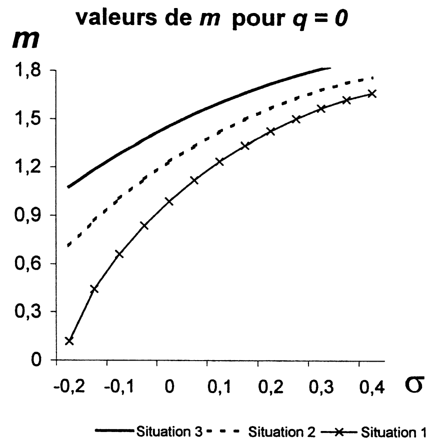
Pour chacun des deux cas, après avoir donné les valeurs des paramètres utilisés pour chacune des trois situations, les évolutions de la fécondité sont représentées dans deux diagrammes. Le premier donne l'évolution de m en fonction de τ, σ étant fixé à sa valeur optimale $\widehat{\sigma}$. Le second donne l'évolution de m en fonction de σ, τ étant fixé à sa valeur optimale $\widehat{\tau}$.

Cas particulier $q = 0,\ \phi = 0.07$,

	γ_1	γ_2	γ_3	$\widehat{\tau}$	$\widehat{\sigma}$
Situation 1	1/6	2/3	1/6	1/10	1/10
Situation 2	1/4	1/2	1/4	0	0
Situation 3	1/3	1/3	1/3	– 1/8	– 1/8

On observe que pour des valeurs raisonnables de τ, le nombre d'enfants m diminue avec la taille du régime de retraites par répartition. De manière naturelle, on vérifie bien que m augmente avec l'importance des prestations familiales.



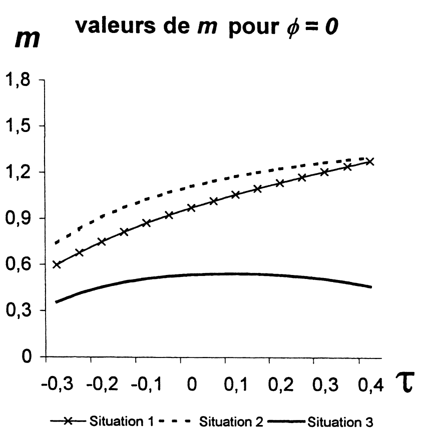


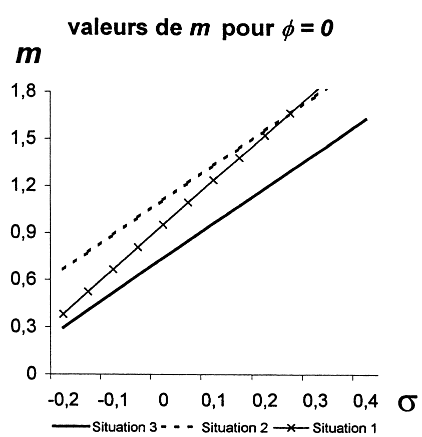
Cas particulier $\phi = 0,\ q = 0.3.$

les paramètres prennent maintenant les valeurs suivantes :

	γ_1	γ_2	γ_3	$\widehat{\tau}$	$\widehat{\sigma}$
Situation 1	1/4	1/2	1/4	1/6	1/18
Situation 2	1/3	1/3	1/3	0	0
Situation 3	1/2	1/4	1/4	– 1/6	– 5/42

et l'évolution de la fécondité devient :





On observe que le nombre d'enfants m augmente avec la taille du régime de retraites par répartition. Ce résultat surprenant est dû au fait que, lorsque $\phi = 0$, l'effet direct d'une augmentation de τ est une diminution du coût des enfants. m augmente toujours avec l'importance des prestations familiales.

Dans la situation 3, m est en forme de cloche en fonction de τ. Ce résultat est très sensible à la valeur choisie pour σ. Ainsi, lorsque σ est positif, m redevient croissant en τ.

Les simulations dans le cas $\phi = 0$ donnent des résultats très contre-intuitifs, puisque la taxe finançant le système de retraite a en même temps la propriété d'augmenter la fécondité.

Dans un cadre plus général, il faut évidemment considérer que les deux types de coûts des enfants existent conjointement. Il est raisonnable de penser que les effets trouvés dans le premier cas ($\phi \neq 0$) dominent, les effets du second cas n'apportant qu'une légère correction.

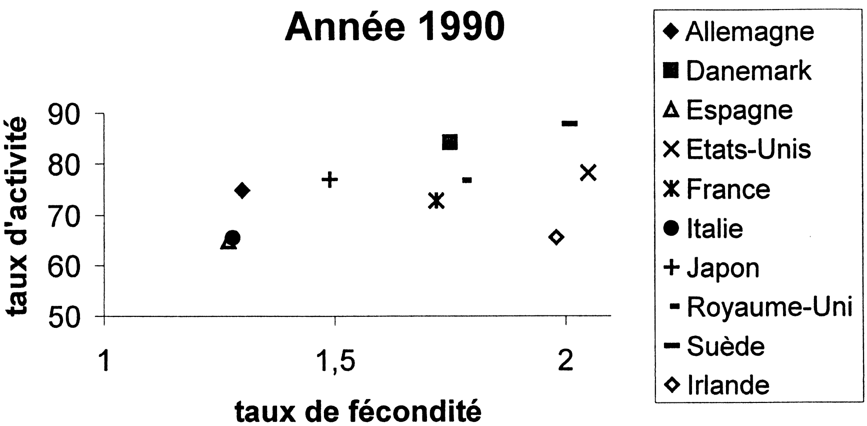
L'ensemble de ces simulations montre que la fécondité m est fortement sensible à des variations des paramètres de politique économique, ceci pour une plage importante des paramètres de la fonction d'utilité. Ces résultats sont compatibles avec le fait que la baisse de la fécondité observée en France depuis les années soixante puisse être en grande partie expliquée par les variations importantes des prestations vieillesse et famille au cours de la période. Afin de préciser ce point, on va maintenant s'attacher à une comparaison directe des résultats donnés par le modèle avec l'évolution historique de la fécondité.

5 Confrontation aux faits stylisés

Dans cette section, on se demande si le modèle peut reproduire l'évolution observée de la fécondité depuis la seconde guerre mondiale. Pour cela, on calcule à l'aide du modèle l'évolution de la fécondité, lorsque τ et σ prennent leurs valeurs historiques. Le paramètre q est évalué en rapprochant le modèle des faits empiriques observés.

5.1 Calcul de q

Dans le modèle théorique, on suppose que les enfants engendrent un coût en temps constant. La question est de savoir si cela correpond à une certaine réalité historique. On cherche donc dans cette section à « calculer » q. Le taux d'activité (l) de la population en âge de travailler est représenté dans le modèle par $1 - qm$. Le temps consacré par un adulte à chaque enfant q peut donc être mesuré comme $(1 - l)/m$. On a donc besoin d'une estimation du taux d'activité de la population en âge de travailler et d'une estimation du nombre d'enfants par adulte. Le taux d'activité est mesuré par la population active des deux sexes entre 20 et 64 ans rapportée à la population totale du même âge [29, 30]. Le nombre d'enfants par adulte est approximé par l'indicateur de fécondité des Nations unies divisé par deux [31]. À titre indicatif, le graphique ci-dessous représente, pour l'année 1990, la position relative de dix pays industrialisés en terme de taux d'activité et de taux de fécondité.



Le tableau ci-dessous indique les valeurs obtenues pour q pour ces mêmes pays en 1950, 1970 et 1990.

	1950	1970	1990
Allemagne	0,3	0,4	0,4
Danemark	0,3	0,3	0,2
Espagne	0,4	0,3	0,6
États-Unis	0,2	0,3	0,2
France	0,3	0,3	0,3
Irlande	0,2	0,2	0,3
Italie	0,4	0,4	0,5
Japon	0,2	0,2	0,3
Royaume-Uni	0,3	0,3	0,3
Suède	0,3	0,3	0,1

On peut ainsi classer les pays étudiés en trois catégories : ceux pour lesquels q aurait augmenté entre 1950 et 1990 (Allemagne, Espagne, Italie, Irlande, Japon), ceux pour lesquels q serait resté particulièrement stable (France, États-Unis et Royaume-Uni) et enfin ceux pour lesquels q aurait diminué (Danemark et Suède). On retrouve bien le fait que les pays où q est le plus élevé ont les taux de fécondité les plus faibles. Les différences entre

29. La source est : « Economically Active Population 1950-2010 » Fourth Edition ILO Bureau of Statistics, 1998.
30. On fait abstraction des problèmes liés à la diminution de l'âge de la retraite.
31. World Population Prospects: The 1998 Revision, United Nations, Tome 1, 2000.

pays de la valeur de q peuvent s'expliquer par des arguments de type sociologiques [32] que nous ne discuterons pas ici. On note finalement que l'hypothèse selon laquelle q serait resté stable en France entre 1950 et 1990 est raisonnable.

5.2 Évolution historique en France

Historiquement, les taux de cotisations retraite (τ) et d'allocations familiales (σ) ont varié en France de façon significative entre 1950 et 1990. Durant la même période la descendance finale par adulte a aussi considérablement varié (*cf.* ci-dessous le tableau récapitulatif).

Taux de cotisation et descendance finale par adulte

	1950	1960	1970	1980	1990
τ	5,3	6,5	8,8	12,9	17,4
σ	16,8	14,2	10,5	9,0	7,0
m	1,3	1,3	1,1	1,1	1,0

Source : Comptes de la protection sociale [33] et Observatoire Démographique Européen.

La question est ensuite de savoir si notre modèle théorique, qui conduit à une expression de la fécondité donnée par (50), est capable de reproduire l'évolution historique mentionnée ci-dessus.

Dans le modèle théorique, on fixe α et q à leur valeurs « observées », soit $\alpha = 0{,}33$ et $q = 0{,}27$ [34]. Faute d'informations particulières sur γ_1, γ_2, et γ_3, on choisit la combinaison suivante : $\gamma_1 = 0{,}4$, $\gamma_2 = 0{,}4$, et $\gamma_3 = 0{,}2$. ϕ est calibré de façon à ce que la valeur de m calculée par le modèle en 1950 soit égale à la valeur observée.

Le modèle ainsi calibré engendre une évolution de la fécondité en fonction des paramètres de politique économique (τ et σ) très proche de la fécondité observée.

	1950	1960	1970	1980	1990
m simulé	1,3	1,2	1,1	1,1	1,0
m observé	1,3	1,3	1,1	1,1	1,0

32. Il s'agit par exemple de l'existence de structures de garde pour les enfants, ou encore de la « pression sociale » contraignant les femmes à arrêter de travailler pour élever leurs enfants.
33. On suppose pour les années 1950 et 1960 que la répartition entre les dépenses maladie et vieilliesse est la même qu'en 1967 (première année pour laquelle la distinction est disponible), à savoir 2/3 pour la maladie et 1/3 pour la vieilliesse.
34. q est calculé ici à partir de la descendance finale et non plus à partir de l'indicateur conjoncturel de fécondité. Cette manière de procéder est plus cohérente avec le modèle, compte tenu du fait que chaque génération représente trente ans. Le tableau précédent utilisait l'indice conjoncturel faute d'information sur les autres pays.

De plus, la chute de la fécondité simulée ($-0{,}3$ enfants par adulte en âge de travailler) est très peu sensible à la valeur des paramètres retenue. La diminution de m à q fixé entraîne aussi l'augmentation du taux d'activité par adulte $(1 - qm)$, de 65 % à 73 % dans le modèle. Cette hausse est identique à l'évolution historique [35]. Cette dernière a d'ailleurs été principalement due à la hausse du taux d'activité des femmes.

Dans le cas de la France, il paraît donc possible d'expliquer la majeure partie de la chute de la fécondité par de simples arbitrages micro-économiques. En particulier, il ne semble pas utile de recourir à l'hypothèse d'une « évolution des mœurs », qui dans le cadre du modèle se traduirait par des variations des préférences γ_i, et en particulier du « goût pour les enfants » γ_3, ou du temps nécessaire à leur consacrer q.

6 Conclusion

Dans cet article, nous avons considéré un modèle à générations imbriquées avec fécondité endogène. Les enfants sont inclus dans la fonction d'utilité des parents et engendrent à la fois un coût en temps et un coût financier. L'existence d'un système de retraite par répartition introduit alors une externalité : le nombre d'enfants à l'équilibre est inférieur à sa valeur optimale car son impact positif sur le niveau des retraites n'est pas pris en compte.

Le papier avait deux objectifs : un objectif théorique et un objectif de confrontation aux faits stylisés.

Dans un premier temps, l'équilibre décentralisé a été défini en dynamique et à l'état stationnaire. Il a de plus été comparé à un état stationnaire « optimal » qui constitue une généralisation de la règle d'or à la ALLAIS-SAMUELSON-DIAMOND au cadre de fécondité endogène. On a montré que ce dernier pouvait être décentralisé en utilisant deux instruments : un régime de retraite par répartition et un mécanisme d'allocation familiales. Ceci étend le résultat connu dans le cadre des modèles à fertilité exogène où l'état stationnaire optimal peut être décentralisé grâce à un seul instrument : le régime de retraite par répartition.

Dans un second temps, on a comparé les prédictions du taux de fécondité données par le modèle aux faits stylisés. Pour cela, les paramètres de politique économique, à savoir les taux de cotisations, ont été fixés à leurs valeurs historiques depuis le début des années soixante. Les modifications de politique sociale pourraient expliquer la totalité de la chute de la natalité observée. À cette dernière correspond de plus une hausse des taux d'activité compatible avec l'évolution historique. Ainsi, il n'est pas nécessaire de recourir à l'hypothèse d'un changement des préférences des agents (modification de la fonction d'utilité) ou des habitudes sociales (coût des enfants en temps) pour expliquer la chute de la natalité et la hausse des taux d'activité.

35. Et ce par construction, puisque l'hypothèse de constance de q est vérifiée.

Ce travail pourrait être développé dans plusieurs directions. Tout d'abord, le coût lié aux enfants pourraît faire l'objet d'une meilleure prise en compte. Dans la formulation que nous avons retenu, le coût fixe, qui traduit notamment les consommations implicites de l'enfant, n'est pas lié au revenu ou à la consommation des parents. Il pourraît alors être intéressant d'introduire un autre type de coût, proportionnel à la consommation des parents. Le problème d'une telle formulation est qu'elle introduit une difficulté technique (non linéarité de la contrainte budgétaire) dans le programme des agents. Une formulation plus riche du coût lié aux enfants permettrait de faire apparaître d'autres types de distorsions dans les comportements liés aux politiques économiques.

Un deuxième enrichissement du modèle pourrait consister à introduire un choix explicite de niveau d'éducation des enfants. Ainsi, les parents seraient confrontés à l'arbitrage entre quantité et qualité de leur progéniture, le terme de qualité désignant en fait le capital humain de l'enfant. Dans ce cadre, une nouvelle externalité serait liée au système de retraite : les agents ne prendraient pas en compte l'effet bénéfique de l'investissement dans le capital humain de leurs enfants, sur le niveau futur de leur retraite. Il serait alors sans doute nécessaire d'utiliser un nouvel instrument afin de réaliser l'optimum social, instrument qui pourrait prendre la forme de subventions publiques à l'éducation. ▼

• Références

ALLAIS M. (1947). – Économie et Intérêt, Paris, Imprimerie Nationale.

BARNET-VERZAT C. (1996). – « Estimation de la perte de revenus salariaux de la femme en présence d'enfants », *Économie et Prévision*, n°122, 1996-1, p. 69-82.

BARRO R.J. (1974). – « Are government bonds net wealth? », *Journal of Political Economy*, 82, p. 1095-1118.

BECKER G.S., BARRO R.J. (1988). – « A reformulation of the theory of fertility », *Quaterly Journal of Economics*, 103, p. 1-25.

BECKER G.S., MURPHY K., TAMURA R. (1990). – « Human Capital, Fertility, and Economic Growth », *Journal of Political Economy*, 98, S12-S37.

CALOT G., SARDON J.P. (1999). – « Les perspectives démographiques européennes », *Futuribles*, Juillet-Août n°244.

CIGNO A. (1993). – « Intergenerational Transfers without altruism », *European Journal of Political Economy*, 9, p. 505-518.

CIGNO A., ROSATI F. (1996). – « Jointly determined saving and fertility behaviour : Theory, and estimates for Germany, Italy, UK and USA », *European Economic Review*, 40, p. 1561-1589.

CAISSE NATIONALE DES ALLOCATIONS FAMILIALES, « Prestations Familiales 1998 », Tome 1, statistiques nationales.

CAISSE NATIONALE DES ALLOCATIONS FAMILIALES, « Prestations Familiales 1997 », Tome 1, statistiques nationales.

CAISSE NATIONALE D'ASSURANCE VIEILLESSE (1998). – « Recueil statistique ».

COMPTES DE LA PROTECTION SOCIALE, différentes années.

DAHAN M., TSIDDON D. (1998). – « Demographic Transition, Income Distribution, and Economic Growth », *Journal of Economic Growth*, 3 : p. 29-52 (March 1998).

DESPLANQUES G. (1994). – « Taille des familles et milieu social », INSEE PREMIERE, n°296, février.

DIAMOND P. (1965). – « National Debt in a neoclassical groth model », *American Economic Review*, 55 : p. 1126-1150.

DIAMOND P.A. (1977). – « A framework for social security analysis », *Journal of Public Economics*, 8, p. 275-298.

DOCQUIER F. (1999). – « Income distribution, educational thresholds and endogenous fertility », mimeo.

ECKSTEIN Z., WOLPIN K. (1985). – « Endogenous fertility and optimal population size », *Journal of Public Economics*, 27, p. 93-106.

FELDSTEIN M. (1985). – « The optimal level of social security benefits », *Quaterly Journal of Economics*, 100, p. 303-320.

GALOR O., WEIL D. N. (2000). – « Population, Technology and Growth: From the Malthusian Regime to the Demographic Transition », *American Economic Review*.

GLAUDE M., MOUTARDIER M. (1991). – « Une évaluation du coût direct de l'enfant de 1979 à 1989 », *Économie et Statistique*, n°248, Novembre.

INTERNATIONAL LABOUR ORGANIZATION (1998). – « Economically Active Population 1950-2010 », Fourth Edition Bureau of Statistics.

KREMER M., CHEN D. (2000). – « Income Distribution Dynamics with Endogenous Fertility », NBER Working Paper n° W7530, Febrary 2000.

NISHIMURA K., ZHANG J. (1992). – « Pay-as-you-go public pensions with endogenous fertility », *Journal of Public Economics*, 48, p. 239-258.

NISHIMURA K., ZHANG J. (1995). « Sustainable Plans of Social Security with Endogenous Fertility », *Oxford Economic Papers*, 47, p. 182-194.

NUGENT J. (1985). – « The Old-Age Security Motive for Fertility », *Population and development Review*, 11, p. 75-97.

RAZIN A., BEN-ZION U. (1975). – « An Intergenrational Model of Population Growth », *American Economic Review*, December.

SAMUELSON P.A. (1958). – « An exact consumption loan model of interest with or without the social contrivance of money », *Journal of Political Economy*, 66, p. 467-482.

SINN H. (1997). – « The Value of Chidren and Immigrants in a Pay-As-You-Go Pension System : A Proposal for a Partial Transition to a Funded System », NBER Working Paper n° W6229.

TOULEMON L., LERIDON H. (1999). – « La famille idéale : combien d'enfants, à quel âge ? », *INSEE Première*, n° 652, juin.

UNITED NATIONS (2000). – World Population Prospects: The 1998 Revision, Volume 1.

VEALL M.R. (1986). – « Public pensions as optimal social contracts », *Journal of Public Economics*, 31, p. 237-251.

WANG P., YIP C., SCOTESE C. (1994). – « Fertility Choice and Economic Growth: Theory and Evidence », *The Review of Economics and Statistics*.

WIGNIOLLE B. (1998). – « Fertility, Intergenrational Transfers and Economic Development », mimeo.

WILLIS R. (1973). – « A New Approach to the Economic Theory of Fertility Behavior », *Journal of Political Economy*, volume 81, Number 2, Part II, March/April.

Annexes

1. Structure générale de la dynamique et anticipations

On introduit la variable prédéterminée $x_t = K_t / N_t$. Afin de faire apparaître les caractéristiques de l'équilibre temporaire qui se forme à la période t, on note y_{t+1}^e l'anticipation faite en t d'une variable y. On montre alors dans cette annexe que l'équilibre temporaire peut s'écrire sous la forme :

$$x_{t+1} = I_t \left(x_t , x_{t+1}^e , m_{t+1}^e \right)$$

$$m_t = J_t \left(x_t , x_{t+1}^e , m_{t+1}^e \right)$$

La solution du programme du consommateur, obtenue en résolvant les équations (16) (17), s'écrit, en faisant apparaître les variables anticipées par les agents en période t :

$$c_t = C\left[w_t(1-\tau_t) + \frac{m_t w_{t+1}^e (1 - q m_{t+1}^e)\tau_{t+1}}{R_{t+1}^e}, R_{t+1}^e, \phi + w_t q(1 - \tau_t - \sigma_t) - a_t \right]$$

$$m_t = M\left[w_t(1-\tau_t) + \frac{m_t w_{t+1}^e (1 - q m_{t+1}^e)\tau_{t+1}}{R_{t+1}^e}, R_{t+1}^e, \phi + w_t q(1 - \tau_t - \sigma_t) - a_t \right]$$

$$d_{t+1}^e = D\left[w_t(1-\tau_t) + \frac{m_t w_{t+1}^e (1 - q m_{t+1}^e)\tau_{t+1}}{R_{t+1}^e}, R_{t+1}^e, \phi + w_t q(1 - \tau_t - \sigma_t) - a_t \right]$$

Les prix d'équilibre, d'après (11), (19) et (20), peuvent encore s'écrire :

$$w_t = F_L'(x_t, 1 - q m_t) \text{ et } w_{t+1}^e = F_L'(x_{t+1}^e, 1 - q m_{t+1}^e)$$

$$R_t = F_K'(x_t, 1 - q m_t) \text{ et } R_{t+1}^e = F_K'(x_{t+1}^e, 1 - q m_{t+1}^e)$$

Enfin, l'accumulation de capital donnée par (15) s'écrit avec les notations précédentes :

$$m_t x_{t+1} = \frac{d_{t+1}^e - m_t \tau_{t+1} w_{t+1}^e (1 - q m_{t+1}^e)}{R_{t+1}^e}$$

En éliminant le paramètre σ_t par (21), on en déduit finalement le système d'équations :

$$m_t x_{t+1} =$$

$$\left\{ D \left[F_L'(x_t, 1 - qm_t)(1 - \tau_t) + \frac{m_t F_L'(x_{t+1}^e, 1 - qm_{t+1}^e)(1 - qm_{t+1}^e)\tau_{t+1}}{F_K'(x_{t+1}^e, 1 - qm_{t+1}^e)}, \right. \right.$$

$$\left. F_K'(x_{t+1}^e, 1 - qm_{t+1}^e), \phi + F_L'(x_t, 1 - qm_t)q(1 - \tau_t) - \frac{a_t}{1 - qm_t} \right]$$

$$\left. - m_t F_L'(x_{t+1}^e, 1 - qm_{t+1}^e)(1 - qm_{t+1}^e)\tau_{t+1} \right\} F_K'(x_{t+1}^e, 1 - qm_{t+1}^e)^{-1}$$

$$m_t =$$

$$M \left[F_L'(x_t, 1 - qm_t)(1 - \tau_t) + \frac{m_t F_L'(x_{t+1}^e, 1 - qm_{t+1}^e)(1 - qm_{t+1}^e)\tau_{t+1}}{F_K'(x_{t+1}^e, 1 - qm_{t+1}^e)}, \right.$$

$$\left. F_K'(x_{t+1}^e, 1 - qm_{t+1}^e), \phi + F_L'(x_t, 1 - qm_t)q(1 - \tau_t) - \frac{a_t}{1 - qm_t} \right]$$

Ce système s'écrit donc sous la forme :

$$x_{t+1} = X_t \left(x_t, x_{t+1}^e, m_t, m_{t+1}^e \right)$$
$$m_t = Z_t \left(x_t, x_{t+1}^e, m_t, m_{t+1}^e \right)$$

Sous l'hypothèse que $\partial Z_t / \partial m_t \neq 1$, il est possible localement d'écrire la dynamique sous la forme :

$$x_{t+1} = I_t \left(x_t, x_{t+1}^e, m_{t+1}^e \right)$$
$$m_t = J_t \left(x_t, x_{t+1}^e, m_{t+1}^e \right)$$

Les fonctions I_t et J_t dépendent du temps t lorsque les variables τ_t et a_t en dépendent.

2. Optimum stationnaire d'une économie avec utilité et production Cobb-Douglas

L'optimum stationnaire est défini par le programme suivant :

$$\max_{(c,d,m,k)} \gamma_1 \ln c + \gamma_2 \ln d + \gamma_3 \ln m$$
$$\text{s.c. } c + \frac{d}{m} + \phi m = (k^\alpha - mk)(1 - qm)$$

On résout ce programme par étapes successives.

La première étape consiste à remarquer qu'il existe une valeur de k maximisant les ressources de l'économie : k tel que $\partial(k^\alpha - mk)/\partial k = 0$, soit $k = m^{-1/(1-\alpha)} \alpha^{1/(1-\alpha)}$. La contrainte de ressource du programme précédent peut encore être réécrite :

$$c+\frac{d}{m}+\phi m=(1-qm)(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}m^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \Leftrightarrow$$
$$\frac{c}{m}+\frac{d}{m^2}=(1-qm)(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}m^{\frac{-1}{1-\alpha}}-\phi \equiv Z(m)$$

L'objectif peut être réécrit sous la forme :

$$\gamma_1 \ln c+\gamma_2 \ln d+\gamma_3 \ln m=\gamma_1 \ln \frac{c}{m}+\gamma_2 \ln \frac{d}{m^2}+(1+\gamma_2)\ln m$$

Finalement, en posant $x=c/m$ et $y=d/m^2$, on peut écrire le programme sous la forme :

$$\max_{(x,y,m)} \gamma_1 \ln x+\gamma_2 \ln y+(1+\gamma_2)\ln m$$
$$\text{s.c.} x+y=(1-qm)(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}m^{\frac{-1}{1-\alpha}}-\phi$$

Dans un premier temps, on considère m comme donné, puis on s'intéresse au choix optimal de cette variable.

À m donné, le choix optimal de x et y est :

$$x=\frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}Z(m)$$
$$y=\frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}Z(m)$$

En remplaçant x et y dans l'objectif, il s'agit finalement de déterminer la valeur optimale de m solution de :

$$\max_{(m)}(\gamma_1+\gamma_2)\ln Z(m)+(1+\gamma_2)\ln m \equiv O(m)$$

Étudions la fonction $O(m)$. $Z(m)$ est une fonction décroissante, définie sur $]0,\overline{m}]$, avec $\overline{m}$ la valeur inférieure à $1/q$ telle que $Z(m)=0$. On en déduit que $O(m)$ est définie sur $]0,\overline{m}[$. Lorsque m tend vers $\overline{m}$, $O(m)$ tend vers $-\infty$. Lorsque m tend vers 0, on a :

$$O(m)\sim\left[\frac{-(\gamma_1+\gamma_2)}{1-\alpha}+1+\gamma_2\right]\ln m+\text{constante}$$

Si $\left[\frac{-(\gamma_1+\gamma_2)}{1-\alpha}+1+\gamma_2\right]<0$, on en déduit que le programme posé n'a pas de solution intérieure, et que $m=0$ rend infini l'objectif. Il nous faut donc nous restreindre au cas :

$$\left[\frac{-(\gamma_1+\gamma_2)}{1-\alpha}+1+\gamma_2\right]>0 \Leftrightarrow \alpha<\frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_2}$$

Dans ce cas, $O(m)$ tend vers $-\infty$ lorsque m tend vers 0. Il existe donc au moins une valeur de m sur $]0,\overline{m}[$ telle que $O'(m)=0$. Si l'on montre qu'elle est unique, cette valeur est nécessairement le maximum de $O(m)$ et elle définit l'optimum stationnaire de l'économie.

L'équation $O'(m) = 0$ conduit à :

$$\phi m^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1+\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} = (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left[\frac{1+\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} - \frac{1}{1-\alpha} - qm\left(\frac{1+\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right]$$

Le membre de gauche est une fonction croissante de m de 0 à $+\infty$, alors que le membre de droite est une fonction décroissante de

$$(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left[\frac{1+\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} - \frac{1}{1-\alpha}\right] > 0$$

à 0. On en déduit finalement l'unicité de $\widehat{m}$ tel que $O'(\widehat{m}) = 0$.

Dans les cas particuliers $q = 0$ ou $\phi = 0$, il est possible d'avoir l'expression explicite de $\widehat{m}$ et d'en déduire $\widehat{k}$. Si $q = 0$:

$$\widehat{m} = \frac{\alpha}{\widehat{k}^{1-\alpha}} = \frac{\alpha^{\alpha}\left(1-\gamma_1-\alpha(1+\gamma_2)\right)^{1-\alpha}}{\left(\phi(1+\gamma_2)\right)^{1-\alpha}}$$

$$\widehat{k} = \frac{\alpha\phi(1+\gamma_2)}{1-\gamma_1-\alpha(1+\gamma_2)}$$

Si $\phi = 0$:

$$\widehat{m} = \frac{1}{q}\left[\frac{1-\gamma_1-\alpha(1+\gamma_2)}{1-\alpha-\alpha\gamma_1+\gamma_2(1-2\alpha)}\right]$$

$$\widehat{k} = \left(\frac{\alpha}{\widehat{m}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left[\alpha q \frac{1-\alpha-\alpha\gamma_1+\gamma_2(1-2\alpha)}{1-\gamma_1-\alpha(1+\gamma_2)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$