ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 70 – 2003

Les offres non compétitives dans les enchères du Trésor*

Raphaële PRÉGET †

RÉSUMÉ. – L'objectif de cet article est d'analyser le mécanisme des offres non compétitives (ONC) utilisé dans les enchères des valeurs du Trésor. La pratique des ONC consiste à soumettre une quantité sans préciser le prix. Les ONC sont servies en priorité au prix moyen pondéré qui résulte de l'adjudication. Dans un premier modèle à une seule enchère nous comparons l'enchère discriminatoire et l'enchère à prix uniforme, lorsque les enchérisseurs expriment une demande pluri-unitaire. Puis un modèle à deux enchères nous permet de décomposer l'impact des ONC sur les stratégies d'enchère des spécialistes en valeurs du Trésor.

Noncompetitive Bidding in Treasurary Auctions

ABSTRACT. – The objective of this article is to analyze the noncompetitive bidding mechanism used in Treasury securities auctions. Noncompetitive bidding consists in submitting a quantity without specifying a price. Noncompetitive bids are served on priority at the weighted average auction price. First, in a single auction model we compare discriminatory and uniform price auctions when bidders have a multi-unit demand. Then, a two-auction model allows us to decompose the impacts of noncompetitive bidding on primary bidders' competitive bidding strategies.

---

*Je remercie M. MOUGEOT, A. TRANNOY ainsi que deux rapporteurs anonymes pour leurs remarques constructives et leurs conseils avisés.

† Laboratoire d'Économie Forestière, INRA, 14 rue Girardet, F-54042 NANCY cedex tél. 03. 83. 39. 68. 64, fax 03.83.37.06.45, preget@nancy-engref.inra.fr

1 Introduction

Le Trésor français utilise la technique de l'adjudication pour placer les nouvelles émissions d'emprunts d'État. Largement répandue à travers le monde, cette pratique de placement repose sur la mise en concurrence des souscripteurs. Néanmoins, de nombreuses variantes différencient ce mécanisme de vente dans chacun des pays qui l'utilise. Les adjudications du Trésor sont des enchères d'un bien divisible dans lesquelles les acheteurs désirent des quantités variables. Autrement dit, les participants proposent non seulement un prix mais aussi des quantités, ils soumettent donc une fonction de demande. On distingue deux types d'adjudications : l'enchère discriminatoire où les vainqueurs sont servis aux prix demandés, et l'enchère à prix uniforme où tous les vainqueurs paient le prix limite (le prix accepté le plus bas). En France, le Trésor utilise l'enchère discriminatoire. Cependant, il existe un débat intense sur le choix de la meilleure procédure pour le Trésor. Cette controverse a largement bénéficié des développements de la théorie des enchères. Dernièrement, c'est la prise en compte des différences fondamentales qui existent entre les enchères d'un objet unique indivisible et les enchères d'un bien parfaitement divisible qui apporte une nouvelle perspective dans l'analyse des adjudications des emprunts d'État. Néanmoins, le débat initié par Friedman en 1960 n'est toujours pas clos, car le cadre d'analyse de telles enchères est complexe et la modélisation théorique se heurte à de nombreuses difficultés. Par ailleurs, les études empiriques conduisent à des résultats ambigus. DAS et SUNDARAM [1997] proposent une revue de la littérature intéressante sur le sujet.

Ainsi, même si nous proposons d'étudier plus particulièrement les adjudications du Trésor français, nous examinons dans un premier temps les deux types d'enchères dans le cadre d'un modèle simple à une enchère qui nous servira par la suite à analyser une pratique singulière des adjudications du Trésor en France. En effet, la contribution principale de notre étude porte sur l'analyse des offres non compétitives (ONC). Une ONC indique la quantité désirée par un acheteur sans préciser le prix. Les ONC sont servies en priorité, au prix moyen pondéré des enchères gagnantes. Elles ne sont acceptées que dans un nombre restreint de pays, mais cette pratique existe dans d'autres types d'enchères [1]. Pourtant, peu d'études analysent l'impact des ONC. ENGELBRECHT-WIGGANS [1996] offre probablement l'étude la plus approfondie sur ce thème. L'auteur considère un modèle à valeurs privées indépendantes dans lequel les acheteurs potentiels ont des demandes unitaires. Or, ce cadre d'analyse n'est pas du tout adapté au cas des enchères du Trésor.

Peu d'auteurs se sont véritablement penchés sur la question les ONC dans les enchères du Trésor. BRIMMER [1962], qui défend avec conviction la procédure d'enchère discriminatoire alors utilisée aux États-Unis, déclare

1. On retrouve notamment cette pratique dans les enchères de poissons. Certains marchands devant livrer des marchés éloignés ne peuvent pas se permettre d'attendre la fin de la procédure de vente aux enchères. Les ONC leur permettent de charger la marchandise sans attendre. Évidemment ce n'est pas cet argument qui peut justifier la présence des ONC dans les adjudications du Trésor…

néanmoins que le Trésor annule certains de ses gains potentiels en accordant une partie de ses émissions sous forme d'ONC. Il résulterait de cette pratique, un traitement de faveur pour les investisseurs qui achèteraient les bons du Trésor à des prix inférieurs à ceux qu'ils seraient prêts à payer. BRIMMER estime que le Trésor pourraient réduire le coût de son financement s'il cessait d'accepter les ONC. De fait, si les anciens investisseurs qui soumettaient des offres non compétitives participent dorénavant aux enchères, ils vont avoir tendance à soumettre des prix relativement élevés par crainte de perdre. D'autre part, s'ils se reportent sur le marché secondaire cela aura pour effet d'accroître la demande, ce qui va forcer les *primary dealers* à enchérir plus vigoureusement. En revanche, FRIEDMAN [1963] tente de démontrer que le Trésor aurait plutôt intérêt à changer sa procédure d'adjudication pour l'enchère à prix uniforme. Il assure que si son analyse est correcte alors le résultat de BRIMMER en faveur de la suppression des ONC serait faux. De son côté, BOLTEN [1973] déduit de son étude empirique que le Trésor a effectivement intérêt à remplacer l'enchère discriminatoire par une enchère à prix uniforme, mais à condition que la demande non compétitive reste constante.

VISWANATHAN et WANG [2000] quant à eux, développent un modèle à trois étapes qui prend en compte les interactions entre les enchères et le marché *when-issued* pré et post adjudicataire et un coût d'inventaire pour les joueurs qui restent avec de larges positions en fin de cycle. Les auteurs montrent que le Trésor préfère l'enchère discriminatoire lorsque le niveau de la demande non compétitive est faible et que le nombre d'enchérisseurs est petit.

BACK et ZENDER [1993] ainsi que WANG et ZENDER [2002] ont également introduit les ONC dans leur modèle d'enchère du Trésor américain. Cependant, tout comme dans les articles précédents, celles-ci sont présentes de manière exogène. Les ONC, considérées comme un bruit ou une incertitude sur la quantité offerte par le Trésor, sont modélisées par une variable aléatoire aux yeux des enchérisseurs. Comme la réglementation française diffère de celle utilisée aux États-Unis, nous ne pouvons utiliser la même modélisation dans le cas de la France. En fait, l'objectif ici est d'endogénéiser les ONC et d'expliquer leur impact sur les stratégies d'enchères compétitives.

Deux particularités caractérisent les ONC dans les adjudications du Trésor en France :

1. Seuls les spécialistes en valeurs du Trésor (SVT) [2] sont autorisés à soumettre des ONC. Avant chaque enchère, un coefficient d'attribution est calculé pour chaque SVT en fonction de sa participation aux trois dernières séances d'adjudication. Ce coefficient permet de déterminer le montant maximum que chacun est autorisé à demander au titre des ONC.
2. Les ONC peuvent être présentées en deux temps. Il y a d'abord les ONC1 qui peuvent être déposées jusqu'à 5 minutes avant la séance (c'est-à-dire en même temps que les offres compétitives). Les ONC1 représentent au maximum un montant global égal à 10 % du volume annoncé, auquel est appliqué le coefficient d'attribution de chaque SVT. Ensuite, les SVT sont également autorisés à déposer des ONC2 jusqu'au

2. Les SVT correspondent plus ou moins aux *primary dealers* américains. Leur mission principale est l'animation du marché primaire et secondaire de la dette publique. Le nombre de SVT est environ d'une vingtaine. Les SVT ne sont pas les seuls à intervenir sur les valeurs du Trésor, néanmoins, environ 90 % des titres vendus aux enchères sont achetés par les SVT.

lendemain de la séance (c'est-à-dire bien après l'annonce du résultat des enchères). Les ONC2 représentent au maximum un montant global égal à 15 % du contingent annoncé auquel est appliqué le coefficient d'attribution de chaque SVT.

Les raisons qui justifient la pratique des ONC sont différentes en France et aux États-Unis. Aux États-Unis, les ONC permettent aux petits investisseurs moins sophistiqués de participer à l'achat des nouvelles émissions de titres et de bénéficier du prix résultant des adjudications. La présence des ONC en France relève d'une toute autre logique. Les ONC sont clairement considérées par le Trésor français comme un privilège offert aux SVT en contrepartie des obligations auxquelles ces derniers ont souscrit. Qu'en est-il exactement ? À qui profite véritablement la pratique des ONC ? Ne s'agirait-il pas d'un *cadeau empoisonné* pour les enchérisseurs les plus agressifs ? Cet article permet d'apporter des éléments de réponses à ces questions.

Empiriquement, on constate que les SVT n'utilisent pas toujours leur possibilité de soumettre des ONC. En effet, il y a un grand nombre d'adjudications pour lesquelles aucune ONC1 et/ou ONC2 n'ont été demandées. Le montant total des ONC1 est particulièrement faible. Il est en moyenne inférieur à 2 % du volume annoncé. De plus, les résultats par adjudication montrent qu'il atteint rarement la limite des 10 %. En ce qui concerne les ONC2, on observe un phénomène de *tout ou rien* : soit aucune ONC2 n'est demandée, soit le montant des ONC2 atteint la limite autorisée. En fait, les ONC2 représentent pour les SVT une véritable option d'achat gratuite (sans prime) qu'il est intéressant d'exercer dès que le prix des titres est supérieur au prix moyen pondéré résultant de l'adjudication de la veille. Le montant total d'ONC2 dépend ainsi directement de l'évolution du cours de la valeur. Cette explication est globalement confirmée par l'analyse des données empiriques des cours sur le marché secondaire.

À travers cet aspect d'option gratuite, les ONC2 semblent bien représenter un avantage pour les SVT, mais que penser des ONC1 ? Les ONC1 éliminent le risque sur la quantité, puisqu'elles sont servies en priorité, mais elles comportent un risque de prix, car au moment de leur soumission les SVT ne connaissent pas le prix auquel elles seront servies. De plus, le montant des ONC1 étant prélevé sur le volume annoncé par le Trésor, cette pratique conduit à une certaine incertitude sur la quantité mise véritablement aux enchères ; mais surtout, en réduisant le montant disponible pour les offres compétitives, les ONC1 peuvent *a priori* entraîner une augmentation du prix limite d'équilibre. En revanche, il est aussi possible que les ONC1 assouplissent la concurrence au niveau des offres compétitives. La détermination de l'impact net des ONC n'est par conséquent pas immédiat.

Intuitivement, en autorisant les SVT à soumettre des ONC le Trésor ne fait qu'accroître la concurrence entre eux, car il met à leur disposition des instruments plus diversifiés (offres compétitives, ONC1, ONC2), le Trésor incite les SVT à se battre plus agressivement sur tous les fronts. De fait, en théorie des jeux, un espace de stratégies plus vaste n'est pas toujours favorable aux joueurs. À travers les ONC et notamment les coefficients de participation, le Trésor ne fait que *récompenser* les SVT pour leur large participation et les inciter à être plus agressifs les uns envers les autres. Ainsi, pour analyser théoriquement l'impact des ONC sur le résultat des enchères, il est nécessaire de considérer l'aspect dynamique de cette pratique. En effet, c'est par rapport aux trois dernières adjudications que sont déterminés les coefficients d'attribution. Nous proposons un jeu comportant deux adjudications. Ce modèle dynamique permet d'expliquer la faible utilisation des ONC1 et montre également que les ONC2 ont un impact indirect négatif pour les SVT.

Dans la section suivante, nous commençons par examiner la question du choix de la technique d'enchère (uniforme ou discriminatoire) au moyen d'un modèle *statique* à une seule enchère. Puis, dans la section 3, nous développons un modèle *dynamique* comportant deux enchères afin de déterminer l'impact des ONC sur les stratégies d'enchère des SVT. La section 4 nous permet de conclure.

2 Modèle statique : comparaison de l'enchère discriminatoire et de l'enchère à prix uniforme

Le modèle présenté ici est inspiré des modèles en information symétrique développés par BACK et ZENDER [1993] puis par WANG et ZENDER [2002]. Il s'agit d'un modèle d'enchère isolée à valeur commune sans information privée.

2.1 Les hypothèses

On considère $N \geqslant 2$ enchérisseurs (les SVT) indicés par i et un vendeur (le Trésor). Tous les intervenants sont neutres vis-à-vis du risque et cherchent à maximiser leur revenu espéré. Le bien mis aux enchères est supposé parfaitement divisible. Sa valeur unitaire est une variable aléatoire $\tilde{v}_t$ qui varie au cours du temps et qui est identique pour tous les agents. Cette modélisation de la valeur correspond ainsi à l'hypothèse des enchères à valeur commune. On se place dans le cadre d'un jeu à information symétrique. Cela signifie que les enchérisseurs n'ont pas d'information privée, ou de manière équivalente, qu'ils ont tous la même information. Tout en étant justifiée dans le cas appliqué que nous considérons, cette hypothèse peu commune dans la théorie des enchères mérite d'être quelque peu argumentée [3].

D'une part, il n'est pas déraisonnable de supposer pour une première approche que tous les SVT ont accès à la même information. De fait, le marché des valeurs du Trésor en France est suffisamment liquide pour que le

3. Cette hypothèse d'information symétrique permet de beaucoup simplifier le jeu d'enchère et dans plusieurs modèles d'adjudications du Trésor les enchérisseurs sont considérés comme des agents *informés* (*cf.* DARIPA [2001]). La prise en compte de l'information privée propre à chaque enchérisseur est particulièrement délicate sous l'hypothèse d'enchère de bien divisible à valeur commune (*cf.* WANG et ZENDER [2002]).

cours des titres sur le marché secondaire soit un bon indicateur de leur valeur pour les SVT. Par ailleurs, si l'on suppose que les SVT sont symétriques, il est logique de supposer qu'ils font tous face à la même évolution de la demande finale pour les valeurs du Trésor.

D'autre part, le fait que les enchérisseurs ne possèdent pas d'information privée ne signifie pas que le vendeur possède exactement la même information que les acheteurs potentiels, auquel cas il n'aurait aucun intérêt à procéder à des adjudications. Ici, nous faisons l'hypothèse que le vendeur est moins bien informé que les enchérisseurs, ce qui est tout à fait réaliste dans le cas présent. En effet, en tant qu'intermédiaires, les SVT ont une meilleure information de l'état du marché et de la demande des investisseurs finaux que le Trésor. Afin de modéliser cette asymétrie d'information entre les SVT et le Trésor, nous supposons que la valeur des titres pour les SVT est une fonction strictement croissante de leur prix observé par tous sur le marché secondaire à la date t, mais seuls les SVT connaissent la forme explicite de cette fonction. Par conséquent, au moment de l'enchère, seuls les enchérisseurs connaissent la véritable valeur des titres. Cependant, pour ne pas alourdir les calculs et sans que cela n'ait d'impact qualitatif sur les résultats du modèle, nous considérons ici la fonction identité. $\tilde{v}_t$ correspond ainsi au prix observé sur le marché secondaire.

Le déroulement de l'enchère est le suivant. Le Trésor annonce la quantité Q qu'il souhaite mettre en vente, puis chaque enchérisseur i soumet une fonction de demande $x_i(p)$. Toutes les soumissions (y compris par la suite les offres non compétitives) se font par écrit sous plis scellés. Le Trésor calcule ensuite la demande agrégée $x_A(p)$ qui lui permet de déterminer le prix limite p^* en fonction de la quantité Q annoncée. p^* est le prix maximal tel que $x_A(p^*) \geqslant Q$. Si au prix limite d'équilibre $x_A(p^*) > Q$, alors le rationnement se fait au prorata des soumissions à ce prix. Dans les deux procédures d'appels d'offres (uniforme et discriminatoire), toutes les enchères inférieures au prix limite sont rejetées.

Nous employons la notion d'équilibre de Nash symétrique pour déterminer les stratégies optimales des SVT. Les enchérisseurs étant tous symétriques, nous supposons que tous les joueurs $j \neq i$ adoptent la même stratégie et nous cherchons la fonction d'enchère optimale du joueur i. Celui-ci va maximiser son profit espéré sous la contrainte de marché. Le profit du joueur i est noté π_i^U ou π_i^D selon qu'il s'agit de l'enchère à prix uniforme ou de l'enchère discriminatoire.

Afin d'obtenir des résultats explicites, nous spécifions la forme des offres compétitives. Cette contrainte ne limite pas véritablement la portée de nos résultats dans la mesure où nous montrons, d'une part, que les équilibres obtenus sont robustes à l'élargissement de l'espace des stratégies, et d'autre part, qu'il peut éventuellement exister d'autres équilibres, mais que ceux-ci conduisent aux mêmes prix d'équilibre.

Concrètement, nous considérons deux types de fonctions de demande.

- Le premier type est une fonction de demande linéaire strictement décroissante qui à tout prix positif associe une quantité de titres désirée comprise entre zéro et la quantité offerte par le Trésor : $x_i(p) = a_i - b_i p$ avec $a_i > 0$ et $b_i > 0$.

• Le second type de demande consiste à soumettre un seul niveau de prix supérieur ou égal au prix de réserve pour lequel le joueur accepte toute la quantité offerte par le Trésor : $x_i(p) = \begin{cases} Q & \text{si} \quad p \leqslant p_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$[4].

2.2 Cas de l'enchère à prix uniforme

Étant donné qu'il existe deux types de demande, nous recherchons dans un premier temps les équilibres potentiels en limitant l'espace des stratégies à une seule famille de demande, puis nous vérifions que les équilibres potentiels trouvés résistent à l'élargissement de l'espace des stratégies à l'autre type de demande. Autrement dit, nous vérifions qu'il n'existe pas de déviation profitable lorsque nous permettons au joueur i d'utiliser l'autre type de demande.

2.2.1 Les équilibres de la forme : $x_i(p) = a_i + b_i p$

Supposons que la stratégie adoptée par tous les autres enchérisseurs $j \neq i$ est la fonction de demande strictement décroissante $x_j(p) = x(p) = a - bp$. Le problème de l'enchérisseur i est donc de trouver une fonction de demande $x_i(p) = a_i - b_i p$ telle que son profit $\pi_i^U = (v_t - p^*)(a_i - b_i p^*)$ soit maximisé sachant que tous les autres agents proposent $x(p) = a - bp$ et que le prix d'équilibre est $p^* = \frac{(N-1)a + a_i - Q}{(N-1)b + b_i}$.

Ensuite, nous devons vérifier qu'enchérir pour toute la quantité à un prix unique n'est pas une déviation profitable.

LEMME 1. *Il existe une multiplicité d'équilibres symétriques de l'enchère à prix uniforme où la soumission compétitive est une demande linéaire strictement décroissante. Les soumissions compétitives sont telles que* $a = v_t b + \frac{(N-2)Q}{N(N-1)}$ *ce qui donne* $p^* = v_t - \frac{Q}{N(N-1)b}$. *Le prix limite d'équilibre appartient à l'intervalle* $[0; v_t[$ *et tous les joueurs gagnent la même quantité* $\frac{Q}{N}$.

PREUVE : voir annexe 1.

L'aspect intéressant de ce résultat est celui de la multiplicité des meilleures réponses. Nous pouvons expliquer pourquoi il existe plusieurs solutions. La fonction de demande du joueur i est linéaire, mais seul un point de cette droite est véritablement pertinent. Il s'agit du couple (prix, quantité) qui détermine le prix limite d'équilibre étant donnée la stratégie $x(p)$ de tous les autres joueurs. Or, une infinité de fonctions de demande (en l'occurrence ici une infinité de droites) passent par ce point, ce qui explique la multiplicité des solutions que le joueur peut utiliser.

4. Cette seconde forme correspond approximativement au cas limite de la première lorsque l'on fait tendre le paramètre b_i vers l'infini et qu'on limite la quantité demandée à la quantité offerte Q.

Nous retrouvons ici un résultat de KLEMPERER et MEYER [1989] sur la multiplicité des équilibres du modèle d'oligopole dans lequel la stratégie des firmes consiste à choisir une fonction d'offre et non pas simplement un prix (modèle de Bertrand) ou une quantité (modèle de Cournot). Ainsi, ce résultat reste valable *a priori* sans restriction à des stratégies linéaires ou à des équilibres symétriques.

Dans le cadre des enchères à prix uniforme, ce phénomène est intéressant dans la mesure où les enchérisseurs peuvent atteindre un résultat de collusion implicite sur la base d'un équilibre non coopératif. Il ne s'agit donc pas de collusion à proprement parler, mais plutôt d'un *avantage stratégique* présent dans l'enchère à prix uniforme qui leur permet de distordre le résultat en leur faveur. Ainsi, en diminuant progressivement le prix des unités demandées, les acheteurs diminuent le prix limite, et donc le prix payé pour les unités gagnées. En faisant cela, les enchérisseurs augmentent artificiellement le coût marginal d'une unité supplémentaire.

BACK et ZENDER [1993] ont été les premiers à signaler l'importance de la différence entre le prix et le coût marginal pour argumenter le fait que les résultats des enchères d'un bien indivisible ne se généralisent pas aux enchères d'un bien divisible dans lesquelles les joueurs désirent plusieurs unités. Ainsi, ils expliquent que pour l'acheteur d'une seule unité, le coût marginal est égal au prix, mais pour l'acheteur de plusieurs unités dans une enchère à prix uniforme, le coût marginal peut dépasser le prix. En effet, l'accroissement du prix dû à une unité supplémentaire ne s'applique pas seulement à cette dernière unité, mais également à toutes les autres. L'offre à laquelle fait face un enchérisseur est une offre résiduelle qui dépend des demandes des autres participants. Son coût marginal est donc influencé par les stratégies des autres joueurs. En soumettant une courbe de demande très pentue, les enchérisseurs peuvent rendre, pour leurs concurrents, le coût marginal bien plus élevé que le prix. Ceci peut conduire à des prix d'équilibre très inférieurs à la valeur réelle du bien.

2.2.2 Les équilibres de la forme : $x_i(p) = \begin{cases} Q & \textbf{si} \quad p \leqslant p_i \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$

Supposons que la stratégie adoptée par tous les autres enchérisseurs $j \neq i$ soit cette fois une fonction de demande plate au prix p. Nous montrons dans ce cas que le seul équilibre symétrique possible de l'enchère à prix uniforme est de proposer le prix de revente des titres. Ainsi, $p^* = v_t$ est un prix d'équilibre.

LEMME 2. *Enchérir $p = v_t$ pour toute la quantité annoncée par le Trésor est une stratégie optimale dans l'enchère à prix uniforme.*

PREUVE : On montre par l'absurde que p^* est nécessairement égal à v_t.

1) Si $p^* > v_t$, l'enchérisseur fait des pertes et préfère alors ne pas participer.

2) Si $p^* < v_t$, en soumettant $p_i = p^*$ l'enchérisseur obtient $\pi_i^U = (v_t - p^*)\frac{Q}{N}$, mais s'il soumet $\hat{p}_i = p^* + \varphi < v_t$ il obtient $\hat{\pi}_i^U = (v_t - p^* - \varphi)\frac{Q}{N}$ qui est supérieur à π_i^U dès que $\varphi < \frac{N-1}{N}(v_t - p^*)$.

3) Si $p^* = v_t$, il n'existe aucune déviation profitable, car personne ne peut faire descendre unilatéralement le prix limite d'équilibre. Par conséquent cet équilibre est robuste à n'importe quel type de stratégie.

2.2.3 L'équilibre Pareto optimal

Un équilibre se distingue de tous les autres, celui qui est Pareto optimal pour les enchérisseurs, à savoir celui conduisant à un prix nul et pour lequel les SVT font tous un profit maximum $\frac{Q}{N} v_t$. Cet équilibre non coopératif est plus probable que tous les autres pour deux raisons complémentaires. D'une part, il s'agit de l'unique équilibre Pareto optimal et d'autre part, la stratégie qui conduit à cet équilibre est faiblement dominante. En d'autres termes, les enchérisseurs n'ont rien à perdre et tout à gagner en choisissant de jouer la stratégie permettant d'atteindre l'équilibre Pareto optimal.

Pour le montrer, il suffit de voir que si tous les autres joueurs $j \neq i$ adoptent la relation d'équilibre $a = v_t b + \frac{N-2}{N(N-1)} Q$, alors la condition nécessaire pour que i maximise son profit nous donne une relation entre a_i et (b, b_i). Si l'on exprime ensuite le profit de i uniquement en fonction de (b, b_i), on remarque alors que celui-ci ne dépend plus que de b. Ainsi, dès que la stratégie de i vérifie la condition nécessaire pour avoir un équilibre, son profit devient indépendant de sa stratégie. Le joueur i n'a donc aucune raison de ne pas adopter celle qui conduit à l'équilibre Pareto optimal.

2.3 Cas de l'enchère discriminatoire

La démarche est la même que dans le cas de l'enchère à prix uniforme sauf que le prix payé par unité n'est plus le prix limite d'équilibre mais un prix moyen pondéré par les quantités gagnées par l'enchérisseur en question.

2.3.1 Les équilibres de la forme : $x_i(p) = a_i + b_i p$

Dans le cas d'une fonction de demande linéaire, le prix moyen pondéré payé par le joueur i est $\frac{1}{2}\left(p^* + \frac{a_i}{b_i}\right)$ et son profit devient : $\pi_i^D = \left(v_t - \frac{p^*}{2} - \frac{a_i}{2b_i}\right)$ $(a_i - b_i p^*)$ avec $p^* = \frac{(N-1)a + a_i - Q}{(N-1)b + b_i}$ le prix limite d'équilibre.

LEMME 3. *Il n'existe aucun équilibre symétrique dans l'enchère discriminatoire où la soumission compétitive est une demande linéaire strictement décroissante.*

PREUVE : voir annexe 2.

Ce résultat n'est pas surprenant étant donné le fait que dans les enchères discriminatoires, les joueurs sont incités à enchérir le plus près possible du prix limite pour éviter de payer des prix plus élevés que nécessaire. Dans les enchères discriminatoires, le coût marginal est égal au prix, par conséquent, les prix payés pour les premières unités ne sont aucunement influencés par la demande aux prix inférieurs.

2.3.2 Les équilibres de la forme : $x_i(p) = \begin{cases} Q & \textbf{si} \quad p \leqslant p_i \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$

Si maintenant on considère la stratégie qui consiste à demander toute la quantité à un seul niveau de prix, on remarque que pour ce type de demande le résultat est exactement le même que pour la procédure à prix uniforme. En effet, si les joueurs enchérissent un prix unique sans préciser la quantité, le prix moyen pondéré se confond avec le prix limite. Par conséquent, le prix que paye le ou les vainqueurs est le même quelle que soit la procédure d'enchère envisagée.

LEMME 4. *Enchérir $p = v_t$ pour toute la quantité annoncée par le Trésor est une stratégie optimale de l'enchère discriminatoire.*

PREUVE : Celle-ci est la même que dans le cas de l'enchère à prix uniforme, c'est-à-dire du lemme 2.

Tout comme dans le cas de l'enchère à prix uniforme, cet équilibre est robuste à n'importe quel autre type de fonction de demande. Par ailleurs, il est facile de montrer par l'absurde qu'il n'existe aucun équilibre conduisant à un autre prix limite que v_t dans le cas de l'enchère discriminatoire. Il est évident que le prix limite d'équilibre ne peut pas dépasser v_t. En outre, la demande agrégée au-dessus du prix limite est nécessairement nulle à l'équilibre (les enchérisseurs n'ont aucun intérêt à payer un prix plus élevé que nécessaire), donc si le prix limite est strictement inférieur à v_t, on se retrouve dans le cas du 2) de la démonstration du lemme 2. Ainsi, le prix limite d'équilibre de l'enchère discriminatoire est nécessairement v_t quelle que soit la forme des stratégies envisagée [5].

2.4 Comparaison des deux procédures d'enchères

PROPOSITION 1. *Dans ce modèle d'enchère sans asymétrie d'information entre les joueurs, le Trésor ne peut pas accroître son revenu en remplaçant la procédure discriminatoire par une enchère à prix uniforme.*

PREUVE : Elle découle directement des lemmes précédents.

L'enchère discriminatoire est particulièrement profitable au vendeur ici puisque le revenu de celui-ci est maximal. Ainsi, même si l'on n'élimine aucun équilibre de Nash, le revenu du vendeur lorsqu'il utilise la procédure d'enchère à prix uniforme ne dépasse jamais celui obtenu avec la procédure

5. Dans la pratique, il est fréquent que les enchérisseurs ne soumettent qu'un seul couple (prix ; quantité). Cette stratégie correspond à une demande plate. De manière générale, les enchérisseurs soumettent très peu de couples, 2,8 en moyenne. De plus, les offres sont très peu dispersées sur l'échelle des prix. De telles fonctions de demande sont par conséquent proches de celle que nous obtenons ici.

discriminatoire, et ceci, pour n'importe quel type de demande envisagé [6]. À travers ce modèle, on retrouve l'importance de prendre en compte le fait que les joueurs soumettent une demande pour plusieurs unités. De fait, sous l'hypothèse de demandes unitaires et d'information privée, l'enchère à prix uniforme génère un revenu supérieur pour le vendeur que celui généré par l'enchère discriminatoire.

La proposition 1 présente néanmoins de nombreuses limites. En premier lieu, il y a l'hypothèse de symétrie d'information. En présence d'information privée, apparaît le phénomène de la malédiction du vainqueur propre au modèle d'enchère à valeur commune que nous avons adopté. Ne serait-ce que par analogie avec les enchères d'un bien unique indivisible, il est clair que la malédiction du vainqueur est plus forte dans l'enchère discriminatoire que dans l'enchère à prix uniforme. Les enchérisseurs, censés être rationnels, prennent en compte ce phénomène lors de la détermination de leurs soumissions. Il est par conséquent possible que le résultat obtenu en ce qui concerne le classement des deux procédures d'enchères soit modifié. Il semble peu probable que l'asymétrie d'information suffise à faire disparaître l'avantage stratégique des enchérisseurs dans l'adjudication à prix uniforme. En revanche, la crainte de la malédiction du vainqueur dans les enchères discriminatoires conduit les joueurs à réduire les prix offerts. Cela peut entraîner un revenu éventuellement inférieur à celui obtenu avec l'enchère à prix uniforme.

Outre cet aspect d'asymétrie d'information, nous ignorons ici les probables interactions qui existent entre les enchères et les différents marchés des valeurs du Trésor. Il ne faut pas oublier non plus que les adjudications du Trésor ont lieu régulièrement selon un calendrier préétabli. Il serait donc judicieux de considérer les enchères du Trésor dans le cadre de la théorie des jeux répétés. Il existe encore bien d'autres limites à ce modèle telle que la vulnérabilité de la procédure face à la collusion où à la manipulation, pour apporter une réponse complète et définitive à la question du choix de la meilleure procédure d'enchère pour le Trésor. Ce débat reste la problématique la plus actuelle sur le thème des adjudications des valeurs du Trésor. Néanmoins, nous proposons dans la section suivante de limiter l'analyse de l'impact des ONC telle qu'elles sont pratiquées en France au cas de l'enchère discriminatoire. En effet, les résultats obtenus sur le classement des deux procédures restent vrais dans le cadre d'un modèle dynamique qui inclut la pratique des ONC [7].

---

6. Bien que nous ayons imposé au départ une forme exogène aux fonctions de demande, il est à noter finalement que cette hypothèse ne limite en rien les résultats obtenus.

7. Pour une explicitation du modèle dynamique avec des enchères à prix uniforme voir Préget [2001].

3 Modèle dynamique : analyse de l'impact des ONC

Afin de tenir compte de la pratique des ONC et plus précisément de la réglementation française des ONC nous introduisons un aspect dynamique en étudiant deux adjudications successives. Les ONC ne sont autorisées que dans la seconde enchère, mais les coefficients d'attribution sont déterminés à partir des résultats de la première adjudication.

3.1 Les hypothèses

Nous supposons que ce sont les mêmes N joueurs qui participent aux deux enchères et qui peuvent soumettre des ONC lors de la seconde enchère. Aucun autre intervenant ne peut participer à ce jeu (enchères et/ou ONC) réservé aux SVT.

Les quantités Q_1 et Q_2 offertes par le Trésor respectivement dans la première et la seconde enchère sont fixées au début du jeu, c'est-à-dire avant la première adjudication [8].

Tout comme dans la section précédente, à la date t, v_t est connue des SVT. Toutefois, étant donné la structure dynamique du jeu, nous ne sommes pas en information complète. Nous supposons que $\tilde{v}_{t+1}$ suit une loi uniforme sur $[v_t - \varepsilon; v_t + \varepsilon]$ quel que soit t. Par ailleurs, si l'adjudication a lieu à la date t alors le Trésor pose un prix de réserve égal à $v_t - \varepsilon$. Enfin, le facteur d'actualisation est supposé identique pour tous les agents et égal à un.

Le déroulement du jeu est le suivant :

- en 0 : annonce des quantités Q_1 et Q_2 mises aux enchères par le Trésor,
- en t : soumission des enchères de la première adjudication, annonce des résultats et calcul des coefficients d'attribution,
- en $t + n$: soumission des enchères et des ONC1 de la seconde adjudication et annonce des résultats, notamment du prix des ONC2,
- en $t + n + 1$: soumission des ONC2.

Notons S_i une *stratégie* du joueur i. Les stratégies des joueurs sont ici des objets complexes qui se décomposent toutes en quatre *actions* : deux offres compétitives et deux offres non compétitives.

8. Cette hypothèse n'est certes pas entièrement conforme à la réalité puisque le Trésor n'annonce le volume de l'émission que deux jours avant l'adjudication. Cependant, il existe un calendrier précis des adjudications et le Trésor programme des plans de financement bien à l'avance. Il ne cherche ni à manipuler le marché, ni à jouer de manière stratégique. Au contraire, la transparence et la neutralité font parti des soucis du Trésor lors des adjudications. Ainsi, l'incertitude sur la quantité offerte dans l'enchère suivante est relative. En outre, la levée de cette hypothèse ne modifie pas les résultats si l'on suppose qu'étant symétriques et neutres vis-à-vis du risque, tous les SVT ont la même estimation de l'espérance de Q_2.

$S_i \equiv (x_{1i}(p), x_{2i}(p), q_{1i}, q_{2i})$ avec :
$x_{1i}(p)$ l'offre compétitive du joueur i dans la première enchère,
$x_{2i}(p)$ l'offre compétitive du joueur i dans la seconde enchère,
q_{1i} l'ONC1 du joueur i dans la seconde enchère,
q_{2i} l'ONC2 du joueur i dans la seconde enchère.

De même que dans le modèle statique, la forme des offres compétitives peuvent être de deux types (*cf.* section 2.1). En ce qui concerne les ONC, c'est-à-dire les actions q_{1i} et q_{2i} , elles consistent simplement en une quantité comprise entre zéro et une valeur limite déterminée par les résultats de la première enchère à la date t qui se déroule exactement comme l'enchère du modèle statique précédent.

La quantité obtenue dans la première enchère par chaque joueur i (x^*_{1i}), permet de calculer son coefficient d'attribution : $c_i = \frac{x^*_{1i}}{Q_1}$. On détermine ensuite le montant maximal que le joueur i peut demander sous forme d'ONC1 ($\bar{q}_{1i}$) et d'ONC2 ($\bar{q}_{2i}$) dans la seconde enchère :

$$\bar{q}_{1i} = \alpha_1 Q_2 c_i$$
$$\bar{q}_{2i} = \alpha_2 Q_2 c_i$$

α_1 et α_2 sont fixés par le Trésor de manière exogène entre 0 et 1. Nous rappelons que la quantité servie sous forme d'ONC1 est prélevée sur la quantité Q_2 annoncée par le Trésor, alors que le montant des ONC2 représente une émission de titres supplémentaire pour le Trésor (c'est-à-dire en plus de la quantité Q_2 annoncée).

Dans la seconde adjudication, chaque joueur sélectionne en $t+n$ deux actions, une offre compétitive $x_{2i}(p)$ et une ONC1 $q_{1i} \leqslant \bar{q}_{1i}$. La fonction de demande agrégée $x_{2A}(p)$ permet de déterminer le prix limite d'équilibre p^*_2 en fonction de la quantité Q_2 annoncée mais également du montant total des ONC1. Ainsi, p^*_2 est le prix maximal tel que $x_{2A}(p^*_2) \geqslant Q_2 - \sum_{i=1}^{N} q_{1i}$.

Enfin, en $t+n+1$, tous les joueurs sont autorisés à soumettre une ONC2 telle que $q_{2i} \leqslant \bar{q}_{2i}$.

3.2 Résolution du jeu

Le jeu considéré comporte en fait trois sous jeux : la première enchère, la seconde enchère et les ONC2. π_{ki} désigne le profit du joueur i dans le sous jeu k avec $k = 1,2$ ou 3. Nous résolvons ce jeu par récurrence à l'envers. Nous considérons d'abord la soumission des ONC2. Nous étudions ensuite la seconde adjudication dans laquelle les actions d'un joueur sont de déterminer simultanément : une fonction de demande $x_{2i}(p)$ et une ONC1 q_{1i}. Puis nous déterminons enfin les offres compétitives optimales de la première adjudication.

3.2.1 Les offres non compétitives après la seconde adjudication (les ONC2)

Chaque enchérisseur i a la possibilité après la seconde adjudication de placer une offre non compétitive $q_{2i} \in [0, \bar{q}_{2i}]$. Le profit de l'agent i dans ce sous jeu est : $\pi_{3i} = (v_{t+n+1} - \bar{p}_2)q_{2i}$, où $\bar{p}_2$ est le prix des ONC2, il correspond au prix moyen pondéré par les quantités des prix payés par les vainqueurs de la seconde enchère. Il est facile de voir s'il est intéressant pour un joueur i de soumettre une ONC2 en $t+n+1$ puisque nous sommes ici en information complète. Il suffit pour cela de comparer le prix des ONC2 $\bar{p}_2$ et la valeur des titres sur le marché secondaire v_{t+n+1} qui sont tous les deux connus à la date $t+n+1$, c'est-à-dire au moment de la soumission des ONC2.

$$q_{2i} = \begin{cases} \bar{q}_{2i} & \text{si} \quad \bar{p}_2 < v_{t+n+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

LEMME 5. *Dès que le prix du marché secondaire v_{t+n+1} est supérieur au prix des ONC2, tous les SVT ont intérêt à demander la quantité maximale d'ONC2 qu'ils peuvent obtenir. En revanche, si le prix de revente est inférieur au prix des ONC2, personne ne sera intéressé par ces offres non compétitives.*

Les ONC2 apparaissent ici comme une option d'achat gratuite que les enchérisseurs peuvent ou non exercer selon l'évolution du titre sur le marché secondaire.

Ainsi, $\pi_{3i} = \begin{cases} (v_{t+n+1} - \bar{p}_2)\bar{q}_{2i} & \text{si} \quad \bar{p}_2 < v_{t+n+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

À une date antérieure à $t+n+1$,

$E\left[\tilde{\pi}_{3i}\right] = E\left[\max(0, \tilde{v}_{t+n+1} - \bar{p}_2)\alpha_2 Q_2 \frac{x^*_{1i}}{Q_1}\right]$ [9].

Les ONC2 possèdent une valeur pour les enchérisseurs puisqu'ils n'exercent cette option d'achat que lorsque cela leur est profitable. Par ailleurs, il est à noter qu'à travers x^*_{1i} et $\bar{p}_2$, le profit π_{3i} du joueur i dépend des deux enchères précédentes. D'une part, la première adjudication détermine, à travers les coefficients d'attribution, la quantité maximale que chaque enchérisseur peut demander au titre des ONC2. D'autre part, le prix moyen pondéré qui résulte de la seconde enchère représente le prix des ONC2 et par conséquent modifie la valeur de l'option. En effet, plus $\bar{p}_2$ est faible, plus la probabilité d'exercer l'option augmente et plus le profit est grand. Lors des deux enchères précédentes, les enchérisseurs doivent par conséquent prendre en compte le fait que leur stratégie a un impact sur le profit qu'ils pourront tirer des ONC2.

En $t+n$ cette espérance de profit dépend de $\tilde{v}_{t+n+1}$ et du prix des ONC2. Or, le prix moyen pondéré d'équilibre de la seconde enchère $\bar{p}_2$ ne peut pas être inférieur au prix de réserve $v_{t+n} - \varepsilon$ et nous montrons par la suite que $\bar{p}_2$ n'est jamais supérieur à $v_{t+n} + \varepsilon$. Ainsi, lorsque $v_{t+n} - \varepsilon \leqslant \bar{p}_2 \leqslant v_{t+n} + \varepsilon$ on a :

$$\begin{aligned} E\left[\tilde{\pi}_{3i}\right] &= \bar{q}_{2i} E\left[\max\left(0, \tilde{v}_{t+n+1} - \bar{p}_2\right)\right] \\ &= \bar{q}_{2i} \int_{\bar{p}_2}^{v_{t+n}+\varepsilon} (v_{t+n+1} - \bar{p}_2)\frac{1}{2\varepsilon} dv_{t+n+1} \\ &= \bar{q}_{2i} \frac{(v_{t+n} + \varepsilon - \bar{p}_2)^2}{4\varepsilon}. \end{aligned}$$

9. Le tilde est utilisé pour préciser qu'il s'agit d'une variable aléatoire. Ainsi $\tilde{x}$ désigne la variable aléatoire et x sa réalisation.

3.2.2 La seconde adjudication

Nous rappelons que dans la seconde enchère les joueurs sont autorisés à soumettre des ONC1. Par conséquent, l'espérance de profit du joueur i est :

$$E\left[\tilde{\pi}_{2i}\right] = E\left[\left(v_{t+n} - \frac{p_2^*}{2} - \frac{a_{2i}}{2b_{2i}}\right)(a_{2i} - b_{2i}p_2^* + q_{1i}) + \tilde{\pi}_{3i}\right].$$

Puisque $v_{t+n} - \varepsilon \leqslant \bar{p}_2 \leqslant v_{t+n} + \varepsilon$ on a :

$$E\left[\tilde{\pi}_{2i}\right] = \left(v_{t+n} - \frac{p_2^*}{2} - \frac{a_{2i}}{2b_{2i}}\right)(a_{2i} - b_{2i}p_2^* + q_{1i}) + \frac{\bar{q}_{2i}}{4\varepsilon}(v_{t+n} + \varepsilon - \bar{p}_2)^2$$

avec $p_2^* = \dfrac{(N-1)(a_2+q_1) + a_{2i} + q_{1i} - Q_2}{(N-1)b_2 + b_{2i}}$ le prix limite d'équilibre et

$\bar{p}_2 = \dfrac{p_2^*\left(Q_2 - (N-1)q_1 - q_{1i}\right) + \int_{p_2^*}^{\max\left(\frac{a_{2i}}{b_{2i}},\frac{a_2}{b_2}\right)} x_A(p)dp}{Q_2 - (N-1)q_1 - q_{1i}}$ le prix moyen pondéré où $x_A(p)$ représente la demande agrégée.

Les équilibres de la forme : $x_{2i}(p) = a_{2i} - b_{2i}p$

LEMME 6. *Il n'existe aucun équilibre symétrique avec (ni sans) ONC1 de la seconde enchère discriminatoire où la soumission compétitive est une demande linéaire strictement décroissante.*

PREUVE : voir annexe 2.

Le fait que les enchérisseurs puissent soumettre des ONC ne change rien à ce résultat obtenu précédemment dans la section 2.3.1.

Les équilibres de la forme : $x_{2i}(p) = \begin{cases} Q_2 & \textbf{si} \quad p \leqslant p_{2i} \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$

LEMME 7. *Enchérir $p_2 = v_{t+n}$ pour toute la quantité annoncée par le Trésor est une action optimale de la seconde enchère discriminatoire. Le montant des ONC1 n'a aucun impact.*

PREUVE : voir annexe 3.

Notre résultat ne nous permet pas de déterminer et de distinguer précisément l'offre compétitive et l'ONC1 optimales des agents puisque celles-ci sont parfaitement liées dans la condition d'équilibre. Dans cette adjudication, les ONC1 ne jouent pas de rôle fondamental. La condition d'équilibre est exactement la même lorsque les joueurs n'ont pas la possibilité de soumettre des ONC1. Il suffit de poser $q_1 = 0$. Ainsi, les ONC1 n'ont pas de véritable impact stratégique sur les soumissions compétitives de cette enchère puisque n'importe quel équilibre peut être atteint sans ONC1.

3.2.3 La première adjudication

Les enchérisseurs doivent prendre en compte le fait que leur offre compétitive détermine leur coefficient d'attribution pour la seconde adjudication. En effet, même si les ONC1 ne présentent pas d'avantage particulier pour les joueurs, les ONC2 possèdent une certaine valeur. Il faut donc maximiser le profit des joueurs en intégrant la valeur future des ONC2 qui dépend elle-même du résultat de la seconde enchère.

Les résultats sont similaires à ceux de la seconde enchère. Toutefois, la valeur unitaire de l'option est connue puisque les enchérisseurs prévoient que le prix d'équilibre de la seconde enchère sera le prix de revente qui prévaut alors sur le marché secondaire : $\tilde{v}_{t+n}$. Celle-ci est par conséquent estimée à $\frac{(\tilde{v}_{t+n}+\varepsilon-\tilde{v}_{t+n})^2}{4\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{4}$. En revanche, les résultats de la première enchère déterminent les coefficients d'attribution ci qui affectent $\bar{q}_{2i}$.

Les équilibres de la forme : $x_{1i}(p) = a_{1i} - b_{1i}p$

$$E\left[\tilde{\pi}_{1i}\right] = E\left[\left(v_t - \frac{p_1^*}{2} - \frac{a_{1i}}{2b_{1i}}\right)(a_{1i} - b_{1i}p_1^*) + \tilde{\pi}_{2i}\right]$$

$$E\left[\tilde{\pi}_{1i}\right] = \left(v_t - \frac{p_1^*}{2} - \frac{a_{1i}}{2b_{1i}}\right)(a_{1i} - b_{1i}p_1^*) + 0 + \alpha_2\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\varepsilon}{4}(a_{1i} - b_{1i}p_1^*)$$

$$E\left[\tilde{\pi}_{1i}\right] = \left(v_t + \alpha_2\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\varepsilon}{4} - \frac{p_1^*}{2} - \frac{a_{1i}}{2b_{1i}}\right)(a_{1i} - b_{1i}p_1^*)$$

avec $p_1^* = \dfrac{(N-1)a_1 + a_{1i} - Q_1}{(N-1)b_1 + b_{1i}}$.

LEMME 8. *Il n'existe aucun équilibre symétrique de la première enchère discriminatoire où la soumission compétitive est une demande linéaire strictement décroissante.*

PREUVE : voir annexe 2. La démonstration est identique à celle du lemme 6 pour la seconde enchère, il suffit de poser $(a_{2i}, b_{2i}, q_{1i}) = (a_{1i}, b_{1i}, 0)$, $v_{t+n} = v_t + \alpha_2\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\varepsilon}{4}$ et de ne pas reprendre en compte la valeur de l'option puisqu'elle est déjà incluse dans la valeur des titres.

Les équilibres de la forme : $x_{1i}(p) = \begin{cases} Q_1 & \textbf{si} \quad p < p_{1i} \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$

Enchérir pour toute la quantité au prix v_t n'est pas une stratégie d'équilibre. En effet, il faut tenir compte de la valeur unitaire espérée d'une ONC2 est $\frac{\varepsilon}{4}$ dans le cas d'une enchère discriminatoire.

LEMME 9. *Enchérir $p_1 = v_t + \alpha_2\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\varepsilon}{4}$ pour toute la quantité est une action optimale de la première enchère discriminatoire.*

PREUVE : voir annexe 3. La démonstration est identique à celle du lemme 7. Il suffit de poser $v_{t+n} = v_t + \alpha_2\frac{Q_2}{Q_1}\frac{\varepsilon}{4}$, $q_{1i} = q_1 = 0$, de remplacer toutes les variables indicées par 2, par les mêmes variables indicées par 1 et de ne pas prendre en compte une seconde fois la valeur de l'option.

3.3 Equilibre parfait en sous jeux

Nous avons trouvé une seule action d'équilibre dans les deux adjudications discriminatoires qui composent le jeu. Cette action consiste à proposer le prix des titres qui prévaut sur le marché secondaire, augmenté de la valeur des ONC2 dans la première enchère.

PROPOSITION 2. *Il existe un seul équilibre de Nash symétrique lorsque le Trésor utilise l'enchère discriminatoire dans les deux adjudications. Le profit total espéré par chaque joueur est nul, en revanche, le profit espéré du vendeur est maximisé.*
Les stratégies et les prix d'équilibre sont :
pour la 1ère enchère : $x_1^*(p) = \begin{cases} Q_1 & si \quad p \leqslant v_t + \alpha_2 \frac{Q_2}{Q_1}\frac{\varepsilon}{4} \\ 0 & sinon \end{cases}$, *et* $p_1^* = v_t + \alpha_2 \frac{Q_2}{Q_1}\frac{\varepsilon}{4}$ *pour la 2nde enchère et les ONC1 :*
$x_2^*(p) + q_1^* = \begin{cases} Q_2 & si \quad p \leqslant v_{t+n} \\ 0 & sinon \end{cases}$, *et* $p_2^* = v_{t+n}$
pour les ONC2 : $q_2^* = \begin{cases} \bar{q}_2 = \alpha_2 \frac{Q_2}{N} & si \quad v_{t+n} < v_{t+n+1} \\ 0 & sinon \end{cases}$ *le prix des ONC2 étant* $\bar{p}_2 = p_2^* = v_{t+n}$.

PREUVE : voir les lemmes 5, 6, 7, 8 et 9.

Puisque les demandes des enchérisseurs sont plates, le prix moyen pondéré est égal au prix limite d'équilibre. Au début du jeu (à la date 0) la valeur actualisée du profit espéré des joueurs à l'équilibre de Nash symétrique parfait en sous jeu est nulle.

$$E\left[\Pi^D\right] = E\left[\left(\tilde{v}_t - \tilde{p}_1^*\right)\frac{Q_1}{N} + \left(\tilde{v}_{t+n} - \tilde{p}_2^*\right)\frac{Q_2}{N} + \alpha_2 \frac{Q_2}{Q_1}\frac{Q_1}{N}\max\left(0, \tilde{v}_{t+n+1} - \tilde{p}_2^*\right)\right]$$

$$E\left[\Pi^D\right] = \left[\left(-\alpha_2 \frac{Q_2}{Q_1}\frac{\varepsilon}{4}\right)\frac{Q_1}{N} + \alpha_2 \frac{Q_2}{Q_1}\frac{Q_1}{N}\frac{\varepsilon}{4}\right] = 0$$

L'équilibre obtenu ici permet au vendeur d'obtenir le meilleur revenu possible en ne laissant aucun profit aux enchérisseurs. Ce résultat suppose l'absence de collusion entre les enchérisseurs. Or, le problème de la collusion est particulièrement important dans le contexte des adjudications du Trésor qui sont des enchères répétées auxquelles participent quasiment toujours les mêmes joueurs. De plus, dans le cadre de notre modèle, les enjeux de collusion sont renforcés par les hypothèses de symétrie des enchérisseurs, d'absence d'information privée et de rationnement des ONC (coefficients d'attribution). Il est alors légitime de redouter une coordination entre les enchérisseurs visant notamment à réduire la perte de profit dans la première enchère. Toutefois, dans le cadre de ce modèle (jeu non répété avec un nombre fini d'enchères) aucun équilibre collusif conduisant à un prix limite inférieur à ceux de la proposition 2 n'est soutenable, car chaque joueur est alors incité à dévier pour demander une quantité plus importante à un prix à peine plus élevé.

3.4 Analyse de l'impact des ONC sur les stratégies d'enchères

Notre modélisation fait apparaître dans chacune des deux adjudications (première et seconde) des impacts partiels des ONC sur les stratégies d'enchères des joueurs. Nous appelons *impact direct*, l'effet sur les stratégies d'enchères de pouvoir soumettre des ONC parallèlement aux offres compétitives, les coefficients d'attribution et le prix de ces ONC étant donnés ; et *impact indirect* le fait qu'à travers les résultats des adjudications, la possibilité de soumettre des ONC modifie les stratégies d'enchères des joueurs.

La première adjudication (dans laquelle il n'y a pas d'ONC mais dont les résultats sont utilisés pour calculer les coefficients d'attribution pour la seconde adjudication) permet d'isoler un des *impacts indirects* des ONC. Elle montre que la concurrence est plus rude entre les enchérisseurs. En effet, le prix d'équilibre est supérieur au prix d'équilibre d'une adjudication isolée sans ONC. La différence entre les deux prix d'équilibre est même égale à la valeur de l'option que représente les ONC2.

Dans la seconde adjudication, les coefficients d'attribution sont donnés, cependant il existe un autre *impact indirect* des ONC puisque c'est cette adjudication qui détermine le prix des ONC. En effet, nous avons vu que plus le prix moyen pondéré qui résulte de l'enchère est faible, plus la probabilité d'exercer l'option est grande et plus la valeur même de l'option augmente. Il y a donc une incitation supplémentaire à obtenir un prix d'équilibre faible. Cependant, la prise en compte de cet aspect ne modifie pas les résultats de la seconde enchère. En revanche, on obtient également dans la seconde adjudication l'*impact direct* des ONC sur les stratégies d'enchères. Les ONC1 apparaissent comme un instrument inutile pour les enchérisseurs puisqu'ils peuvent atteindre les mêmes résultats avec ou sans ONC1. Les ONC1 sont donc ici un instrument redondant qui n'apporte rien ni aux SVT ni au Trésor. À moins de ne vouloir prendre aucun risque sur la quantité (mais ceci est hors modèle), les ONC1 ne représentent pas un véritable privilège. Par ailleurs, si nous avions introduit dans le modèle dynamique une adjudication supplémentaire entre les deux, l'utilisation des ONC1 aurait même été néfaste pour les enchérisseurs. Supposons que les coefficients d'attribution soient déterminés par les résultats de l'enchère précédente et qu'il soit possible de soumettre des ONC seulement dans les deux dernières adjudications, alors personne n'a intérêt à utiliser les ONC1 dans la seconde adjudication puisque celles-ci réduisent la quantité disponible pour les offres compétitives et donc réduisent aussi les coefficients d'attribution de tous les joueurs [10]. Par conséquent, les

10. Nous rappelons que les coefficients d'attribution sont calculés à partir de la quantité de titres gagnés uniquement sur la base d'offres compétitives rapportée au montant total annoncé avant l'adjudication.

ONC1 ne représentent pas un avantage pour les SVT et leur utilisation serait même néfaste pour eux. Puisque les SVT ne sont pas obligés de soumettre des ONC (il s'agit d'un droit, non d'un devoir), la réponse optimale consiste à ne pas les utiliser.

Les ONC2 n'ont aucun impact direct sur les résultats de la seconde adjudication. Le fait de pouvoir soumettre des ONC après le résultat des adjudications, apparaît dans la seconde enchère comme un privilège pour les SVT, puisque celles-ci ne comportent aucun risque, ni de prix (comme les ONC1) ni de quantité (comme les offres compétitives). Les ONC2 analysées isolément lors d'une seule enchère représentent bien une option gratuite pour les SVT, néanmoins, le profit espéré moyen de cette option est intégralement perdu lors de l'adjudication précédente puisque le prix d'équilibre inclut la valeur de cette option. Ainsi, en leur faisant ce *cadeau* le Trésor ne leur offre rien puisque les ONC2 ont pour effet indirect d'amplifier la concurrence lors des enchères précédentes. Au contraire, ici c'est le Trésor qui récupère la valeur moyenne de l'option.

4 Conclusion

D'après la modélisation employée, la procédure d'enchère discriminatoire est préférable pour le Trésor soucieux de maximiser son revenu espéré. En effet, l'enchère à prix uniforme peut conduire à des équilibres très dommageables pour le Trésor, alors que l'enchère discriminatoire permet d'obtenir les meilleurs prix possibles. Néanmoins, étant donné la complexité de l'environnement dans lequel se déroulent les adjudications du Trésor, ce modèle est insuffisant pour affirmer que l'enchère discriminatoire est véritablement préférable à l'enchère à prix uniforme pour la vente des valeurs du Trésor. De fait, comme nous l'avons exposé dans la section 2.4, de nombreux éléments non pris en compte sont susceptibles de modifier les résultats obtenus.

L'objectif de cet article est plutôt d'apporter les premiers éléments de réponse concernant l'impact des ONC sur les stratégies d'enchères des joueurs. Il ressort de ce modèle que les ONC1 sont un instrument redondant qui ne représente en rien un avantage pour les SVT. Elles n'ont aucun impact véritable sur les stratégies d'enchères des joueurs et par conséquent ne modifient pas les équilibres du jeu. Ce résultat est conforme aux constatations empiriques selon lesquelles la possibilité pour les SVT de soumettre des ONC1 n'est pas très utilisée. Dans ces conditions, pourquoi réserver l'accès des ONC1 aux SVT ? En effet, la possibilité (pour d'autres acheteurs potentiels autres que les SVT) de soumettre des ONC1 pourrait accroître la participation et donc la concurrence. Sur l'exemple des États-Unis, le Trésor français pourrait permettre à certains acheteurs potentiels moins informés, n'osant pas intervenir directement aux enchères, d'obtenir grâce aux ONC1 une certaine quantité de titres.

En ce qui concerne les ONC2, le résultat n'est pas non plus en faveur des SVT. Même s'ils bénéficient effectivement d'un impact direct positif des ONC2 qui est l'aspect option gratuite, les SVT sont victimes d'un impact indirect qui se traduit par un accroissement de la concurrence lors de la première enchère, telle qu'en moyenne, ils perdent la valeur espérée que représentent les ONC2 lors de la seconde enchère. En définitive, l'effet net *ex ante* des ONC2 est nul pour les SVT. *Ex post*, les ONC2 sont favorables soit aux SVT soit au Trésor selon l'évolution du cours des titres sur le marché. Ainsi, en moyenne, les ONC ne présentent aucun intérêt si ce n'est de donner l'illusion aux SVT de bénéficier d'un avantage. Toutefois, ce privilège des ONC2 réservé aux SVT n'est pas totalement neutre.

En effet, notre analyse de l'impact des ONC peut expliquer un autre trait caractéristique des adjudications du Trésor en France. Dans notre étude, un seul type de joueur est considéré : les SVT. Ces derniers ont le droit de soumettre des offres compétitives aussi bien que des ONC dans les limites autorisées. Or, les adjudications du Trésor ne sont pas réservées aux SVT, d'autres intervenants peuvent soumettre des offres compétitives. La prise en compte des agents non SVT introduit une asymétrie dans les joueurs, mais ne modifie pas pour autant les résultats obtenus sur l'impact des ONC. De fait, considérons deux types d'enchérisseurs : les SVT qui peuvent soumettre des offres compétitives et des ONC, et les non SVT qui eux, n'ont le droit de soumettre que des offres compétitives. Le fait que les non SVT ne puissent pas soumettre d'ONC1 ne les pénalise en rien face aux SVT puisqu'ils peuvent adopter la même stratégie que les SVT même sans ONC1. Il n'y a aucune raison pour que les ONC1 deviennent un instrument utile aux SVT face aux non SVT. De même, ce n'est pas parce que certains joueurs ne peuvent pas soumettre d'ONC2 que ces dernières deviennent sans valeurs pour ceux qui y ont droit. L'impact indirect des ONC2 reste le même et se traduit par un accroissement de la concurrence lors de la première enchère. Néanmoins, les non SVT ne peuvent pas lutter face aux SVT, aussi dans la première enchère discriminatoire ils ne gagnent rien du tout. La pratique des ONC réservée aux SVT peut ainsi expliquer la quasi absence des non SVT dans les enchères du Trésor en France.

Nous rappelons que nos conclusions sur l'impact des ONC sur les stratégies d'enchère des SVT sont également valables dans un modèle composé de deux adjudications à prix uniforme. En revanche, diverses questions au sujet des offres non compétitives n'ont pas été abordées. Pourtant, il est nécessaire lors de la mise en place d'une telle pratique de les considérer de manière approfondie afin de concevoir un instrument vraiment efficace pour le Trésor. Ainsi, avant de décider d'accepter les ONC, la première question consiste naturellement à savoir qui a le droit de soumettre des ONC ? Se pose alors la question du nombre ainsi que du montant global d'ONC acceptées. Dans notre modèle, la part maximale du montant de l'émission réservée aux ONC1 ainsi que le montant total qui peut être demandé au titre des ONC2 sont fixés de manière exogène par le Trésor à travers α_1 et α_2. Mais quels sont les α optimaux pour le Trésor ? Comment doit être limité le montant des ONC de chaque agent ? Etc… De nombreux aspects doivent donc encore être étudiés avant de pouvoir se prononcer de manière plus complète sur la pratique des ONC et plus généralement sur la procédure de vente optimale du point de vue du Trésor. Malgré cela, nos résultats rendent bien compte des faits observés empiriquement, à savoir la faible utilisation des ONC1, le phénomène de tout ou rien en ce qui concerne les ONC2 et la faible participation d'enchérisseurs qui n'ont pas le statut de SVT.

• Références bibliographiques

BACK K. M., ZENDER J. F. (1993). – « Auctions of Divisible Goods: On the Rationale for the Treasury Experiment », *Review of Financial Studies*, 6:1, p. 733-764.

BOLTEN S. (1973). – « Treasury Bill Auction Procedures: An Empirical Investigation » , *Journal of Finance*, p. 577-585.

BRIMMER A. F. (1962). – « Price Determination in the U.S. Treasury Bill Market » , *Review of Economics and Statistics*, 44:2, p. 178-183.

DARIPA A. (2001). – « A theory of treasury auctions », *Journal of International Money and Finance*, 20, p. 743-767.

DAS S. R., SUNDARAM R. K. (1997). – « Auction Theory: A Summary with Applications to Treasury Markets » , *Working Paper n° 5873*, National Bureau of Economic Research.

ENGELBRECHT-WIGGANS R. (1996). – « Auctions with Noncompetitive Sales » , Games and Economic Behavior, 16:1, p. 54-64.

FRIEDMAN M. (1963). – « Price determination in the United States Treasury Bill Market: A Comment » , *Review of Economics and statistics*, p. 318-320.

KLEMPERER P. D., MEYER M. A. (1989). – « Supply Function Equilibria in Oligopoly Under Uncertainty » , *Econometrica*, 57:6, p. 1243-1277.

PRÉGET R. (2001). – « Les adjudications des valeurs du Trésor : enchères discriminatoires *versus* enchères à prix uniforme. Contributions théoriques et empiriques » , *Thèse de doctorat de l'Université de Paris I*, chapitre 4, p. 177-221.

VISWANATHAN S., WANG J. J.D. (2000). – « Auctions with When-Issued Trading: A Model of the U.S. Treasury Markets », *Miméo*, Fuqua School of Business, Duke University.

WANG J. J.D, ZENDER J. F. (2002). – « Auctioning Divisible Goods » , Economic Theory, 19:4, p. 673-705.

ANNEXES

Annexe 1 : ***Démonstration du lemme 1***

L'enchérisseur i maximise son profit en (a_i, b_i) :

$$\pi_i^U = (v_t - p^*)(a_i - b_i p_2^*) \text{ avec } p^* = \frac{(N-1)a + a_i - Q}{(N-1)b + b_i}.$$

Conditions du premier ordre

Les conditions nécessaires sont obtenues en égalisant à zéro les dérivées du profit espéré du joueur i par rapport à (a_i, b_i). Les deux conditions du premier ordre sont identiques : $\frac{a_i - 2b_i p^* + b_i v_t}{(N-1)b + b_i} - (v_t - p^*) = 0$

Les stratégies d'équilibre potentiel doivent donc nécessairement satisfaire la relation suivante entre a_i et b_i : $a_i = (N-1)b(v_t - p^*) + b_i p^*$

Conditions du second ordre

Pour que les conditions du premier ordre définissent bien des maxima, il faut que la matrice hessienne composée des dérivées secondes soit définie négative. Or, aux points qui vérifient les conditions du premier ordre, la forme quadratique associée à la matrice hessienne est bien négative $\forall u$ et $\forall w$: $q(u, w) = -\frac{2(N-1)b}{((N-1)b + b_i)^2}(u - wp^*)^2 < 0$

Équilibres symétriques

Considérons maintenant les équilibres de Nash symétriques.

$$(a_i, b_i) = (a, b) \text{ et } p^* = \frac{Na - Q}{Nb}$$

On obtient alors la relation d'équilibre $a = v_t b + \frac{N-2}{N(N-1)}$.

Par conséquent, il existe une infinité d'équilibres de Nash symétriques.

Prix limite d'équilibre et profit

$$p^* = v_t - \frac{Q}{N(N-1)b}$$

La condition sur b pour que le prix d'équilibre ne soit pas négatif est $b \geqslant \frac{Q}{N(N-1)v_t}$. Ainsi, si $b = \frac{Q}{N(N-1)v_t}$ alors $p^* = 0$, et si b tend vers l'infini alors p^* tend vers v_t. De fait, le prix d'équilibre est toujours strictement inférieur au prix de revente.

L'expression du profit du joueur i est $\pi_i^U = \frac{Q^2}{N^2(N-1)b}$.

Recherche de déviation

Il faut maintenant vérifier qu'enchérir pour la totalité des titres à un prix unique n'est pas une déviation profitable pour le joueur i. Il est facile de montrer que face à l'équilibre que l'on vient de déterminer, il n'existe pas de déviation profitable qui consiste à demander toute la quantité à un seul niveau de prix p_i. Pour le montrer, il suffit de voir que la stratégie $x_i(p) = \begin{cases} Q & \text{si} \quad p \leqslant v_t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ représente tout simplement le cas limite lorsque b tend vers l'infini. Cette stratégie correspond à un prix d'équilibre supérieur à tous ceux obtenus ici. Par conséquent, il n'existe pas non plus de déviation profitable de ce type.

Annexe 2 : ***Démonstration des lemmes 3 et 6***

La démonstration des lemmes 3 et 6 s'obtient en procédant de la même façon que pour l'enchère à prix uniforme (voir annexe 1). Nous proposons ici d'expliciter uniquement la démonstration du lemme 6 qui prend en compte la présence des ONC1.

On cherche a maximiser le profit de l'enchérisseur i en (a_{2i}, b_{2i}, q_{1i}) étant donné que tous les autres joueurs $j \neq i$ adoptent les actions $x_{2j}(p) = x_2(p) = a_2 - b_2 p$ et une ONC1 $q_{1j} = q_1 \leqslant \bar{q}_1$.

$$E\left[\tilde{\pi}_{2i}\right] = \left(v_{t+n} - \frac{p_2^*}{2} - \frac{a_{2i}}{2b_{2i}}\right)(a_{2i} - b_{2i} p_2^* + q_{1i}) + \frac{\bar{q}_{2i}}{4\varepsilon}(v_{t+n} + \varepsilon - \bar{p}_2)^2$$

si $v_{t+n} - \varepsilon \leqslant \bar{p}_2 \leqslant v_{t+n} + \varepsilon$ avec $p_2^* = \frac{(N-1)(a_2+q_1)+a_{2i}+q_{1i}-Q_2}{(N-1)b_2+b_{2i}}$ le prix limite d'équilibre, et $\bar{p}_2 = \dfrac{p_2^*(Q_2-(N-1)q_1-q_{1i})+\int_{p_2^*}^{\max\left(\frac{a_{2i}}{b_{2i}}, \frac{a_2}{b_2}\right)} x_A(p)dp}{Q_2-(N-1)q_1-q_{1i}}$ le prix moyen pondéré.

La première chose à calculer est le prix $\bar{p}_2$ des ONC2 lorsque tous les joueurs $j \neq i$ adoptent la stratégie (a_2, b_2, q_1) et le joueur i la stratégie (a_{2i}, b_{2i}, q_{1i}).

Plusieurs cas sont possibles : $\left(\frac{a_{2i}}{b_{2i}} < \frac{a_2}{b_2}\right), \left(\frac{a_{2i}}{b_{2i}} = \frac{a_2}{b_2}\right), \left(\frac{a_{2i}}{b_{2i}} > \frac{a_2}{b_2}\right)$, cependant ils donnent tous : $\bar{p}_2 = \dfrac{\frac{a_{2i}^2}{b_{2i}}+(N-1)\frac{a_2^2}{b_2}-((N-1)b_2+b_{2i})p_2^{*2}}{2(Q_2-(N-1)q_1-q_{1i})}$.

Les conditions du premier ordre donnent trois équations :

$$(1) \bullet \frac{E\left[\pi_{2i}\right]}{a_{2i}} = \left[\begin{array}{c} \frac{\bar{q}_{2i}}{2\varepsilon}(v_{t+n} + \varepsilon - \bar{p}_2)\frac{((N-1)b_2+b_{2i})p_2^*}{Q_2-(N-1)q_1-q_{1i}} - \frac{a_{2i}+q_{i1}-b_{2i}p_2^*}{2} \\ -b_{2i}\left(v_{t+n} - \frac{p_2^*}{2} - \frac{a_{2i}}{2b_{2i}}\right) \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{(N-1)b_2+b_{2i}} - \frac{\bar{q}_{2i}}{2\varepsilon}(v_{t+n} + \varepsilon - \bar{p}_2)\frac{a_{2i}}{b_{2i}(Q_2-(N-1)q_1-q_{1i})} - \frac{a_{2i}+q_{i1}-b_{2i}p_2^*}{2b_{2i}} + \left(v_{t+n} - \frac{p_2^*}{2} - \frac{a_{2i}}{2b_{2i}}\right) = 0$$

$$(2)\bullet \frac{E\left[\pi_{2i}\right]}{b_{2i}} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{q}_{2i}}{2\varepsilon}\left(v_{t+n}+\varepsilon-\bar{p}_2\right)\frac{((N-1)b_2+b_{2i})p_2^*}{Q_2-(N-1)q_1-q_{1i}} - \frac{a_{2i}+q_{i1}-b_{2i}p_2^*}{2} \\ -b_{2i}\left(v_{t+n}-\frac{p_2^*}{2}-\frac{a_{2i}}{2b_{2i}}\right) \end{bmatrix}$$

$$\frac{-p_2^*}{(N-1)b_2+b_{2i}} - \frac{\bar{q}_{2i}}{2\varepsilon}\left(v_{t+n}+\varepsilon-\bar{p}_2\right)\frac{-\frac{a_{2i}^2}{b_{2i}}-p_2^{*2}}{2(Q_2-(N-1)q_1-q_{1i})}$$

$$+\frac{a_{2i}}{2b_{2i}}\left(a_{2i}+q_{i1}-b_{2i}p_2^*\right) - p_2^*\left(v_{t+n}-\frac{p_2^*}{2}-\frac{a_{2i}}{2b_{2i}}\right) = 0$$

$$(3)\bullet \frac{E\left[\pi_{2i}\right]}{q_{1i}} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{q}_{2i}}{2\varepsilon}\left(v_{t+n}+\varepsilon-\bar{p}_2\right)\frac{((N-1)b_2+b_{2i})p_2^*}{Q_2-(N-1)q_1-q_{1i}} - \frac{a_{2i}+q_{i1}-b_{2i}p_2^*}{2} \\ -b_{2i}\left(v_{t+n}-\frac{p_2^*}{2}-\frac{a_{2i}}{2b_{2i}}\right) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{(N-1)b_2+b_{2i}} - \frac{\bar{q}_{2i}}{2\varepsilon}\left(v_{t+n}+\varepsilon-\bar{p}_2\right)\frac{\bar{p}_2}{Q_2-(N-1)q_1-q_{1i}}$$

$$+\left(v_{t+n}-\frac{p_2^*}{2}-\frac{a_{2i}}{2b_{2i}}\right) = 0$$

À l'équilibre ces trois dérivées doivent être nulles. Or, (3)(1) donne : $\frac{\bar{q}_{2i}}{2\varepsilon}\left(v_{t+n}+\varepsilon-\bar{p}_2\right)\frac{1}{Q_2-(N-1)q_1-q_{1i}}\left(\frac{a_{2i}}{b_{2i}}-\bar{p}_2\right)+\frac{a_{2i}-b_{2i}p_2^*+q_{1i}}{2b_{2i}} > 0$, puisque $\frac{a_2}{b_2}$ est nécessairement supérieur à $\bar{p}_2$. Les deux termes de cette expression étant positifs, celle-ci ne peut pas être nulle. Ces conditions sont incompatibles, il n'existe donc aucune solution d'équilibre.

Annexe 3 : ***Démonstration du lemme 7***

La démarche est la même que dans le cas de l'enchère statique (lemmes 2 et 4). Montrons que le prix d'équilibre est nécessairement la véritable valeur du bien à savoir ici le prix de revente des titres observé sur le marché secondaire au moment de l'adjudication.

1. Si $p_2 > v_{t+n}$, en soumettant $p_{2i} = p_2$, le joueur i obtient :
$E\left[\tilde{\pi}_{2i}^*\right] = (v_{t+n}-p_2)\left(\frac{Q_2-(N-1)q_1-q_{1i}}{N}+q_{1i}\right)+\frac{\bar{q}_{2i}}{4\varepsilon}\left(v_{t+n}+\varepsilon-p_2\right)^2.$

L'agent i peut augmenter son espérance de profit en proposant un prix inférieur et une ONC1 nulle, cela lui évite de faire des pertes lors de la seconde enchère. Le prix d'équilibre ne peut donc pas être supérieur à v_{t+n}.

2. Si $p_2 < v_{t+n}$, en soumettant $p_{2i} = p_2$, le joueur i obtient :
$E\left[\tilde{\pi}_{2i}^*\right] = (v_{t+n}-p_2)\left(\frac{Q_2-(N-1)q_1-q_{1i}}{N}+q_{1i}\right)+\frac{\bar{q}_{2i}}{4\varepsilon}\left(v_{t+n}+\varepsilon-p_2\right)^2.$

Cependant il existe une déviation profitable qui consiste à soumettre $\hat{p}_{2i} = p_2+\varphi < v_{t+n}$.

$E\left[\hat{\pi}_{2i}\right] = (v_{t+n}-p_2-\varphi)\left(Q_2-(N-1)q_1\right)+\frac{\bar{q}_{2i}}{4\varepsilon}\left(v_{t+n}+\varepsilon-p_2-\varphi\right)^2$

$E\left[\pi_{2i}^*\right]-E\left[\hat{\pi}_{2i}\right] =$

$$\frac{1}{4N\varepsilon}\begin{bmatrix} 2\varepsilon\begin{pmatrix} N\varphi(2Q_2-2(N-1)q_1+\bar{q}_{2i}) \\ -2(N-1)(Q_2-(N-1)q_1-q_{1i})(v_{t+n}-p_2) \end{pmatrix} \\ +N\varphi\bar{q}_{2i}\left(2v_{t+n}-2p_2-\varphi\right) \end{bmatrix}$$

Or

$$\lim_{\varphi \to 0} \left(E\left[\pi^*_{2i}\right] - E\left[\hat{\pi}_{2i}\right] \right) =$$

$$\frac{1}{4N\varepsilon}\left[2\varepsilon\left(-2(N-1)(Q_2-(N-1)q_1-q_{1i})(v_{t+n}-p_2)\right)\right] < 0.$$

Il existe donc une déviation profitable si l'on prend un φ suffisamment petit.

3. Si $p_2 = v_{t+n}$, $E\left[\tilde{\pi}^*_{2i}\right] = \frac{\bar{q}_{2i}\varepsilon}{4}$.

Il n'existe pas de déviation profitable, car si $\hat{p}_{2i} > v_{t+n}$, i fait des pertes lors de la seconde enchère et la valeur de l'option diminue. De même, si $\hat{p}_{2i} < v_{t+n}$, cela n'a aucun impact sur son espérance de profit.

$p^*_2 = v_{t+n}$ est un prix d'équilibre de la seconde enchère. En effet, le profit des joueurs est nul (mise à part la valeur de l'option), mais aucun joueur n'a unilatéralement la possibilité de faire descendre le prix limite quelle que soit la forme de la demande de déviation envisagée.