

Relations intrajournalières entre l'indice CAC 40 et les options sur indice

Quel est le marché préféré des investisseurs informés ?

Gunther CAPELLE-BLANCARD,
Séverine VANDELANOITE *

RÉSUMÉ. – L'objet de cet article est de tester la présence de causalité linéaire et non-linéaire au sens de Granger entre l'indice CAC 40 et les options européennes sur indice pour 1997 et 1998. Nos résultats indiquent que le marché au comptant précède le marché des options de 20 à 30 minutes, signe que le MONEP n'est pas dominé par la présence d'investisseurs informés. Nous trouvons également des interactions non-linéaires bi-directionnelles significatives entre les marchés, révélatrices de l'activité des arbitragistes.

Intraday Relations between CAC 40 Cash Index and CAC 40 Index Options

ABSTRACT. – The aim of this paper is to examine Granger linear and non-linear causality between CAC 40 index and European CAC 40 index options for 1997 and 1998. Our results indicate overall that cash index leads index options by 20 to 30 minutes. Market microstructure differences induce relatively infrequent trading in options market and consequently cause stock to lead. We find also a significant bi-directional causality between the two markets, revealing the activity of arbitrageurs.

* G. CAPELLE-BLANCARD : TEAM Université Paris I, Panthéon Sorbonne et CNRS ;
S. VANDELANOITE : TEAM Université Paris I, Panthéon Sorbonne et CNRS.
Les auteurs remercient T. CHAUVEAU, T. FOUCAULT, J. HAMON, G. LE FOL, N. NALPAS, les participants au *XVII^{ème} Colloque* de l'AFFI (Paris, juin 2000) et les deux rapporteurs anonymes de la revue pour leurs commentaires.

1 Introduction

Les marchés dérivés sont souvent soupçonnés de contribuer à l'augmentation de la volatilité en favorisant les prises de positions spéculatives. D'ailleurs, périodiquement, des voix s'élèvent pour en demander une réglementation plus contraignante. Il est vrai que les crises bancaires et financières impliquant les marchés dérivés ont régulièrement défrayé la chronique¹. L'inquiétude, voire la méfiance à l'égard de ces marchés, est, en outre, renforcée par le fait que les produits dérivés sont souvent perçus comme des instruments complexes, en particulier dans le cas des options, ce qui alimente l'idée que ces marchés sont le siège d'un petit nombre de spéculateurs. Cette situation contraste avec l'objectif de ces marchés dont le rôle fondamental est d'offrir aux investisseurs des outils de gestion du risque, et dont l'existence est censée faciliter le processus de révélation de l'information.

La question abordée dans cet article est de savoir à quelles fins est utilisé le marché des options en France : est-il véritablement dominé par la présence d'investisseurs informés ou davantage utilisé pour couvrir les positions des investisseurs sur le marché sous-jacent ? Pour les opérateurs de marché, il s'agit d'identifier sur quel marché le risque de faire face à un agent informé est le plus faible, ce qui se traduit par des coûts de transaction moindres². Pour les autorités de contrôle, il s'agit d'évaluer l'exposition au risque de tous les participants. Enfin, pour les théoriciens, cette question renvoie aux problèmes récurrents de transmission d'information entre les marchés et au concept d'efficience.

Dans cet article, nous examinons les relations intrajournalières entre l'indice CAC 40 au comptant et les options européennes sur indice CAC 40 (contrats PXL) négociées sur le *Marché des Options Négociables de Paris* (MONEP), ainsi que leur influence respective dans le processus de découverte du prix. Plus précisément, nous utilisons les données haute-fréquence fournies par *Euronext Paris* pour étudier les relations de causalité linéaire et non-linéaire au sens de *Granger* entre les deux actifs en 1997 et 1998. L'idée est la suivante : si les investisseurs informés font du marché des options le lieu principal de leurs interventions, alors les variations de prix des options sur indice devraient permettre d'améliorer les prévisions concernant les variations futures de l'indice au comptant – l'équilibre entre les deux marchés étant restauré par l'intervention des arbitragistes. On devrait donc déceler un transfert d'information du marché dérivé vers le marché au comptant. Le cas contraire suggérerait une domination informationnelle et/ou fonctionnelle du marché au comptant, les options étant davantage utilisées comme instruments de couverture.

1. Les débâcles successives de Procter et Gamble, du Comté d'Orange, de Metallgesellschaft et plus récemment de la banque Barings ou du *hedge fund* LTCM ont, à chaque fois, suscité de vives polémiques. Parmi l'abondante littérature consacrée à ce sujet, voir MILLER [1995], KUPRIANOV [1995], McCLINTON [1996], CLARK [1997] et JORION [2000].

2. Les coûts de transaction sont les coûts qui accompagnent toute exécution d'un ordre sur les marchés financiers. Ils sont principalement constitués de la fourchette de prix acheteur-vendeur (*bid-ask spread*).

D'après les études antérieures, il semble que les marchés d'options, qui sont censés supporter des coûts de transaction plus faibles que les marchés sous-jacents et qui permettent de bénéficier d'un effet de levier important, incorporent l'information plus rapidement. Cette situation semble toutefois propre au marché américain (cf. FLEMING, OSTDIEK et WHALEY [1996] par exemple). Les résultats obtenus sur d'autres marchés, moins liquides, comme le marché australien par exemple (JARNECIC [1999]), suggèrent en effet une relation inverse. Il semble par conséquent intéressant d'étudier le cas français. À notre connaissance, aucune étude n'y fait référence. Plus largement d'ailleurs, peu d'articles concernent des marchés autres que les marchés anglo-saxons.

Les résultats obtenus jusqu'à présent souffrent par ailleurs de deux limites. La première concerne à la fois les problèmes de saisonnalité de l'activité au cours de la séance et d'*infrequent trading*³. Alors que l'activité des marchés est caractérisée par des mouvements saisonniers intrajournaliers importants, les études antérieures, hormis FINUCANE [1999], ignorent ces effets sur le processus d'ajustement des prix. Il est cependant souhaitable d'utiliser un pas d'échantillonnage variable en fonction de l'intensité des échanges au cours de la journée et non pas des intervalles de temps fixes, d'autant que nous devons tenir compte du nombre réduit de transactions enregistrées sur le MONEP. Pour ces différentes raisons, nous proposons une méthode simple et originale basée sur le calcul des rentabilités en temps transaction. Ensuite, à l'exception d'ABHYANKAR [1998] et de BROOKS, GARNETTE et HINICH [1999] sur le marché des *futures*, toutes les études antérieures ne testent que la présence de liens linéaires entre les actifs. Or, ne serait-ce qu'en raison de l'existence de coûts de transaction, on peut raisonnablement supposer que la relation est de nature non linéaire. En conséquence, nous proposons d'examiner la présence de causalité non-linéaire entre les variations de prix des options et du sous-jacent.

Cet article s'organise de la façon suivante. La section 2 synthétise les conclusions des travaux antérieurs, en insistant sur l'importance de la liquidité dans le processus de découverte des prix. Le cadre institutionnel fait l'objet de la section 3. Cette partie est également l'occasion de présenter les données haute-fréquence utilisées et de justifier les deux mesures du temps utilisées (temps calendaire et temps transaction). Nous rappelons dans la section 4 la méthodologie des tests de causalité linéaire et non-linéaire au sens de *Granger*. Les résultats sont présentés dans la section 5. La section 6 conclut.

3. Pour une étude de l'activité du marché parisien, voir HAMON et JACQUILLAT [1992], BIAIS, HILLION et SPATT [1995], GOURIÉROUX, JASIAK et LE FOL [1999].

2 L'impact des options sur le processus de découverte des prix

Si l'on s'en tient au cadre du modèle de *Merton-Black-Scholes* (MERTON [1973], BLACK et SCHOLES [1973]), les options sont des actifs redondants ; leur existence n'a aucun impact sur le comportement de l'actif sous-jacent⁴. Ceci implique, lorsque les marchés financiers sont complets et parfaits, que toute information doit entraîner une réévaluation simultanée des actifs sur les deux marchés, puisque tout écart de prix engendrerait des opportunités d'arbitrage. Cependant, lorsqu'on relâche les hypothèses de complétude et de perfection des marchés, ces propriétés ne tiennent plus⁵. L'introduction des options a alors un impact important sur la dynamique des marchés ainsi que sur le processus de découverte des prix. Dans ce cas, les options concourent également à modifier l'efficacité globale des marchés.

La création des marchés dérivés permet en premier lieu d'enrichir la panoplie des instruments offerts aux investisseurs dans la mesure où la rationalité limitée de certains acteurs peut empêcher la réplification de ces instruments (BENSAÏD et BOUTILLIER [1997]). Les marchés dérivés permettent en outre d'alléger les contraintes liées aux coûts de transaction ou aux ventes à découvert⁶. L'introduction de tels marchés concourt par conséquent à une participation plus importante des agents qui se traduit par une liquidité globale accrue. Les conséquences en termes d'efficacité et de stabilité des prix sont toutefois ambiguës⁷. Tout dépend en effet des caractéristiques des nouveaux entrants et des hypothèses concernant les imperfections financières (ARTUS [1996]). En général, l'effet n'est favorable que si la baisse des coûts de transaction favorise la participation des investisseurs informés. C'est notamment le cas dans le modèle de BIAIS et HILLION [1994], où, sous certaines hypothèses, l'introduction des options permet d'augmenter la liquidité globale des marchés, et pour CAO [1999] qui montre que l'introduction des produits dérivés augmente l'incitation à collecter de l'information.

L'introduction des options modifie également l'ensemble d'information dont disposent les agents, et par conséquent le mécanisme de révélation. On

4. Il suffit en effet de construire un portefeuille composé d'actifs sous-jacents et d'actifs sans risque dans les proportions indiquées par la formule d'évaluation de BLACK et SCHOLES [1973] pour répliquer parfaitement le profil de gain d'une option.

5. C'est également le cas lorsque l'on relâche les hypothèses d'homogénéité des agents (BACK [1993], KRAUS et SMITH [1996]) ou de constance de la volatilité de l'actif sous-jacent. Dans le dernier cas, il faut recourir à de nouvelles hypothèses pour obtenir une formule d'évaluation analytique. Voir BAKSHI, CAO et CHEN [1997] par exemple pour une présentation des modèles à volatilité stochastique.

6. En particulier, en l'absence de contrats à terme sur indices boursiers, fermes ou optionnels, les investisseurs qui anticipent une évolution favorable du marché doivent se procurer un portefeuille composé d'actions dont la performance est identique à celle de l'indice, ce qui suppose des coûts de transaction importants. À l'inverse, s'ils anticipent une baisse des cours, ils doivent vendre à découvert des actions, ce qui n'est pas toujours autorisé. Sur ce dernier point, voir FIGLEWSKI et WEBB [1993].

7. En outre, comme le montrent ROSS [1976], HAKANSSON [1978], ou GREEN et JARROW [1987], il existe toujours un arbitrage entre le coût d'ouverture d'un nouveau marché et les gains espérés.

peut s'attendre en effet à ce que les investisseurs qui détiennent – ou croient détenir – une nouvelle information cherchent à passer leurs ordres sur le marché qui leur proposera, en moyenne, le rendement le plus élevé. Ce faisant ils procèdent à un arbitrage entre l'effet de levier que leur offrent les produits dérivés et les différences de coûts de transaction entre les marchés⁸. De leur côté, les teneurs de marché peuvent inférer de la dynamique de prix des options, les anticipations concernant le prix futur de l'actif sous-jacent, même si les investisseurs informés ont dans ce cas intérêt à camoufler leurs ordres en les fractionnant ou en intervenant simultanément sur plusieurs marchés (EASLEY, O'HARA et SRINIVAS [1998], JOHN *et al.* [1999])⁹. Ainsi, comme le suggère BLACK [1975], compte tenu de l'effet de levier offert par les marchés optionnels, ceux-ci devraient précéder les marchés d'actions dans le processus de découverte des prix. Toutefois, s'il existe des coûts de transaction plus élevés sur le marché des options, l'activité d'échange tendra à se concentrer sur le marché au comptant. Cette situation est notamment envisageable lorsque le marché des options est peu liquide, ce qui se traduit par des fourchettes de prix beaucoup plus larges que sur le marché au comptant.

Empiriquement, une façon d'identifier l'effet dominant consiste à étudier les relations de causalité entre les rendements sur le marché de l'actif sous-jacent et sur le marché des options. Le Tableau 1 recense quinze études de ce type¹⁰. Onze d'entre elles concernent le *Chicago Board of Option Exchange* (CBOE) et, à notre connaissance, trois seulement portent sur des marchés européens (les marchés allemand, néerlandais et suisse). Globalement, ces études ne permettent pas de conclure que le marché des options incorpore plus rapidement de nouvelles informations, autrement dit, qu'il joue un rôle de *leader* dans la révélation d'information : moins de la moitié d'entre elles, six à notre connaissance, suggèrent en effet une causalité du marché des options vers le marché sous-jacent.

8. Par effet de levier, on entend la possibilité pour les investisseurs sur les marchés à terme de prendre une position importante sur le sous-jacent par le biais d'une mise de fonds initiale relativement modeste. Prenons l'exemple d'un investisseur qui dispose d'une somme de 100 000 euros et qui souhaite spéculer sur la hausse de l'indice CAC 40. Le CAC 40 cote à ce moment 10 000 points. Supposons que le prix des options à la monnaie à échéance dans 3 mois soit de 400 euros (1 euro = 1 point d'indice), ce qui correspond, pour un taux d'intérêt sans risque de 3 % à une volatilité implicite de 18 %. L'agent peut alors soit investir 100 000 euros dans l'achat d'actions au comptant choisies de manière à répliquer les performances de l'indice CAC 40, soit acquérir, pour le même montant, 250 options d'achat à la monnaie d'échéance 3 mois. Si, à l'échéance, le CAC 40 est monté à 11 000 points, le gain net sera de 10 %, soit 10 000 euros, dans le premier cas, contre 150 000 euros $((11\ 000 - 10\ 000) - 400) \times 250 = 150\ 000$ dans le second cas. L'effet de levier se mesure alors par l'élasticité du prix des options par rapport au sous-jacent, ce qui se calcule soit en rapportant la somme acquise sur le marché dérivé et celle acquise sur le marché au comptant pour un même montant investi, soit en multipliant le *delta* de l'option par le rapport entre la prime et le prix de l'actif sous-jacent. Dans l'exemple précédent, l'effet de levier est égal 15. À noter que dans le cas des contrats à terme fermes dont la sensibilité par rapport au prix de l'actif sous-jacent est très proche de 1, l'effet de levier se mesure comme le rapport du prix du contrat sur le montant du dépôt de garantie. Cependant, dans tous les cas, il s'agit bien de mesurer l'effet d'une variation du montant investi sur le gain final.

9. Une approche alternative consiste à modéliser le comportement d'agents informés qui spéculent, non pas sur le prix futur de l'actif sous-jacent, mais sur le niveau futur de la volatilité (CHERIAN et JARROW [1998] et NANDI [1999]).

10. S'agissant des relations entre les marchés à termes fermes et les marchés sous-jacents, voir ABHYANKAR [1998]. Pour une synthèse plus générale concernant les conséquences liées à l'introduction des marchés dérivés, voir MAYHEW [1999].

Les premiers à s'intéresser à cette question furent MANASTER et RENDLEMAN [1982]. Les deux auteurs, qui considèrent les prix de clôture des options sur actions entre 1973 et 1976, montrent que le CBOE intègre l'information au moins un jour avant le marché sous-jacent. Mais, pour KUMAR et SHASTRI [1990], ce résultat est dû à une mauvaise prise en compte des dividendes, dans la mesure où leurs conclusions diffèrent avec l'utilisation d'un sous-échantillon d'actions qui ne distribuent pas de dividendes. De plus, MANASTER et RENDLEMAN [1982] ne corrigent pas des effets dus aux heures de clôture différentes selon les marchés. Leurs résultats sont alors biaisés, puisque le marché qui ferme le plus tard – le NYSE – intègre des informations qui ne sont incorporées que le lendemain par le second – le CBOE. BHATTACHARYA [1987], en adoptant une méthode de simulation de stratégie de placement d'ordres appliquée aux options sur actions négociées en 1977 et 1978 sur le CBOE, trouve également que ce dernier est en avance d'une journée, même si paradoxalement, il ne trouve aucun effet intrajournalier.

En réalité, MANASTER et RENDLEMAN [1982] et BHATTACHARYA [1987] n'envisagent, par construction, qu'une relation unidirectionnelle du marché des options vers le marché sous-jacent. Au contraire, STEPHAN et WHALEY [1990] utilisent un test de causalité à la SIMS [1972], appliqué aux options sur actions cotées sur le CBOE au premier trimestre 1986, et concluent que le marché sous-jacent devance le marché des options de quinze minutes. Toutefois, CHAN, CHUNG et JOHNSON [1993], qui considèrent le même échantillon, mais utilisent des cotations, plutôt que des transactions, montrent que ce résultat est fallacieux, notamment en raison de l'influence des variations de prix minimum (*tick*) sur les marchés. Ils arrivent à la conclusion qu'aucun des deux marchés ne devance l'autre. Plus récemment, DILTZ et KIM [1996] et O'CONNOR [1999] utilisent un modèle à correction d'erreur (MCE)¹¹. DILTZ et KIM [1996] suggèrent, à partir de données quotidiennes d'options sur actions toujours négociées sur le CBOE au premier trimestre 1986, que la causalité est bi-directionnelle. O'CONNOR [1999], dont l'étude porte sur les options sur actions cotées sur le CBOE en novembre et décembre 1990, montre, quant à lui, que les marchés des actions précèdent celui des options, quoique ce résultat semble être dû à la faible liquidité des titres considérés. Cette conclusion est partagée par STRUCKI et WASSERFALLEN [1994]. Ces derniers montrent que le marché suisse des actions devance le *Swiss Options and Financial Futures Exchange* (SOFFEX) de dix minutes en moyenne.

Selon FINUCANE [1999], les études précédentes souffrent d'un problème commun : elles utilisent toutes un intervalle de longueur fixe. Or, la fréquence des transactions est très variable d'un jour à l'autre et même à l'intérieur d'une journée. Le fait d'arrêter un pas de manière arbitraire peut alors conduire à des résultats erronés : le choix d'un intervalle trop long ne permet pas de déceler certaines relations de très court terme, tandis que le choix d'un intervalle trop court induit, en raison de la fréquence élevée des intervalles où les rentabilités sont nulles, un biais en faveur du marché le plus liquide. Il suggère, par conséquent, d'utiliser un pas de temps variable et trouve des relations de causalité réciproques (*feedback*) entre les options sur actions du CBOE et les actions sous-jacentes.

11. Cette approche, qui utilise une relation de cointégration, permet d'étudier à la fois les relations de court et de long terme entre les séries.

TABLEAU 1
Comparatif des précédentes études

Auteurs	Données	Méthodologies	Intervalles	Résultats
Manaster-Rendleman (1982)	prix de clôture CBOE 04/73 :06/76	Stratégie de placement simulée	journalier	le marché des options précède le marché sous-jacent d'une journée
Bhattacharya (1987)	transactions intrajournalières CBOE 06/77 :08/78	Stratégie de placement simulée	15 min.	le marché des options précède le marché sous-jacent d'une journée
Anthony (1988)	volumes quotidiens CBOE 01/82 :06/83	ARIMA	journalier	le marché des options précède le marché sous-jacent d'une journée
Stephan-Whaley (1990)	transactions intrajournalières CBOE 01/86 :03/86	Causalité linéaire (Granger-Sims) Analyse multivariée	5 min.	le marché sous-jacent d'une journée le marché sous-jacent précède le marché des options de 45 min.
Chan-Chung-Johnson (1993)	cotations intrajournalières CBOE 01/86 :03/86	Causalité linéaire (Granger-Sims)	5 min.	aucun lien de causalité
Fase (1994)	volumes quotidiens AEX 01/88 :12/88	ARIMA bivarié	journalier	le marché des options précède le marché sous-jacent d'une journée
Stucki-Wasserfallen (1994)	transactions intrajournalières SOPFEX 01/89 :12/89	Causalité linéaire (Granger-Sims) Causalité linéaire (Granger-Sims)	5 min.	le marché sous-jacent précède le marché des options de 10 min.
Diltz-Kim (1996)	cotations journalières CBOE 01/86 :03/86	Modèle à Correction d'Erreur	journalier	causalité bi-directionnelle
Fleming-Ostdiek-Whaley (1996)	cotations intrajournalières CBOE 03/91	Causalité linéaire (Granger-Sims)	5 min.	le marché des options précède le marché sous-jacent
De Jong-Donders (1998)	cotations intrajournalières AEX 01/92 :07/92-01/93 :06/93	Analyse des corrélations	5 min.	aucun lien de causalité
Easley-O'Hara-Srivivas (1998)	volumes intrajournaliers CBOE 10/90 :11/90	ARIMA bivarié	5 min.	le marché des options précède le marché sous-jacent
Finucane (1999)	cotations intrajournalières CBOE 11/90 :12/90	Causalité linéaire (Granger-Sims) Causalité linéaire (Granger-Sims)	5 min. variables variables	le marché sous-jacent précède le marché des options de qlq. min. le marché sous-jacent précède le marché des options
Booth-So-Tse (1999)	cotations intrajournalières DTB 01/92 :03/94	Var MCE	15 min	aucun lien de causalité
Jarnecic (1999)	volumes intrajournaliers ASX 11/94 :01/96	Causalité linéaire (Granger-Sims)	5 min	le marché des options le marché sous-jacent précède le marché des options
O'Connor (1999)	cotations intrajournalières CBOE 11/90 :12/90	Modèle à Correction d'Erreur	5 min.	le marché sous-jacent précède le marché des options

Les volumes de transactions ont aussi été utilisés pour étudier les interactions entre les marchés. ANTHONY [1988], à partir de l'estimation d'un modèle VAR sur les volumes quotidiens des options d'achat cotées sur le CBOE et le prix des actions supports, teste la causalité entre les deux marchés. Il conclut que les transactions sur les options précèdent celles sur les actifs sous-jacents d'une journée. Cependant, l'utilisation des données de clôture pose le même problème que celui évoqué pour MANASTER et RENDLEMAN [1982]. FASE [1994] rapporte également, dans le cas du marché néerlandais, et toujours à partir des volumes quotidiens, que, dans la plupart des cas, le sens de causalité va du marché des options vers le marché au comptant. EASLEY *et al.* [1998], en appliquant la méthode de causalité au sens de GRANGER [1969] sur un échantillon d'options sur actions cotées sur le CBOE en octobre et novembre 1990, constatent que les volumes sur options contiennent de l'information sur les prix futurs des actifs sous-jacents, ce qui corrobore les conclusions de leur modèle théorique. JARNECIC [1999] rapporte au contraire, que sur le marché australien, les volumes sur actions précèdent les volumes sur options d'un quart d'heure. Il conclut toutefois que la faible liquidité du marché des options est responsable de ce décalage entre les marchés ; en corrigeant son échantillon des périodes sans activité, l'avance du marché des actions disparaît, et la totalité de l'ajustement devient instantanée.

Certains auteurs se sont enfin intéressés aux liens entre les marchés au comptant, les marchés à terme et les marchés d'options. FLEMING *et al.* [1996] étudient les interactions entre l'indice S & P 500, les options et les contrats à terme fermes sur cet indice. Ils montrent que les marchés dérivés précèdent systématiquement le marché au comptant, tandis que le marché à terme précède le marché des options, en raison notamment d'une liquidité plus importante et donc de coûts de transaction moins élevés sur le premier. De JONG et DONDEERS [1998] examinent, quant à eux, le marché néerlandais. Comme précédemment, les contrats à terme précèdent à la fois les options et l'indice d'environ dix minutes ; la relation entre le marché des options et le marché au comptant n'est, quant à elle, pas unidirectionnelle. Enfin, BOOTH SO et TSE [1999], dont l'étude porte sur le marché allemand et l'indice DAX, trouvent des liens croisés entre les trois marchés, même si le marché à terme semble être en avance sur les autres.

3 Le cadre institutionnel et les données

Contrairement aux cas des contrats à terme cotés sur le MATIF (SHYY, VIJAYRAGHAVAN et SCOTT-QUINN [1996], BENSÂID et BOUTILLIER [1997] et ALPHONSE [2000]), aucune étude ne porte, à notre connaissance, sur les relations de causalité entre les options sur indice CAC 40 et le marché au comptant. Dans une première sous-section nous présentons le fonctionnement du marché français des actions et du Marché des Options Négociables de Paris (MONEP). Nous présentons ensuite nos données, ainsi que la façon dont nous avons calculé nos rentabilités.

3.1 Le Premier Marché et le Marché des Options Négociables de Paris

Parmi les différents contrats proposés sur le MONEP, nous retenons les options à long terme sur indice CAC 40 (contrats PXL). Il s'agit d'options européennes dont la négociation a débuté en 1991. Jusqu'au 31 décembre 1998, il n'existait que deux échéances par an : en mars et en septembre ; les options européennes sur indice étaient alors émises pour des maturités initiales de deux ans¹². Les contrats d'options sur indice CAC 40 sont les plus activement traités et les plus liquides du MONEP. En 1997 et 1998, les options sur indice représentaient environ 50 % du volume total, et plus de 75 % des échanges ; 6 461 308 contrats d'options ont été échangés en 1997, et 16 443 276 en 1998. Le montant des primes sur la période s'est élevé en moyenne à 4,8 milliards par mois.

L'indice CAC 40 est défini comme la moyenne arithmétique, pondérée par la capitalisation boursière, des derniers prix de transaction de 40 valeurs industrielles, commerciales et financières du Premier Marché parmi les plus importantes et les plus liquides. Il représente à lui seul une capitalisation de plus de 700 milliards d'euros et 80 % du volume des échanges en actions sur le marché parisien au 31 août 1999. L'indice est calculé et diffusé toutes les 30 secondes. Il est ajusté quotidiennement pour éliminer toutes les variations exogènes (augmentation de capital par attribution ou émission d'actions, réduction de capital, *etc.*).

La cotation des titres se fait sur le Premier Marché en continu, de 10h à 17h pour la période d'étude (de 9h à 17h30 depuis le 3 avril 2000). Le Premier Marché est entièrement géré de façon électronique, par le système SuperCAC-NSC¹³. Le marché bénéficie ainsi d'une large transparence, qui caractérise les marchés dirigés par les ordres. Cette propriété ne se retrouve pas dans le cas des marchés dirigés par les prix, comme le *London Stock Exchange* par exemple¹⁴. L'évolution de l'indice CAC 40 est représenté sur la Figure 1.

Initialement, sur le MONEP, la négociation des options se faisait uniquement à la criée. Début 1990, le MONEP franchit un premier pas vers l'automatisation en instaurant, parallèlement à la négociation à la criée, un système de routage et d'exécution automatisé dénommé STAMP. Ce système de négociation mixte laissa place à un système entièrement électronique, fin 1995, pour l'ensemble des options sur actions, et au printemps 1998 pour les contrats à terme fermes et optionnels sur indice.

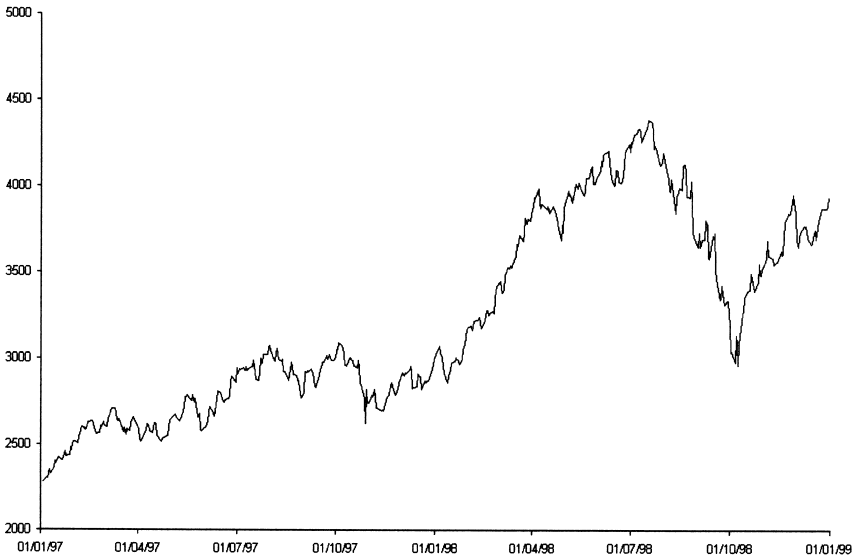
12. Depuis, en raison du passage à l'euro, ces règles ont changé. Il n'existe plus d'options américaines sur indice CAC 40 et les contrats PXL portent sur huit échéances glissantes : trois mensuelles, trois trimestrielles et deux semestrielles. Pour plus d'informations, consulter www.monep.fr.

13. Le système SuperCAC-NSC est un système de gestion et d'appariement des ordres d'achat et de vente reposant sur le respect des règles de priorité entre les différents ordres. La dynamique des prix est donnée par l'interaction entre le stock d'ordres non exécutés (le carnet d'ordres) et le flux continu d'ordres nouveaux. Le carnet d'ordres est diffusé en temps réel et donne les 5 meilleurs ordres à la vente et les 5 meilleurs ordres à l'achat.

14. Voir KOFMAN et MOSER [1997] pour une comparaison des avantages respectifs entre ces deux modes de cotation dans le cas des marchés dérivés.

FIGURE 1

Évolution de l'indice CAC 40 entre 1997 et 1998. L'indice CAC 40, constitué de 40 valeurs françaises du Premier Marché de la Bourse de Paris, est calculé en continu par ParisBourse SA et diffusé toutes les 30 secondes (base 1 000 au 31/12/1987)



3.2 Les données

Nous utilisons dans cette étude les données issues des CD-Roms édités par *Euronext Paris*. Notre base de données contient toutes les transactions effectuées sur le MONEP entre le 2 janvier 1997 et le 30 décembre 1998. Nos données couvrent une période assez longue – 2 ans, soit 464 jours ouvrables – ce qui nous permet de contrôler les mouvements saisonniers. L'étude est réalisée en utilisant les prix négociés sur les options d'achat¹⁵. Pour chaque transaction, le prix de l'option, son prix d'exercice, sa maturité, ainsi que la date, l'heure et le nombre de lots échangés sont indiqués¹⁶. La base de données comprend également l'indice CAC 40 calculé toutes les 30 secondes.

À l'instar, entre autres, de FLEMING *et al.* [1996], plusieurs filtres sont appliqués. Les options dont le prix de marché est inférieur à 1 point d'indice sont exclues de l'échantillon ainsi que celles dont la prime est inférieure à la valeur

15. Tous nos tests ont également été menés en utilisant les options de vente ainsi que les options américaines (options d'achat et de vente) sur indice CAC 40 (contrats PX1) sur la même période, sans que cela change nos conclusions. Pour faciliter les comparaisons avec les études antérieures, seuls les résultats obtenus sur les options d'achat européennes sont reproduits.

16. L'utilisation de prix de transaction se justifie par le fait que souvent, les cotations ne représentent pas un prix effectif auquel un agent est prêt à acheter ou vendre. En outre, comme le montre LYONS [1996], au fur et à mesure que l'activité sur les marchés s'intensifie, les teneurs de marché ne sont plus toujours en mesure d'actualiser leur cotations.

intrinsèque de l'option. Les options dont la maturité est inférieure à 5 jours ou supérieure à 6 mois sont également exclues. Pour chaque jour ouvrable nous ne conservons finalement qu'une seule maturité ; en général il s'agit de la plus liquide. Afin d'éviter les biais dans l'estimation de la volatilité implicite (*cf. infra*), nous ne conservons également que les options à la monnaie¹⁷. Nous corrigeons enfin les effets clôture et ouverture en éliminant les transactions qui ont lieu au cours de la première et de la dernière demi-heure de chaque séance. Chaque journée débute donc à 10h30 pour se terminer à 16h30¹⁸. Quelques statistiques descriptives concernant la base de données utilisée sont reproduites dans le Tableau 2.

TABLEAU 2

Statistiques descriptives de notre échantillon d'options d'achat sur indice CAC 40

Nb de jours avant expiration	Moins de 60	Entre 60 et 120	Entre 120 et 180	Total
Nombre total de transactions ^a	3 397	2 971	1 752	8 120 ^b
Nombre total de lots négociés	121 589	137 367	118 589	377 545
Volume quotidien moyen	779	903	760	813
Temps moyen, en minutes, entre deux transactions	26	26	40	29

Notes : ^a La période d'étude s'étend du 2 janvier 1997 au 30 décembre 1998

^b Les 8 120 options ont été sélectionnées selon la procédure précédemment décrite.

3.3 L'indice CAC 40 et l'indice implicite

À partir de ces données, nous calculons deux types de rentabilités. Le premier n'est autre que la rentabilité de l'indice historique, calculé et diffusé par *Euronext Paris*. Le second est la rentabilité de l'indice implicite estimé à partir du prix des options d'achat négociées sur le MONEP. C'est en comparant les valeurs passées, présentes et futures de ces deux rentabilités que nous pourrions déterminer les liens de causalité (de type *lead/lag*) entre le marché des options et le marché au comptant.

Pour obtenir l'indice implicite, nous utilisons le modèle de *Merton-Black-Scholes* (MERTON [1973], BLACK et SCHOLES [1973])¹⁹. Si les marchés

17. La base de données utilisée contient ainsi toutes les options dont la parité, définie comme le rapport entre l'indice au comptant et le prix d'exercice, est comprise entre 0,95 et 1,05.

18. Voir BIAIS, HILLION et SPATT [1997] pour plus de détails sur l'importance des effets d'ouverture et de clôture des marchés ainsi que LEE et MATHUR [1999] pour une étude appliquée au cas des marchés dérivés.

19. STEPHAN et WHALEY (1990) et DILTZ et KIM (1996) utilisent le modèle de ROLL (1977). O'CONNOR (1999), dont l'étude porte également sur des options américaines, utilise un modèle binomial ajusté pour tenir compte du versement des dividendes. Dans cet article, afin de tenir compte des versements de dividendes, nous calculons la valeur courante des dividendes détachés durant la durée de vie de l'option comme le proposent HARVEY et WHALEY (1992).

financiers sont complets et parfaits, et si l'on suppose que le prix de l'actif sous-jacent à l'échéance suit une distribution log-normale, le prix d'une option d'achat européenne est fonction de cinq paramètres, à savoir, le prix courant de l'actif sous-jacent – corrigé du versement discret des dividendes – (S_t), la volatilité de l'actif sous-jacent (σ), le taux d'intérêt sans risque (r)²⁰, le prix d'exercice (K) et la maturité de l'option (τ), de sorte que :

$$(1) \quad C(S_t, K, \tau, r | \sigma) = S_t N\left(\frac{\log(S_t/K e^{-r\tau}) + \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - K e^{-r\tau} N\left(\frac{\log(S_t/K e^{-r\tau}) - \sigma^2\tau/2}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

Sur ces cinq paramètres, quatre sont directement observables, soit parce qu'il s'agit de données publiques (comme pour le prix de l'actif sous-jacent au comptant et le taux d'intérêt sans risque), soit parce qu'ils sont définis par contrat (comme pour le prix d'exercice et la maturité). Dès lors que l'on connaît les prix de marché, il est donc possible de connaître également la valeur qu'accordent les opérateurs à la volatilité future de l'actif sous-jacent. Il suffit pour cela de minimiser les écarts au carré entre le prix de marché et le prix théorique *via* une procédure de moindres carrés non-linéaire. Formellement, la volatilité implicite, notée $\hat{\sigma}_t^*$, est obtenue par la procédure suivante :

$$(2) \quad \hat{\sigma}_t^* = \text{Arg} \left\{ \text{Min}_{\hat{\sigma}_t} \sum_{j=1}^{J_t} \left[C_{j,t}^{obs} - C(S_{j,t}, K_{j,t}, T - t, r_t | \hat{\sigma}_t) \right]^2 \right\}$$

où $C_{j,t}^{obs}$ est le prix observé de la j -ième option d'achat à la monnaie à la date t , avec $j = [1, \dots, J_t]$ et $t = [1, \dots, T - 1]$ où J_t est le nombre d'observations disponibles à la date t ²¹. Cette opération est réalisée chaque jour entre le 2 janvier 1997 et le 29 décembre 1998.

Pour estimer l'indice implicite associé à chaque transaction ($j = [1, \dots, J_{t+1}]$) à la date $t + 1$ (entre le 3 janvier 1997 et le 30 décembre 1998), nous utilisons la volatilité implicite calculée en t . Formellement, l'indice implicite, noté $\hat{S}_{j,t+1}^*$, est obtenu par résolution du programme de minimisation suivant :

$$(3) \quad \hat{S}_{j,t+1}^* = \text{Arg} \left\{ \text{Min}_{\hat{S}_{j,t+1}} \left[C_{j,t+1}^{obs} - C(\hat{S}_{j,t+1}, K_{j,t+1}, T - t - 1, r_{t+1} | \hat{\sigma}_t^*) \right]^2 \right\}$$

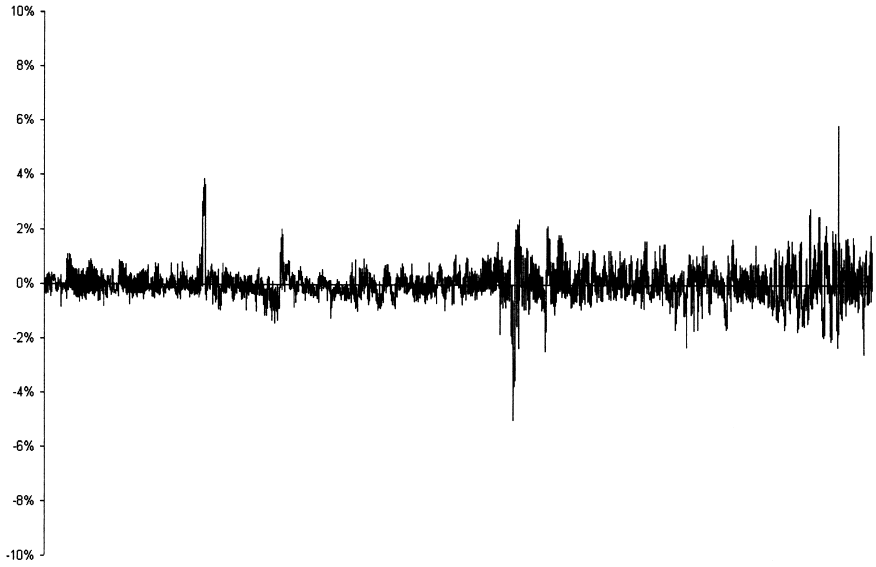
20. Dans cet article nous utilisons le PIBOR 3 mois comme mesure approximative du taux d'intérêt sans risque.

21. En dépit du fait qu'il n'existe pas de consensus concernant la méthode à utiliser (BATES [1996]), et qu'il n'y a aucune base théorique pour une telle pratique, cette méthode est très largement répandue et fournit une stratégie d'évaluation rapide et relativement précise (RENAULT [1997]).

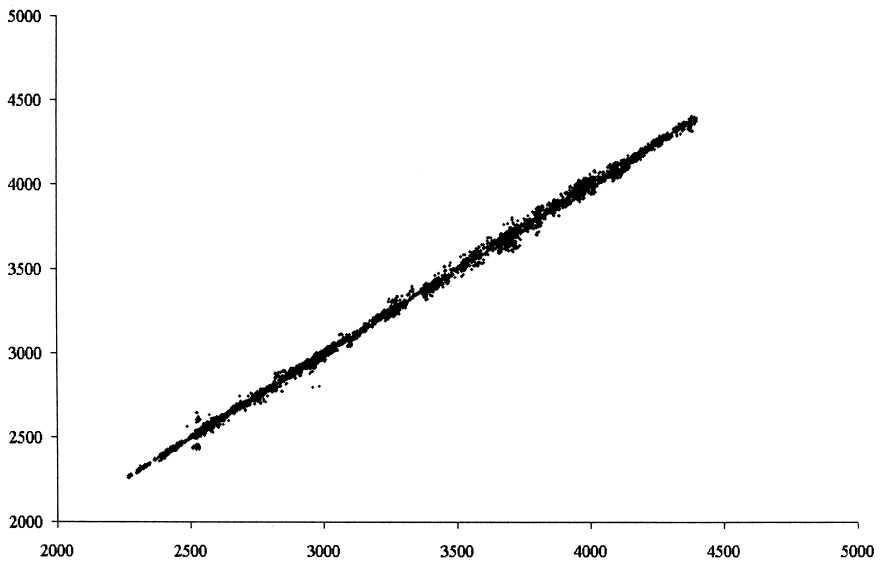
FIGURE 2

Relation entre les indices – la période d'étude s'étend du 2 janvier 1997 au 30 décembre 1998

(a) Différence relative entre l'indice CAC 40 au comptant et l'indice implicite



(b) Indice CAC 40 au comptant (en abscisse) Indice implicite (en ordonnée)



où la volatilité implicite $\hat{\sigma}_I^*$ est solution du programme de minimisation précédent²².

La Figure 2 représente l'indice CAC 40 et l'indice implicite sur la période. Il apparaît que la différence relative est relativement faible, 12 points d'indice en moyenne, soit un écart relatif de 0,4 % ; la différence est rarement supérieure à 2 %.

3.4 Le calcul des rentabilités

Le calcul des rentabilités nécessite que l'on définisse au préalable un pas d'échantillonnage. La longueur de l'intervalle est un choix délicat. Si l'intervalle est trop réduit et que la fréquence des transactions est faible, de nombreuses rentabilités nulles seront enregistrées, introduisant inévitablement un biais dans les résultats. Inversement, si l'intervalle est trop large, cela peut éventuellement masquer certaines interactions entre les marchés. Nous avons donc choisi de calculer nos rentabilités sur des intervalles de 10 minutes. Compte tenu de nos données, un tel intervalle fournit une grille suffisamment fine pour détecter des relations d'avance-retard intrajournalières tout en étant suffisamment large pour minimiser la fréquence des observations manquantes. Nous conservons le dernier prix de transaction enregistré sur chaque intervalle ; lorsqu'aucune transaction n'est enregistrée, nous répliquons le prix de l'intervalle précédent.

En complément des rentabilités calculées à intervalles fixes, nous évaluons également des rentabilités en utilisant un pas de temps variable. Pour cela, nous avons décidé d'utiliser une échelle de temps différente du temps calendaire, le temps transaction. La longueur du pas d'échantillonnage est ici déterminée par l'occurrence d'une transaction sur le marché des options²³. Autrement dit, à chaque transaction sur le marché des options, nous associons l'indice CAC 40 le plus proche, puis estimons les rentabilités entre deux transactions successives. Par construction, il n'existe plus d'intervalle sans observations. Le calcul des rentabilités en temps transaction nous permet de capter des réactions inférieures à 10 minutes, sans introduire de biais dû à un manque de liquidité. Plus généralement, cette approche permet de réincorporer l'effet de la durée entre les transactions dans l'analyse du processus de

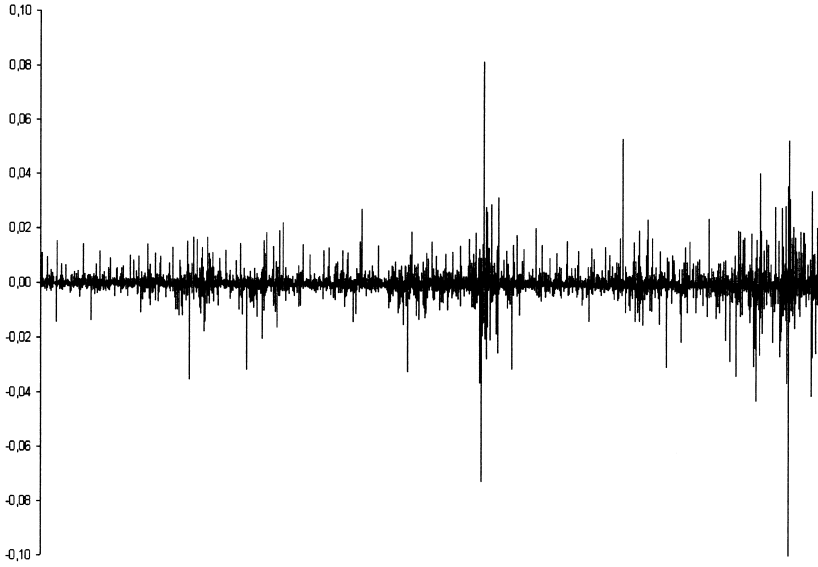
22. Deux séries de volatilité ont en fait été calculées. Dans le premier cas, nous supposons que les anticipations concernant la volatilité de l'indice CAC 40 ne varient pas au cours de la journée. Nous estimons donc une valeur différente de la volatilité pour chaque jour ouvré entre le 3 janvier 1997 et le 30 décembre 1998 et utilisons pour cela toutes les transactions réalisées la veille (la journée du 2 janvier est alors éliminée de notre base de données). Dans le second cas, à chaque nouvelle transaction correspond une nouvelle mesure de la volatilité calculée à partir des 25 dernières transactions. Cette seconde mesure est censée incorporer davantage d'informations que la première. Cependant les résultats n'étant, par la suite, pas significativement différents selon que l'on retient l'une ou l'autre approche, nous ne présentons que ceux obtenus avec la première estimation.

23. L'objectif est ici de disposer de deux séries d'observations simultanées. Il a donc fallu accorder la longueur de l'intervalle, avec l'intensité des échanges sur le marché des options et non avec l'intensité des échanges sur le marché au comptant (même s'il n'existe aucune règle formelle). Par ailleurs, dans le dernier cas, comme l'indice CAC 40 est disponible toute les 30 secondes cela reviendrait, à moins de reconstruire l'indice à partir des transactions observées pour les 40 valeurs sous-jacentes, à construire des intervalles de temps fixe avec un pas d'échantillonnage plus réduit que le pas précédent (30 secondes au lieu de 10 minutes).

FIGURE 3

Rentabilité, en temps transaction, de l'indice CAC 40 – l'indice d'étude s'étend du 2 janvier 1997 au 30 décembre 1998

(a) Indice CAC 40



(b) Indice CAC 40 implicite (obtenu par inversion de la formule de BLACK et SCHOLLES) [1973] modifiée pour tenir compte du versement discret des dividendes

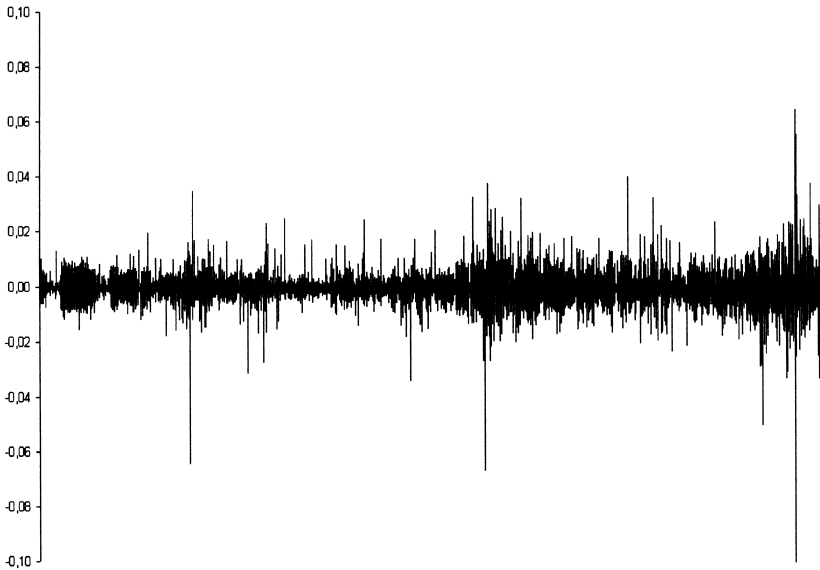


TABLEAU 3

Statistiques descriptives des rentabilités de l'indice CAC 40 et de l'indice implicite en temps calendaire et en temps transaction

Rdt de l'indice	Temps calendaire		Temps transaction	
	Comptant	Implicite	Comptant	Implicite
Nb d'observations	16 419		7 656	
Moyenne	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Écart-type	0,0017	0,0035	0,0021	0,0044
Autocorrelation $\rho(1)$	0,0033	-0,0043	-0,0025	-0,1599**
Autocorrelation $\rho(2)$	-0,0046	-0,0015	-0,0003	-0,0110
Autocorrelation $\rho(3)$	-0,0017	-0,0015	-0,0025	0,0067
Autocorrelation $\rho(4)$	0,0044	-0,0016	0,0073	-0,0074
Autocorrelation $\rho(5)$	0,0042	-0,0004	0,0019	0,0010
Autocorrelation $\rho(6)$	0,0020	-0,0006	0,0037	0,0020
Autocorrelation $\rho(7)$	-0,0008	0,0000	0,0027	0,0017
Autocorrelation $\rho(8)$	-0,0013	-0,0008	-0,0037	0,0049
Autocorrelation $\rho(9)$	0,0032	0,0003	-0,0002	-0,0082
Autocorrelation $\rho(10)$	-0,0034	-0,0001	0,0045	-0,0007

Note : La significativité des autocorrélations est mesurée par la statistique de Ljung-Box.

* Significativité au seuil de 10 %

** Significativité au seuil de 5 %

*** Significativité au seuil de 1 %

prix ; en effet, l'étude du processus de prix à intervalles de temps réguliers masque l'information contenue dans les dates d'occurrence des transactions²⁴. Les rentabilités, en temps transaction, de l'indice CAC 40 au comptant et de l'indice implicite sont représentées sur la Figure 3.

Pour une série donnée, les rentabilités sont obtenues en prenant le logarithme du rapport des prix successifs, soit $r_t = \ln(p_t/p_{t-1})$ ²⁵. Dans le cas des intervalles fixes, pour chaque intervalle sans transaction, le prix de l'intervalle précédent est répliqué ; nous obtenons 36 points par jour ($36 = 6 \times 60/10$). Les rentabilités calculées entre le cours de clôture et d'ouverture (*overnight returns*) ont enfin été éliminées²⁶.

Puisque les titres ne sont pas traités en continu, le niveau rapporté de l'indice est toujours un indicateur retardé de sa « vraie » valeur. L'indice ne s'ajuste qu'au rythme des échanges sur chaque action. Ce phénomène devrait se traduire par une autocorrélation du premier ordre positive des rentabilités de l'indice. Par ailleurs, la fragmentation des ordres, les comportements mimétiques, tout comme le processus progressif de découverte des prix (mouvement aléatoire entre les niveaux des cours acheteur et vendeur (ROLL [1984])), peuvent engendrer une autocorrélation des rentabilités²⁷. Les statistiques descriptives concernant nos rentabilités sont reproduites dans le Tableau 3.

24. Ce concept de temps déformé n'est pas nouveau. Dès les années soixante, MANDELBROT [1963] a montré que selon l'échelle de temps considérée, la distribution de probabilité des rendements n'était pas la même. Voir LE FOL et MERCIER [1998] pour une synthèse.

25. Il s'agit bien ici de rentabilités, et non de rendements, dans la mesure où nous ne prenons pas en compte les dividendes versés par les actions qui composent l'indice.

26. Le fait d'inclure ces rentabilités particulières ne fait qu'accroître la causalité instantanée entre les deux marchés (ALPHONSE [2000]).

27. Les corrélations d'ordre 1 ainsi que les corrélations instantanées sont également très dépendantes du système d'appariement des ordres, voir GOURIÉROUX et LE FOL [1998].

Pour des pas d'échantillonnage de 10 minutes, les autocorrélations ne sont significatives, ni dans le cas de l'indice au comptant, ni dans celui de l'indice implicite. En revanche, les rentabilités de l'indice implicite en temps transaction sont autocorrélées d'ordre 1 au seuil de 5 %. Toutefois, contrairement à FLEMING *et al.* [1996] qui réalisent leurs tests à la fois sur les rentabilités brutes et sur les innovations d'un processus ARMA(2,3), nous n'utilisons que les rentabilités brutes. La raison est que nous souhaitons conserver une certaine homogénéité dans les procédures employées, or une seule série sur les quatre aurait pu être filtrée. Dans notre cas, un tel filtre paraît en outre inutile dans la mesure où par la suite, nous avons recours à la méthode des moments généralisés pour nos régressions.

4 Méthodologie

La méthodologie adoptée est celle de l'analyse de causalité au sens de GRANGER [1969]. La causalité stricte au sens de *Granger* concerne les séquences présentes, passées et futures de deux séries chronologiques stationnaires et faiblement dépendantes $\{X_t\}$ et $\{Y_t\}$. Dans cet article nous définissons X_t comme la rentabilité de l'indice CAC 40, et Y_t comme la rentabilité de l'indice implicite calculé à partir du prix des options. Nous notons alors X_{t-Lx}^{Lx} le vecteur des valeurs retardées de X_t de longueur Lx : $X_{t-Lx}^{Lx} = (X_{t-Lx}, X_{t-Lx+1}, \dots, X_{t-1})$ et Y_{t-Ly}^{Ly} le vecteur des valeurs retardées de Y_t de longueur Ly : $Y_{t-Ly}^{Ly} = (Y_{t-Ly}, Y_{t-Ly+1}, \dots, Y_{t-1})$.

Dans le cas de la causalité au sens de *Granger*, nous dirons que X ne cause pas Y si l'observation des valeurs passées de X ne permet pas d'améliorer la prévision de Y effectuée à l'aide de la chronique de ses propres valeurs passées. Si I_{t-1} désigne le couple de vecteurs $(X_{t-Lx}^{Lx}, Y_{t-Ly}^{Ly})$ et $F(Y_t|I_{t-1})$ la distribution de probabilité de Y_t conditionnelle à l'information contenue dans I_{t-1} , on obtient :

$$(4) \quad F(Y_t|I_{t-1}) = F(Y_t|(I_{t-1} - X_{t-Lx}^{Lx})) \quad t = 1, 2, \dots$$

De façon générale, l'interprétation des résultats relève ici de la domination informationnelle d'un marché sur l'autre. En effet, la présence de causalité au sens de *Granger* ne signifie pas, à proprement parler, que les variations de prix sur l'un des marchés « causent » les variations de prix observées sur l'autre marché, mais simplement qu'un des deux marchés réagit en premier. Notre intuition est la suivante : si les investisseurs informés font du marché des options le lieu principal de leurs interventions, alors les variations de prix des options sur indice devraient permettre d'améliorer les prévisions concernant les variations futures de l'indice au comptant ; l'équilibre entre les deux marchés étant restauré par l'intervention des arbitragistes. Autrement dit, on devrait déceler un transfert d'information du marché dérivé vers le marché au comptant.

4.1 La causalité linéaire au sens de Granger

SIMS [1972] propose de tester la causalité au sens de *Granger* en régressant la variable Y sur les valeurs retardées, actuelle et avancées de la seconde variable X . L'estimation se fait à partir du modèle suivant :

$$(5) \quad Y_t = \alpha + \sum_{k=-n}^{+n} \beta_k X_{t+k} + \beta_z z_{t-1} + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

où n est le nombre de variables avancées ou retardées et T le nombre total d'observations. Le choix du nombre de retards et avances est fixé à six.

Les coefficients indicés négativement (β_{-1} à β_{-6}) représentent l'avance de l'indice de marché comparativement à l'indice implicite, alors que les coefficients indicés positivement (β_{+1} à β_{+6}) représentent le retard de l'indice de marché (puisque les valeurs futures des variations de l'indice de marché permettent de connaître aujourd'hui la variation de l'indice implicite)²⁸. Les hypothèses concernant le flux d'information entre les deux marchés peuvent ainsi être exprimées à partir des coefficients estimés :

H1 : L'indice au comptant reflète l'information en premier ($\beta_{-k} > 0$ et $\beta_{+k} = 0$).

H2 : L'indice implicite reflète l'information en premier ($\beta_{-k} = 0$ et $\beta_{+k} > 0$).

H3 : Aucun des deux indices ne reflète systématiquement l'information en premier ($\beta_{-k} > 0$ et $\beta_{+k} > 0$).

Le terme z_{t-1} est un terme à correction d'erreur intégré au modèle pour prendre en compte la relation de cointégration entre les variables. En raison de la relation d'arbitrage existant entre un actif dérivé et son sous-jacent, les prix de ces derniers apparaissent cointégrés. Or, en présence de cointégration, la différence entre les séries en niveau (indice implicite et indice CAC 40), retardée d'une période, fournit une information supplémentaire par rapport à celle contenue dans un nombre fini de valeurs de la variable indépendante. Cette information est saisie en ajoutant z_{t-1} comme variable indépendante. Ce terme est défini comme le logarithme du rapport de l'indice implicite sur l'indice de marché en niveau à la date $(t - 1)$; l'intuition à l'origine de cette variable à correction d'erreur est que les différences entre les niveaux à la date $(t - 1)$ tendront à devenir plus faibles à la date t en raison de l'activité d'arbitrage²⁹.

En raison de la présence probable d'hétéroscédasticité de nos résidus et des problèmes éventuels d'autocorrélation des séries (danse de la fourchette, *infrequent trading*), nous n'appliquons pas les Moindres Carrés Ordinaires, qui peuvent amener à des résultats fallacieux quant à la présence de causalité (*spurious causality*). En effet, si le cas est avéré, les estimateurs des MCO,

28. Le problème de ces tests est que la paramétrisation du modèle requiert une sélection arbitraire de la variable indépendante. Cependant, aucun fondement théorique ne permet de déterminer *a priori* le choix de cette variable, et les études antérieures utilisent indifféremment l'une ou l'autre.

29. La prise en compte de ce terme à correction d'erreur répond par ailleurs à la remarque de O'CONNOR [1999] qui utilise la méthode de cointégration de *Johansen* pour estimer la relation entre les marchés d'options et le marché sous-jacent.

quoique convergents, ne sont plus efficaces et les tests utilisant la matrice de variance-covariance des estimateurs, en particulier le test de *Student*, ne sont plus pertinents. Une première façon de procéder consiste à estimer, sous l'hypothèse d'hétéroscédasticité, la matrice de variance-covariance, puis à rechercher l'estimateur des Moindres Carrés Généralisés. Une approche équivalente consiste à utiliser la Méthode des Moments Généralisés (MMG) (HAMILTON [1994]). Afin de rendre nos résultats comparables avec les études antérieures, et en particulier avec les articles de FLEMING *et al.* [1996], ABHYANKAR [1998], et FINUCANE [1999], nous appliquons cette dernière approche.

Les tests statistiques pour l'hypothèse nulle que les coefficients β soient individuellement égaux à zéro sont en conséquence calculés sur la base de la matrice de variance-covariance estimée par la MMG de HANSEN [1982] qui consiste à minimiser une forme quadratique à partir d'une matrice de variance-covariance des résidus³⁰. Nous choisissons d'utiliser la matrice de NEWEY et WEST [1987] qui vérifie les conditions de HANSEN [1982] sous lesquelles les estimateurs sont efficaces, asymptotiquement sans biais et asymptotiquement normaux, quelle que soit la structure des résidus. La significativité des valeurs retardées (β_{-6} à β_{-1}), contemporaine (β_0) et avancées (β_{+1} à β_{+6}) de l'indice de marché est analysée à partir de la statistique de *Student*.

Le problème avec le test de SIMS [1972] est qu'il ne permet pas à déceler d'éventuelles relations non-linéaires entre les variables. De nombreuses études ont pourtant apporté la preuve de l'existence de non-linéarités des séries financières (HSIEH [1991], PANDEY *et al.* [1998]). De plus, en présence de coûts de transaction, il existe des bornes entre lesquelles le prix de l'option et celui du sous-jacent fluctuent sans provoquer d'arbitrage, puisque celui-ci n'est pas rentable. *A priori*, on ne peut donc pas écarter l'hypothèse selon laquelle la relation entre les deux séries est non-linéaire³¹.

4.2 La causalité non-linéaire au sens de Granger

Pour pallier l'inconvénient des tests de causalité linéaire, BAEK et BROCK [1992] ont proposé une méthode alternative fondée sur l'intégrale de corrélation³². Le passage d'une causalité linéaire à une causalité non-linéaire passe alors par la réécriture de la condition de non causalité au sens de GRANGER [1969]. La méthode adoptée est celle de HIEMSTRA et JONES [1994] qui proposent une version modifiée du test de BAEK et BROCK [1992]. Soit le vecteur des valeurs avancées de Y_t de longueur m : $Y_t^m = (Y_t, Y_{t+1}, \dots, Y_{t+m-1})$,

30. Ces résidus sont obtenus lors d'une première étape, en minimisant une forme quadratique, associée à une matrice identité.

31. Voir DWYER, LOCKE et YU [1996] pour un modèle incorporant des seuils dans les coûts de transaction dans le cadre des marchés à terme.

32. Leur méthode a été utilisée pour mettre en évidence des liens entre la monnaie et le revenu (BAEK et BROCK [1992]), les indices des prix à la production et à la consommation (JADITZ et JONES [1993]), les rendements boursiers et différents facteurs macroéconomiques (HIEMSTRA et KRAMER [1993]), les rendements boursiers et les volumes (HIEMSTRA et JONES [1994, NYSE], FUJIHARA et MOUGOUÉ [1997, *Petroleum Futures Market*], SILVAPULLE et CHOI [1999, *Korean Stock Exchange*]) ou les variations des taux de change (ASIMAKOPOULOS *et al.* [2000]). ABHYANKAR [1998] l'a également appliquée dans le cadre des relations entre l'indice FTSE 100 à terme et l'indice au comptant.

$m = 1, 2, \dots$ et $t = 1, 2, \dots, T$. Pour des valeurs données de m , Lx et $Ly \geq 1$, et pour un $e > 0$, on dira que la série X_t ne cause pas Y_t au sens de Granger si :

$$(6) \Pr(\|Y_t^m - Y_s^m\| < e \mid \|X_{t-Lx}^{Lx} - X_{s-Lx}^{Lx}\| < e, \|Y_{t-Ly}^{Ly} - Y_{s-Ly}^{Ly}\| < e) \\ = \Pr(\|Y_t^m - Y_s^m\| < e \mid \|Y_{t-Ly}^{Ly} - Y_{s-Ly}^{Ly}\| < e)$$

où $t, s = 1, 2, \dots$ et $\|\cdot\|$ est la norme maximum³³.

La probabilité du membre gauche de l'équation précédente est la probabilité conditionnelle que la différence entre deux vecteurs arbitraires de valeurs avancées en nombre m de Y_t soit inférieure à une distance e , sachant que les écarts entre les vecteurs des valeurs retardées de Y_t en nombre Ly et de X_t en nombre Lx sont chacun inférieurs à e . La probabilité du membre de droite est la probabilité conditionnelle que la différence entre deux vecteurs arbitraires de valeurs avancées en nombre m de Y_t soit inférieure à une distance e , sachant que l'écart entre les vecteurs des valeurs retardées de Y_t en nombre Ly est inférieur à e .

L'équation (6) peut être réécrite avec les ratios correspondant des probabilités jointes :

$$(7) \quad C_1(Lx, m + Ly, e) / C_2(Lx, Ly, e) = C_3(m + Ly, e) / C_4(Ly, e)$$

avec

$$C_1(Lx, m + Ly, e) \equiv \Pr\left(\|X_{t-Lx}^{Lx} - Y_{s-Lx}^{Lx}\| < e, \|Y_{t-Ly}^{m+Ly} - Y_{s-Ly}^{m+Ly}\| < e\right)$$

$$C_2(Lx, Ly, e) \equiv \Pr\left(\|X_{t-Lx}^{Lx} - X_{s-Lx}^{Lx}\| < e, \|Y_{t-Ly}^{Ly} - Y_{s-Ly}^{Ly}\| < e\right)$$

$$C_3(m + Ly, e) \equiv \Pr\left(\|Y_{t-Ly}^{m+Ly} - Y_{s-Ly}^{m+Ly}\| < e\right)$$

$$C_4(Ly, e) \equiv \Pr\left(\|Y_{t-Ly}^{Ly} - Y_{s-Ly}^{Ly}\| < e\right)$$

La condition de non causalité au sens de *Granger* dans l'équation (6) peut être testée en utilisant les estimateurs basés sur l'intégrale de corrélation des C_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Pour les réalisations de X et Y , soit $\{x_t\}$ et $\{y_t\}$ pour $t = 1, 2, \dots, T$, on définit $\{x_{t-Lx}^{Lx}\}$ et $\{y_t^m\}, \{y_{t-Ly}^{Ly}\}$ respectivement comme le vecteur retardé de longueur Lx de $\{x_t\}$, le vecteur avancé de longueur m et le vecteur retardé de longueur Ly de $\{y_t\}$. On peut alors réécrire les estimateurs des probabilités jointes de la manière suivante :

33. Notons que la norme maximum nous permet d'écrire :

$$\Pr\left(\|Y_t^m - Y_s^m\| < e, \|Y_{t-Ly}^{Ly} - Y_{s-Ly}^{Ly}\| < e\right) = \Pr\left(\|Y_{t-Ly}^{m+Ly} - Y_{s-Ly}^{m+Ly}\| < e\right)$$

(8)

$$\begin{aligned}
C_1(Lx, m + Ly, e, n) &\equiv (2/n(n-1)) \sum_{t=t_0}^{T-m+1} \sum_{s=t+1}^{T-m+1} I(x_{t-Lx}^{Lx}, x_{s-Lx}^{Lx}, e) \cdot I(y_{t-Ly}^{m+Ly}, y_{s-Ly}^{m+Ly}, e) \\
C_2(Lx, Ly, e, n) &\equiv (2/n(n-1)) \sum_{t=t_0}^{T-m+1} \sum_{s=t+1}^{T-m+1} I(x_{t-Lx}^{Lx}, x_{s-Lx}^{Lx}, e) \cdot I(y_{t-Ly}^{Ly}, y_{s-Ly}^{Ly}, e) \\
C_3(m + Ly, e, n) &\equiv (2/n(n-1)) \sum_{t=t_0}^{T-m+1} \sum_{s=t+1}^{T-m+1} I(y_{t-Ly}^{m+Ly}, y_{s-Ly}^{m+Ly}, e) \\
C_4(Ly, e, n) &\equiv (2/n(n-1)) \sum_{t=t_0}^{T-m+1} \sum_{s=t+1}^{T-m+1} I(y_{t-Ly}^{Ly}, y_{s-Ly}^{Ly}, e)
\end{aligned}$$

où $n = T + 1 - m - \max(Lx, Ly)$, $I(Z_1, Z_2, e)$ est une indicatrice égale à 1 quand la distance entre deux vecteurs Z_1 et Z_2 est inférieure à la distance e , et 0 sinon, et $t_0 = \max(Lx, Ly) + 1$.

HIEMSTRA and JONES [1994] montrent que, pour des valeurs données de m , Lx , et $Ly \geq 1$ et $e > 0$, et sous les hypothèses de DENKER and KELLER [1983], si $\{X_t\}$ ne cause pas $\{Y_t\}$ au sens de Granger, alors :

(9)

$$\sqrt{n} \left[\frac{C_1(Lx, m + Ly, e, n)}{C_2(Lx, Ly, e, n)} - \frac{C_3(m + Ly, e, n)}{C_4(Ly, e, n)} \right] \sim N(0, \sigma^2(m, Lx, Ly, e))$$

où $\sigma^2(m, Lx, Ly, e)$ est calculé en utilisant l'estimation de HIEMSTRA and JONES [1994]³⁴. La statistique ci-dessus est notée $CS(m, Lx, Ly, e, n)$. Le ratio

$$TVAL = CS(m, Lx, Ly, e, n) / \hat{\sigma}(m, Lx, Ly, e)$$

est alors distribué selon une loi Normale centrée réduite. On rejette l'hypothèse que X ne cause pas Y si la valeur absolue de la mesure de causalité $TVAL(e, L)$ est supérieure à la valeur limite St de la statistique de Student correspondant au seuil de significativité choisi. Ce dernier test est conduit pour un couple de valeurs e et L déterminé par l'observateur³⁵.

À l'instar de HIEMSTRA et JONES [1994], les tests de causalité non linéaire sont appliqués sur les résidus d'un modèle VAR (Vector AutoRegressive), afin d'ôter tout pouvoir prévisionnel linéaire éventuel entre les variables étudiées³⁶.

34. Le détail du calcul est donné en Annexe.

35. Les variables X et Y sont ici traitées de façon symétrique puisque chacune dépend de ses propres valeurs passées et des valeurs passées de la seconde variable. Notons que les tests de causalité linéaire basés sur les modèles VAR possèdent la même propriété de symétrie (GEWEKE [1984]).

36. Comme le notent ASIMAKOPOULOS *et al.* [2000], l'application du test de BAEK et BROCK [1992] requiert l'absence de dépendance linéaire sur les séries elles-mêmes. Or, ceci ne pouvait se faire à partir du modèle de SIMS [1972] et c'est pourquoi il a fallu appliquer un modèle VAR. Le choix de ce modèle nous permet en outre de proposer des résultats comparables à ceux obtenus par les autres études, par ailleurs peu nombreuses, utilisant la méthodologie de BAEK et BROCK [1992]. Signalons que les résultats des simulations de Monte Carlo réalisées par HIEMSTRA et JONES [1993] montrent que le test est robuste à la présence de changements de structure des séries et à une corrélation à la date t des erreurs du VAR.

Les résultats empiriques

Le résultat selon lequel le marché des options devance le marché au comptant, soit en raison de coûts de transaction plus faibles, soit en raison de l'effet de levier, est rejeté dans le cas français. L'hypothèse selon laquelle le MONEP serait dominé par la présence d'investisseurs informés n'est donc pas vérifiée. Ceci confirme les conclusions obtenues par MANNAI [1995] dans son étude sur l'existence d'asymétries d'information sur le MONEP. On constate, toutefois, l'existence de relations bi-directionnelles entre les deux marchés, révélatrices de l'activité des arbitragistes entre les marchés.

5.1 Résultats des tests de causalité linéaire

Les résultats des tests de causalité linéaire au sens de *Granger* sont présentés dans le Tableau 4. S'agissant des régressions effectuées sur des intervalles fixes (temps calendaire), outre le coefficient de causalité instantanée, les deux premiers coefficients associés aux rentabilités retardées de l'indice au comptant sont significatifs. Le terme à correction d'erreur est également significatif, indiquant que la différence retardée entre les niveaux de l'indice implicite et de l'indice CAC 40 fournit de l'information concernant la rentabilité contemporaine.

L'hypothèse H2 est donc validée : l'indice de marché précède l'indice implicite. Les résultats obtenus avec ces intervalles de 10 minutes suggèrent, par ailleurs, que le processus de découverte des prix est relativement long, de l'ordre de 20 minutes³⁷.

Ce résultat est contraire à ceux obtenus outre-Atlantique par FLEMING *et al.* [1996] et EASLEY *et al.* [1998] où le CBOE précède le marché sous-jacent, mais corrobore ceux de STUCKI et WASSERFALLEN [1994] sur le marché suisse, JARNECIC [1999] sur le marché australien et BOOTH *et al.* [1999] sur le marché allemand. Ces différences peuvent s'expliquer par le fait que les marchés dérivés européens et australien, comme le MONEP, sont peu liquides comparés au marché américain. Ce manque d'activité permet également de comprendre que le temps nécessaire à l'incorporation de l'information paraisse si long au vu de la capacité de réaction des arbitragistes. Le problème est que si l'on veut pouvoir détecter la réaction du marché des options, encore faut-il que des transactions aient été enregistrées. En conséquence, il est possible que ces premiers résultats soient biaisés par la présence de nombreux intervalles sans transaction (66 % dans notre échantillon)³⁸. En effet, une transaction sur le marché au comptant peut entraîner une modification immédiate de la fourchette sur le marché des options, et par la suite seulement, une

37. Lorsqu'on utilise des rentabilités calculées sur des intervalles de 5 minutes, ce sont alors les 5 premiers coefficients qui sont significatifs, d'où un délai d'environ 25 minutes. Par ailleurs, les résultats sont approximativement les mêmes en 1997 et en 1998. Ils sont disponibles sur simple demande auprès des auteurs.

38. Plus généralement, LO et MACKINLAY [1990] montrent que ce biais peut apparaître dès que la probabilité de *non-trading* est positive sur l'un des deux marchés.

TABLEAU 4

Résultats des tests de causalité linéaire entre l'indice CAC 40 et l'indice implicite

Coefficient	Temps calendaire		Temps transaction	
	Estimation	t-statistique	Estimation	t-statistique
α	0.0000	-0.3566	0,0000	-0.1382
β_{-6}	0.0260	1.1020	0.0081	0.2852
β_{-5}	-0.0300	-1.0956	-0.0215	-0.8849
β_{-4}	-0.0307	-1.0576	-0.0024	-0.0908
β_{-3}	0.0179	0.5446	0.0051	0.1768
β_{-2}	0.0937	3.8937***	-0.0005	-0.0183
β_{-1}	0.1893	4.8782***	0.0832	3.0122***
β_0	0.1302	4.6564***	0.6396	20.0741***
β_{+1}	0.0357	1.5411	0.0055	0.2081
β_{+2}	0.0007	0.0352	0.0023	0.0917
β_{+3}	-0.0182	-0.7398	0.0117	0.4407
β_{+4}	-0.0217	-0.9783	-0.0068	-0.2499
β_{+5}	-0.0221	-0.6786	-0.0094	-0.3546
β_{+6}	0.0346	0.6553	-0.0041	-0.1664
β_z	0.0587	4.0476***	0.0068	0.5963
Nb. d'obs.	16 407		7 644	

Note : Les résultats reportés sont ceux de la régression :

$Y_t = \alpha_t + \sum_{k=-6}^{+6} \beta_k X_{t+k} + \beta_z z_{t-1} + \epsilon_{i,t}$ où Y_t est la rentabilité de l'indice implicite calculé à partir du prix de l'option entre les dates t et $t - 1$, X_{t+k} est la rentabilité de l'indice CAC 40 entre les dates $t + k$ et $t + k - 1$, et z_{t-1} est le terme à correction d'erreur. Les t-stat correspondent à l'hypothèse H_0 de nullité du paramètre et sont calculées à partir de la matrice de variance-covariance de NEWBY et WEST [1987].

* Significativité au seuil de 10 %

** Significativité au seuil de 5 %

*** Significativité au seuil de 1 %

modification des prix. Le décalage obtenu entre les marchés ne serait alors dû qu'à une absence de transaction³⁹. Pour pallier ce problème, il est important de reconsidérer nos résultats en utilisant un pas de temps variable.

Les problèmes liés au manque d'activité sont la plupart du temps ignorés. JARNECIC [1999], sur le marché australien, propose toutefois d'éliminer les intervalles pour lesquels aucune observation n'est enregistrée. Le résultat est

39. La possibilité de disposer de données de cotation des teneurs de marché permettrait probablement d'avoir une idée plus précise du décalage entre les marchés.

probat puisqu'il permet de réduire le décalage temporel entre les marchés étudiés. Cependant, il ne permet pas de quantifier le temps nécessaire à l'incorporation de l'information. Confrontés au même type de problème sur le marché néerlandais, DE JONG et DONDEERS [1998] doivent, pour estimer leurs autocorrélations et leurs covariances, poser des hypothèses plus restrictives sur les processus de prix, afin d'obtenir des estimateurs compatibles avec une activité de marché réduite (*infrequent trading*)⁴⁰. Pour pallier ce biais, nous proposons, à l'instar de FINUCANE [1999], de considérer nos séries en fonction d'un pas de temps non pas fixe, mais variable. Contrairement à ce dernier, qui reconstruit ses séries de manière à ce qu'il n'existe plus, ni rentabilité nulle, ni transaction simultanée sur les deux marchés, nous suggérons de passer en « temps transaction ». C'est dès lors l'occurrence d'une transaction qui détermine le laps de temps à considérer, l'intervalle n'étant plus déterminé de manière *ad hoc*.

Les résultats obtenus à partir des intervalles variables (temps transaction) confirment ceux sur intervalles fixes, mais tempèrent leur interprétation. L'indice au comptant précède toujours l'indice implicite, mais une seule transaction est nécessaire pour que l'information contenue dans les variations de l'indice soit intégrée sur le marché des options. En temps transaction, on constate effectivement que seuls les coefficients β_0 et β_{-1} sont positifs et significatifs au seuil de 1 %. Le coefficient le plus élevé est le coefficient associé à la rentabilité de l'indice à la date courante (0,6398), ce qui montre que l'essentiel de l'incorporation de l'information se fait de façon simultanée entre les deux marchés. Nos résultats sont, en partie, conformes à ceux rapportés par FINUCANE [1999] dans la mesure où, lorsqu'il utilise un pas de temps fixe de 15 minutes, le délai d'incorporation de l'information est effectivement de 45 minutes environ, contre quelques minutes avec un intervalle variable.

Un autre intérêt du temps transaction est de pouvoir considérer un laps de temps plus révélateur des variations de l'activité sur le MONEP. Si l'on s'en tient à la durée moyenne entre deux transactions (*cf.* Tableau 2), on peut remarquer qu'un retard d'une transaction correspond à un délai de réaction de l'ordre de 20-30 minutes ce qui en définitive corrobore les résultats précédents. Mais, dans la mesure où le temps moyen entre deux transactions diffère selon la période de la journée, on peut dire que le délai d'incorporation de l'information, mesuré en minutes, varie au cours de la séance, en raison du caractère saisonnier de l'activité : il est d'environ 17 minutes entre 10h30 et 11h30, alors qu'il passe à plus d'une demi-heure entre 13h30 et 14h30 (mesurée en nombre de transactions, la vitesse d'ajustement est en revanche constante au cours de la journée). Or, ce phénomène ne pouvait être pris en compte avec les intervalles fixes⁴¹.

40. Leurs estimations se fondent en particulier sur l'hypothèse que le processus de prix est indépendant du processus d'arrivée des ordres sur le marché ; *cf.* GHYSELS, GOURIÉROUX et JASIAK [1997].

41. Nous avons entrepris de tester explicitement si le délai d'incorporation de l'information, voire même le sens de la causalité, variait selon le moment de la journée considérée. Deux types de tests, selon que les rentabilités étaient calculés en temps calendaire ou en temps transaction ont été appliqués. Dans le premier cas nous avons testé 5 relations de causalité linéaire en considérant, comme variable endogène, uniquement la rentabilité de l'indice implicite calculée sur un intervalle de 10 minutes à une heure fixée (11h30, 12h30, 13h30, 14h30, 15h30), tandis que dans le second cas nous avons appliqué les tests de causalité linéaire en considérant, comme variable endogène, la rentabilité de l'indice implicite calculée entre deux transactions sur le marché des

Enfin, il convient de noter que la valeur du terme à correction d'erreur est beaucoup plus faible que dans le cas précédent ; ce terme n'est d'ailleurs pas significativement différent de zéro. Cela suggère notamment que le calcul du terme à correction d'erreur à partir des intervalles fixes est probablement biaisé en raison de la non-synchronisation des données, ce qui a pour effet de surestimer l'écart, en valeur absolue, entre l'indice au comptant et l'indice implicite (ce n'est pas le cas en temps transaction où la synchronisation est parfaite entre le prix des options et l'indice)⁴².

5.2 Résultats des tests de causalité non-linéaire

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que la possibilité de liens linéaires entre les deux marchés. Les tests de causalité précédents reposent en effet sur l'estimation des coefficients d'une fonction affine. Or, de plus en plus, les études économétriques portant sur les séries financières haute-fréquence suggèrent la présence de dynamiques non-linéaires. Dans notre cas, il peut exister également des relations non-linéaires entre les actifs, résultats d'opérations d'arbitrage. En conséquence, nous appliquons le test de causalité non-linéaire modifié par HIEMSTRA et JONES [1994] afin de détecter l'existence de relations de ce type entre l'indice CAC 40 et les options sur indice.

Le test modifié de BAEK et BROCK [1992] nécessite que soit déterminées, de manière subjective, la longueur du vecteur avancé m , la longueur des retards Lx et Ly , et l'échelle du paramètre e . Il n'existe aucune indication quant au choix des valeurs optimales, mais en nous basant sur les simulations de Monte Carlo de HIEMSTRA et JONES [1993] et de CHAUVEAU [1997], le test est appliqué pour différentes valeurs de e , $e = 1$; $e = 1,5$; $e = 2$, la longueur du vecteur m est fixée à 1 et $Lx = Ly$ pour des retards de 1 à 6⁴³. En raison de la nature du test, on ne peut calculer d'indicatrice ($I(Z_1, Z_2, e)$) sur une seule et même date, ce qui ne nous permet pas de tester la causalité non-linéaire

options sur 3 périodes successives de 2 heures (10h30-12h30, 12h30-14h30, 14h30-16h30). Les résultats que nous avons obtenus confirment les précédents, à savoir qu'au-delà de la causalité instantanée, le marché au comptant devance le marché des options, et ce quelque soit le moment de la journée considérée. Par ailleurs, on obtient bien que le pouvoir prédictif des rentabilités de l'indice au comptant est plus fort en milieu de journée et plus faible en matinée. Les résultats de ces tests ne sont pas toutefois entièrement satisfaisants dans la mesure où nous ne sommes pas capables de donner des informations à caractère quantitatif sur les délais de réaction. Le problème est que d'une part, sur le MONEP, en raison de la forte variabilité de l'activité, non seulement d'une heure à l'autre, mais également d'un jour sur l'autre, l'activité n'est pas concentrée à la même heure chaque jour, et que d'autre part, nous disposons de trop peu d'observations pour chaque sous-échantillon. Ainsi, mis à part le coefficient instantané, les premiers coefficients retardés de l'indice au comptant ne sont pas forcément les plus significatifs ; en outre, l'impact des rentabilités retardées ne décroît pas de façon monotone. En attendant de pouvoir disposer d'une base de donnée plus conséquente (sur un autre marché, sur une plus longue période encore, ou sur les cotations des teneurs de marché) nous ne pouvons avancer de résultats plus probants. Afin de ne pas alourdir l'exposé, ces résultats ne sont pas rapportés.

42. Signalons que quelle que soit la définition du temps adoptée, les conclusions restent les mêmes en l'absence du terme à correction d'erreur. Les régressions ont également été effectuées en ajoutant l'indice de clôture mais il n'est jamais significatif.

43. CHAUVEAU [1997] montre que le résultat du test est peu sensible aux variations de valeur de e , dès lors que cette dernière est comprise entre 0,8 et 1,8. Cette assertion n'est plus vérifiée pour des valeurs plus extrêmes ($e = 0,5$ ou 2,5). Le choix de m est, quant à lui, dicté par des considérations *a priori*, en sachant que plus m est élevé, plus le risque de rejet de la non causalité est faible.

instantanée. Nous appliquons le test aux résidus du modèle VAR, ce qui implique que les rentabilités sont déjà purgées de leur lien linéaire, pour des retards allant de 1 à 6⁴⁴. Les résultats sont donnés dans le Tableau 5 pour les intervalles variables. Nous rapportons la valeur de *CS*, la différence entre les deux probabilités conditionnelles et *TVAL*, la statistique du test de *Student*, pour chaque retard.

TABLEAU 5

Résultats des tests de causalité non-linéaire entre l'indice CAC 40 et l'indice implicite

H_0	L'indice au comptant ne cause pas l'indice implicite		L'indice implicite ne cause pas l'indice au comptant	
e = 1				
$Lx = Ly$	<i>CS</i>	<i>TVAL</i>	<i>CS</i>	<i>TVAL</i>
1	1,5325	8,0409***	1,1655	3,5428***
2	2,9999	6,3051***	2,5281	3,5800***
3	3,8770	4,2915***	3,3681	2,6154***
4	5,3434	3,1874***	4,1488	1,9242**
5	6,8647	2,3196***	5,4317	1,5530*
6	12,6008	2,8539***	8,8342	1,6973**
e = 1,5				
$Lx = Ly$	<i>CS</i>	<i>TVAL</i>	<i>CS</i>	<i>TVAL</i>
1	1,5146	8,2096***	1,2069	3,8805***
2	2,9475	7,8307***	2,2579	3,9555***
3	3,3495	5,6602***	2,9519	3,3263***
4	5,0145	5,7332***	4,3551	3,5982***
5	5,6768	4,8350***	4,2189	2,7310***
6	6,7063	4,5231***	4,6123	2,4122***
e = 2				
$Lx = Ly$	<i>CS</i>	<i>TVAL</i>	<i>CS</i>	<i>TVAL</i>
1	1,3681	8,1309***	1,1532	4,1560***
2	2,5838	8,6573***	1,9910	4,3333***
3	2,9331	6,8411***	2,3006	3,5058***
4	4,3420	7,6264***	3,6151	4,3858***
5	5,0372	7,1088***	3,9131	3,9527***
6	5,8360	7,1699***	4,1651	3,6047***

Note : Le test de causalité modifié de BAEK et BROCK [1992] est effectué sur les résidus du modèle VAR. Lx et Ly sont le nombre de retards utilisés pour les séries. *CS* et *TVAL* sont la différence entre les deux probabilités conditionnelles multipliée par \sqrt{n} , et la statistique de test, distribuée selon une loi normale centrée réduite. L'hypothèse nulle est rejetée si la statistique *TVAL* observée est supérieure à la valeur limite théorique. Les résultats sont donnés pour $e = 1, 1,5$ et 2.

* Significativité au seuil de 10 %

** Significativité au seuil de 5 %

*** Significativité au seuil de 1 %

44. Le test modifié de BAEK et BROCK [1992] est de toute façon peu sensible à une dépendance linéaire (CHAUVEAU [1997]).

Qu'il s'agisse de l'hypothèse selon laquelle l'indice implicite ne cause pas l'indice au comptant, ou de l'hypothèse opposée, les valeurs de $TVAL$ sont toutes significatives au seuil de 1 % pour $e = 1$ ce qui suggère une dépendance non-linéaire forte entre les deux marchés⁴⁵. On remarquera en outre que l'effet est plus important dans le cas de la causalité de l'indice au comptant vers l'indice implicite ce qui tend à confirmer les résultats précédents. Les valeurs de la statistique de test sont effectivement plus élevées du marché au comptant vers le marché des options ; par exemple, pour le premier retard, elle est de 8,21 dans le premier cas, contre 3,88 dans le second.

Ces résultats peuvent sembler paradoxaux au vu de ceux obtenus dans le cadre de la causalité linéaire. Pour autant, ils ne remettent pas en cause le fait que l'information se transmet davantage de l'indice CAC 40 vers le marché des options, mais suggèrent simplement des interactions importantes entre les deux marchés. Les précédents tests ne captent, en effet, qu'une partie de la dynamique entre les marchés ; ils sont notamment incapables de tenir compte de l'influence des coûts de transaction sur l'activité des arbitragistes, coûts de transaction qui impliquent que les différences de prix entre les marchés ne sont arbitrées que lorsqu'elles sont supérieures, en valeur absolue, à la fourchette de prix. Par ailleurs, bien qu'il n'existe aucune étude de la sorte sur le marché des options, nos résultats sont semblables à ceux obtenus par ABHYANKAR [1998] qui étudie les relations de causalité entre les contrats à terme sur l'indice FTSE 100 et l'indice au comptant.

5.3 Comment expliquer les liens entre les marchés ?

Nos résultats sont donc incompatibles avec l'hypothèse selon laquelle les options, en raison de l'effet de levier, sont des instruments attractifs pour les investisseurs informés ; sous cette hypothèse, l'information devrait en effet être incorporée en premier dans le prix des options, le transfert des informations entre les marchés étant assuré par l'intervention d'arbitragistes. L'explication tient aux différences de coûts de transaction entre les marchés. Dans notre cas, la faiblesse relative de l'activité sur le marché des options induit, *a priori*, des coûts de transaction plus élevés sur le MONEP que sur le marché au comptant. Or, comme le notent Fleming *et al.* [1996], le marché bénéficiant des coûts de transaction les plus faibles devrait incorporer l'information plus rapidement⁴⁶. Il convient, toutefois, de noter qu'une transaction sur l'un des marchés peut entraîner une modification de la fourchette sur l'autre marché, et par la suite seulement, une modification des prix. Ce biais est particulièrement manifeste en temps calendaire, et le fait qu'une seule transaction s'avère nécessaire en temps transaction confirme ce point. Le décalage obtenu entre les marchés ne serait alors dû qu'à une absence de transaction. À ce titre, il aurait été intéressant de

45. Comme prévu, la causalité est plus forte à mesure que e augmente.

46. Ce décalage entre les marchés peut être également lié à leurs modes d'organisation respectifs dans la mesure où les actions sont échangées par l'intermédiaire du système électronique SuperCAC, alors que jusqu'en mars 1998, sur le MONEP, une partie des transactions se faisait encore à la criée. En théorie, ainsi que le suggèrent BIAIS, FOUCAULT et SALANIÉ [1998], l'organisation des marchés sous forme de criée ralentit le processus de découverte des prix. À l'instar de GRÜNBlicher, LONGSTAFF et SCHWARTZ [1994], une interprétation des résultats peut donc être proposée en terme d'efficacité relative d'un mode d'organisation par rapport à un autre.

pouvoir étudier explicitement les coûts de transaction sur le marché dérivé. Malheureusement, *Euronext Paris* ne met à disposition aucune information concernant la fourchette de prix des contrats d'option.

L'explication précédente n'exclut pas la possibilité de relations plus complexes entre les deux marchés, dues à la présence des arbitragistes. Au contraire, l'existence des coûts de transaction, et notamment des fourchettes de prix, implique également des relations non-linéaires entre les actifs. Les différences de prix entre les deux marchés ne sont en effet arbitrées que dans la mesure où elles sont supérieures aux coûts engagés. DWYER *et al.* [1996] montrent ainsi, dans le cadre d'un modèle avec coûts de transaction (*cost of carry model with nonzero transaction costs*), que les relations de nature non-linéaires sont utiles en vue de caractériser les relations entre l'indice S&P 500 au comptant et son contrat à terme.

6 Conclusion

Dans l'ensemble, nos résultats indiquent que le marché des options n'est pas dominé par la présence d'investisseurs informés. Il semble, en effet, que l'indice CAC 40 intègre les nouvelles informations environ 20 minutes avant le marché des options, ce qui correspond en moyenne à une transaction, et ce malgré l'effet de levier propre à ces instruments. Ces résultats sont semblables à ceux de JARNECIC [1999] sur le marché australien et à ceux de Booth *et al.* [1999] sur le marché allemand ; ils sont en revanche opposés à ceux obtenus sur les marchés américains (voir par exemple Fleming *et al.* [1996]). Nos résultats suggèrent également la présence de liens non-linéaires bi-directionnels significatifs entre les deux marchés, signe de l'activité des arbitragistes ; d'où, d'ailleurs, l'utilité de tels tests, puisque les régressions linéaires ne sont pas capables de caractériser les dynamiques de la relation entre les séries.

Si cette étude a permis de mieux comprendre comment se transmet l'information entre le marché au comptant et le marché des options, elle n'en comporte pas moins certaines limites, tant conceptuelles que méthodologiques. Premièrement, sur le plan théorique, nous sommes encore à la recherche de modèles plus complets, intégrant à la fois l'effet de levier, les différences de coûts de transaction et de liquidité entre les deux marchés, et les techniques d'évaluation propres aux options. Les approches théoriques n'offrent, pour l'heure, que des modèles déconnectés des principes d'évaluation tels qu'ils ont été élaborés depuis BLACK et SCHOLES [1973] et ces derniers sont encore difficilement transposables aux cas des marchés incomplets. Ensuite, sur le plan empirique, à l'instar des travaux d'ABHYANKAR [1998] sur le marché des *futures*, il conviendrait d'appliquer à nos séries plusieurs filtres afin, notamment, de déceler l'existence de biais imputables au phénomène de persistance de la volatilité. L'existence d'une base de données incluant toutes les cotations, permettrait en outre de mieux comprendre le comportement des teneurs de marchés. À l'heure actuelle, un prolongement envisagé consiste à examiner les liens réciproques entre l'indice CAC 40, les contrats à terme et les contrats d'options sur indice. ■

• Références bibliographiques

- ABHYANKAR A. (1998). – « Linear and Nonlinear Granger Causality : Evidence from the U.K. stock index futures market », *Journal of Futures Markets*, 18 (5), p. 519-540.
- ASIMAKOPOULOS I., AYLING D. et MAHMOOD W.M. (2000). – « Non-linear Granger Causality in the Currency Futures Returns », *Economics Letters*, (68)1, p. 25-30.
- ALPHONSE P. (2000). – « Mesures de causalité entre marchés au comptant et à terme d'indice boursier », *Actes du Colloque de l'AFFI*, 26 et 27 juin 2000, Paris.
- ANTHONY J. (1988). – « The Interrelation of Stock and Options Market Trading Volume Data », *Journal of Finance*, 43, p. 949-964.
- ARTUS P. (1996). – « Création d'un marché à terme, nature des imperfections financières et stabilité du prix au comptant », *Revue Économique*, 47(5), p. 1043-62.
- BACK K. (1993). – « Asymmetric Information and Options », *Review of Financial Studies*, 6(3), p. 435-472.
- BAEK E. et BROCK W. (1992). – « A Non-Parametric Test for Independence of a Multivariate Time Series », *Statistica Sinica*, 2, p. 137-156.
- BAKSHI G., CH. CAO et Z. CHEN (1997). – « Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models », *Journal of Finance*, 52(5), p. 2003-2049.
- BATES D. (1996). – Testing option pricing models, *Handbook of Statistics 14 : Statistical Methods in Finance*, Maddala et Rao (Eds), p. 567-611.
- BENSAÏD B. et BOUTILLIER M. (1997). – « Le contrat notionnel : efficience et causalité », *Notes d'Études et de Recherche*, 44, Banque de France.
- BIAIS B., FOUCAULT T. et SALANIÉ F. (1998). – « Floors, Dealer Markets and Limit Order Markets », *Journal of Financial Markets*, 1, p. 253-284.
- BIAIS B. et HILLION P. (1994). – « Insider and Liquidity Trading in Stock and Options Markets », *Review of Financial Studies*, 7(4), p. 743-780.
- BIAIS B., HILLION P. et SPATT C. (1995). – « An Empirical Analysis of the Limit Order Book and the Order Flow in the Paris Bourse », *Journal of Finance*, 50(5), p. 1655-1689.
- BHATTACHARYA M. (1987). – « Prices Changes of Related Securities: The Case of Call Options and Stocks », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, p. 1-15.
- BLACK F. (1975). – « Fact and Fantasy in the Use of Options », *Financial Analysts Journal*, 31, p. 36-72.
- BLACK F. et SCHOLES M. (1973). – « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, p. 637-655.
- BOOTH G., SO R. et TSE (1999). – « Price Discovery in the German Equity Index Derivatives Markets », *Journal of Futures Markets*, 19(6).
- BROOKS C., GARRETT I. et HINICH M.J. (1999). – « An Alternative Approach to Investigating Lead-Lag Relationships between stock and Stock Index Futures Markets », *Applied Financial Economics*, 9, p. 605-613.
- CAO H. (1999). – « The Effect of Derivative Assets on Information Acquisition and Price Behavior in a Rational Expectations Equilibrium », *Review of Financial Studies*, 12(1), p.131-163.
- CHAN K., CHUNG Y. et JOHNSON H. (1993). – « Why Option Prices Lag Stock Prices : A Trading Based Explanation », *Journal of Finance*, 48, p. 1957-1967.
- CHAUVEAU Th. (1997). – « Peut-on exploiter le lien statistique entre cours et volume ; le cas de quatre bourses de valeurs », *Document de Travail CDC*, 1997-04/FI.
- CHERIAN J., et JARROW R. (1998). – « Options Markets, Self-Fulfilling Prophecies and Implied Volatilities », *Review of Derivatives Research*, 2, p. 5-37.
- CLARK A. (1997). – « Derivatives: A regulator's Perspective », *Economic Notes*, 26(2), p. 425-440.
- DE JONG F. et DONDEERS M. (1998). – « Intraday Lead-Lag Relationships between the Futures, Options and Stock Markets », *European Finance Review*, p. 337-359, 1(3).
- DENKER M. et KELLER G. (1983). – « On U-Statistics and v. Mises' Statistics for Weakly Dependent Processes », *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 64, p. 505-522.

- DILTZ D. et KIM S. (1996). – « The Relationship between Stock and Option Prices Changes », *Financial Review*, 31(3), p. 499-519.
- DWYER G., LOCKE P. et YU W. (1996). – « Index Arbitrage and Nonlinear Dynamics between the S&P 500 Futures and Cash », *Review of Financial Studies*, 9(1), p. 301-332.
- EASLEY D., O'HARA M. et SRINIVAS P.S. (1998). – « Option Volume and Stock Prices : Evidence on Where Informed Traders Trade », *Journal of Finance*, 53(2), p. 431-465.
- FASE M. (1994). – « The Interaction between Trading Volume of Stock and Options : Some Statistical Evidence », *Journal of International Money and Finance*, 13(5), p. 587-601.
- FINUCANE T.J. (1999). – « A New Measure of the Direction and Timing of Information Flow between Markets », *Journal of Financial Markets*, 2(2), p. 135-151.
- FLEMING J., OSTDIEK B. et WHALEY R. E. (1996). – « Trading Costs and the Relative Rates of Price Discovery in the Stock, Futures, and Option Markets », *Journal of Futures Markets*, 16, p. 353-387.
- FUJIHARA R.A. et MOUGOUË M. (1997). – « An Examination of Linear and Nonlinear Causal Relationships between Price Variability and Volume in Petroleum Futures Markets », *Journal of Futures Markets*, 4, p. 385-416.
- GEWEKE J. (1984). – Inference and Causality in Economic Time Series Models, *Handbook of Econometrics*, Vol. 2, Griliches Z., Intriligator M. (Eds), North Holland.
- GHYSELS E., GOURRIÉROUX Ch. et JASIAK J. (1997). – Market Time and Asset Price Movements : Theory and Estimation, dans *Statistics in Finance*, D. Hand et S. Jacka (éds.), Edward Arnold, London.
- GOURIÉROUX Ch. et LE FOL G. (1998). – « Effet des modes de négociation sur les échanges », *Revue Économique*, 49(3), p. 795-808.
- GOURIÉROUX Ch., JASIAK J. et LE FOL G. (1999). – « Intra-Day Market Activity », *Journal of Financial Markets*, 2, p. 193-226.
- GRANGER C. (1969). – « Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods », *Econometrica*, 37(3), p. 424-438.
- GREEN R. et JARROW R. (1987). – « Spanning and Completeness in Markets with Contingent Claims », *Journal of Economic Theory*, 41, p. 202-210.
- GRÜNBLICHER A., LONGSTAFF F. et SCHWARTZ E. (1994). – « Electronic Screen Trading and the Transmission of Information : an Empirical Examination », *Journal of Financial Intermediation*, 3, p. 166-187.
- HAKANSSON N. (1978). – « Welfare Aspects of Options and Supershares », *Journal of Finance*, 33, p. 754-776.
- HAMON J. et JACQUILLAT B. (1992). – Le marché français des actions, PUF, Collection Finance.
- HANSEN L.P. « Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators », *Econometrica*, 50(4), p. 1029-54.
- HARVEY C. et WHALEY R. (1992). – « Dividends and S&P 100 Index Option Valuation », *Journal of Futures Markets*, 12(2), p. 123-137.
- HIEMSTRA C. et JONES J. (1993). – « Monte Carlo Results for a Modified Version of the Baek and Brock Non Linear Granger Causality Test », *Working Paper*, University of Strathclyde and Securities and Exchange Commission.
- HIEMSTRA C. et JONES J. (1994). – « Testing for Linear and Nonlinear Granger Causality in the Stock Price-Volume Relation », *Journal of Finance*, 49(5), p. 1639-1664.
- HIEMSTRA C. et KRAMER C. (1993). – « Nonlinearity and Endogeneity in Macro-Asset Pricing », *Working Paper*, University of Strathclyde and International Monetary Fund.
- HSIEH D. (1991). – « Chaos and Non Linear Dynamics : Applications to Financial Markets », *Journal of Finance*, 46, p. 1839-1877.
- JADITZ T. et JONES J. (1993). – « Granger Causality between the Consumer and Wholesale Price Indices », *Working Paper*, Bureau of Labor Statistics and Security and Exchange Commission.
- JARNECIC E. (1999). – « Trading Volume Lead/Lag Relations between the ASX and ASX Option Market : Implications of Market Microstructure », *Australian Journal of Management*, 24(1), p. 77-94.

- JOHN K., KOTICHA A., NARAYANAN R. et SUBRAHMANYAM M. (1999). – « Margin Rules, Informed Trading, in Derivatives and Price Dynamics », *Working Paper*, New York University.
- JORION P. (2000). – « Value at Risk : The New Benchmark for Managing Financial Risk », *McGraw Hill*, New York.
- KOFMAN P. et MOSER J. (1997). – « Spreads, Information Flows and Transparency across Trading Systems », *Applied Financial Economics*, 7, p. 281-294.
- KRAUS A. et SMITH M. (1996). – « Heterogeneous Beliefs and the Effect of Replicable Options on Asset Prices », *Review of Financial Studies*, 9(3), p. 723-756.
- KUPRIANOV A. (1995). – « Derivatives Debacles : Case Studies of Large Losses in Derivatives Markets », *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly*, 81(4), p. 1-40.
- LEE C. et MATHUR I. (1999). – « The Influence of Information Arrival on Market Microstructure : Evidence from Three Related Markets », *Financial Review*, 34, p. 1-26.
- LE FOL G. et MERCIER L. (1998). – « Time Deformation : Definition and Comparisons », *Journal of Computational Intelligence in Finance*, 6(5), p. 19-33.
- LO A. et MACKINLAY A.C. (1990). – « An Econometric Analysis of Infrequent Trading », *Journal of Econometrics*, 45, p. 181-211.
- LYONS R. (1996). – « Foreign Exchange Volume : Sound and Fury Signifying Nothing ? » in Frankel, Galie and Giovannini (eds.) *The Microstructure of Foreign Exchange Markets*, Chicago.
- MCCLINTON B. (1996). – « International Financial Instability and the Financial Derivatives Market », *Journal of Economic Issues*, 30(1), p. 13-33.
- MANASTER S., et RENDLEMAN R. (1982). – « Option Prices as Predictors of Equilibrium Stock prices », *Journal of Finance*, 37, p. 1043-1057.
- MANDELBROT B. (1963). – « The Variation of Certain Speculative Prices », *Journal of Business*, 36, p. 349-419.
- MANNAI S. (1995). – « De la microstructure en général et de la liquidité en particulier : théories et études empiriques sur le MONEP », *Economica*, Paris, p. 149.
- MAYHEW S. (1999). – « The Impact of Derivatives on Cash Markets : What Have We Learned ? », University of Georgia, *Working Paper*.
- MERTON R. (1973). – « Theory of Rational Option Pricing », *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), p. 141-183.
- MILLER M.H. (1995). – « Do We Really Need More Regulation of Financial Derivatives ? », *Pacific Basin Finance Journal*, 3, p. 147-158.
- NANDI S. (1999). – « Asymmetric Information about Volatility : How Does it Affects Implied Volatility, Option Prices and Market Liquidity », *Review of Derivative Research*, 3, p. 215-235.
- NEWBY W. et WEST K. (1987). – « A Simple Positive and Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix », *Econometrica*, 55, p. 703-708.
- O'CONNOR M. (1999). « The Cross-sectional Relationship between Trading Costs and Lead/Lag Effects in Stock and Option Markets », *Financial Review*, 34, p. 95-118.
- PANDEY V., KOHERS T. et KOHERS G. (1998). – « Deterministic Nonlinearity in the Stock Returns of the Major European Equity Markets and the United-States », *Financial Review*, 33, p. 45-64.
- RENAULT E. (1997). – « Econometric Models of Option Pricing Errors », *Advances in Economics and Econometrics : Theory and Applications 3*, Kreps et Wallis (Eds), ESM, Cambridge University Press, p. 221-278.
- ROLL R. (1977). – « An Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends », *Journal of Financial Economics*, 5(2), p. 251-58.
- ROLL R. (1984). – « A Simple Implicit Measure of the Effective Bid-Ask Spread in an Efficient Market », *Journal of Finance*, 39(4), p. 1127-39.
- ROSS S. (1976). – « Options and Efficiency », *Quarterly Journal of Economics*, 90, p. 75-89.

- SHYY G., V. VIJAYRAGHAVAN et SCOTT-QUINN B. (1996). – « A Further Investigation of the Lead-Lag Relationship between the Cash Market and Stock Index Futures Market with the Use of Bid-Ask Quotes : The Case of France », *The Journal of Futures Markets*, 16(4), p. 405-420.
- SILVAPULLE P. et CHOI J.-S. – « Testing for Linear and Nonlinear Granger Causality in the Stock Price-Volume Relation : Korean Evidence », *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 39(1), p. 59-76.
- SIMS (1972). – « Money, Income and Causality », *American Economic Review*, 62, p. 540-552.
- STEPHAN J. et WHALEY R. (1990). – « Intraday Price Change and Trading Volume Relationship in the Stock and Stock Options Markets », *Journal of Finance*, 45, p. 191-220.
- STUCKI T. et W. WASSERFALLEN (1994). – « Stock and Option Markets : the Swiss Evidence », *Journal of Banking and Finance*, 18, p. 881-893.

Annexes

A. Expression de la variance

L'estimateur de la variance du test modifié de BAEK et BROCK [1992] peut être déterminé à partir des probabilités jointes

$$h_{C_1} \left(x_{t-Lx}^{Lx}, y_{t-Ly}^{m+Ly}, e \right), h_{C_2} \left(x_{t-Lx}^{Lx}, y_{t-Ly}^{Ly}, e \right), h_{C_3} \left(y_{t-Ly}^{m+Ly}, e \right),$$

et $h_{C_4} \left(y_{t-Ly}^{Ly}, e \right)$, qui sont fonction des combinaisons des réalisations de x_{t-Lx}^{Lx} , y_t^m et y_{t-Ly}^{Ly} .

(A1)

$$h_{C_1} \left(y_{t-Ly}^{m+Ly}, x_{t-Lx}^{Lx}, e \right) \equiv Pr \left(\left\| y_{t-Ly}^{m+Ly} - Y_{s-Ly}^{m+Ly} \right\| < e, \left\| x_{t-Lx}^{Lx} - X_{t-Lx}^{Lx} \right\| < e \right)$$

$$h_{C_2} \left(y_{t-Ly}^{Ly}, x_{t-Lx}^{Lx}, e \right) \equiv Pr \left(\left\| y_{t-Ly}^{Ly} - Y_{s-Ly}^{Ly} \right\| < e, \left\| x_{t-Lx}^{Lx} - X_{s-Lx}^{Lx} \right\| < e \right)$$

$$h_{C_3} \left(y_{t-Ly}^{m+Ly}, e \right) \equiv Pr \left(\left\| y_{t-Ly}^{m+Ly} - Y_{s-Ly}^{m+Ly} \right\| < e \right)$$

$$h_{C_4} \left(y_{t-Ly}^{Ly}, e \right) \equiv Pr \left(\left\| y_{t-Ly}^{Ly} - Y_{s-Ly}^{Ly} \right\| < e \right)$$

Ces probabilités jointes sont liées à la probabilité que les triplets arbitrairement sélectionnés $\left(X_{s-Lx}^{Lx}, Y_s^m, Y_{s-Ly}^{Ly} \right)$ définis soient « proches » des triplets réalisés $\left(x_{t-Lx}^{Lx}, y_t^m, y_{t-Ly}^{Ly} \right)$. En utilisant l'équation (7) et la méthode *delta* (SERFLING [1980]), une expression de la variance du test de BAEK et BROCK est donnée par :

$$(A2) \quad \sigma^2(m, Lx, Ly, e) = \mathbf{d} \Sigma \mathbf{d}'$$

où

$$\mathbf{d} = [d_i], \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$(A3) \quad = [1/C_2(Lx, Ly, e), -C_1(Lx, m + Ly, e) / C_2^2(Lx, Ly, e), \\ -1/C_4(Ly, e), C_3(m + Ly, e) / C_4^2(Ly, e)]$$

$$\Sigma = [\Sigma_{i,j}], \quad i, j = 1, \dots, 4$$

$$(A4) \quad = \left[4 \cdot \sum_{k \geq 1} \omega_k E(A_{i,t} \cdot A_{j,t+k-1}) \right], \quad \omega_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 1 \\ 2, & \text{sinon} \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned}
 (A5) \quad A_{1,t} &= h_{C_1} \left(x_{t-Lx}^{Lx}, y_{t-Ly}^{m+Ly}, e \right) - C_1 (Lx, m + Ly, e) \\
 A_{2,t} &= h_{C_2} \left(x_{t-Lx}^{Lx}, y_{t-Ly}^{Ly}, e \right) - C_2 (Lx, Ly, e) \\
 A_{3,t} &= h_{C_3} \left(y_{t-Ly}^{m+Ly}, e \right) - C_3 (m + Ly, e) \\
 A_{4,t} &= h_{C_4} \left(y_{t-Ly}^{Ly}, e \right) - C_4 (Ly, e)
 \end{aligned}$$

où E est l'opérateur espérance et les termes $C_i (\cdot)$ sont définis dans l'équation (6).

Un estimateur des $\Sigma_{i,j}$ éléments de l'équation (A2) est donné par⁴⁷ :

$$\begin{aligned}
 (A6) \quad \widehat{\Sigma}_{i,j} (n) &= 4 \cdot \sum_{k=1}^{K(n)} \omega_k (n) \left[\frac{1}{2(n-k+1)} \sum_t \left(\hat{A}_{i,t} (n) \cdot \hat{A}_{j,t-k+1} (n) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \hat{A}_{i,t-k+1} (n) \cdot \hat{A}_{j,t} (n) \right) \right]
 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 t &= \max(Lx, Ly) + k, \dots, T - m + 1 \\
 n &= T + 1 - m - \max(Lx, Ly) \\
 K(n) &= \text{ent} \left(n^{1/4} \right) \\
 \omega_k (n) &= \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 2(1 - [(k-1)/K(n)]) & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_{1,t} (n) &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{s \neq t} I \left(x_{t-Lx}^{Lx}, x_{s-Lx}^{Lx}, e \right) \cdot I \left(y_{t-Ly}^{m+Ly}, y_{s-Ly}^{m+Ly}, e \right) \right) \\
 &\quad - C_1 (Lx, m + Ly, e, n) \\
 \hat{A}_{2,t} (n) &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{s \neq t} I \left(x_{t-Lx}^{Lx}, x_{s-Lx}^{Lx}, e \right) \cdot I \left(y_{t-Ly}^{Ly}, y_{s-Ly}^{Ly}, e \right) \right) \\
 &\quad - C_2 (Lx, Ly, e, n) \\
 \hat{A}_{3,t} (n) &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{s \neq t} I \left(y_{t-Ly}^{m+Ly}, y_{s-Ly}^{m+Ly}, e \right) \right) - C_3 (m + Ly, e, n) \\
 \hat{A}_{4,t} (n) &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{s \neq t} I \left(y_{t-Ly}^{Ly}, y_{s-Ly}^{Ly}, e \right) \right) - C_4 (Ly, e, n)
 \end{aligned}$$

47. Cf. DENKER et KELLER [1983] et NEWBY et WEST [1987].

où $t, s = \max(Lx, Ly) + 1, \dots, T - m + 1$ et où les intégrales de corrélation $C_i(., n)$ sont définies dans l'équation (6) et les indicateurs $I(.)$ sont des indicatrices. Les $C_i(., n)$ procurent un estimateur de \mathbf{d} dans l'équation (A2) :

$$(A8) \quad \hat{\mathbf{d}}(n) = [1/C_2(Lx, Ly, e, n), -C_1(Lx, m + Ly, e, n) / C_2^2(Lx, Ly, e, n), \\ -1/C_4(Ly, e, n), C_3(m + Ly, e, n) / C_4^2(Ly, e, n)]$$

Un estimateur de $\sigma^2(m, Lx, Ly, e)$ est donné par :

$$(A9) \quad \hat{\sigma}^2(m, Lx, Ly, e, n) = \hat{\mathbf{d}}(n) \widehat{\Sigma}(n) \hat{\mathbf{d}}(n)'$$