

Rythmes de production et apprentissage sur la qualité

Carole HARITCHABALET *

RÉSUMÉ. – Nous montrons comment un monopole de biens durables utilise la production comme vecteur de l'apprentissage sur la qualité de son produit. Le monopole introduit sur le marché la quantité statique seulement si les croyances sur la qualité sont très optimistes ou très défavorables. Pour des croyances intermédiaires, le monopole peut surproduire et subventionner le processus d'apprentissage d'un bien de mauvaise qualité, ou rationner la demande pour acquérir de l'information sur un produit de bonne qualité.

Intertemporal Production Pattern and Learning on Quality

ABSTRACT. – We show how a durable goods monopolist may adjust the timing of production to control information revelation on its product's quality. It produces the static monopoly quantity at the time of introduction only if prior beliefs are very optimistic or very unfavourable. For intermediate priors, it may over produce (while pricing below marginal cost) if beliefs are too unfavourable or under produce if beliefs are favourable enough.

* C. HARITCHABALET : GREMAQ-UMR CNRS 5604, Université de Toulouse I.
Je remercie Francis BLOCH, Jean-Paul DÉCAMPS, Christian GOLLIER, Bruno JULLIEN, Régis RENAULT, François SALANIÉ ainsi que deux rapporteurs pour leurs précieux commentaires.

1 Introduction

L'introduction d'un nouveau bien durable, comme une nouvelle génération d'ordinateurs ou l'apparition de la technologie visuelle numérique (DVD), s'accompagne souvent d'une faible consommation du produit dans ses premières périodes de vie. Ce rythme lent de diffusion du produit est généralement expliqué par le caractère durable du produit. Un monopole de biens durables crée en effet sa propre concurrence future. Le monopole vend aux consommateurs les plus avides aujourd'hui, donc à la période suivante, l'élasticité de la demande étant plus grande, il vend son bien à un prix plus faible. Les consommateurs anticipent cette baisse du prix et refusent alors d'acheter le bien à un prix élevé (COASE [1972]), résultant en un rythme faible de diffusion du produit.

L'introduction d'un bien durable est cependant souvent associée à une incertitude technologique ou commerciale tant pour la firme, que pour les consommateurs, cette incertitude se résolvant généralement par la consommation. Un tel apprentissage de la part des consommateurs va affecter le fonctionnement du marché dans la mesure où il crée une externalité informationnelle pour les autres agents. Un rythme lent de diffusion d'un nouveau produit peut alors s'expliquer par un comportement d'expérimentation stratégique. Cet article a pour objet l'étude de l'impact des externalités informationnelles dans la consommation sur l'introduction d'un bien durable et nous montrons que le seul fait de ces externalités explique un rythme lent de production.

Dans un jeu à deux périodes, nous considérons une firme en situation de monopole offrant un produit de qualité initialement inconnue. Nous supposons que ni la firme, ni les consommateurs ne connaissent la vraie qualité du produit. Du côté de la demande, des consommateurs identiques¹ avec une demande unitaire entrent sur le marché en première période. Les consommateurs doivent essayer le produit pour apprendre sa qualité et la consommation fournit une information sur cette qualité qui est publiquement observable². Toute expérimentation produit donc un bien public, l'information. Un problème de passager clandestin dans l'expérimentation apparaît alors, conduisant les agents à des comportements d'expérimentation stratégiques.

Nous montrons tout d'abord que la stratégie des consommateurs est une stratégie d'achat précipité. Les consommateurs acceptent la première offre qui leur procure une utilité non-négative car, étant donné l'homogénéité de la demande, aucun consommateur ne peut espérer recevoir une utilité stricte-

1. Le problème de discrimination intertemporelle est supprimé afin d'isoler les impacts de l'apprentissage. La demande sur le marché est ainsi composée d'un groupe de consommateurs identiques. S'il n'existe pas d'incertitude sur la qualité du produit, la stratégie du monopole est alors de servir toute la demande en première période.

2. D'autres modes de révélation d'information sont possibles. La consommation peut par exemple apporter un signal privé au consommateur. Le problème est alors de déterminer comment inférer le signal à partir du comportement du consommateur (voir CAMINAL et VIVES [1996] par exemple). Nous nous concentrons ici sur l'impact des externalités informationnelles sur les comportements des agents et nous considérons donc que l'information est un bien public.

ment positive en attendant. Le monopole peut donc extraire tout le surplus des consommateurs et proposer à chaque période un prix égal à la qualité espérée du produit. Il y a donc une séparation entre la décision de prix et la décision de production. Nous montrons que cette dernière est conditionnée par la valeur accordée par le monopole au fait d'attendre l'information. En effet, l'apprentissage crée une volatilité dans les profits futurs. Une fois qu'un consommateur a acheté le nouveau produit, les agents vont recevoir une information sur la qualité de ce produit. Si cette information indique que le bien est de mauvaise qualité, la firme devra diminuer son prix. Mais, au contraire, si cette information indique que la qualité du bien est élevée, la firme pourra proposer un prix plus élevé. Ainsi, à chaque fois qu'une information est révélée, le prix auquel la firme peut vendre son bien est modifié.

La stratégie de production dépend ainsi de la qualité *a priori* du produit. Lorsque cette qualité est suffisamment élevée, le monopole peut proposer un prix supérieur au coût marginal pour son produit et attendre a donc un coût : celui de ne pas servir un consommateur. D'un autre côté, attendre peut amener un gain à la firme : celui lié à l'acquisition d'information. La question pour la firme est alors de déterminer le montant d'information qu'elle veut faire observer sur son produit. En choisissant de produire beaucoup dès la première période, la firme s'assure un revenu, mais en choisissant de produire peu, la firme permet à un nombre plus important de consommateurs d'être informés sur la qualité de son produit et donc peut être d'augmenter son profit dans le futur. Dès que la valeur de l'information est positive, le monopole rationne la demande et vend sur les deux périodes. Le niveau de production en première période est alors plus faible que celui qui maximiserait le profit myope. Cette étude permet donc de trouver une justification à un rythme de production lent autre que le désir de discriminer entre des consommateurs. Une firme peut adopter un tel rythme de production pour permettre d'acquérir de l'information sur la qualité de son produit.

Lorsque le bien est *a priori* de trop mauvaise qualité, la firme ne peut pas vendre son produit au-dessus du coût marginal. Nous montrons cependant que la firme peut être amenée à subventionner certaines ventes, afin de subventionner le processus d'apprentissage. Des « prix de lancement » peuvent être pratiqués pour des produits dont la qualité est *a priori* mauvaise mais pour lesquels on espère recevoir une bonne information et augmenter les prix dans le futur. Le monopole adopte donc une stratégie de surproduction : le niveau de production en première période est plus élevé que celui qui maximiserait le profit myope.

La littérature traitant de l'apprentissage dans le cadre de modèles dynamiques comportant plusieurs agents s'est surtout intéressée à des problèmes de tarification³. Deux articles ont cependant étudié un problème de production dans un modèle d'apprentissage. MIRMAN, SAMUELSON et URBANO [1993] étudient un modèle à deux périodes dans lequel un monopole apprend sur sa demande. La firme doit déterminer la quantité à produire en première période. La firme observe alors un signal sur sa demande et choisit son niveau de production pour la seconde période. Les auteurs montrent qu'il y a surproduc-

3. Voir, par exemple, BERGEMANN et VALIMAKI [1997, 2000] qui présentent deux modèles d'apprentissage sur la qualité d'un produit dans le cadre d'un duopole, ou HARITCHABALET [1999] dans le cadre d'un duopole de biens durables.

tion. Le même résultat est obtenu par SCHLEE [1998] dans un modèle d'apprentissage sur la qualité d'un produit. Ces auteurs ne retrouvent cependant pas le résultat de rationnement. Cette différence dans les résultats provient de la structure de la demande. Ces travaux considèrent en effet un groupe de consommateurs effectuant des achats répétés. Ils font abstraction d'une substitution intertemporelle de la part des consommateurs.

La section suivante introduit les notations et présente l'offre et la demande dans le modèle. Nous établissons dans la troisième section la stratégie de tarification du monopole et la stratégie des consommateurs. La quatrième section est consacrée à la stratégie de production du monopole. Nos conclusions sont présentées dans la dernière section.

2 Le modèle

Considérons un modèle à deux périodes dans lequel un monopole offre un bien durable. Le monopole produit à un coût marginal constant qui est, sans perte de généralité, normalisé à zéro. Le monopole fait face à une groupe de N consommateurs identiques (l'utilité de réserve est normalisée à 0) ayant une demande unitaire pour le bien. Acheter un bien de qualité π au prix p donne un gain $\pi - p$. Un consommateur qui n'accepte jamais une offre reçoit une utilité de zéro.

La qualité du produit, π , est initialement inconnue par *tous* les agents présents sur le marché. Cette qualité peut être élevée ou basse :

$$\pi \in \{\bar{\pi}, \underline{\pi}\},$$

où $\bar{\pi} > 0$ et $\underline{\pi} < 0$. Cette hypothèse implique que les consommateurs ne sont pas disposés à payer pour un bien de basse qualité, ou encore que le coût de production d'un bien de mauvaise qualité est supérieur à la disposition à payer des consommateurs.

Le monopole et les consommateurs ont la même croyance μ_0 sur la probabilité d'une qualité élevée. Notons $\pi(\mu_0) \equiv \mu_0\bar{\pi} + (1 - \mu_0)\underline{\pi}$ la qualité espérée du bien.

L'incertitude sur la qualité du produit peut être résolue uniquement par la consommation. S'il y a expérimentation, *tous* les agents observent des signaux sur les utilités des consommations passées. Le vecteur aléatoire X^q modélise l'ensemble de ces signaux. Plus précisément, $X^q \equiv (X_1, \dots, X_q)$ où X_i est l'expérience du consommateur i . Après l'observation de X^q , *tous* les agents révisent leurs croyances sur la probabilité d'une qualité élevée. Nous notons μ_{x^q} la probabilité *a posteriori* que le bien soit de qualité élevée après une expérimentation de taille q et $f_q(\cdot/\bar{\pi})$ la densité conditionnelle de $X^q = x^q$ quand $\pi = \bar{\pi}$. Nous avons :

$$\mu_{x^q} = \frac{f_q(x^q/\bar{\pi})\mu_0}{f_q(x^q/\bar{\pi})\mu_0 + f_q(x^q/\underline{\pi})(1 - \mu_0)}.$$

La qualité espérée du bien conditionnelle à l'information x^q est donc $\pi(\mu_{x^q}) = \mu_{x^q}\overline{\pi} + (1 - \mu_{x^q})\underline{\pi}$.

Le *timing* du jeu est le suivant. Au début de la première période, le monopole annonce un prix p_1 et choisit une quantité à produire q_1 . Chaque consommateur doit alors décider s'il accepte ou rejette l'offre du monopole. Si le nombre de consommateur acceptant cette offre est supérieur à la quantité produite, il y a rationnement selon une règle de rationnement efficace⁴. Les consommateurs rationnés ou ceux ayant refusé l'offre du monopole se retrouvent en seconde période. Le monopole fait une nouvelle offre p_2 et q_2 que les consommateurs acceptent ou refusent.

Le monopole est neutre au risque et maximise son espérance de profit actualisée. Le taux d'escompte entre les deux périodes est noté β .

3 Tarification

Nous allons montrer d'une part qu'il est optimal pour le monopole d'adopter une stratégie de prix « myope », c'est-à-dire d'annoncer à chaque période, le prix qui serait optimal s'il était en dernière période. D'autre part, nous allons montrer qu'il est optimal pour les consommateurs d'adopter une stratégie d'« achat précipité », c'est-à-dire d'accepter la première offre qui leur procure une utilité non négative⁵.

La stratégie d'achat précipité est clairement une meilleure réponse pour chaque consommateur à une stratégie de production myope dans la dernière période puisqu'un consommateur qui refuse cette offre du monopole obtient une utilité de zéro. Remarquons également qu'une stratégie de production myope est optimale dans cette dernière période de jeu. Si le monopole souhaite vendre, il sert tous les consommateurs présents sur le marché. Le prix du produit en seconde période dépend alors des stratégies d'expérimentation de première période. Si aucun consommateur n'achète le bien à la première période, il n'y a pas d'apprentissage sur la qualité. Le monopole choisit de servir tous les consommateurs au prix $p_2 = \pi(\mu_0)$ si, et seulement si, $\pi(\mu_0) \geq 0$. Si q unités sont vendues en première période, il y a apprentissage sur la qualité du produit. Le monopole vend alors le bien aux consommateurs restant seulement si la qualité *a posteriori* du nouveau produit est positive. Quel que soit le résultat de l'expérimentation, un consommateur présent en dernière période obtient une utilité de zéro.

En première période, aucun consommateur ne peut donc obtenir une utilité strictement positive en adoptant une stratégie d'attente. La stratégie d'achat précipité est donc optimale pour chaque consommateur en première période.

4. Voir TIROLE [1988].

5. Le raisonnement s'appuie sur celui présenté par BAGNOLI, SALANT et SWIERZBINSKI [1989] qui montrent que la stratégie de prix myope du monopole et la stratégie d'achat précipité pour chaque consommateur sont un équilibre du jeu dans lequel le monopole offre un produit de qualité connue à des consommateurs ayant des utilités de réserve différentes.

Quand les consommateurs utilisent cette stratégie en première période, le monopole annonce le prix myope, c'est-à-dire $p_1 = \pi(\mu_0)$ qui est accepté par les consommateurs.

4 Production

Le profit du monopole peut maintenant s'écrire comme une fonction de la quantité produite en première période :

$$\Pi(q_1) = q_1\pi(\mu_0) + (N - q_1)\beta \int f_{q_1}(x^{q_1}) \max\{\pi(\mu_{x^{q_1}}), 0\} dx^{q_1}.$$

Notons,

$$I(\mu_0, q_1) = \beta \int f_{q_1}(x^{q_1}) \max\{\pi(\mu_{x^{q_1}}), 0\} dx^{q_1} - \pi(\mu_0),$$

la valeur accordée par le monopole au fait d'attendre l'information. Le terme $\pi(\mu_0)$ représente le coût unitaire de ne pas servir un consommateur en première période et l'autre terme est le profit unitaire de seconde période après une expérimentation. Il mesure le gain lié à l'obtention d'une information future. Ce gain dépend de la taille de l'expérimentation, il est d'autant plus élevé que l'échelle de l'expérience est grande. La valeur de l'information dépend donc de la quantité expérimentée par le monopole, mais elle dépend également des croyances initiales sur la probabilité d'une qualité élevée.

LEMME 1. *La valeur de l'information est une fonction décroissante de la probabilité a priori d'une qualité élevée ($\frac{\partial I(\mu_0, q_1)}{\partial \mu_0} \leq 0$).*

La valeur marginale d'une expérience supplémentaire est une fonction croissante de la probabilité a priori d'une qualité élevée ($\frac{\partial^2 I(\mu_0, q_1)}{\partial q_1 \partial \mu_0} \geq 0$).

Si les croyances sur la probabilité *a priori* d'une qualité élevée sont optimistes, il est très coûteux pour le monopole de ne pas servir un consommateur en première période. En particulier, pour des valeurs de μ_0 proches de 1, nous obtenons que la valeur de l'information est négative. En revanche, lorsque les agents sont pessimistes sur la qualité du produit, apprendre à une valeur positive. Après l'expérimentation, si le bien se révèle être de mauvaise qualité, le monopole peut alors abandonner sa production. Il évite ainsi de produire un bien à un coût supérieur à la disposition à payer des consommateurs. Si le bien se révèle être de bonne qualité, le monopole peut servir les consommateurs à un prix plus élevé. Apprendre a donc une valeur d'autant plus grande que μ_0 est petit. Cependant, la valeur marginale d'une expérience supplémentaire est plus élevée pour de grandes valeurs de μ_0 . La valeur de l'information provient du fait que le monopole évite de produire à un coût supérieur à la disposition à payer des consommateurs. La valeur marginale d'une expérience

supplémentaire est donc d'autant plus grande que le monopole découvre avec cette expérience supplémentaire que son bien est de mauvaise qualité.

Nous supposons par la suite que la valeur de l'information est deux fois continûment différentiable et concave en q . Cette hypothèse reflète l'intuition qu'une fois qu'une grande expérience est réalisée, peu d'information supplémentaire peut être obtenue en augmentant la taille de l'échantillon⁶.

La fonction de profit se réécrit comme suit :

$$\Pi(q_1) = N\pi(\mu_0) + (N - q_1)I(\mu_0, q_1),$$

et la solution du problème de maximisation est donnée par les conditions suivantes :

$$(N - q_1) \frac{\partial I(\mu_0, q_1)}{\partial q_1} - I(\mu_0, q_1) \begin{cases} < 0 & \Rightarrow & q_1^* = 0 \\ = 0 & \Rightarrow & q_1^* \in]0, N[\\ > 0 & \Rightarrow & q_1^* = N \end{cases}$$

Le monopole peut choisir de ne jamais servir de consommateurs et annoncer $q_1^* = 0$, ou servir tous les consommateurs présents sur le marché ($q_1^* = N$). Il peut également choisir de s'engager dans une stratégie d'apprentissage en rationnant les consommateurs.

Une première caractérisation de la solution est donnée par la proposition suivante.

PROPOSITION 1. *La production du monopole est d'autant plus élevée en première période que la probabilité a priori d'une qualité élevée est grande ($\frac{dq_1^*}{d\mu_0} \geq 0$).*

La quantité produite par le monopole en première période est une fonction croissante de μ_0 . Le monopole fait face à un arbitrage entre apprendre sur sa qualité en produisant beaucoup dès la première période et produire peu en première période pour vendre à un nombre plus important de consommateurs informés en seconde période. Cet arbitrage est conditionné par la probabilité *a priori* d'une qualité élevée.

Pour continuer à caractériser la solution, distinguons les cas où la qualité espérée du produit est *a priori* négative puis positive. Lorsque la qualité espérée du produit est négative, aucun consommateur n'accepte d'acheter le bien à un prix positif et il n'est jamais optimal pour le monopole de servir tous les consommateurs en première période. On a donc $q_1^* < N$. Le monopole peut cependant choisir de subventionner des ventes (et annoncer $p_1 = \pi(\mu_0) < 0$) si la perte de première période peut être compensée par le profit de seconde période. Remarquons en effet que lorsque $\pi(\mu_0) = 0$, le profit du monopole est donné par $(N - q_1)I(\mu_0, q_1)$ qui est positif pour toutes les valeurs de q_1 et strictement positif pour certaines valeurs de $q_1 > 0$ par concavité de la fonction I . Ainsi, lorsque $\pi(\mu_0) = 0$, le monopole choisit

6. MOSCARINI et SMITH [2001] indiquent sous quelles conditions cette hypothèse est vérifiée.

$q_1^* > 0$. En utilisant le résultat de la proposition 1, nous obtenons donc que $q_1^* = 0$ pour des valeurs de $\pi(\mu_0) < 0$.

Des « prix de lancement » peuvent être pratiqués pour des produits dont la qualité est *a priori* mauvaise mais pour lesquels on espère recevoir une bonne information et augmenter les prix dans le futur. Le monopole adopte donc une stratégie de surproduction : le niveau de production en première période est plus élevé que celui qui maximiserait le profit myope.

Lorsque la qualité espérée du produit est positive, il est optimal de choisir $q_1^* > 0$. Le choix entre $q_1^* < N$ et $q_1^* = N$ s'effectue en comparant le coût de ne pas servir un consommateur en première période au bénéfice d'apprendre la qualité du produit à la période suivante. Il y aura apprentissage sur la qualité du bien uniquement si la valeur de l'information est positive. Si la valeur de l'information est négative, ce qui est le cas pour des valeurs élevées de μ_0 , la condition du premier ordre indique que le monopole ne garde aucun consommateur pour la période suivante et sert tous les consommateurs en première période. Dès que la valeur de l'information devient positive, le monopole choisit d'expérimenter : il adopte une stratégie de rationnement.

Le corollaire suivante résume la stratégie de production de première période.

COROLLAIRE 1. *Il existe des seuils $\hat{\mu}_0$ et μ_0^* tels que $\hat{\mu}_0 < \mu_0^*$, $\pi(\hat{\mu}_0) < 0$ et $0 < \pi(\mu_0^*) < 1$, et tels que :*

$$q_1^* = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_0 < \hat{\mu}_0 \\ q_1^* & \text{si } \mu_0 \in [\hat{\mu}_0, \mu_0^*] \\ N & \text{si } \mu_0 > \mu_0^*. \end{cases}$$

La production de première période est caractérisée par deux règles d'arrêt. La première, pas de production, concerne une situation dans laquelle le monopole est obligé de subventionner des ventes. Il y a refus de production quand la valeur future de l'information n'est pas suffisante pour que le monopole accepte de subventionner les ventes. La seconde, servir tous les consommateurs à la même période, est utilisée quand la valeur de l'information n'est pas suffisante pour justifier une expérimentation, c'est-à-dire quand la probabilité que le bien soit de bonne qualité est très élevée. Lorsque le monopole n'est pas dans une des deux situations précédentes, il rationne le marché pour générer de l'information et vendre à des consommateurs informés à la période suivante. Dans les modèles de biens durables, il est montré qu'un monopole peut préférer vendre son produit sur plusieurs périodes pour pouvoir discriminer entre les consommateurs. Nous montrons ici qu'il existe une autre raison qui peut amener un monopole à vendre son bien sur plusieurs périodes : l'acquisition d'information sur son produit.

Remarquons finalement que puisque les consommateurs ont un surplus nul, la valeur sociale de l'information est égale à la valeur de l'information pour le monopole. La stratégie de production du monopole conduit donc à un apprentissage socialement optimal sur la qualité du produit.

Cette modélisation peut permettre de traiter différents cas pratiques. Par exemple, en considérant une structure binaire des signaux et en introduisant une variable de production discrète, on peut s'intéresser au problème d'un

opérateur de lancement qui décide d'introduire une nouvelle technologie⁷. Supposons que cet opérateur peut produire différents types de lanceur (par exemple, un gros lanceur pouvant transporter plusieurs satellites ou un petit lanceur pouvant transporter un seul satellite) : comment choisir sa capacité de lancement ? L'observation d'un lancement permet de recevoir un signal sur la qualité du lanceur (succès ou échec) et ce signal étant indépendant du nombre de satellites embarqués, la question pour la firme est de déterminer le nombre de signaux qu'elle veut observer et faire observer sur la qualité de son lanceur. La production de petits lanceurs favorisera l'acquisition d'information tandis que la production de gros lanceurs privilégiera un profit actuel plus important.

5 Conclusion

Cet article présente la stratégie de tarification et de production d'un monopole de biens durables dans le cas particulier d'une demande homogène. Nous montrons dans un modèle à deux périodes que la perspective d'acquérir de l'information rend le problème du monopole intéressant dans la mesure où cet apprentissage suffit à expliquer une stratégie de diffusion lente du produit. La stratégie de production optimale est, à chaque période, soit de générer de l'information, soit de vendre à tous les consommateurs restants si l'information n'a pas de valeur, soit encore de ne pas produire si la valeur de l'information n'est pas suffisante pour subventionner une vente. ▼

• Références bibliographiques

- BAGNOLI M., SALANT S.W., SWIERZBINSKI J.E. (1989). – « Durable-Goods Monopoly with Discrete Demand », *Journal of Political Economy*, 97, p. 1459-1478.
- BERGEMANN D., VALIMAKI J. (1997). – « Market Diffusion with Two-sided Learning », *Rand Journal of Economics*, 28, No 4, p. 773-795.
- BERGEMANN D., VALIMAKI J. (2000). – « Experimentation in Markets », *Review of Economic Studies*, 67, p. 213-234.
- CAMINAL R., VIVES X. (1996). – « Why Market Shares Matter: An Information-Based Theory », *Rand Journal of Economics*, 27, No 2, p. 221-239.
- COASE R.H. (1972). – « Durability and Monopoly », *Journal of Law and Economics*, 15, p. 143-149.
- HARITCHABALET C. (1999). – « Strategic Experimentation in a Durable Goods Duopoly », *Mimeo*.
- MIRMAN L.J., SAMUELSON L., URBANO A. (1993). – « Monopoly Experimentation », *International Economic Review*, 34, p. 549-564.
- MOSCARINI G., SMITH L. (2001). – « The Law of Large Demand for Information », *Mimeo*.
- SCHLEE E. (1998). – « Buyer Experimentation and Introductory Pricing », *Mimeo*, Arizona State University.
- TIROLE J. (1988). – *The Theory of Industrial Organisation*, The MIT Press.

7. Cet exemple est traité dans une version préliminaire de cet article qui peut être obtenue sur demande.

ANNEXE

Démonstration du Lemme 1

Montrons que la valeur de l'information est décroissante avec μ_0 .

$$\begin{aligned} I(\mu_0, q_1) &= \beta \int f_{q_1}(x^{q_1}) \max\{\pi(\mu_{x^{q_1}}), 0\} dx^{q_1} - \pi(\mu_0) \\ &= (\beta - 1) \int_{D^1} f_{q_1}(x^{q_1}) \pi(\mu_{x_1^q}) dx^{q_1} - \int_{D^2} f_{q_1}(x^{q_1}) \pi(\mu_{x_1^q}) dx^{q_1} \end{aligned}$$

où $D^1 = \{x^{q_1} \in \mathbb{R}^{q_1} \text{ tels que } \pi(\mu_{x_1^q}) \geq 0\}$ et $D^2 = \{x^{q_1} \in \mathbb{R}^{q_1} \text{ tels que } \pi(\mu_{x_1^q}) < 0\}$. $E(\pi(\mu_{x_1^q}))$ étant croissant avec μ_0 , nous obtenons d'une part que $\frac{\partial I(\mu_0, q_1)}{\partial \mu_0} \leq 0$ et d'autre part que la valeur de l'information est négative pour les valeurs les plus élevées de μ_0 et strictement positive pour de faibles valeurs de μ_0 .

Montrons que la valeur marginale d'une expérience supplémentaire augmente avec μ_0 .

$$\frac{\partial I(\mu_0, q_1)}{\partial \mu_0} = (\bar{\pi} - \underline{\pi}) \beta \int f_{q_1}(x^{q_1}) \mathbb{I}_{[\mu_{x^{q_1}} \geq 0]} dx^{q_1} - (\bar{\pi} - \underline{\pi})$$

Au point $q_1 + 1$, l'expression précédente devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(\mu_0, q_1 + 1)}{\partial \mu_0} &= (\bar{\pi} - \underline{\pi}) \beta \int f_{q_1+1}(x^{q_1+1}) \mathbb{I}_{[\mu_{x^{q_1+1}} \geq 0]} dx^{q_1+1} - (\bar{\pi} - \underline{\pi}) \\ &= (\bar{\pi} - \underline{\pi}) \beta \int f_{q_1}(x^{q_1}) \int g(x_{q_1+1}/x_1^q) \\ &\quad \mathbb{I}_{[(\mu_{x^{q_1}}/x^{q_1+1}) \geq 0]} dx_{q_1+1} dx^{q_1} - (\bar{\pi} - \underline{\pi}) \end{aligned}$$

où $g(\cdot/x^q)$ est la densité de X_{q_1+1} conditionnelle à $X^q = x^q$.

En utilisant la convexité de la fonction \mathbb{I} et l'inégalité de *Jensen*, nous obtenons que $\frac{\partial I(\mu_0, q_1 + 1)}{\partial \mu_0} \geq \frac{\partial I(\mu_0, q_1)}{\partial \mu_0}$.

Démonstration de la Proposition 1

Il faut montrer que $\frac{dq_1^*}{d\mu_0} \geq 0$.

En différentiant :

$$(N - q_1) \frac{\partial I(\mu_0, q_1)}{\partial q_1} - I(\mu_0, q_1)$$

par rapport à q_1 et μ_0 , nous obtenons l'expression suivante pour $\frac{dq_1^*}{d\mu_0}$:

$$\frac{dq_1^*}{d\mu_0} = - \frac{(N - q_1) \frac{\partial I(\mu_0, q_1)}{\partial q_1 \partial \mu_0} - \frac{\partial I(\mu_0, q_1)}{\partial \mu_0}}{\frac{\partial^2 \Pi(q_1)}{\partial q_1^2}}.$$

Le terme $\frac{\partial^2 \Pi(q_1)}{\partial q_1^2}$ est négatif d'après la condition du second ordre, le signe de $\frac{dq_1^*}{d\mu_0}$ est donc donné par le signe de $(N - q_1) \frac{\partial I(\mu_0, q_1)}{\partial q_1 \partial \mu_0} - \frac{\partial I(\mu_0, q_1)}{\partial \mu_0}$.

Nous savons d'après le lemme 1 que $-\frac{\partial I(\mu_0, q_1)}{\partial \mu_0} \geq 0$ et que $\frac{\partial I(\mu_0, q_1)}{\partial q_1 \partial \mu_0} \geq 0$ ce qui nous donne $\frac{dq_1^*}{d\mu_0} \geq 0$.