ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 66 – 2002

Sur l'agrégation des demandes de travail non-qualifié

Edmond MALINVAUD *

RÉSUMÉ. – On dit souvent que les pratiques d'évaluation des effets-emploi des baisses du coût du travail non-qualifié conduisent à des sous-évaluations, car un biais d'agrégation est ignoré quand sont transposées certaines estimations micro-économétriques. Un modèle où figurent deux élasticités de substitution, l'une dans la production, l'autre dans la consommation, clarifie la question. Quand la première élasticité est la plus faible, la conjecture est habituellement validée. Mais le cas inverse existe aussi.

On aggregation of demands for unskilled labor

ABSTRACT. – It is often argued that present practices in evaluating employment effects of decreases in the cost of unskilled labor lead to under-estimations : an aggregation bias is ignored when microeconometric estimations are transposed. A model in which appear two elasticities of substitution, one in production, the other in consumption, clarifies the issue. When the first elasticity is smaller, the conjecture is usually validated. But the opposite case also exists.

* Affiliation : CREST. Adresse : CREST.
Cette version a profité des conseils que j'ai reçus d'Alain BERNARD et de mes collègues du CREST, particulièrement de G. LAROQUE, après rédaction d'une première version. Deux lecteurs des *Annales* ont également fait d'utiles suggestions.

1 Introduction

Le sujet

La politique sociale s'est préoccupée dans la dernière décennie, au moins en Europe, de stimuler la demande de travail non-qualifié grâce à une baisse du coût de ce travail pour les employeurs. On s'est alors immédiatement tourné vers les économètres pour leur demander d'évaluer l'effet à attendre d'une telle mesure : de combien la demande de travail non-qualifié augmentera-t-elle si, par exemple, on réalise une baisse immédiate et permanente de 10 pour cent du coût concerné ?

Une telle question constitue un défi adressé aux économètres. Ils disposent certes de séries temporelles portant directement sur la plupart des grandeurs agrégées qui importent. De fait, ils ont dû établir de nouvelles séries concernant une définition pertinente du travail dit non-qualifié : en France, par exemple, celui que fourniraient les quelques 20 pour cent de personnes les moins qualifiées de la population active. Mais la difficulté essentielle vient de ce que le phénomène à caractériser est effectivement assez complexe. L'effet à estimer s'échelonnera sur une longue période après la baisse de coût envisagée. Car il s'agit par cette baisse d'intéresser assez les entreprises pour qu'elles reconsidèrent leurs procédés de production et de vente, de même que l'organisation de leurs services, afin de tirer au mieux parti de l'existence d'une offre de travail non-qualifiée, disponible et rendue moins coûteuse. Il s'agit aussi de motiver les acheteurs qui, constatant la baisse des prix de ceux des biens et services dont la production exige le plus de travail non-qualifié, modifieront en conséquence la structure de leurs achats. Tout cela exigera du temps.

Pour estimer, grâce aux informations données par les séries agrégées du passé, l'ampleur du résultat à attendre à long terme, il faut bien modéliser simultanément les effets des autres sources de variation concomitante des demandes de travail, ainsi que l'échelonnement de leurs effets respectifs. L'expérience de ceux qui ont travaillé depuis trente ans sur ce type de problème montre bien la difficulté de la tâche, notamment pour dégager ce qui revient aux variations des coûts : des spécifications différentes mais également raisonnables conduisent à des résultats différents ; les uns et les autres sont affectés par de larges plages d'incertitude (leurs « intervalles de confiance »)[1].

Cette difficulté est en partie compensée par le fait que les économètres ont pris depuis vingt ans l'habitude de traiter aussi d'autres bases de données, surtout des données microéconomiques concernant de nombreuses entreprises, employant en proportions variables des personnes plus ou moins qualifiées.

1. Le, par ailleurs remarquable, article de P. Krusell, L. Ohanian, J.-V. Rios-Rull and G. Violante [2000] illustre bien ces difficultés de l'approche consistant à s'en tenir uniquement aux informations données par les séries temporelles macroéconomiques, en l'occurrence les séries annuelles 1963-1992 soigneusement élaborées par les auteurs pour les États-Unis. La spécification du modèle non-linéaire ignore les délais d'ajustement dans l'emploi des facteurs de production (travail qualifié, travail non-qualifié et capital). S'agissant de l'élasticité de substitution entre travail non-qualifié et un agrégat estimé du travail qualifié et du capital, les résultats aboutissent à l'intervalle de confiance suivant, estimé au seuil de 5 pour cent : (0,9   7,6).

Cette source, qui fournit des nombres beaucoup plus élevés d'observations, soulève aussi des problèmes pour les économètres qui cherchent à en tirer parti[2]. Néanmoins, la préférence prévaut de plus en plus chez les spécialistes en faveur de l'utilisation d'estimations venant de cette seconde source[3].

Les estimations sont alors plus pures, en ce sens que leurs résultats concernent plus directement les unités de production, entreprises ou établissements, chacune caractérisée par sa spécificité. En revanche, elles sont peu ou pas sensibles au fait que, au niveau de l'ensemble de l'économie, certaines substitutions entre facteurs sont induites indirectement, à travers les modifications des prix relatifs des biens et services, d'où des changements dans la structure des achats. Dans quelle mesure ce fait affecte-t-il les utilisations de ces estimations à base de données microéconomiques quand elles sont appliquées à une question aussi clairement macroéconomique que celle posée au début de cette introduction ? Telle est l'interrogation qui motive cet article.

Plus précisément, l'investigation dont il est ici rendu compte répond à un objectif précis : étudier de près une conjecture relative à l'effet des variations du coût du travail non-qualifié sur la demande à long terme de ce travail. Alors que cet effet est souvent considéré comme dû uniquement à la substitution entre facteurs dans les unités de production, il doit traduire non seulement cette réaction directe mais aussi indirectement ce qui vient des substitutions entre consommations, elles-mêmes induites par les modifications dans les prix relatifs des divers biens et services. Les raisonnements sur des modèles purement macroéconomiques, calibrés à l'aide d'estimations microéconométriques des élasticités de substitution dans la production, devraient conduire, semble-t-il, à des sous-estimations systématiques de l'effet en cause.

Le biais de sous-estimation proviendrait de l'hétérogénéité des contraintes techniques s'appliquant aux diverses entreprises. Si les mêmes structures de coût et les mêmes valeurs des élasticités s'appliquaient uniformément à toutes les entreprises (élasticités de la production par rapport aux divers facteurs, comme élasticités de substitution entre facteurs), et si les mêmes conditions de concurrence s'appliquaient partout, alors une baisse uniforme du coût réel du travail non-qualifié devrait se traduire par la même baisse relative des prix de production pour tous les biens et par la même importance partout de la croissance de la demande de travail non-qualifié. Traiter directement de celle-ci au niveau agrégé ne devrait entrainer aucune sous-estimation. À l'inverse, en cas d'hétérogénéité, les prix des biens dont la production est la plus consommatrice de travail non-qualifié devraient baisser relativement à ceux des biens les moins utilisateurs de ce travail. La substitution par l'intermédiaire de modifications

2. Pour ne prendre qu'un exemple sur le sujet qui nous importe ici, P. Biscourp et C. Gianella [2001] conviennent dans leur conclusion de ce que le modèle conduisant à leurs estimations, par ailleurs très intéressantes pour notre propos, apparaît contestable : ce modèle suppose que les ajustements de la combinaison des facteurs aux variations de coût s'effectuent en totalité dans l'année ; retenir un ajustement partiel serait plus conforme à la persistance élevée qui apparaît dans leurs estimations des lois de demande de travail.

3. Dans son livre très exhaustif qui ne semble avoir encore donné lieu à aucune révision ni été complété par d'autres, D. Hamermesh [1993] cite, pages 114 à 116, dix-sept études économétriques des élasticités de substitution par niveaux d'éducation ou qualification des emplois. Parmi les huit publiées entre 1985 et 1993, six présentent des résultats provenant de l'analyse de données collectées auprès d'unités microéconomiques, deux de données concernant des branches productives définies dans une classification fine. Aucune ne provient de données agrégées au niveau du pays ou de grandes branches.

des prix relatifs pourrait alors être importante. De fait, comme nous le constaterons, le biais induit par un raisonnement intégralement agrégé sera proportionnel à un indicateur d'hétérogénéité.

On sera alors naturellement porté à parler de « biais d'agrégation » puisque celui-ci résulte de la substitution d'une demande agrégée de travail non-qualifié aux demandes correspondantes exprimées par les diverses entreprises. Mais il ne faudrait pas tomber dans l'erreur consistant à dire que l'agrégation, en tant que caractéristique du traitement analytique, est responsable du biais. L'agrégation dont il s'agit est réalisée par le système économique lui même, dès lors que le marché du travail n'est pas segmenté entre les secteurs de production. Il ne faudrait pas non plus attribuer à l'étude de cette agrégation une portée universelle. Une étude de l'agrégation à portée universelle, même pour la seule sphère de l'économie productrice, serait une véritable gageure : elle devrait faire intervenir tant de caractéristiques de la réalité ! Elle devrait porter son attention sur tant d'effets[4] !

Même étroitement circonscrite l'étude du biais supposé d'agrégation considéré ici se révèle assez complexe. Elle oblige à expliciter la détermination des prix relatifs simultanément à celle des quantités produites et des volumes des facteurs employés. Elle conduit même à trouver des cas dans lesquels le biais tel qu'il sera précisément défini est nul, voire négatif, malgré la présence d'une substantielle hétérogénéité microéconomique. Cependant, l'approche purement macroéconomique risque bien de sous-estimer souvent la valeur absolue de l'élasticité à long terme de la demande de travail non-qualifié par rapport à son coût.

La modélisation

Ce qui va être présenté n'épuise évidemment pas le sujet. L'argumentaire va se situer à l'intérieur d'un même modèle qui a paru adéquat à l'auteur pour une première investigation mais qui simplifie beaucoup le phénomène étudié. Voici la liste des hypothèses ou conventions retenues.

(i) Il n'existe que deux facteurs de production, appelés respectivement travail qualifié et travail non-qualifié[5]. Le travail qualifié est échangé sur un marché concurrentiel à un taux de salaire réel w, égal au coût unitaire réel. L'offre exogène $\overline{L}$ de travail qualifié est totalement employée. Le

4. Certains lecteurs de cet article peuvent avoir connaissance de l'intéressante étude de B. Dormont [1996] qui, estimant une fonction de demande de travail à l'aide des données fournies par un panel d'entreprises manufacturières françaises, a notamment cherché à caractériser l'hétérogénéité des entreprises. Un de ses objectifs a consisté à évaluer les biais d'agrégation qui pourraient affecter l'estimation de la loi de demande si l'hétérogénéité n'était pas prise en compte dans le traitement économétrique. Malgré une certaine parenté de préoccupation entre son étude et celle qui va être présentée ici, les objectifs sont bien différents. Chez B. Dormont une estimation économétrique ; ici la recherche de propriétés résultant d'un modèle formalisé avec rationnement d'une partie de l'offre de travail. Chez B. Dormont la dynamique à court terme de la demande de travail globale en fonction notamment de l'évolution du salaire réel moyen ; ici la demande à long terme de travail non-qualifié en fonction des salaires relatifs. Chez B. Dormont les biais d'estimation qui pourraient résulter de l'hétérogénéité si elle était négligée ; ici le biais affectant le résultat d'une analyse déductive qui négligerait les rétroactions avec la formation des prix des biens.

5. En fait, dans les applications, le terme de « travail qualifié » doit être interprété comme pouvant recouvrir d'autres *inputs* que du travail. B. Salanié [2000] y associe tout le capital en retenant l'hypothèse de stricte complémentarité entre capital et travail qualifié.

coût réel unitaire ν du travail non-qualifié est exogène. À ce coût la demande de travail M est inférieure à l'offre.

(ii) Les entreprises du secteur i produisent le bien $i (i = 1,2 \ldots n)$ directement à partir seulement des deux facteurs, travail qualifié et non-qualifié. Elles sont toutes semblables à l'intérieur de leur secteur, opérant sur des marchés concurrentiels sans autre contrainte que leur fonction de production qui se caractérise par des rendements d'échelle non-croissants[6]. Dans l'analyse chaque secteur i sera traité en bloc, produisant y_i vendu au prix p_i, à partir des *inputs* L_i et M_i conformément à sa fonction de production.

(iii) Le secteur de la consommation est traité en bloc, consommant les quantités x_i qui maximisent $U(x_1,\ldots,x_n)$ sous une contrainte de budget où les prix p_i sont donnés[7]. L'équilibre des marchés des biens et services impose évidemment $x_i = y_i$.

(iv) Les fonctions de production sont toutes homogènes au même degré et ont toutes la même élasticité de substitution σ_P qui s'applique à toutes les combinaisons d'*inputs* ; ce sont donc des fonctions CES. La fonction d'utilité U est homogène, elle aussi CES avec l'élasticité de substitution σ.

La liste de ces hypothèses est motivée certes par le souci de simplifier, tout en permettant une détermination endogène, pas trop irréaliste, des prix relatifs et de la structure des consommations[8] ; seul le marché du travail non-qualifié connaît un déséquilibre et c'est un déficit de demande. Mais ce degré de désagrégation et cette configuration des équilibres de marché doivent être pertinents pour l'étude, qui d'une part accepte le diagnostic à long terme de bas salaires maintenus délibérément, dans les pays de la zone Euro par exemple, au-dessus des niveaux assurant le plein emploi des non-qualifiés, qui d'autre part concerne la demande de travail à long terme pour un avenir où le maintien indéfini du chômage keynésien est exclu. Autrement dit, l'auteur accepte de considérer son étude comme orthogonale par rapport à celle du chômage keynésien.

Afin d'avoir une référence utile, pour parler notamment de biais d'agrégation, nous allons d'abord déterminer l'équilibre d'un modèle totalement agrégé $(n = 1)$. Cela aura l'avantage annexe de montrer que l'élasticité de la demande agrégée M de travail non-qualifié par rapport à son coût ν ne traduit pas seulement la substitution entre les deux types de travail dans les unités de production, mais aussi l'effet indirect passant par le volume de la production globale et le coût réel du travail qualifié.

Puis nous traiterons du modèle log-linéaire dans lequel les élasticités de substitution sont égales à 1, autant dans les secteurs de production que dans le secteur de la consommation. Nous verrons en quel sens on peut alors dire qu'il n'y a pas de biais d'agrégation. Au contraire un tel biais apparaîtra dans

---

6. La décroissance des rendements d'échelle peut évidemment s'interpréter comme signifiant que les *inputs* de certains autres facteurs sont maintenus fixes dans l'analyse.

7. Pour la commodité du langage, on parlera d'un « consommateur représentatif ». Mais l'analyse ne visera pas à une représentation fidèle du secteur de la consommation. L'objectif consiste uniquement à avoir un système bien spécifié de lois de demande pour les biens.

8. L'hypothèse la plus limitative tient à l'homogénéité de U, impliquant que les courbes d'*Engel* des demandes de biens sont toutes des droites passant par l'origine. Cette hypothèse est relachée dans E. MALINVAUD [2001].

l'une et l'autre de deux déviations simples par rapport à ce modèle. L'annexe 1 considérera le cas où l'utilité de la consommation est log-linéaire tandis que les technologies de la production ne permettent aucune substitution entre facteurs, les coefficients techniques étant fixes. L'annexe 2 traitera du cas où les fonctions de production sont log-linéaires (*Cobb-Douglas*) tandis que la substituabilité dans la consommation sera extrême, tous les biens y rendant des services équivalents[9]. Nous verrons alors pourquoi on peut dire que, dans les deux cas, l'analyse agrégée tend à sous-estimer l'élasticité de la demande de travail non-qualifié.

L'étude de ces deux spécifications particulières porte sur des cas extrêmes de la spécification plus générale qui dans la section 4 fera l'objet de l'analyse la plus complexe. Le résultat en sera d'une part la caractérisation de l'équilibre dans ces deux aspects microéconomique et macroéconomique, d'autre part une formule donnant la valeur du biais d'agrégation. On verra alors que le biais est nul pour d'autres que l'économie log-linéaire, qu'il est même négatif pour certaines combinaisons de valeurs des paramètres.

La section 5 discutera plus précisément les résultats de la section 4. D'une part, nous examinerons comment le biais d'agrégation varie en fonction de σ_P, de σ et de l'hétérogénéité entre les fonctions de production des divers secteurs i. D'autre part, nous verrons en quoi le cas d'un biais d'agrégation négatif a une allure paradoxale et nous rechercherons l'explication du paradoxe.

La dernière section 6 prendra du recul par rapport à l'investigation théorique en s'interrogeant sur les problèmes affectant la transposition des résultats à des contextes d'économie appliquée. L'assistance des économètres sera naturellement sollicitée dans de tels contextes. Ces derniers auront alors une tâche très difficile à accomplir, non seulement à cause de la pauvreté des données, mais aussi parce qu'ils devront tenir compte de caractéristiques réelles complexes ignorées dans la modélisation retenue pour cette étude dont les limites seront ainsi manifestes.

2 Le modèle agrégé. Il y a plus que la substitution entre facteurs

S'il n'y a qu'un seul secteur ($n = 1$), la règle de normalisation sur les prix s'impose, à savoir que le prix du bien de consommation unique soit égal à 1. Si la fonction de production est $f(L,M)$, les quatre variables endogènes de l'équilibre y, L, M, w sont déterminées en fonction des deux variables exogènes ν et $\overline{L}$ par résolution du système :

(1) $$y = f(L,M) \qquad\qquad L = \overline{L}$$

(2) $$w = f'_L(L,M) \qquad\qquad \nu = f'_M(L,M)$$

9. Ce cas suggérera que les biais d'agrégation obtenus dans les autres cas devraient être augmentés si, contrairement à ce qui a été écrit en *(ii)*, nous admettions l'hétérogénéité des producteurs à l'intérieur de chaque secteur.

Pour déterminer l'élasticité de M par rapport à ν il suffit de différencier ce système en maintenant $\overline{L}$ constant ($dL = 0$), donc :

$$dy = f'_M(\overline{L}, M)dM = \nu dM \tag{3}$$

$$dw = f''_{LM}(\overline{L}, M)dM \tag{4}$$

$$d\nu = f''_{M^2}(\overline{L}, M)dM \tag{5}$$

L'équation (5) donne directement ce que nous cherchons :

$$\frac{dM}{M} = \frac{f'_M(\overline{L}, M)}{Mf''_{M^2}(\overline{L}, M)} \cdot \frac{d\nu}{\nu} \tag{6}$$

Cette équation prend une forme suggestive quand la fonction f est homogène de degré 1, c'est-à-dire quand les rendements d'échelle sont constants. Elle s'écrit alors :

$$\frac{dM}{M} = -\sigma_a \left[1 - \frac{Mf'_M}{f}\right]^{-1} \frac{d\nu}{\nu} \tag{7}$$

où σ_a est l'élasticité de substitution (agrégée) entre travail qualifié et travail non-qualifié selon la fonction f. L'équation (7) fait apparaître une propriété significative des variations de l'équilibre considéré dans cet article. L'élasticité de la demande de travail non-qualifié en fonction de son coût fait intervenir d'abord un *effet de substitution* du travail non-qualifié au travail qualifié (en cas de baisse de ν). Ce premier effet est bien mesuré par $-\sigma_a d\nu/\nu$. Mais il est multiplié par un facteur supérieur à 1 traduisant le fait que l'*input* de travail non-qualifié augmente et qu'ainsi au total les ressources disponibles sont plus complètement utilisées. On peut parler d'effet du niveau d'emploi des ressources, ou plus simplement d'*effet de revenu*.

L'équation (7) montre que le facteur multiplicateur dû à ce second effet doit être peu supérieur à 1 en pratique. Il se calcule directement à partir de Mf'_M/f c'est-à-dire du rapport entre le coût global du travail non-qualifié employé et la valeur de la production. Pour les situations que nous avons en vue, ce rapport peut être calibré comme étant de l'ordre de 10 pour cent. Le facteur multipliant σ_a serait de l'ordre de 1,1 alors que l'imprécision résultant des mesures économétriques de σ_a semble être nettement supérieure à 10 pour cent.

Le facteur multiplicateur serait encore plus faible en cas de rendements d'échelle décroissants (la croissance des rendements d'échelle serait incompatible avec notre hypothèse de concurrence parfaite sur le marché des biens). La formule reste simple si la fonction f est homogène de degré $1 - \chi$ (dans leur quasi-totalité les spécifications retenues dans cet article assureront un degré fixe de décroissance des rendements d'échelle, correspondant à une valeur positive ou nulle de χ). Sous cette hypothèse un facteur multiplicateur supplémentaire intervient dans (7), soit :

$$1 + \frac{\chi(f'_M)^2}{(1-\chi) f \; f''_{M^2}} \tag{8}$$

Il décroît avec χ puisque f''_{M^2} est négatif.

Notons encore que, en cas de rendements d'échelle constants, (3) et (4)-(5) impliquent respectivement :

$$\frac{dy}{y} = \frac{Mf'_M}{f} \cdot \frac{dM}{M} \tag{9}$$

$$\frac{dw}{w} = \frac{-M}{wL} f''_{M^2} \, dM = \frac{-\nu M}{wL} \cdot \frac{d\nu}{\nu} \tag{10}$$

Une baisse de 10 pour cent de ν induit une hausse moindre de w (de 1,1 pour cent selon la calibration proposée) et une hausse de la production d'autant plus importante que l'élasticité de substitution σ_a est plus élevée.

Notons pour la suite que si f est une fonction de *Cobb-Douglas* :

$$f(L,M) = AL^{\alpha} M^{\beta} \tag{11}$$

alors $\sigma_a = 1$ et,

$$\frac{dM}{M} = \frac{-1}{1-\beta} \cdot \frac{d\nu}{\nu} \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dw}{w} = \frac{-\beta}{1-\beta} \cdot \frac{d\nu}{\nu} \tag{12}$$

L'arrière-plan est ainsi dressé pour notre investigation grâce à ces quelques indications sur les propriétés d'un modèle totalement agrégé qui néglige l'hétérogénéité des biens produits et des techniques employées dans les divers secteurs de production.

3 L'économie log-linéaire. Le biais d'agrégation y est nul

Abordant maintenant le cas de n biens de consommation et autant de secteurs de production, nous posons d'abord la fonction d'utilité suivante :

$$U = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \log x_i \qquad \gamma_i > 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 1 \tag{13}$$

Pour des p_i donnés et un revenu global R donné, les demandes x_i maximisent U sous la contrainte :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = R \tag{14}$$

Une fois qu'on y remplace les x_i par les y_i qui leur sont égaux à l'équilibre, les lois de demande des consommations impliquent :

$$p_i y_i = \gamma_i R \qquad i = 1,2 \ldots n \tag{15}$$

Tel est le système des lois de demande des biens qui est impliquée par l'économie log-linéaire. Ainsi qu'il a été dit dans l'introduction, c'est ce système qui nous importe ici beaucoup plus que la forme (13) de la fonction d'utilité. Que ce système soit particulier est évident.

Pour caractériser les valeurs réelles dans une économie ayant de telles lois de demande, il est commode et pertinent de définir le niveau général des prix P comme moyenne géométrique pondérée des p_i selon :

$$\log P = \sum_i \gamma_i \log p_i \tag{16}$$

Les valeurs nominales n'étant définies qu'à une constante multiplicative commune près, il est commode de retenir la normalisation $P = 1$. Donc :

$$\sum_i \gamma_i \log p_i = 0 \tag{17}$$

Dans l'économie log-linéaire la fonction de production du secteur i appartient à la famille *Cobb-Douglas* et s'écrit :

$$\log y_i = \alpha_i \log L_i + \beta_i \log M_i + \log A_i \tag{18}$$

où $\alpha_i > 0,\ \beta_i > 0,\ \alpha_i + \beta_i \leqslant 1,\ A_i > 0.$

Dans le contexte concurrentiel où le secteur i est placé par hypothèse, les deux productivités marginales par rapport à L_i et M_i sont égales respectivement aux coûts unitaires réels ν et w.

Il en résulte :

$$wL_i = \alpha_i p_i y_i \tag{19}$$

$$\nu M_i = \beta_i p_i y_i \tag{20}$$

L'équilibre des marchés implique de plus :

$$\overline{L} = \sum_i L_i \qquad M = \sum_i M_i \tag{21}$$

Le système ainsi défini contient $4n + 3$ variables endogènes : les p_i, y_i, L_i, M_i, *plus* R, w et M. Il contient une variable exogène ν dont il faut étudier l'influence. Il contient enfin les paramètres γ_i, α_i, β_i, A_i et $\overline{L}$. Un système de $4n + 3$ équations indépendantes permet la détermination de l'équilibre. Il s'agit précisément des équations (15) et (17) à (21).

Considérons tout d'abord le sous-système constitué des $3n$ équations (15), (19) et (20). Il implique les $2n$ équations suivantes desquelles les p_i et y_i ont disparu :

$$wL_i = \alpha_i \gamma_i R \qquad \nu M_i = \beta_i \gamma_i R \tag{22}$$

En sommant par rapport à i et tenant compte de (21) nous en déduisons :

$$w\overline{L} = \overline{\alpha} R \qquad \nu M = \overline{\beta} R \tag{23}$$

où apparaissent les moyennes pondérées :

$$\overline{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i \qquad \overline{\beta} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_i \tag{24}$$

Ces moyennes doivent convenir pour figurer dans une version macroéconomique du modèle, puisque selon (23) elles correspondent aux parts des coûts des facteurs dans la valeur du revenu.

Des deux équations (23) nous déduisons l'équation simple suivante entre grandeurs agrégées :

$$\overline{\beta} w \overline{L} = \overline{\alpha} \nu M \tag{25}$$

Malheureusement ce n'est pas encore l'équation que nous recherchons puisqu'elle implique les deux variables endogènes w et M simultanément, alors que nous voulons connaître la détermination de chacune d'entre elles en fonction de ν. Nous devons donc reprendre l'ensemble du système, notamment l'équation (17) dont nous n'avons pas tiré parti. Pour ce faire tenons d'abord compte de la première équation (23) pour remplacer R par $w\overline{L}/\overline{\alpha}$ dans les équations (15) et (22), soit :

$$\overline{\alpha} p_i y_i = w \gamma_i \overline{L} \tag{26}$$

$$\overline{\alpha} L_i = \alpha_i \gamma_i \overline{L} \tag{27}$$

$$\nu \overline{\alpha} M_i = w \beta_i \gamma_i \overline{L} \tag{28}$$

Des quatre dernières équations et de la fonction de production (18) il est aisé d'éliminer L_i, M_i et y_i pour aboutir à :

$$\log p_i = (1 - \beta_i) \log w + \beta_i \log \nu - \log C_i \tag{29}$$

où,

$$\log C_i = \log A_i + \alpha_i \log \alpha_i + \beta_i \log \beta_i - (1 - \alpha_i - \beta_i) \log [\gamma_i \overline{L}/\overline{\alpha}] \tag{30}$$

L'équation (17) implique alors :

$$0 = (1 - \overline{\beta}) \log w + \overline{\beta} \log \nu - \log \overline{C} \tag{31}$$

où,

$$\log \overline{C} = \sum_i \gamma_i \log C_i \tag{32}$$

Éliminant w de (25) et (31) nous sommes conduit à :

$$\log M = -[1/(1 - \overline{\beta})] \log \nu + \log [\overline{\beta L}/\overline{\alpha}] + \log \overline{C}/(1 - \overline{\beta}) \tag{33}$$

Cette solution du modèle de l'économie log-linéaire donne la loi de variation de M. Elle fait apparaître directement l'élasticité par rapport à ν. C'est une constante. Elle a précisément la même valeur que celle que nous aurions obtenue si nous avions directement transposé le modèle agrégé avec fonction de production de *Cobb-Douglas*. Pour le voir il suffit de remplacer dans la première des équations (12) le paramètre β par la moyenne $\overline{\beta}$. En ce sens il n'y a pas de biais d'agrégation, puisque le modèle agrégé aurait naturellement posé une fonction de *Cobb-Douglas* et retenu pour β la moyenne pondérée naturelle des β_i. Le résultat est d'ailleurs indépendant du degré d'hétérogénéité que peuvent présenter les technologies employées dans les divers secteurs, en particulier par leur recours plus ou moins intense à la main d'œuvre non-qualifiée.

Comme nous allons le voir, ce résultat, qui invalide la conjecture annoncée dans l'introduction, est spécial. Mais il va falloir travailler sur un modèle moins simple et utiliser des approximations locales pour obtenir la forme explicite de l'élasticité qui nous intéresse (c'est effectivement une caractéristique locale).

4 Élasticités de substitution constantes. Comment la substituabilité dans la consommation combine ses effets avec la substituabilité dans la production

4.1 Le système à traiter

Dans le « système CES » que nous allons maintenant étudier, les fonctions de production ont la forme :

$$y_i = [a_i L_i^{-\omega} + b_i M_i^{-\omega}]^{-\mu/\omega} \tag{34}$$

les a_i et b_i étant des paramètres positifs, tandis que $\omega > -1$ et $\mu > 0$. Si les *inputs* L_i et M_i sont l'un et l'autre multipliés par un facteur d'échelle λ, la production y_i est multipliée par λ^{μ}. L'hypothèse de rendements d'échelle non-croissants implique $\mu \leqslant 1$. L'élasticité de substitution dans la production est :

$$\sigma_P = \frac{1}{1+\omega} \tag{35}$$

Elle a, par hypothèse ici, la même valeur dans tous les secteurs, de même que le degré de décroissance des rendements $1-\mu$. La formule (34) ne s'applique évidemment pas quand $\omega = 0$. Mais depuis que les fonctions CES existent, on sait par un passage à la limite où ω tend vers zéro et μ garde une valeur fixe, que $\omega = 0$ correspond à une fonction de *Cobb-Douglas* (voir par exemple le renvoi de la page 135 de E. MALINVAUD [1981]). Les formules qui suivent se trouvent ainsi valables aussi pour $\omega = 0$.

Puisque les entreprises prennent les prix p_i, w et v comme donnés et n'ont pas d'autre contrainte que leur fonction de production, la maximisation du profit se traduit par les deux équations :

$$\frac{w}{p_i} = a_i \mu y_i^{1+\frac{\omega}{\mu}} L_i^{-(1+\omega)} \tag{36}$$

$$\frac{v}{p_i} = b_i \mu y_i^{1+\frac{\omega}{\mu}} M_i^{-(1+\omega)} \tag{37}$$

Dans le système CES la fonction d'utilité U, dont le seul rôle consiste à déterminer les fonctions de demande des biens, a elle-même une élasticité de substitution positive σ. La fonction U est définie par :

$$U^{(\sigma-1)/\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{1/\sigma} y_i^{(\sigma-1)/\sigma} \qquad \text{si } \sigma \neq 1 \tag{38}$$

$$\log U = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \log y_i \qquad \text{si } \sigma = 1 \tag{38bis}$$

où les paramètres positifs γ_i satisfont :

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = 1 \tag{39}$$

Soumis à la contrainte de budget :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i = R \tag{40}$$

prenant les prix p_i et R pour donnés et maximisant U le consommateur représentatif détermine ses demandes y_i des divers biens. Le calcul le conduit à :

$$y_i = \gamma_i \left[\frac{p_i}{P}\right]^{-\sigma} \frac{R}{P} \tag{41}$$

où la variable intermédiaire P apparaît comme un indice du niveau général des prix puisqu'elle est définie par :

$$P^{1-\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i p_i^{1-\sigma} \qquad \text{si } \sigma \neq 1 \tag{42}$$

$$\log P = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \log p_i \qquad \text{si } \sigma = 1 \tag{42bis}$$

Nous notons que les équations (41) et (42) impliquent (40), qui apparaît ainsi redondante (dans le cas $\sigma = 1$, (40) résulte de (39) et (41)).

Les $4n + 1$ équations (34), (36), (37), (41) et (42) peuvent être considérées comme déterminant les valeurs d'équilibre des $4n + 1$ variables endogènes y_i, L_i, M_i, p_i et R en fonction des trois variables w, ν et P. Multiplier w, ν et P par la même constante positive λ conduit à multiplier toutes les valeurs d'équilibre des p_i et de R par λ sans affecter les valeurs d'équilibre des y_i, L_i et M_i. Pour la simplicité nous prenons la règle de normalisation :

$$P = 1 \tag{43}$$

Afin d'aboutir au résultat qui nous intéresse nous allons d'abord travailler longuement sur le présystème constitué par les $4n + 2$ équations (34), (36), (37), (41), (42) et (43). Une fois ce présystème résolu, il nous restera à tenir compte des deux équations (21), relatives aux marchés du travail qualifié et du travail non-qualifié, pour aboutir à la détermination de w et de M, l'offre globale $\overline{L}$ de travail qualifié jouant le rôle d'un paramètre.

Notre objectif n'est pas de trouver des expressions explicites des valeurs d'équilibre des variables endogènes. Pour déterminer finalement l'élasticité de M par rapport à ν il nous suffit de déterminer les expressions des variations différentielles des variables endogènes. Néanmoins nous aurons besoin pour cela de tenir compte de *certaines égalités significatives qui s'appliquent à tout équilibre du système* et qui résultent directement des équations que nous venons de poser. Dégageons donc dès maintenant ces égalités.

Introduisons pour ce faire des variables auxiliaires, d'abord les k_i dont la somme apparaît dans (42), puis les α_i et β_i grâce auxquelles nous pourrons donner des expressions simples aux productivités marginales apparaissant dans les membres de droite de (36) et (37). Soit donc :

$$(44) \qquad k_j = \gamma_j p_j^{1-\sigma} \qquad \sum_{j=1}^{n} k_j = 1$$

la seconde égalité résultant de (42) et (43). Soit aussi :

$$(45) \qquad \alpha_i = a_i \mu\, y^{\omega/\mu} L_i^{-\omega} \qquad \beta_i = b_i \mu\, y_i^{\omega/\mu} M_i^{-\omega}$$

qui impliquent :

$$(46) \qquad \alpha_i + \beta_i = \mu$$

Posons encore les expressions suivantes pour les moyennes pondérées des α_i et β_i :

$$(47) \qquad \overline{\alpha} = \sum_i k_i \alpha_i \qquad \overline{\beta} = \sum_i k_i \beta_i \qquad \overline{\alpha} + \overline{\beta} = \mu$$

la dernière équation résultant des deux premières conjointement à (44) et (46).

De (36) et (45) d'une part, (41), (43) et (44) d'autre part, nous déduisons :

$$(48) \qquad wL_i = \alpha_i p_i y_i \qquad p_i y_i = k_i R \qquad wL_i = k_i \alpha_i R$$

$$(49) \qquad wL = \overline{\alpha} R \qquad \frac{L_i}{L} = \frac{k_i \alpha_i}{\overline{\alpha}}$$

et de même :

$$(50) \qquad \nu M_i = k_i \beta_i R \qquad \nu M = \overline{\beta} R \qquad \frac{M_i}{M} = \frac{k_i \beta_i}{\overline{\beta}}$$

Ainsi k_i apparaît comme égal à la part des dépenses $p_i y_i$ sur le bien i dans la valeur totale R des dépenses. De même $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ apparaissent comme étant respectivement égaux aux parts du coût du travail qualifié et du coût du travail non-qualifié dans la valeur du revenu. Nous pouvons prévoir qu'elles figureront dans le modèle agrégé qui sera naturellement associé au modèle désagrégé qui est maintenant étudié. Rassemblons dans une proposition les résultats des équations (48) à (50).

PROPOSITION 1. Soit un équilibre quelconque du système CES et dans cet équilibre les grandeurs k_i, α_i et β_i définies par (44) et (45). La grandeur k_i

est égale au rapport entre la valeur de la production du secteur i et la valeur de la production globale. La grandeur α_i (respectivement β_i) est égale au rapport dans le secteur i entre le coût du travail qualifié (respectivement non-qualifié) et la valeur de la production. La part de l'emploi qualifié (respectivement non-qualifié) occupé dans le secteur i est proportionnelle à $k_i\alpha_i$ (respectivement $k_i\beta_i$). Les valeurs des k_i, α_i, β_i varient en général d'un équilibre à un autre.

Nous notons au passage que la dernière phrase anticipe sur ce qui sera obtenu ultérieurement quant à la caractérisation complète des équilibres. Elle ne s'applique d'ailleurs pas à l'économie log-linéaire $(\sigma = 1, \omega = 0)$.

4.2 Solution au voisinage d'un équilibre. Première réduction du système

Pour travailler commodément par la suite sur les variations différentielles des variables endogènes, il convient de passer le plus possible en logarithmes, de façon à faire apparaître les variations relatives des variables. Remplaçons donc (34), (36), (37), (41) et (42) par :

$$-\frac{\omega}{\mu}\log y_i = \log\left[a_i L_i^{-\omega} + b_i M_i^{-\omega}\right] \tag{51}$$

$$\log w = \log p_i + \left(1+\frac{\omega}{\mu}\right)\log y_i - (1+\omega)\log L_i + \log a_i\mu \tag{52}$$

$$\log \nu = \log p_i + \left(1+\frac{\omega}{\mu}\right)\log y_i - (1+\omega)\log M_i + \log b_i\mu \tag{53}$$

$$\log y_i = -\sigma\log p_i + \log R + \log\gamma_i \tag{54}$$

$$0 = \log\sum_i \gamma_i p_i^{1-\sigma} \qquad \text{si } \sigma \neq 1 \tag{55}$$

$$0 = \sum_i \gamma_i \log p_i \qquad \text{si } \sigma = 1 \tag{55bis}$$

(il est tenu compte de (43) dans l'écriture des trois dernières équations).

Considérant (54) et (55) nous pouvons trouver les expressions de variations infiniment petites des prix, dp_i/p_i, en fonction de celles des productions et du revenu dy_i/y_i, et dR/R. La différenciation conduit en effet à :

$$\frac{dy_i}{y_i} = -\sigma\frac{dp_i}{p_i} + \frac{dR}{R} \tag{56}$$

$$0 = \sum_{j=1}^{n} k_j\frac{dp_j}{p_j} \tag{57}$$

Multipliant (56) par k_i, sommant et tenant compte de (57) nous obtenons :

$$\frac{dR}{R} = \sum_j k_j \frac{dy_j}{y_j} \tag{58}$$

L'introduction de (58) dans (56) établit directement une relation entre les dp_i/p_i et les dy_i/y_i. Mais la faire apparaître dans les formules suivantes les compliquerait inutilement.

Nous pouvons donner à la différentielle de (51) la forme commode suivante :

$$\frac{dy_i}{y_i} = \alpha_i \frac{dL_i}{L_i} + \beta_i \frac{dM_i}{M_i} \tag{59}$$

La différenciation de (52) s'écrit :

$$\frac{dw}{w} = \frac{dp_i}{p_i} + \left(1 + \frac{\omega}{\mu}\right)\frac{dy_i}{y_i} - (1+\omega)\frac{dL_i}{L_i} \tag{60}$$

Compte tenu de (56) et (59) cette équation s'écrit :

$$-\frac{dw}{w} = (1 + \omega - \lambda\alpha_i)\frac{dL_i}{L_i} - \lambda\beta_i \frac{dM_i}{M_i} - \frac{1}{\sigma}\frac{dR}{R} \tag{61}$$

où,

$$\lambda = 1 + \frac{\omega}{\mu} - \frac{1}{\sigma} \tag{62}$$

L'équation (53) conduit de même à :

$$-\frac{d\nu}{\nu} = -\lambda\alpha_i \frac{dL_i}{L_i} + (1 + \omega - \lambda\beta_i)\frac{dM_i}{M_i} - \frac{1}{\sigma}\frac{dR}{R} \tag{63}$$

4.3. Variations des grandeurs microéconomiques sectorielles en fonction de deux variations macroéconomiques φ et Ψ.

Le système des $2n$ équations (61) et (63) a une forme commode pour la détermination[10] des $2n$ grandeurs infiniment petites dL_i/L_i et dM_i/M_i en fonction des trois autres grandeurs dw/w, $d\nu/\nu$ et dR/R. Pour trouver la solution, introduisons $2+3n$ variables auxiliaires infiniment petites. Les deux premières φ et Ψ sont définies comme étant conjointement solution des deux équations suivantes :

$$-\frac{dw}{w} = (1 + \omega - \lambda\overline{\alpha})\varphi - \lambda\overline{\beta}\Psi - \frac{1}{\sigma}\frac{dR}{R} \tag{64}$$

$$-\frac{d\nu}{\nu} = -\lambda\overline{\alpha}\varphi + (1 + \omega - \lambda\overline{\beta})\Psi - \frac{1}{\sigma}\frac{dR}{R} \tag{65}$$

10. Les déductions qui suivent ne s'appliquent pas telles quelles aux cas où ω serait égal à -1, ou encore σ serait nulle (parfaite complémentarité soit dans la production soit dans la consommation). Cependant les résultats dégagés *in fine* sont aussi valables pour les cas en question. Les annexes 1 et 3 en fournissent la démonstration. De même l'annexe 2 traite du cas où σ serait infiniment grand (parfaite substituabilité dans la consommation).

Les variables η_i, θ_i et ξ_i se déduisent de φ et Ψ par :

$$\frac{dL_i}{L_i} = \varphi + \eta_i \tag{66}$$

$$\frac{dM_i}{M_i} = \Psi + \theta_i \tag{67}$$

$$\xi_i = \alpha_i \frac{dL_i}{L_i} + \beta_i \frac{dM_i}{M_i} - \overline{\alpha}\varphi - \overline{\beta}\Psi = \frac{dy_i}{y_i} - (\overline{\alpha}\varphi + \overline{\beta}\Psi) \tag{68}$$

En d'autres termes les variations relatives des *inputs* sont écrites comme sommes de deux termes dont l'un (φ ou Ψ) est commun à tous les secteurs, l'autre (η_i ou θ_i) est spécifique à chaque secteur.

Soustrayant (64) de (61) nous obtenons :

$$0 = (1+\omega)\eta_i - \lambda\xi_i \tag{69}$$

De même soustrayant (65) de (63) :

$$0 = (1+\omega)\theta_i - \lambda\xi_i \tag{70}$$

Ces deux dernières équations impliquent directement :

$$\eta_i = \theta_i = \frac{\lambda}{1+\omega}\xi_i \tag{71}$$

En d'autres termes dans les secteurs dans lesquels l'effet ξ_i sur la production sera particulièrement élevé, l'effet $\theta_i = \eta_i$ sur les *inputs* sera particulièrement élevé si λ est positif, mais particulièrement faible si λ est négatif. Nous reviendrons sur l'explication de ce second cas, à l'apparence paradoxale. Nous notons toutefois dès maintenant que (66), (67) et (71) impliquent :

$$\frac{dM_i}{M_i} - \frac{dL_i}{L_i} = \Psi - \varphi \tag{72}$$

Ce résultat n'est pas surprenant puisque soustraire (64) de (65) conduit directement à :

$$\frac{dw}{w} - \frac{d\nu}{\nu} = (1+\omega)(\Psi - \varphi) \tag{73}$$

qui, conjointement avec (35) et (72), conduit à :

$$\frac{dM_i}{M_i} - \frac{dL_i}{L_i} = \sigma_P \left[\frac{dw}{w} - \frac{d\nu}{\nu}\right] \tag{74}$$

C'est ainsi un effet direct du choix du système CES, où tous les secteurs i ont la même élasticité de substitution constante σ_P. Notons néanmoins le résultat.

PROPOSITION 2. Au voisinage d'un équilibre la substitution entre les deux facteurs dans le déplacement vers un autre équilibre s'effectue au même rythme dans tous les secteurs.

Afin de caractériser les autres modifications conjointes des grandeurs sectorielles, précisons encore le calcul de θ_i. Les définitions (66) à (68) impliquent :

(75) $$\xi_i = \omega\mu\theta_i + (\alpha_i - \overline{\alpha})\varphi + (\beta_i - \overline{\beta})\Psi$$

d'où, tenant compte de (71) et sachant que $(\alpha_i - \overline{\alpha}) + (\beta_i - \overline{\beta}) = 0$ en raison de (46) et (47) :

(76) $$(1 + \omega - \mu\lambda)\theta_i = -\lambda(\beta_i - \overline{\beta})(\varphi - \Psi)$$

Nous notons en passant que les variables auxiliaires η_i, θ_i, ξ_i sont toutes nulles s'il n'y a pas d'hétérogénéité entre les unités de production, c'est-à-dire si $\alpha_i = \overline{\alpha}$ et $\beta_i = \overline{\beta}$ pour tout i.

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer, en fonction de φ, Ψ, α_i, β_i, $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$, toutes les variations relatives des grandeurs endogènes microéconomiques. Ecrivons pour cela :

(77) $$\nu = \lambda[1 + \omega - \mu\lambda]^{-1}$$

encore égal à $(\sigma - \sigma_P)/\sigma_P$ en cas de rendements d'échelle constants.

Les équations (66), (67), (71) et (76) impliquent

(78) $$\frac{dL_i}{L_i} = [1 - \nu(\beta_i - \overline{\beta})\varphi] + \nu(\beta_i - \overline{\beta})\Psi$$

(79) $$\frac{dM_i}{M_i} = -\nu(\beta_i - \overline{\beta})\varphi + [1 + \nu(\beta_i - \overline{\beta})]\Psi$$

L'équation (59) conduit à :

(80) $$\frac{dy_i}{y_i} = [\alpha_i - \nu\mu(\beta_i - \overline{\beta})]\varphi + [\beta_i + \nu\mu(\beta_i - \overline{\beta})]\Psi$$

Nous notons au passage que, du fait de (58), il en résulte :

(81) $$\frac{dR}{R} = \overline{\alpha}\varphi + \overline{\beta}\Psi$$

L'équation (56) conduit enfin à :

(82) $$\frac{dp_i}{p_i} = \frac{1 + \nu\mu}{\sigma}(\beta_i - \overline{\beta})(\varphi - \Psi)$$

Relevons ce dernier résultat sous la forme suivante :

PROPOSITION 3. Si le coût relatif du travail non-qualifié décroît $\left(\frac{d\nu}{\nu} < \frac{dw}{w}\right)$ et s'il n'y pas stricte complémentarité ni dans la production ni dans la consommation, le prix réel p_i des biens produits (avec la normalisation $P = 1$) décroit dans les secteurs qui emploient le plus du travail non-qualifié $(\beta_i > \overline{\beta})$.

En effet, selon (73), $\varphi - \Psi$ est alors négatif et on vérifie sans peine que $1 + \nu\mu$ est positif.

4.4 Variations de l'équilibre macroéconomique en fonction de l'hétérogénéité microéconomique et de $d\nu/\nu$

Nous sommes maintenant en mesure de revenir aux variations macroéconomiques. Nous tenons d'abord compte de (81) et de la définition du paramètre λ par (62) pour ramener le système (64)-(65) à :

$$-\frac{dw}{w} = \left[1+\omega-\left(1+\frac{\omega}{\mu}\right)\overline{\alpha}\right]\varphi-\left(1+\frac{\omega}{\mu}\right)\overline{\beta}\Psi \tag{83}$$

$$-\frac{d\nu}{\nu} = -\left(1+\frac{\omega}{\mu}\right)\overline{\alpha}\varphi+\left[1+\omega-\left(1+\frac{\omega}{\mu}\right)\overline{\beta}\right]\Psi \tag{84}$$

Notons en passant que, en l'absence d'hétérogénéité, tous les dL_i/L_i sont selon (78) égaux à φ, donc aussi dL/L, et tous les dM_i/M_i sont égaux à Ψ, donc aussi à dM/M. Comme dans le système CES complet dL doit être nul, φ doit alors l'être aussi. L'équation (84) fait apparaître que la valeur absolue η de l'élasticité de M par rapport à ν est alors égale à $\left[1+\omega-\left(1+\frac{\omega}{\mu}\right)\overline{\beta}\right]^{-1}$. C'est la référence que nous retiendrons pour définir le biais d'agrégation induit par l'hétérogénéité.

Plus généralement nous pouvons écrire :

$$\frac{dL}{L} = \sum_i \frac{L_i}{L}\cdot\frac{dL_i}{L_i} \tag{85}$$

Écrivons par exemple :

$$\ll L,\alpha \gg = \sum_i \frac{L_i}{L}(\alpha_i-\overline{\alpha}) \tag{86}$$

Nous reportant à (78) nous déduisons de (85) :

$$\frac{dL}{L} = (1+\nu \ll L,\alpha \gg)\varphi+\nu \ll L,\beta \gg \Psi \tag{87}$$

Or, la seconde des équations (49) implique :

$$\ll L,\alpha \gg = \frac{1}{\overline{\alpha}}\,\mathrm{var}\,(\beta) \tag{88}$$

où,

$$\mathrm{var}\,(\beta) = \sum_i k_i\left(\beta_i-\overline{\beta}\right)^2 = \sum_i k_i(\alpha_i-\overline{\alpha})^2 = \sum_i k_i\alpha_i(\alpha_i-\overline{\alpha}) \tag{89}$$

(les seconde et troisième égalités résultent de (46) et (47) tandis que la première définit la nouvelle notation). $\mathrm{var}\,(\beta)$ est ainsi la variance pondérée, entre les secteurs, de la part du coût du travail non-qualifié dans la valeur de la production.

De même :

$$\ll L,\beta \gg = \frac{-1}{\overline{\alpha}}\,\mathrm{var}\,(\beta) \tag{90}$$

Pour la simplicité des équations intermédiaires nous écrirons souvent var au lieu de var (β).

Nous pouvons réécrire (87) sous la forme :

$$\frac{dL}{L} = \varphi + \frac{\nu \operatorname{var}}{\overline{\alpha}}(\varphi - \Psi) \tag{91}$$

Par simple transposition nous obtenons de même à partir de (79) :

$$\frac{dM}{M} = \Psi - \frac{\nu \operatorname{var}}{\overline{\beta}}(\varphi - \Psi) \tag{92}$$

Tenant compte de (91), (92), (73) et (35), nous pouvons dès lors écrire :

$$\frac{dM}{M} - \frac{dL}{L} = K(\Psi - \varphi) = -\sigma_P K \left(\frac{d\nu}{\nu} - \frac{dw}{w}\right) \tag{93}$$

où le multiplicateur K est donné par :

$$K = 1 + \nu \left[\frac{1}{\overline{\alpha}} + \frac{1}{\overline{\beta}}\right] \operatorname{var}(\beta) \tag{94}$$

Ainsi, l'élasticité de substitution au niveau global, et au voisinage d'un équilibre, diffère de l'élasticité de substitution σ_P au niveau des secteurs. Le facteur K, qui donne le rapport entre les deux élasticités macro et microéconomique dépend en général de l'équilibre au voisinage duquel on opère.

PROPOSITION 4. L'élasticité de substitution macroéconomique entre travail qualifié et travail non-qualifié diffère de l'élasticité de substitution microéconomique par un facteur multiplicateur K. Celui-ci diffère d'autant plus de 1 que l'hétérogénéité, mesurée par var (β), est plus élevée. L'hétérogénéité se traduit par un facteur K supérieur à 1 précisément si le paramètre ν est positif[11].

Par ailleurs, nous pouvons compléter la caractérisation du déplacement de l'équilibre en combinant (84) et (91), tout en tenant compte de ce que l'équilibre du marché du travail qualifié impose que dL/L soit nul. De la sorte nous sommes en mesure de calculer les valeurs requises de φ et Ψ comme fonctions de $d\nu/\nu$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ et var. Pour ce faire introduisons :

$$H = 1 + \omega - \left(1 + \frac{\omega}{\mu}\right)\overline{\beta} + (1 - \mu)\frac{\nu \operatorname{var}(\beta)}{\overline{\alpha}} \tag{95}$$

11. Alain BERNARD m'a fait valoir que le résultat énoncé par cette proposition pouvait être obtenu aussi par un calcul d'optimisation consistant à maximiser U pour des valeurs données L et M des *inputs* agrégés de travail qualifié et non-qualifié, et en respectant les fonctions de production. L'élasticité de substitution macroéconomique apparaît alors comme une caractéristique de l'isoquante qui, dans l'espace (L, M) joint les points correspondant à une même valeur du maximum ainsi atteint pour U. Je souhaite plus généralement qu'Alain BERNARD puisse publier prochainement les résultats de ses travaux sur l'agrégation.

Il est immédiat de vérifier que la solution de (84) et (91) est alors donnée par :

$$H\varphi = \frac{-\nu \operatorname{var}}{\overline{\alpha}} \frac{d\nu}{\nu} \qquad H\Psi = -\left[1 + \frac{\nu \operatorname{var}}{\overline{\alpha}}\right] \frac{d\nu}{\nu} \tag{96}$$

Reportant ces valeurs dans l'équation (92) nous obtenons le résultat finalement cherché, soit :

$$-H\frac{dM}{M} = K\frac{d\nu}{\nu} \tag{97}$$

Nous pouvons calculer le biais d'agrégation B en soustrayant de la valeur absolue η de l'élasticité qui apparaît ci-dessus la valeur qu'elle aurait prise en l'absence d'hétérogénéité (donc avec $\operatorname{var}(\beta) = 0$) :

$$B = \frac{K}{H} - \left[1 + \omega - \left(1 + \frac{\omega}{\mu}\right)\overline{\beta}\right]^{-1} \tag{98}$$

PROPOSITION 5. Dans le système CES le biais d'agrégation B affectant l'élasticité de la demande agrégée de travail non-qualifié par rapport au coût réel de ce travail (avec la normalisation $P = 1$) est donné par la formule (98) qui prend une forme simple en cas de rendements d'échelle constants :

$$B = \frac{(\sigma - \sigma_P)\operatorname{var}(\beta)}{\left(1 - \overline{\beta}\right)^2 \overline{\beta}} \tag{99}$$

où σ et σ_P sont les élasticités de substitution, respectivement dans les demandes de biens et les fonctions de production, tandis que $\overline{\beta}$ et $\operatorname{var}(\beta)$ caractérisent la distribution statistique, entre les secteurs productifs, de la part du coût imputable au travail non-qualifié.

Comparant cette dernière équation avec l'équation (7), donnant l'expression de l'élasticité de la demande telle qu'elle était déduite du modèle agrégé en cas de rendements d'échelle constants, cas où par ailleurs $\nu\sigma_P = \sigma - \sigma_P$, nous voyons que le biais d'agrégation joue alors seulement par l'intermédiaire du biais $(K - 1)\sigma_P$ affectant selon (93) l'élasticité de substitution dans la production agrégée.

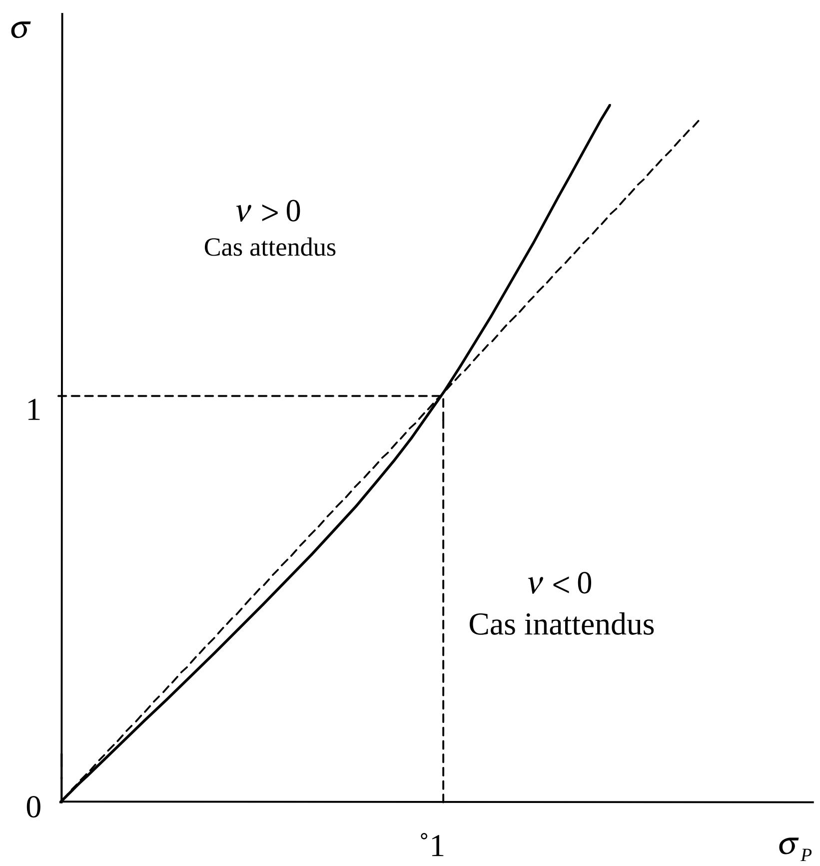
5 Discussion des résultats de l'analyse théorique

5.1 Signe et taille du biais d'agrégation

Que pouvons dire maintenant du biais d'agrégation dû à l'hétérogénéité des techniques de production et à sa répercussion dans la structure des prix relatifs ? Dans le cadre de notre modèle la réponse est donnée par les formules (98) et (99) que nous allons maintenant examiner, en portant surtout attention au couple (σ_P, σ) des deux élasticités de substitution microéconomiques. Ces formules sont robustes en ce sens qu'elles s'appliquent aux limites : si une stricte complémentarité prévalait dans le système des lois de demande des biens (annexe 3 où $\sigma = 0$), ou si elle prévalait dans la production (annexe 1 où $\sigma_P = 0$, limite correspondant au cas où ω croîtrait indéfiniment, tandis que les $(b_i/a_i)^{1/\omega}$ tendraient vers des limites donnant les rapports entre les deux coefficients techniques relatifs respectivement au travail non-qualifié ou au travail qualifié). Les formules (98) et (99) s'appliquent aussi au cas où existerait une parfaite substituabilité entre les demandes des biens produits (annexe 2 traitant du cas où σ serait infiniment grand). Il n'y a pas lieu de s'attarder sur le cas où σ_P serait infiniment grand, car il n'a pas de portée pratique.

Considérons d'abord la formule (99) s'appliquant dans l'hypothèse de rendements d'échelle constants. Elle donne une réponse particulièrement simple à la conjecture énoncée dans l'introduction : les raisonnements macroéconomiques, sur des modèles calibrés à l'aide d'estimations microéconomiques de l'élasticité de substitution dans la production, conduisent à des sous-estimations si, et seulement si, cette élasticité σ_P est inférieure à l'élasticité de substitution σ du système des lois de demande des biens (parlons pour

FIGURE
Signe du biais selon les valeurs des élasticités de substitution



simplifier de l'élasticité de substitution dans la consommation). Évoquant la conjecture que nous avons cherché à tester, nous dirons que, sous l'hypothèse de rendements constants, $\sigma > \sigma_P$ constitue le « cas attendu » tandis que $\sigma < \sigma_P$ est le « cas inattendu » de surestimation.

Pour nous faire une idée de l'ampleur possible du phénomène, considérons les valeurs suivantes : $\sigma_P = 1$; $\overline{\alpha} = 0{,}9$; $\overline{\beta} = 0{,}1$ et $\mathrm{var}\,(\beta) = 25.10^{-4}$. Le biais B de sous-estimation, nul pour $\sigma = 1$ (cas de l'économie log-linéaire), est égal à $0{,}09$ si $\sigma = 4$ et à $-0{,}03$ si $\sigma = 0$. S'agissant de l'élasticité de M par rapport à ν, l'évaluation macroéconomique de 1,11 devrait être remplacée par 1,20 si $\sigma = 4$, par 1,08 si $\sigma = 0$. Remplaçant $\sigma_P = 1$ par $\sigma_P = 0{,}5$ nous obtiendrions $B = 0{,}11$ avec $\sigma = 4$ et $B = -0{,}015$ avec $\sigma = 0$. En valeur absolue le biais apparaît modéré dans tous ces cas. Seules des valeurs élevées de σ correspondraient à des biais importants, puisque selon (99) B croît avec σ, au-delà de toute limite pour des valeurs fixes des autres grandeurs intervenant dans la formule.

La formule (98) s'interprète moins aisément mais ne conduit pas à des résultats bien différents. S'agissant d'abord des domaines respectifs des cas attendus $(B > 0)$ et inattendus $(B < 0)$ l'équation (98) montre que le signe de B est celui de :

$$\left[1 + \omega - \left(1 + \frac{\omega}{\mu}\right)\overline{\beta}\right] K - H \tag{100}$$

qui se trouve être égal à :

$$\frac{\nu(1+\omega)\mathrm{var}}{\overline{\beta}} \tag{101}$$

Cette fonction a le signe de ν qui, en vertu de (77) et (62), s'écrit :

$$\nu = \left[\sigma\left(1 + \frac{\omega}{\mu}\right) - 1\right] \Big/ [\mu + (1-\mu)\sigma] \tag{102}$$

Ainsi ν a le signe de son numérateur. En somme $B > 0$ précisément quand :

$$\sigma > \left(1 + \frac{\omega}{\mu}\right)^{-1} = \frac{\mu\sigma_P}{1 - (1-\mu)\sigma_P} \tag{103}$$

De cette inégalité on déduit la figure de la page 61 où, dans le plan (σ_P, σ), la courbe en trait plein correspond au cas $\mu = 0{,}8$ (avec par exemple $\overline{\alpha} = 0{,}7$ $\overline{\beta} = 0{,}1$). Pour les valeurs les plus vraisemblables de σ_P, celles appartenant à l'intervalle $[0{,}5 \quad 1{,}0]$, le domaine des cas attendus est à peine plus grand que celui se situant au-dessus de la bissectrice, lequel correspond au cas de rendements d'échelle constants.

Les valeurs possibles de B se situent dans l'intervalle borné par les deux résultats $\underline{B}$ et $\overline{B}$ obtenus à partir de (98) respectivement pour σ nul et σ infiniment grand, c'est-à-dire pour $\nu = -1/\mu$ et $\nu = \left(1 + \frac{\omega}{\mu}\right) \Big/ (1-\mu)$. Les formules donnant les bornes $\underline{B}$ et $\overline{B}$ sont un peu complexes. Nous pouvons retenir ici :

$$\text{(104)} \qquad \underline{B} = \frac{-(1+\omega)\mathrm{var}}{\mu J^2 \overline{\beta}} \qquad \overline{B} = \frac{(1+\omega)\left(1+\dfrac{\omega}{\mu}\right)\mathrm{var}}{(2-\mu)J^2\overline{\beta}}$$

formules où :

$$\text{(105)} \qquad J = 1+\omega-\left(1+\frac{\omega}{\mu}\right)\overline{\beta}$$

et où on se limite à une approximation au premier ordre par rapport à var/J considéré comme petit.

Pour avoir une idée des ordres de grandeur numérique, retenons encore : $\overline{\beta} = 0{,}1$ et $\mathrm{var}\,(\beta) = 25.10^{-4}$. Envisageons deux valeurs possibles pour le paramètre μ caractérisant le degré de décroissance des rendements d'échelle : $\mu = 0{,}8$ (donc $\overline{\alpha} = 0{,}7$) ou $\mu = 0{,}9$ (donc $\overline{\alpha} = 0{,}8$). Si $\sigma_P = 0{,}5$ (donc $\omega = 1$) l'intervalle de variation de B est $[-0{,}020 \quad 0{,}179]$ avec $\mu = 0{,}8$ ou $[-0{,}017 \quad 0{,}329]$ avec $\mu = 0{,}9$. Si $\sigma_P = 1$ (donc $\omega = 0$) l'intervalle est $[-0{,}036 \quad 0{,}155]$ avec $\mu = 0{,}8$ ou $[-0{,}034 \quad 0{,}310]$ avec $\mu = 0{,}9$.

5.2 Étude des cas inattendus

Recherchons maintenant l'explication de la présence de cas inattendus, ceux où ν est négatif. Le paradoxe qui apparaît alors s'explique par une disposition contre-intuitive des écarts intersectoriels dans les variations dy_i/y_i, dL_i/L_i, dM_i/M_i, disposition en fonction du recours plus ou moins poussé des secteurs i au travail non-qualifié. Plus précisément, quand ν est négatif, une baisse du coût du travail non-qualifié a pour effet que l'*output* y_i croît bien le plus dans les secteurs les plus utilisateurs de travail non-qualifié, mais que ce sont simultanément les secteurs où les *inputs* L_i et M_i croissent le moins (ou décroissent le plus). En effet les équations (80) et (96) impliquent :

$$\text{(106)} \qquad \frac{dy_i}{y_i} = \frac{dR}{R} - \frac{1+\nu\mu}{H}(\beta_i - \overline{\beta})\frac{d\nu}{\nu}$$

tandis que (78) ou (79) et (96) impliquent :

$$\text{(107)} \qquad \frac{dL_i}{L_i} = \varphi - \frac{\nu}{H}(\beta_i - \overline{\beta})\frac{d\nu}{\nu}$$

$$\text{(108)} \qquad \frac{dM_i}{M_i} = \Psi - \frac{\nu}{H}(\beta_i - \overline{\beta})\frac{d\nu}{\nu}$$

Or H donné par (95) est positif tandis que $1+\nu\mu$ ne peut pas être négatif, (102) impliquant :

$$\text{(109)} \qquad 1+\nu\mu = \sigma(1+\omega)/[\mu + (1-\mu)\sigma]$$

De cette disposition contre-intuitive nous devons comprendre la raison.

Pour ce faire, considérons d'abord les deux cas extrêmes $\sigma_P = 0$ et $\sigma = 0$ correspondant sur la figure soit aux points de l'axe des ordonnées soit à ceux de l'axe des abscisses. Dans le premier cas il n'y a pas de substituabilité dans les unités de production, mais il y en a entre consommations, abaisser le coût du travail non-qualifié provoque une hausse du prix relatif des biens qui exigent le plus le recours au travail qualifié. L'effet de substitution dans la consommation défavorise alors la demande de ces biens, donc leur production, donc aussi les demandes de facteur dans les unités produisant ces biens (les coefficients techniques ne peuvent y varier). Tout cela est intuitif.

À l'inverse si la substituabilité est réservée aux secteurs de la production , la structure de la consommation doit rester inchangée le long de l'unique droite d'*Engel*, passant par l'origine (voir les lois de demande (41) avec $\sigma = 0$). Les productions de tous les biens doivent alors croître proportionnellement, alors que toutes les unités de production substituent du travail non-qualifié à du travail qualifié. On peut même dire que toutes les unités opèrent la substitution au même degré, dans le sens où :

$$\frac{dM_i}{M_i} - \frac{dL_i}{L_i} = \frac{-1}{H} \cdot \frac{d\nu}{\nu} \tag{110}$$

ainsi que cela résulte de (72) et (96). Alors un simple raisonnement sur les quantités explique la disposition contre-intuitive qui s'applique à ce cas :

$$\frac{dR}{R} = \frac{dy_i}{y_i} = \alpha_i \frac{dL_i}{L_i} + \beta_i \frac{dM_i}{M_i} = \mu \frac{dL_i}{L_i} - \frac{\beta_i}{H}\frac{d\nu}{\nu} \tag{111}$$

L'égalité des deux termes extrêmes, puis la prise en compte de (110) conduisent à :

$$\mu \frac{dL_i}{L_i} = \frac{dR}{R} + \frac{\beta_i}{H} \cdot \frac{d\nu}{\nu} \qquad \mu \frac{dM_i}{M_i} = \frac{dR}{R} - \frac{\mu}{H} \cdot \frac{d\nu}{\nu} + \frac{\beta_i}{H} \cdot \frac{d\nu}{\nu} \tag{112}$$

Quand $d\nu$ est négatif, dL_i/L_i et dM_i/M_i ont des valeurs particulièrement fortes dans les secteurs où β_i a une valeur particulièrement faible. Ainsi, bien que les taux de croissance des productions soient les mêmes partout, les taux de croissance des *inputs* diffèrent systématiquement[12]. C'est contre-intuitif, mais explicable.

Pour en terminer avec l'étude des cas correspondant à $\sigma = 0$, notons qu'il y aura évidemment des effets sur les prix relatifs en rapport avec les effets sur les coûts : pour amener les secteurs peu utilisateurs de travail non-qualifié à accroître leurs productions autant que le font les secteurs très utilisateurs, il faut que les prix relatifs des biens produits par les premiers augmentent tandis que les prix relatifs de ceux produits par les seconds diminuent[13].

Considérons maintenant un cas où l'élasticité de substitution σ est positive mais petite, son point représentatif P étant situé sur la figure légèrement

12. Afin de réfléchir sur un exemple numérique où ce paradoxe apparaît, le lecteur peut considérer le cas où $n = 2$, $\sigma = 0$, $\sigma_p = 1$, $\mu = 1$, $\beta_1 = 0{,}05$, $\beta_2 = 0{,}15$, $k_1 = k_2 = 0{,}5$, $d\nu/\nu = -10\ \%$. Pour le secteur 1, peu utilisateur de travail non-qualifié, le calcul donne : $dL_1/L_1 = 0{,}52\ \%$, $dM_1/M_1 = 11{,}63\ \%$, $dy_1/y_1 = 1{,}08\ \%$. De même pour le secteur 2, fort utilisateur de travail non-qualifié, on aboutit à : $dL_2/L_2 = -0{,}58\ \%$, $dM_2/M_2 = 10{,}59\ \%$, $dy_2/y_2 = 1{,}08\ \%$. La différence systématique quant aux variations des *inputs* est manifeste. On vérifie que $dL/L = 0$ et $dM/M = 10{,}8\ \%$.

13. Dans l'exemple numérique cité ci-dessus, les équations de l'annexe 3 donnent $dp_i/p_i = \pi_i = \theta_i = \frac{\beta_i - \bar{\beta}}{1-\bar{\beta}} \cdot \frac{d\nu}{\nu}$. Ainsi le prix p_1 croît de 0,56 % et le prix p_2 décroît d'autant.

au-dessus de l'axe des abscisses. Il y a dans sa proximité un point P_0 où $\sigma = 0$. Plus précisément supposons que dans le cas repéré par P_0 tous les paramètres autres que σ ont les mêmes valeurs que dans le cas repéré par P. Par continuité les valeurs des diverses variables concernant l'équilibre et ses déplacements ont, dans le cas P, des valeurs voisines de celles qu'elles ont dans le cas P_0. Les prix relatifs en particulier sont voisins. Les substitutions qui se font dans la consommation sont faibles mais en faveur des secteurs dont les prix baissent, c'est-à-dire de ceux employant relativement beaucoup de travail non-qualifié (sous l'hypothèse d'une baisse du coût de ce travail). Par continuité dy_i/y_i est, dans ces secteurs, supérieur à dR/R. À l'inverse, dans les secteurs i employant beaucoup de travail qualifié, dy_i/y_i est inférieur à dR/R, alors que, par continuité, dL_i/L_i et dM_i/M_i ont des valeurs plus fortes que dans les autres secteurs. L'explication du paradoxe que représentent les cas dits ici inattendus est complète.

Afin de clore la discussion des résultats de notre investigation théorique, portons encore l'attention sur le rôle joué par le degré de décroissance des rendements d'échelle. Dans l'annexe 2, concernant un cas de substituabilité parfaite entre consommations, la formule (19) fait apparaître que, en cas d'hétérogénéité, l'élasticité de la demande de travail non-qualifié croîtrait indéfiniment en fonction de c, c'est-à-dire si la décroissance des rendements s'évanouissait. Le modèle deviendrait alors non-pertinent puisqu'il ignore la contrainte imposée par le fait que l'offre de travail non-qualifiée est malgré tout limitée. La propriété est cependant révélatrice du rôle crucial que les résultats de cette annexe attribuent au degré de décroissance des rendements d'échelle. Dans les résultats plus généraux de la fin de la section 4 ce rôle intervient par l'intermédiaire de la valeur de ν. Nous voyons qu'il tend à diminuer vite quand σ décroît. Ainsi, écrivant $c = (1-\mu)^{-1}$ et considérant le cas $\omega = 0$ et μ positif mais inférieur à 1, nous trouvons que ν peut s'écrire alors $c(\sigma-1)/(c+\sigma-1)$. Nul pour $\sigma = 1$, ν ne vaut encore que $4c/(c+4)$ pour $\sigma = 5$, ce qui signifie moins de 3 quand $c = 10$.

6 Vers une meilleure évaluation de l'ordre de grandeur qu'a réellement l'élasticité de la demande en cause

Au total le système CES de la section 4 a servi de façon assez efficace pour l'approfondissement logique de la conjecture motivant cette étude. Mais la question se pose de savoir maintenant ce que devrait faire le praticien chargé de prévoir les effets à long terme de variations du coût du travail non-qualifié sur la demande de ce travail. Comment devrait-il faire intervenir dans ses prévisions les substitutions entre consommations ?

Face à cette question nous ne pouvons pas avoir la prétention de donner une réponse précise. Non seulement les évaluations économétriques que nous pourrions collecter ont toute chance d'apparaître insuffisantes, mais aussi le modèle utilisé ici est bien trop simpliste pour suffire à donner un cadre à l'intérieur duquel de telles évaluations pourraient être interprétées avec sécurité. Or si nous réfléchissons à des généralisations qui soient susceptibles de rendre ce modèle sensiblement plus adéquat, nous concluons vite que les éléments à faire intervenir sont trop nombreux et semblent avoir des influences trop complexes pour que nous ayons des chances sérieuses de trouver des formalisations aussi probantes que nous les souhaiterions[14].

Néanmoins il semble opportun de dire quelques mots de trois aspects qui auraient à être considérés de près dans tout programme visant à préciser l'ordre de grandeur de l'élasticité qui nous intéresse ici, celle de la demande globale de travail non-qualifié par rapport au coût de ce travail. Il s'agit d'abord du concept d'équilibre qui serait pertinent pour caractériser le contexte dans lequel se forme la demande en question, ensuite de la prise en compte des consommations intermédiaires qui interviennent entre l'utilisation des facteurs primaires et les consommations finales, enfin du niveau d'agrégation auquel s'observent le mieux les substitutions.

Quant au concept d'équilibre, quels biais l'hypothèse de concurrence parfaite sur les marchés des biens pourrait-elle introduire directement dans la détermination des prix relatifs et indirectement dans celle de l'élasticité qui nous intéresse ? Nous pouvons en avoir l'intuition en nous reportant aux modèles utilisés par certains macroéconomistes pour supputer les propriétés de l'équilibre général en concurrence monopolistique. Nous pouvons en conclure que l'effet principal de l'introduction des imperfections de la concurrence serait de modifier notre perception du rôle du degré de décroissance des rendements d'échelle. Ce rôle serait moins marqué dans la réalité que le suggère notre exploration théorique (voir notamment ce qui a été écrit à la fin de la section précédente). En d'autres termes, pour avoir une idée de la valeur à attribuer à η dans les applications, il conviendrait sans doute de retenir dans les exercices de calibration de notre modèle des valeurs plus faibles de μ que celles auxquelles on pense quand on interprète les fonctions de production comme reflétant uniquement les contraintes techniques.

Au titre du concept d'équilibre il faut aussi penser à la structure des déséquilibres de marché qui a été retenue systématiquement ici. Le fait que souvent des employeurs aient à réduire leur activité par insuffisance de demande pour leurs produits est cependant bien réel. Cela affecte certainement quelque peu la pertinence de nos résultats, mais probablement guère ce qui a été appelé ici le biais d'agrégation, dû fondamentalement à la diversité des combinaisons de facteurs entre les unités productives. En d'autres termes la remise en question devrait se faire principalement sur le modèle agrégé de la section 2, où l'augmentation de la production globale suscitée par la diminution du coût du travail non-qualifié est vraisemblablement surestimée. Il en va de même d'autres remarques s'appliquant à ce modèle agrégé, qui ont été examinées par B. SALANIÉ [2000], notamment de celles concernant la prise en

---

14. C'est une idée naturelle dans le prolongement direct de cette étude que de considérer comment les conclusions de la section 4 seraient affectées si une nouvelle dimension d'hétérogénéité était introduite, celle portant sur les rendements d'échelle, μ étant remplacé par μ_i. Mais cette petite généralisation n'est pas aisée, sans parler de celle qui consisterait à introduire l'hétérogénéité des ω_i, c'est-à-dire celle des élasticités de substitution. On trouvera toutefois dans l'annexe 4 le traitement rassurant d'un cas d'hétérogénéité dans la décroissance des rendements d'échelle. De plus une généralisation, portant sur le système des lois de demande (41) et introduisant, à côté de l'hétérogénéité des techniques productives, l'hétérogénéité des demandes des divers biens, distinguant, ainsi les « biens de luxe » des « biens de première nécessité », figure dans E. MALINVAUD [2001].

compte des finances publiques et des échanges extérieurs selon la voie explorée par J.-P. LAFFARGUE [1996].

Dans la réalité les modifications des prix relatifs et les substitutions entre produits ne concernent pas seulement la consommation des ménages, mais aussi les exportations et importations, les investissements et toutes les consommations intermédiaires dans la production. Il faut en tenir compte pour jauger la valeur à donner à « l'élasticité de substitution représentative » que σ a ici pour prétention de constituer. C'est même faire une conjecture raisonnable d'avancer que certains des effets des substitutions doivent se cumuler le long des filières de production aboutissant aux utilisations finales. Mais quelle force attribuer à ce cumul, s'il se produit réellement ? Voilà le sujet d'une autre investigation. Plus généralement la complexité effective des systèmes productifs constitue un défi confrontant tant économètres que macroéconomistes. Pour les applications envisagées ici c'est probablement une difficulté plus sérieuse que celle du choix du concept d'équilibre approprié.

Une autre difficulté, redoutable elle aussi, concerne le niveau d'agrégation autorisé à ceux qui prétendront fournir les estimations des élasticités de substitution entre produits, cela en vue des applications envisagées ici. Le bon critère consisterait à constituer des groupes de biens homogènes quant à leur recours au travail qualifié et au travail non-qualifié. Mais les nomenclatures qui structurent l'information disponible ne sont pas organisées en fonction de ce critère, ce qui veut dire en pratique que, pour s'approcher de ce que donnerait l'emploi du bon critère, il faudrait travailler à un niveau très désagrégé. Au contraire, ceux qui ont cherché à déterminer les élasticités de substitution entre les diverses consommations des ménages ont dû se limiter à peu de biens, représentant chacun une grande fonction telle que alimentation, habillement, etc. Savoir comment résoudre le dilemme devrait aussi faire l'objet d'une investigation.

• Références bibliographiques

BISCOURP P., GIANELLA C. (2001). – « Substitution and Complementarity between Capital, Skilled and Less Skilled Workers: An Analysis at the Firm Level in the French Manufacturing Industry », *Document de travail* INSEE, Direction des Études et Synthèses Économiques, G2001/13.

DORMONT B. (1996). – « Seeking for Labor Demand Heterogeneity », *Annales d'Économie et de Statistique*, N° 41/42, janvier-juin, p. 79-96.

HAMERMESH D. (1993). – *Labor Demand*, Princeton University Press.

KRUSELL P., OHANIAN L., RIOS-RULL J.-V., VIOLANTE G. (2000). – « Capital-skill Complementarity and Inequality : A Macroeconomic Analysis », *Econometrica*, September.

LAFFARGUE J.-P. (1996). – « Fiscalité, charges sociales, qualifications et emploi. Étude à l'aide d'un modèle d'équilibre général de l'économie française », *Économie et Prévision*, n° 125.

MALINVAUD E. (1981). – *Théorie Macroéconomique*, vol. 1, Dunod, Paris.

MALINVAUD E. (2001). – « An Aggregation Problem: The Demand for Unskilled Labour », *Document de travail* CREST, n° 2001-22.

SALANIÉ B. (2000). – « Une maquette analytique de long terme du marché du travail », *Économie et Prévision*, n° 146, octobre-décembre, p. 1-13.

ANNEXE 1

Parfaite complémentarité dans la production

Le cas où ω serait infiniment grand, donc σ_P nul, n'est pas couvert *stricto sensu* par le traitement de la section 4. Il peut être traité directement comme nous allons le voir, nous contentant pour cela de retenir les lois de demande (15) de l'économie log-linéaire, assorties de la normalisation (17) du système des prix.

Pour produire la quantité y_i le secteur i doit employer par hypothèse les quantités $L_i = n_i y_i$ de travail qualifié et $M_i = m_i y_i$ de travail non-qualifié, les nombres n_i et m_i étant des paramètres, les coefficients techniques. La production s'effectuant à rendements d'échelle constants les prix d'équilibre sont égaux aux coûts, donc :

$$p_i = wn_i + \nu m_i \tag{1}$$

Les deux équations suivantes, relatives aux quantités globales de travail employées, s'appliquent :

$$\overline{L} = \sum_{i=1}^{n} n_i y_i \qquad\qquad M = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \tag{2}$$

Le modèle s'exprime ainsi par les $2n+3$ équations, (1) et (2) ci-dessus ainsi que les équations (15) et (17) du texte, qui lient les $2n+3$ variables endogènes : les p_i et y_i, plus R, w et M. Il existe une variable exogène ν et des paramètres, γ_i, n_i, m_i, $\overline{L}$.

Pour aboutir à la détermination de l'élasticité de M par rapport à ν, nous allons différencier les diverses équations, à commencer par (15) et (17) :

$$\frac{dp_i}{p_i} - \frac{dR}{R} = -\frac{dy_i}{y_i} \tag{3}$$

$$\sum_i \gamma_i \frac{dp_i}{p_i} = 0 \tag{4}$$

L'équation (1) implique :

$$\frac{dp_i}{p_i} = \alpha_i \frac{dw}{w} + \beta_i \frac{d\nu}{\nu} \tag{5}$$

dans laquelle α_i et β_i sont les parts du travail qualifié et du travail non-qualifié dans le coût de production du secteur i :

$$\alpha_i = \frac{wn_i}{p_i} \qquad\qquad \beta_i = \frac{\nu m_i}{p_i} \qquad\qquad \alpha_i + \beta_i = 1 \tag{6}$$

Posant :

$$\overline{\alpha} = \sum_j \gamma_j \alpha_j \qquad\qquad \overline{\beta} = \sum_j \gamma_j \beta_j \qquad \text{donc} \qquad \overline{\alpha} + \overline{\beta} = 1 \tag{7}$$

nous notons au passage que (4) et (5) impliquent :

$$\overline{\alpha}\,\frac{dw}{w} + \overline{\beta}\,\frac{d\nu}{\nu} = 0 \tag{8}$$

qui lie la variation endogène dw/w à de la variation exogène $d\nu/\nu$.

Introduisons (5) dans (3). Nous obtenons :

$$\frac{dy_i}{y_i} = \frac{dR}{R} - \alpha_i\,\frac{dw}{w} - \beta_i\,\frac{d\nu}{\nu} \tag{9}$$

Tenant compte de (8) et de ce que $\beta_i - \overline{\beta} = -(\alpha_i - \overline{\alpha})$, nous pouvons tout aussi bien écrire :

$$\frac{dy_i}{y_i} = \frac{dR}{R} - (\alpha_i - \overline{\alpha})\left(\frac{dw}{w} - \frac{d\nu}{\nu}\right) = \frac{dR}{R} - (\beta_i - \overline{\beta})\left(\frac{d\nu}{\nu} - \frac{dw}{w}\right) \tag{10}$$

La différentiation des équations (2) peut prendre la forme :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{L} \cdot \frac{dy_i}{y_i} \qquad\qquad \frac{dM}{M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{M} \cdot \frac{dy_i}{y_i} \tag{11}$$

Introduisant les expressions données par (10) pour dy_i/y_i à l'intérieur de ces deux dernières équations, nous allons être conduits à deux équations liant dR/R et dM/M à dw/w et $d\nu/\nu$. Compte tenu de (8), nous obtiendrons alors l'équation cherchée qui liera dM/M au seul $d\nu/\nu$.

Pour effectuer commodément cette opération et en tirer les enseignements nous avons intérêt à étudier d'abord l'expression :

$$\operatorname{cov}(\alpha, L) = \sum_{i=1}^{n} \frac{L_i}{L}(\alpha_i - \overline{\alpha}) \tag{12}$$

Comme nous l'avons vu $\alpha_i = wn_i/p_i$ et $L_i = n_i y_i = \gamma_i n_i R/p_i$. Ainsi :

$$\frac{L_i}{L} = \frac{R}{wL}\gamma_i\alpha_i \tag{13}$$

impliquant par sommation :

$$wL = \overline{\alpha}R \tag{14}$$

Ainsi $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ calculés par les équations (7) correspondent respectivement aux parts des revenus allant au travail qualifié et au travail non-qualifié.

Il résulte de (13) que :

$$\operatorname{cov}(\alpha, L) = \frac{R}{wL}\sum_{t=1}^{n} \gamma_i(\alpha_i - \overline{\alpha})^2 = \frac{R}{wL}\operatorname{var}(\alpha) = \frac{\operatorname{var}(\alpha)}{\overline{\alpha}} \tag{15}$$

Faisant intervenir (10) dans la première des équations (11) et tenant compte de (15), nous obtenons :

$$0 = \frac{dR}{R} - \frac{\operatorname{var}(\alpha)}{\overline{\alpha}}\left(\frac{dw}{w} - \frac{d\nu}{\nu}\right) \tag{16}$$

De même transposant (15), nous obtenons à partir de la seconde des équations (11) :

$$\frac{dM}{M} = \frac{dR}{R} - \frac{\operatorname{var}(\beta)}{\overline{\beta}} \left(\frac{d\nu}{\nu} - \frac{dw}{w} \right) \tag{17}$$

Soustrayant (16) de (17) et observant que $\operatorname{var}(\beta) = \operatorname{var}(\alpha)$, nous trouvons :

$$\frac{dM}{M} = -\frac{\operatorname{var}(\beta)}{\overline{\alpha}\overline{\beta}} \left(\frac{d\nu}{\nu} - \frac{dw}{w} \right) \tag{18}$$

et, compte tenu de (8) :

$$\frac{dM}{M} = \frac{-\operatorname{var}(\beta)}{(1-\overline{\beta})^2\,\overline{\beta}} \cdot \frac{d\nu}{\nu} \tag{19}$$

Comme $\operatorname{var}(\beta)$ caractérise, dans l'équilibre de référence, le degré d'hétérogénéité des technologies quant à leur recours à la main-d'œuvre non-qualifiée, l'élasticité de M par rapport à ν apparaît non seulement négative en général mais aussi proportionnelle, en valeur absolue, à ce degré d'hétérogénéité. Le biais de sous-estimation B du raisonnement macroéconomique qui, arguant de ce que $\sigma_P = 0$, retiendrait un effet nul des variations de ν sur M est exactement celui donné par la formule (99) du texte puisque nous avons retenu ici $\sigma = 1$.

Pour nous faire une idée de l'ordre de grandeur que peut atteindre au maximum cette valeur absolue η, considérons le cas extrême de deux secteurs dont l'un n'emploierait que du travail qualifié, l'autre que du travail non-qualifié et où les paramètres auraient les valeurs suivantes :

$$m_1 = n_2 = 0 \quad n_1 = 0{,}5 \quad m_2 = 1 \quad \gamma_1 = 8/9 \quad \gamma_2 = 1/9 \quad \overline{L} = 4 \tag{20}$$

Considérons l'équilibre de référence où les variables de quantité seraient :

$$y_1 = 8 \quad y_2 = 1 \quad L_1 = \overline{L} = 4 \quad L_2 = M_1 = 0 \quad M_2 = M = 1 \tag{21}$$

et les variables de prix ou de valeur :

$$p_1 = p_2 = 1 \qquad w = 2 \qquad \nu = 1 \qquad R = 9 \tag{22}$$

(il est facile de vérifier que toutes les équations de l'équilibre sont satisfaites). Nous en déduisons :

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = \beta_1 = 0 \quad \beta_2 = 1 \quad \overline{\beta} = 1/9 \quad \operatorname{var}(\beta) = 8/81 \tag{23}$$

L'équation (19) donne alors la valeur de $-9/8$ pour l'élasticité de M par rapport à ν. Un modèle agrégé qui aurait exprimé la complète complémentarité entre facteurs dans la production aurait conduit à une élasticité nulle. Le « biais d'agrégation » serait alors très important. Dans un cas moins extrême et plus réaliste que celui spécifié ci-dessus le biais serait évidemment moindre.

ANNEXE 2

Parfaite substituabilité entre demandes de biens et fonction de production agrégée

1. Le modèle avec parfaite substituabilité entre biens

Le cas de parfaite substituabilité (σ infiniment grand) est plus aisé à traiter que le cas général de la section 4 puisqu'une telle substituabilité impose l'égalité de tous les prix p_i, donc $p_i = 1$ pour tout i du fait de la normalisation. Par ailleurs nous avons bien compris comment la valeur de l'élasticité de substitution dans la production σ_P intervenait dans l'analyse. Nous pouvons donc simplifier à cet égard et retenir $\sigma_P = 1$, c'est-à-dire des fonctions de production de *Cobb-Douglas*. Comme dans le texte nous admettons un même degré de décroissance des rendements d'échelle dans tous les secteurs.

Les équations de base sont donc :

$$(1) \qquad y_i = A_i L_i^{\alpha_i} M_i^{\beta_i} \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = R$$

avec,

$$(2) \qquad \alpha_i + \beta_i = \frac{c-1}{c}$$

où c est un nombre supérieur à 1, tandis que $(c-1)/c$ joue le même rôle que μ dans le cas général de la section 4. Les égalités entre les coûts des facteurs et leurs productivités marginales impliquent :

$$(3) \qquad wL_i = \alpha_i y_i \qquad\qquad \nu M_i = \beta_i y_i$$

Le traitement direct du système ainsi posé est beaucoup plus aisé que celui de la section 4. Nous en explicitons ici seulement les étapes principales. La différenciation des fonctions de production et des équations (3), puis l'élimination des dy_i/y_i et la résolution en dL_i/L_i et dM_i/M_i conduisent à :

$$(4) \qquad -\frac{dL_i}{L_i} = (1+a_i)\frac{dw}{w} + b_i\frac{d\nu}{\nu} \qquad -\frac{dM_i}{M_i} = a_i\frac{dw}{w} + (1+b_i)\frac{d\nu}{\nu}$$

où,

$$(5) \qquad a_i = c\,\alpha_i \qquad\qquad b_i = c\,\beta_i$$

Comprenant dès ce stade que toutes les variations microéconomiques dL_i/L_i et dM_i/M_i pourraient être considérées comme fonctions des deux seules variations dw/w et $d\nu/\nu$, nous percevons que l'agrégation des équations (4) va nous aider beaucoup.

Nous partons alors naturellement des identités :

$$(6) \qquad \frac{dL}{L} = \sum_i \frac{L_i}{L}\cdot\frac{dL_i}{L_i} \qquad\qquad \frac{dM}{M} = \sum_i \frac{M_i}{M}\cdot\frac{dM_i}{M_i}$$

qui suggèrent l'introduction, comme caractéristiques agrégées, des moyennes pondérées :

$$(7) \qquad \overline{\alpha} = \sum_i \frac{y_i}{R}\alpha_i \qquad\qquad \overline{\beta} = \sum_i \frac{y_i}{R}\beta_i$$

donc,

$$(8) \qquad \overline{\alpha} + \overline{\beta} = \frac{c-1}{c}$$

En effet (1) et (3) impliquent alors :

$$(9) \qquad wL = \overline{\alpha}R \qquad\qquad \nu M = \overline{\beta}R$$

donc,

$$(10) \qquad \frac{L_i}{L} = \frac{\alpha_i}{\overline{\alpha}} \cdot \frac{y_i}{R} \qquad\qquad \frac{M_i}{M} = \frac{\beta_i}{\overline{\beta}} \cdot \frac{y_i}{R}$$

Rapprochées des équations (47) et (49) du texte principal, les équations (7), (9) et (10) nous montrent d'ailleurs que, pour le cas limite qui nous intéresse maintenant, k_i doit bien être remplacé par y_i/R.

Tenant compte de (6), de (4) et de (5) nous trouvons :

$$(11) \qquad -\frac{dL}{L} = [1 + c\langle L,\alpha\rangle]\frac{dw}{w} + c\langle L,\beta\rangle\frac{d\nu}{\nu}$$

$$(12) \qquad -\frac{dM}{M} = c\langle M,\alpha\rangle\frac{dw}{w} + [1 + c\langle M,\beta\rangle]\frac{d\nu}{\nu}$$

où par exemple :

$$(13) \qquad \langle L,\alpha\rangle = \sum_i \frac{L_i}{L}\alpha_i$$

et de même pour $\langle M,\alpha\rangle$, $\langle L,\beta\rangle$, $\langle M,\beta\rangle$.

Or nous voyons directement de (7) et (10) que :

$$(14) \qquad \langle L,\alpha\rangle = \sum_i \frac{y_i}{R} \cdot \frac{\alpha_i^2}{\overline{\alpha}} = \frac{\operatorname{var}(\alpha)}{\overline{\alpha}} + \overline{\alpha}$$

où

$$(15) \qquad \operatorname{var}(\alpha) = \sum_i \frac{y_i}{R}(\alpha_i - \overline{\alpha})^2$$

Nous retrouvons ainsi l'indicateur du degré d'hétérogénéité tel qu'il a été défini dans le texte par l'équation (89). De même, compte tenu de (2) :

$$(16) \qquad \langle M,\alpha\rangle = \sum_i \frac{y_i}{R} \cdot \frac{\alpha_i\beta_i}{\overline{\beta}} = \frac{c-1}{c} - \left[\frac{\operatorname{var}(\beta)}{\overline{\beta}} + \overline{\beta}\right]$$

Nous observons encore que (2) et (8) impliquent $\operatorname{var}(\beta) = \operatorname{var}(\alpha)$, que nous écrivons simplement var. Finalement (11) et (12) se traduisent par :

$$(17) \qquad -\frac{dL}{L} = \left[1 + c\,\overline{\alpha} + \frac{c\,\mathrm{var}}{\overline{\alpha}}\right]\frac{dw}{w} + \left[c - 1 - c\,\overline{\alpha} - \frac{c\,\mathrm{var}}{\overline{\alpha}}\right]\frac{d\nu}{\nu}$$

$$(18) \qquad -\frac{dM}{M} = \left[c - 1 - c\,\overline{\beta} - \frac{c\,\mathrm{var}}{\overline{\beta}}\right]\frac{dw}{w} + \left[1 + c\,\overline{\beta} + \frac{c\,\mathrm{var}}{\overline{\beta}}\right]\frac{d\nu}{\nu}$$

Pour aboutir à la formule donnant l'élasticité de la demande agrégée de travail non-qualifié par rapport au coût de ce travail, le coût du travail qualifié s'ajustant pour assurer $dL = 0$, il suffit d'éliminer dw/w des deux équations (17) et (18), le membre de gauche de (17) y étant pris égal à zéro. Le calcul donne :

$$(19) \qquad -H\frac{dM}{M} = K\frac{d\nu}{\nu}$$

où

$$(20) \qquad H = 1 - \overline{\beta} + \frac{\mathrm{var}}{\overline{\alpha}} \qquad\qquad K = 1 + c\left[\frac{1}{\overline{\alpha}} + \frac{1}{\overline{\beta}}\right]\mathrm{var}$$

Nous notons tout d'abord que ce résultat correspond précisément à celui (97) obtenu dans la section 4 dès que, conformément à (102) et à l'équation (8) de cette annexe, on le particularise pour les valeurs $\omega = 0$, $\sigma = \infty$ et $(1-\mu)\nu = 1$ donc $\nu = c$.

Quant au biais *B*, il a l'expression simple :

$$(21) \qquad B = \frac{c}{\overline{\beta}\,\left(1 - \overline{\beta}\right)H}\,\mathrm{var}\,(\beta)$$

La formule à laquelle nous sommes ainsi parvenus fait apparaître un biais non seulement positif et croissant presque en proportion de la variance des β_i mais étant aussi quasiment proportionnel à *c*, c'est-à-dire à l'inverse du degré de décroissance de rendements d'échelle. Si par exemple $\overline{\beta} = 0{,}1$ et $\mathrm{var}\,(\beta) = 25.10^{-4}$, le biais est approximativement égal à $0{,}031\,c$ soit $0{,}15$ si $\overline{\alpha} = 0{,}7$ (donc $c = 5$) mais $0{,}31$ si $\overline{\alpha} = 0{,}8$ (donc $c = 10$). Un tel biais ne serait pas négligeable.

2. La fonction de production agrégée avec parfaite substituabilité des biens

Pour ce cas de parfaite substituabilité entre les demandes pour les productions des différents secteurs, *Théorie Macroéconomique*, (E. MALINVAUD [1981]) explicite ce que l'on peut appeler la fonction de production agrégée. L'ouvrage considère en effet dans la section 5.2 du Chapitre 4 un système productif dont tous les secteurs produiraient le même bien à partir des deux mêmes facteurs, mais en conformité chacun avec sa propre fonction de production. Ces secteurs opéreraient dans un environnement de concurrence parfaite et prendraient donc pour données les coûts réels w et ν des unités des deux facteurs. Sans avoir à faire intervenir les lois qui, dans le système économique entier, déterminent w et ν, on démontre simplement l'existence d'une fonction de production globale déduite du seul fonctionnement du système productif.

Pour chaque secteur la production et les *inputs* des deux facteurs sont en effet déterminés à partir des deux grandeurs w et ν grâce à trois équations spécifiant respectivement la fonction de production et l'égalité de w (et de ν) à la productivité marginale du facteur correspondant. Après agrégation la production globale et les *inputs* globaux des deux facteurs satisfont aussi trois équations qui les déterminent respectivement en fonction des deux variables w et ν et des paramètres caractérisant les fonctions de production des secteurs. L'élimination de w et ν du système formé par les trois équations en cause conduit à une équation où interviennent seulement la production globale, les inputs globaux et les paramètres des fonctions de production élémentaires. La section en cause de *Théorie macroéconomique* montre en quoi il est légitime de désigner l'équation ainsi obtenue comme fonction de production globale : non seulement elle s'applique inchangée, quelles que soient les variations subies par les coûts des facteurs ; mais aussi à l'équilibre correspondant à ce que sont ces coûts, elle donne directement deux « productivités marginales » respectivement égales aux coûts en question.

Prenant l'exemple de fonctions élémentaires de *Cobb-Douglas* faisant toutes intervenir les mêmes exposants $\alpha_i = \alpha$ et $\beta_i = \beta$, *Théorie macroéconomique* démontre aisément que l'équation résultant de l'élimination de w et ν a la forme d'une fonction de *Cobb-Douglas* avec les mêmes exposants α et β. Mais en général la relation entre la forme de la fonction de production globale et la spécification des fonctions élémentaires est moins simple.

Dans le cadre de cette annexe nous pouvons voir ce qu'il en est pour le cas de parfaite substituabilité entre les biens et de fonctions élémentaires de *Cobb-Douglas* dont les exposants diffèrent mais ont tous la même somme $\alpha_i + \beta_i$, comme l'impose l'équation (2). À tout le moins nous pouvons examiner les caractéristiques locales de la fonction de production aggrégée au voisinage d'un équilibre se caractérisant par les valeurs (L, M, R) des quantités et les valeurs (w,ν) des coûts. Des trois équations qui déterminent dL/L, dM/M et dR/R en fonction de dw/w et $d\nu/\nu$ nous en avons déjà écrites deux, (17) et (18). La troisième résultera directement de :

$$(22) \qquad \frac{dR}{R} = \sum_i \frac{y_i}{R} \cdot \frac{dy_i}{y_i} = \sum_i \frac{\alpha_i y_i}{R} \cdot \frac{dL_i}{L_i} + \sum_i \frac{\beta_i y_i}{R} \cdot \frac{dM_i}{M_i}$$

et des deux équations (4) exprimant les dL_i/L_i et dM_i/M_i en fonction de dw/w et $d\nu/\nu$. Il est immédiat de voir que cette troisième équation prend la forme :

$$(23) \qquad -\frac{dR}{R} = c\,\overline{\alpha}\,\frac{dw}{w} + c\overline{\beta}\,\frac{d\nu}{\nu}$$

Or (17) et (18) impliquent directement :

$$(24) \qquad \frac{dM}{M} - \frac{dL}{L} = K\left[\frac{dw}{w} - \frac{d\nu}{\nu}\right]$$

En d'autres termes le rapport M/L varie en proportion de la variation du taux marginal de substitution[15]. Le facteur qui, dans (24), donne cette proportion est par définition *l'élasticité de substitution* entre les deux facteurs. Nous voyons qu'il est supérieur à 1 et d'autant plus grand que le sont l'hétérogénéité des β_i et le facteur c égal à l'inverse du degré $1 - \alpha_i - \beta_i$ de décroissance des rendements d'échelle. Ce résultat montre qu'une phrase de

15. Le fait que cette proportion s'applique quelles que soient les deux variations infinitésimales de w et ν résulte de ce que, dans le cas étudié, les isoquantes de la fonction de production aggrégée sont homothétiques par rapport à l'origine.

Théorie macroéconomique (chapitre 4, section 5.2) est trompeuse, celle qui annonce, page 213, que la fonction de production agrégée peut avoir « une élasticité de substitution soit inférieure, soit supérieure à 1, alors que les fonctions [élémentaires] ont toutes une élasticité de substitution égale à 1 ». De fait, au moins quand le même degré de décroissance des rendements s'applique à tous les secteurs, l'élasticité de substitution ne peut pas être inférieure à 1 ; elle lui est même supérieure en cas d'hétérogénéité des β_i. L'annexe 4 ci-dessous suggère de plus qu'introduire aussi une hétérogénéité des $\alpha_i + \beta_i$ ne ferait que relever davantage encore l'élasticité de substitution[16].

ANNEXE 3

Parfaite complémentarité dans les demandes de biens

Dans la section 4 nous avons supposé dès le début que l'élasticité de substitution σ était positive. L'hypothèse a vite joué un rôle, dès que, partant des équations (56), (59) et (60), nous en avons déduit (61) où $1/\sigma$ intervient dans la définition de λ et comme multiplicateur de dR/R. Or cette équation a introduit toute la suite des raisonnements. Cependant le résultat (98)-(99), auquel nous sommes parvenus, peut être lu sans difficulté pour $\sigma = 0$, car ν est le seul paramètre par lequel les caractéristiques de la consommation y interviennent (mis à part indirectement par les k_i qui servent comme pondération dans le calcul des moyennes $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$). Or l'équation (102) donne à ν une valeur bien définie quand $\sigma = 0$. Pour compléter la section 4 il convient donc d'esquisser comment les raisonnements qui y sont faits se transposent au cas où $\sigma = 0$. Voici les éléments de la transposition.

Pour certaines équations les transpositions s'écrivent simplement (les numéros de ces équations sont maintenus avec l'addition d'une astérisque) :

$$y_i = \gamma_i R \qquad (41^*)$$

$$-\frac{dw}{w} = -\frac{dp_i}{p_i} - \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\frac{dR}{R} + (1+\omega)\frac{dL_i}{L_i} \qquad (61^*)$$

$$-\frac{dw}{w} = -\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\frac{dR}{R} + (1+\omega)\varphi \qquad (64^*)$$

$$-\frac{d\nu}{\nu} = -\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\frac{dR}{R} + (1+\omega)\Psi \qquad (65^*)$$

16. La phrase en cause de *Théorie macroéconomique* ne peut résulter que d'une erreur de ma part lors d'une première analyse du problème. J'ai vraisemblablement été trop confiant dans les simulations de F. FISHER, R. SOLOW et J. KEARL dont il est fait état par un renvoi à la page 213. Il se trouve que ces simulations appliquaient non le modèle de la section 5.2 mais celui de la section 5.3 du même chapitre 4.

Aux deux décompositions (66) et (67) qui sont maintenues, il convient d'ajouter :

(68*) $$\pi_i = \frac{dp_i}{p_i}$$

De (61*) et (63*) qui a la même forme, ainsi que de (64*), (65*), (66), (67) et (68*) se déduisent :

(69*) $$0 = (1+\omega)\eta_i - \pi_i$$

(70*) $$0 = (1+\omega)\theta_i - \pi_i$$

d'où,

(71*) $$\eta_i = \theta_i \qquad \pi_i = (1+\omega)\theta_i$$

De (41*) et de la fonction de production du secteur *i* nous obtenons :

(I) $$\frac{dR}{R} = \mu\theta_i + \alpha_i\varphi + \beta_i\Psi$$

qui permet d'écrire :

(II) $$\frac{dR}{R} = \mu\sum_i \gamma_i\theta_i + \overline{\alpha}\varphi + \overline{\beta}\Psi$$

Or la normalisation (57) permet de vérifier que

(III) $$\sum_i \gamma_i\theta_i = 0$$

L'équation (II) se simplifie donc :

(IV) $$\frac{dR}{R} = \overline{\alpha}\,\varphi + \overline{\beta}\,\Psi$$

Rapprochée de (I) cette dernière équation conduit à :

(V) $$\theta_i = \frac{1}{\mu}(\beta_i - \overline{\beta})(\varphi - \Psi)$$

Par analogie avec (77) nous posons :

(VI) $$\nu = \frac{-1}{\mu}$$

qui est bien la valeur donnée pour ν par (102) quand $\sigma = 0$.

Les équations (66), (67) et (V) conduisent alors directement à (78) et (79). De même, tenant compte de (IV) dans (64*) et (65*) nous retrouvons exactement (83) et (84). Nous pouvons alors poursuivre, sans changement à partir de ces équations et jusqu'au bout, le raisonnement de la section 4.

ANNEXE 4

Hétérogénéité dans la décroissance des rendements d'échelle

Cet article a concentré l'attention sur l'hétérogénéité des secteurs de production quant à l'intensité de leur recours au travail non-qualifié (les β_i dans une formulation où le degré de décroissance des rendements d'échelle $1-\mu$ avait la même valeur dans tous les secteurs). L'approche utilisée peut servir à étudier d'autres formes d'hétérogénéité. Par exemple, il est possible de faire intervenir, conjointement avec l'hétérogénéité des β_i, une autre dimension d'hétérogénéité se manifestant dans les demandes de biens adressées aux divers secteurs (E. MALINVAUD [2001]). Dans cette annexe nous allons étudier comment, à elle seule, l'hétérogénéité dans la décroissance des rendements d'échelle pourrait expliquer un biais d'agrégation. Le lecteur sera alors en mesure d'étudier ce qui se passerait si cette nouvelle dimension d'hétérogénéité intervenait conjointement avec celle considérée dans le corps de l'article.

Nous reportant au cas de l'économie log-linéaire étudiée dans la section 3, nous constatons que la démonstration de l'absence de biais d'agrégation s'applique sans aucune restriction qui porterait sur la distribution statistique des couples (α_i, β_i). En particulier il n'y est pas supposé que la somme $\alpha_i + \beta_i$ soit la même dans tous les secteurs. Il s'agit d'un premier résultat pour le cas qui nous intéresse maintenant. Mais nous devons, bien sûr, considérer des cas moins spéciaux.

En revanche notre exploration du système CES nous a montré que supposer $\sigma_P = 1$, donc des fonctions de production toutes *Cobb-Douglas*, nous permettait de bien jalonner l'ensemble des possibilités apparaissant dans ce système. Forts de ce précédent nous allons faire la supposition $\sigma_P = 1$ dans cette annexe.

Nous pouvons dès lors procéder comme dans la section 4 reprenant les équations (48) à (50), notamment :

$$(1) \qquad wL_i = \alpha_i p_i y_i \qquad \nu M_i = \beta_i p_i y_i \qquad p_i y_i = k_i R$$

$$(2) \qquad w\overline{L} = \overline{\alpha} R \qquad \frac{L_i}{L} = \frac{k_i \alpha_i}{\overline{\alpha}} \qquad \frac{M_i}{M} = \frac{k_i \beta_i}{\overline{\beta}}$$

Nous pouvons aussi procéder aux différenciations jusqu'au système réduit (61)-(63) s'appliquant au cas $\sigma > 0$. Nous écrivons maintenant ce système :

$$(3) \qquad -\frac{dw}{w} = \left[1 - \frac{\alpha_i(\sigma-1)}{\sigma}\right]\frac{dL_i}{L_i} - \frac{\beta_i(\sigma-1)}{\sigma}\frac{dM_i}{M_i} - \frac{1}{\sigma}\frac{dR}{R}$$

$$(4) \qquad -\frac{d\nu}{\nu} = -\frac{\alpha_i(\sigma-1)}{\sigma}\frac{dL_i}{L_i} + \left[1 - \frac{\beta_i(\sigma-1)}{\sigma}\right]\frac{dM_i}{M_i} - \frac{1}{\sigma}\frac{dR}{R}$$

Nous allons comme précédemment réécrire les équations (66) à (68) soit :

$$(5) \qquad \frac{dL_i}{L_i} = \varphi + \eta_i \qquad \frac{dM_i}{M_i} = \Psi + \theta_i \qquad \frac{dy_i}{y_i} = \overline{\alpha}\varphi + \overline{\beta}\Psi + \xi_i$$

φ et Ψ étant définis comme solution de :

$$(6) \qquad -\frac{dw}{w} = \left[1 - \frac{\overline{\alpha}(\sigma-1)}{\sigma}\right]\varphi - \frac{\overline{\beta}(\sigma-1)}{\sigma}\Psi - \frac{1}{\sigma}\frac{dR}{R}$$

$$(7) \qquad -\frac{dv}{v} = -\frac{\overline{\alpha}(\sigma-1)}{\sigma}\varphi + \left[1 - \frac{\overline{\beta}(\sigma-1)}{\sigma}\right]\Psi - \frac{1}{\sigma}\frac{dR}{R}$$

Prenant en compte les équations (3) à (7) nous aboutissons, comme dans la sous-section 4.3 à :

$$(8) \qquad \eta_i = \theta_i\,\xi_i = (\alpha_i + \beta_i)\theta_i + (\alpha_i - \overline{\alpha})\varphi + (\beta_i - \overline{\beta})\Psi$$

$$(9) \quad [1 - (\alpha_i + \beta_i)(\sigma - 1)/\sigma]\,\theta_i = [(\alpha_i - \overline{\alpha})\varphi + (\beta_i - \overline{\beta})\Psi](\sigma - 1)/\sigma$$

Après ces préliminaires nous posons l'hypothèse grâce à laquelle nous allons isoler une seule dimension d'hétérogénéité, celle des $1 - \alpha_i - \beta_i$ qui, dans le corps du texte, étaient au contraire supposés prendre tous la même valeur. L'hypothèse commode est maintenant :

$$(10) \qquad \alpha_i = h_i\alpha \qquad\qquad \beta_i = h_i\beta \qquad\qquad \overline{h} = 1$$

où $\overline{h}$ est évidemment la moyenne pondérée des h_i avec les poids k_i, de même que $\overline{\alpha}$ (ou $\overline{\beta}$) était la moyenne des α_i (ou β_i) avec les poids k_i. Ainsi $\overline{\alpha} = \alpha$, $\overline{\beta} = \beta$ et $\alpha_i + \beta_i = h_i(\alpha + \beta)$ tandis que le rapport β_i/α_i prend la même valeur β/α dans tous les secteurs.

Avec cette hypothèse θ_i prend l'expression suivante :

$$(11) \qquad \theta_i = \rho_i(h_i - 1)(\alpha\varphi + \beta\Psi)$$

où,

$$(12) \qquad \rho_i = \left[\frac{\sigma}{\sigma - 1} - (\alpha + \beta)h_i\right]^{-1}$$

Tenant compte de l'équation (85) du texte, de la valeur donnée pour L_i/L par l'équation (2) et de celle $\varphi + \theta_i$ donnée pour dL_i/L_i par (5) vu (8), enfin de l'équation (11), nous obtenons :

$$(13) \qquad \frac{dL}{L} = \varphi + V(\alpha\varphi + \beta\Psi)$$

où,

$$(14) \qquad V = \sum_i k_i\rho_i h_i(h_i - 1)$$

Cette dernière expression peut être calculée, compte tenu de (12), à partir de la distribution statistique des h_i et des valeurs des deux paramètres σ et $\alpha + \beta$. Nous y reviendrons.

À l'équation (13) nous ajoutons l'équation correspondante :

$$\frac{dM}{M} = \Psi + V(\alpha\varphi + \beta\Psi) \tag{15}$$

Puis tenant compte de (58), de (5), de (8) et de (11) nous obtenons :

$$\frac{dR}{R} = \alpha\varphi + \beta\Psi + \sum_i k_i \xi_i = (\alpha\varphi + \beta\Psi)[1 + (\alpha + \beta)V] \tag{16}$$

de sorte que les équations (6) et (7) prennent maintenant les formes suivantes, établies pour $\sigma > 0$:

$$-\frac{dw}{w} = \varphi - (\alpha\varphi + \beta\Psi)\left[1 + \frac{\alpha + \beta}{\sigma}V\right] \tag{17}$$

$$-\frac{d\nu}{\nu} = \Psi - (\alpha\varphi + \beta\Psi)\left[1 + \frac{\alpha + \beta}{\sigma}V\right] \tag{18}$$

Avec l'équation (13), dans laquelle $dL = 0$ du fait de l'équilibre du marché du travail qualifié, l'équation (15) et l'équation (18) où $d\nu/\nu$ est exogène, il nous est aisé de dégager l'élasticité de M par rapport à ν grâce à l'élimination de φ et Ψ. L'équation (13) donne d'abord :

$$\Psi = \frac{-(1 + \alpha V)}{\beta V}\varphi \tag{19}$$

ce qui permet de transformer (15) et (18) en :

$$-\frac{dM}{M} = \frac{1 + (\alpha + \beta)V}{\beta V}\varphi \qquad -\frac{d\nu}{\nu} = \frac{1 - \beta + \left[\alpha - \frac{\beta}{\sigma}(\alpha + \beta)\right]V}{\beta V}\varphi \tag{20}$$

Ainsi,

$$-\frac{dM}{M} = \left\{1 - \beta + \left[\alpha - \frac{\beta}{\sigma}(\alpha + \beta)\right]V\right\}^{-1}[1 + (\alpha + \beta)V]\frac{d\nu}{\nu} \tag{21}$$

Écrivons cette formule sous la forme :

$$-\frac{dM}{M} = \left[\frac{1}{1 - \beta} + B\right]\frac{d\nu}{\nu} \tag{22}$$

Posant :

$$\hat{H} = 1 - \beta + \left[\alpha - \frac{\beta}{\sigma}(\alpha + \beta)\right]V \tag{23}$$

nous en déduisons le biais d'agrégation :

$$B = \frac{\sigma - (\sigma - 1)(\alpha + \beta)}{\sigma(1 - \beta)\hat{H}}\beta V \tag{24}$$

L'analyse de cette formule est délicate : outre la distribution statistique des h_i par l'intermédiaire de V, elle fait intervenir les paramètres α, β et σ à la fois directement et indirectement dans V par l'intermédiaire des ρ_i. On peut néanmoins l'interpréter en étudiant des approximations pour le cas usuel où :

$$\text{var}\,(h) = \sum_i k_i (h_i - 1)^2 \tag{25}$$

est petit.

Auparavant notons que le cas de l'économie log-linéaire où $\sigma = 1$ est simple puisque $\rho_i = 0$ pour tout i, impliquant $V = 0$, donc un biais B nul, ainsi que nous le savions déjà par l'analyse directe de la section 3.

Nous nous contentons pour V d'une approximation valable au cas où var (h) serait infiniment petit. Écrivant $h_i = 1 + \varepsilon_i$ nous cherchons pour $\rho_i h_i (h_i - 1)$ le développement limité au second ordre en ε_i, donc d'abord le développement au premier ordre de ρ_i. Nous trouvons alors :

$$\rho_i = \widetilde{\rho} + (\alpha + \beta)(\widetilde{\rho})^2\, \varepsilon_i \tag{26}$$

où,

$$\widetilde{\rho} = \left[\frac{\sigma}{\sigma - 1} - (\alpha + \beta)\right]^{-1} \tag{27}$$

L'équation (14) implique alors l'approximation :

$$V = \widetilde{\rho}\,[1 + (\alpha + \beta)\widetilde{\rho}\,]\,\text{var}\,(h) \tag{28}$$

Au premier ordre en var (h) et pour $\sigma > 0$, le biais d'agrégation B donné par (24) est alors[17] :

$$B = \frac{\beta\widetilde{\rho}}{(1 - \beta)^2}\,\text{var}\,(h) \tag{29}$$

Ce biais a le signe de $\widetilde{\rho}$ un paramètre qui, nul pour $\sigma = 1$, est positif pour $\sigma > 1$ (l'inégalité $\alpha + \beta \leqslant 1$ est nécessaire à la validité de l'hypothèse de concurrence parfaite sur le marché des biens). En revanche pour $\sigma < 1$, le paramètre $\widetilde{\rho}$ est négatif. Nous avons ainsi la même configuration que celle trouvée dans le corps du texte pour l'hétérogénéité des β_i, les $\alpha_i + \beta_i$ prenant alors la même valeur dans tous les secteurs : le biais d'agrégation est positif ou négatif selon que l'élasticité de substitution dans la consommation est élevée ou faible. Il semble toutefois que les ordres de grandeur du biais sont plus petits.

Ainsi pour la parfaite substituabilité entre les biens qui fait l'objet de l'annexe 2, c'est-à-dire pour σ infiniment grand, $\widetilde{\rho}$ est égal à $(1 - \alpha - \beta)^{-1}$. Les valeurs $\alpha = 0{,}8$; $\beta = 0{,}1$ et $\text{var}\,(h) = 25.10^{-4}$ conduiraient à un biais ne valant que 31.10^{-4}. D'autres valeurs de σ conduisent à des valeurs de $\widetilde{\rho}$, donc à des biais B, encore plus faibles. Ainsi $B = 3.10^{-4}$ pour $\sigma = 2$ et $B = -2.10^{-4}$ pour $\sigma = 0{,}5$.

---

17. Cette approximation considère comme négligeable le terme en V de $\hat{H}$. Elle serait mauvaise si σ était proche de zéro c'est-à-dire si existait une forte complémentarité entre les demandes des divers biens. Nous négligeons cette éventualité dans la présente annexe.