Inégalités, mobilité sociale et croissance[1]

Fernando JARAMILLO[2] et Fabien MOIZEAU[3]

25 mai 2001

[1]Nous tenons à remercier particulièrement H. Kempf pour ses précieux conseils. Nous remercions également A. d'Autume, P. Cahuc, A. Desdoigts et J.P. Drugeon pour leurs commentaires ainsi que les participants aux séminaires d'EUREQua, de l'EPEE, du GEAPE, du groupe Générations Imbriquées, au colloque de la Society of Economics Dynamics de 1999, au colloque "Théorie et Méthodes Macroéconomiques" 1999, au colloque "Crises, croissance et inégalités" 1999 du CEDERS et le rapporteur dont les remarques et suggestions ont permis d'améliorer la présentation du papier. Nous restons seuls responsables des erreurs pouvant subsister.

[2]EUREQua, Université de Paris I Panthéon Sorbonne, 106-112 Boulevard de l'Hôpital 75647 Paris cedex 13. email : fjaramillo@cega.org.co.

[3]EUREQua, Université de Paris I Panthéon Sorbonne, 106-112 Boulevard de l'Hôpital 75647 Paris cedex 13. email : fmoizeau@univ-paris1.fr.

Résumé

Cet article analyse les implications de la mobilité sociale sur la croissance économique et la dynamique des inégalités. Nous développons un modèle de croissance dans lequel les agents bénéficient d'externalités locale et sociale. Dans un premier temps, nous caractérisons la partition d'équilibre de la société réalisée à chaque date. Puis, nous étudions la dynamique transitoire et montrons l'existence de deux équilibres de long terme possibles : un équilibre intégré avec un taux de croissance maximal et un équilibre ségrégé.

Code JEL : D71, O40.

Mots-clés : Clubs, Croissance économique.

Abstract

The aim of the present paper is to analyze the influence of social mobility on inequality dynamics and economic growth. We develop a framework in which agents accumulate human capital benefiting from two types of externalities : a social one and a local one. After having characterized the equilibrium partition which can appear at each date, we study the dynamics properties of this model. We show that the economy can reach two possible steady states : an integrated equilibrium with the highest rate of growth and a segregated equilibrium.

JEL classification : D71, O40.

Key words : Clubs, Economic growth.

Abstract

Using the results of the privately provided public good theory, the aim of the present paper is to analyze the influence of social mobility on inequality dynamics and economic growth. In a society with three social classes, we develop a framework in which agents accumulate human capital benefiting from two types of externalities : the average level of human capital and the club good produced in the community to which the agent belongs. The main feature of our model is that the partition of the society can change through time (the society is socially mobile). For example, on the transitional dynamics, as some agents accumulate wealth more rapidly than others, they can break the existing partition and form new communities with richer agents who refused them before (case of upper social mobility). Consequently, this model underlies the interaction between the human capital distribution, the partition of the society and the rate of accumulation. At each date, the distribution determines a partition that defines a rate of growth. The date after, a new distribution emerges.

Besides, we focus on partitions of the society that belong to the core. In a first step, we show that the core partition that appears at each date is composed of consecutive clubs, is unique and welfare ordered. Then, we study the dynamics properties of this model. We prove the existence of two possible steady states : the first one is the integrated equilibrium with one club covering the whole society and the second one is the segregated equilibrium in which the rich and the middle class are together, excluding the poor agents. We show that, at the integrated equilibrium, the rate of growth is maximal. Finally, in order to know which steady state will be reached, we offer conditions on the initial distribution and on the importance of the local externality compared to the social one. In fact, the idea is that there will be segregation in the long term if, initially, the middle class is relatively close from the rich. Moreover, the local externality must be higher than the social one which is a convergence force.

JEL classification : D71, O40.

Key words : Clubs, Economic growth.

"Ce phénomène des nouvelles élites, qui, par un mouvement incessant de circulation, surgissent des couches inférieures de la société, montent dans les couches supérieures, s'y épanouissent, et, ensuite, tombent en décadence, sont anéanties, disparaissent, est un des principaux de l'histoire, et il est indispensable d'en tenir compte pour comprendre les grands mouvements sociaux." (Pareto, 1902-1903, I, p. 15 cité dans Merllié et Prévot, *La mobilité sociale* (1997), p. 3)

1 Introduction

Dans la littérature sur le capital humain, les économistes se sont notamment intéressés à l'idée selon laquelle les externalités locales générées par la famille, le voisinage ou encore la classe sociale sont déterminantes dans le processus d'accumulation. De ce fait, la mobilité sociale, c'est à dire les possibilités pour une classe de revenu d'appartenir à des groupes différents au cours du temps, constitue un élément d'analyse essentiel de l'émergence et de la persistance des inégalités.

De nombreux travaux sociologiques corroborent ces points. Wilson (1987) explique les raisons pour lesquelles les ghettos, dont la formation est inhérente à une ségrégation sociale croissante, sont de véritables pièges à pauvreté pour leurs habitants. Cette "ghettoïsation" dépendrait essentiellement de facteurs économiques, tels qu'un financement local insuffisant pour assurer le bon fonctionnement d'une école, et sociologiques tels que le manque de perspective d'ascension sociale qui incite peu les résidents à quitter le ghetto. Par ailleurs, Coleman (1988) insiste sur les déterminants locaux du capital humain en développant la théorie du "capital social" qui dépendrait essentiellement du réseau social qu'entretient l'agent.

En outre, une vaste littérature empirique tente de mesurer l'effet de la communauté sur l'accumulation du capital humain. De nombreuses études concluent à l'impact significatif de l'externalité locale (voir notamment les articles de Henderson, Mieszkowski et Sauvageau (1978) , Datcher (1982) , Corcoran, Gordon, Laren et Solon (1989) , Cooper, Durlauf et Johnson (1994) , Borjas (1995) , Black (1999))[1]. Cette conclusion est nuancée par Evans, Oates et Schwab (1992) qui montrent que les effets de l'externalité locale disparaissent lorsque l'endogénéité de cette variable est contrôlée. Cependant, Aaronson (1996) , adoptant la même

[1]Voir également Bénabou (1996*c*) et Caucutt (2000) pour des bibliographies détaillées sur ce point.

démarche, montre qu'il n'est pas possible d'éliminer la significativité des déterminants locaux.

L'analyse économique théorique de cette question intègre notamment les fondements de la théorie des biens publics locaux dans un modèle d'accumulation du capital humain. La formalisation la plus couramment adoptée consiste à introduire dans la production de capital humain les dépenses d'éducation décidées au sein de la communauté locale dans laquelle appartient l'agent. L'une des caractéristiques principales de ces modèles, mise en avant par Bénabou (1996a, b, c, d), Durlauf (1996) et Quah (1998), est la multiplicité des équilibres stationnaires. En effet, à long terme, l'émergence d'une société parfaitement homogène est tout autant probable que l'apparition d'une société stratifiée et inégalitaire. L'enjeu est donc de savoir vers quelle segmentation stationnaire l'économie évolue. Ceci souligne donc le lien entre la distribution initiale des revenus, la segmentation sociale qui en découle et le rythme d'accumulation inhérent. Notamment, Durlauf (1996) présente un modèle très général de croissance et de stratification endogène. Permettant aux agents de changer de clubs à chaque date (la société est donc potentiellement mobile), il définit les conditions sur la distribution du revenu sous lesquelles la société sera inégalitaire à long terme.

Notre article développe un modèle d'accumulation de capital humain et de formation des clubs permettant une analyse explicite de la dynamique des inégalités, des phases de mobilité sociale et de la croissance. Nous montrons ainsi que la mobilité sociale fournit à des classes pauvres initialement exclues la possibilité d'accéder aux moyens d'éducation des plus riches et de rattraper ainsi leur retard. Il est également probable de voir se développer des situations d'exclusion permanente, la réalisation de l'un ou l'autre de ces cas dépendant, d'une part, de la distribution initiale des dotations et, d'autre part, du rapport des élasticités de la production par rapport aux deux types d'externalités.

Dans une économie composée de trois classes sociales (riches, moyens, pauvres) où un agent vit une période et donne naissance à un unique descendant, nous admettons que les agents d'une même dynastie (l'ensemble des générations d'individus issues du même aïeul) peuvent appartenir à des groupes différents. Nous mettons ainsi en exergue différents scénarios de mobilité sociale. D'une part, des processus d'ascension sociale sont possibles, au cours desquels des dynasties plus pauvres, qui profitent de moyens d'éducation plus efficaces, accèdent à des groupes qui les refusaient auparavant. D'autre part, sont également susceptibles d'apparaître des cas de régression sociale pour les pauvres désormais délaissés par les moyens qui entrent dans le club des riches. A long terme, nous obtenons deux possibilités : toutes les classes sociales sont ensemble (équilibre intégré) ou bien un club formé des classes riche et moyenne laisse de côté tous les pauvres (équilibre ségrégé). Nous démontrons que le taux de croissance de l'économie est plus important à l'équilibre intégré qu'à l'équilibre ségrégé. Nous rejoignons ainsi les résultats des travaux empiriques de Rusk (1993) qui mettent en évidence, pour quatorze régions urbaines, la corrélation négative entre la ségrégation, mesurée par le ratio entre les revenus moyens du centre-ville et de la périphérie, et la croissance du revenu par tête. En outre, nous précisons les conditions sur la distribution initiale des revenus qui permettent la réalisation à long terme de tel ou tel équilibre. Si, par exemple, la distribution initiale se caractérise par une distance entre riches et moyens relativement plus faible que celle séparant les moyens des pauvres alors le scénario selon lequel les classes riche et moyenne s'associent au sein d'une même communauté et s'éloignent inexorablement des pauvres est très probable. Nous montrons également qu'il existe une valeur seuil du ratio élasticité de la production par rapport à l'externalité locale/élasticité de la production par rapport à l'externalité globale au delà de laquelle les effets de voisinage, facteur susceptible de favoriser l'hétérogénéité entre les communautés, dominent à tel point qu'une société, initialement organisée en plusieurs communautés, sera inégalitaire et ségrégée à long terme quelle que soit la trajectoire suivie.

Par ailleurs, nous considérerons des communautés dans lesquelles la production du bien public local est basée sur un mode de financement volontaire. Insistant sur le fait que le financement volontaire n'est pas un phénomène marginal, nous pouvons nous référer aux faits empiriques exposés dans l'article de Glomm et Lagunoff (1999) :

> "Voluntary money donations in the U.S. measured 96 billion dollars in 1989 with approximately the same amount constituting the value of donated time. The total measures almost 2% of GDP. These contributions go to fund public monuments, political parties, homeless shelters, after-school programmes for children, free medical clinics, art institutes, community orchestras, neighborhood crime-watch organizations, and day care and pre-school programmes."(p.660)

De surcroît, si l'on adopte une interprétation de l'externalité locale en tant que "capital social" défini comme l'ensemble des relations sociales que peut mobiliser l'agent, on peut penser que ces liens s'élaborent sur la base d'un financement informel et volontaire de la part des membres du réseau. Des études empiriques ont d'ailleurs insisté sur les effets positifs de ce type de capital sur la croissance économique (Putnam(1993) , Helliwell et Putnam (1995) et Narayan et Pritchett (1996)). Enfin, il est certes fréquent que l'appartenance à un groupe, une association ou club soit conditionnée par le paiement d'un droit d'entrée ; néanmoins, la qualité des services produits par le groupe dépend essentiellement de l'effort et/ou du temps consacré que le membre décide de manière volontaire.

Le cadre théorique repose sur les modèles de formation endogène de clubs avec financement volontaire (Barham et alii (1997), Glomm et Lagunoff (1999) , Jaramillo, Kempf et Moizeau (2000)). Le corps principal de l'article s'organise en deux sections. Dans un premier temps, nous déterminons la partition en clubs de la société qui apparaît à chaque date et analysons ses propriétés. Puis, nous étudions la dynamique complète de cette économie et caractérisons les équilibres de long terme possibles.

2 Le modèle

2.1 La société

Il y a dans l'économie trois classes sociales de même taille[2] n : les riches, les pauvres et la classe moyenne[3]. Nous noterons Ω l'ensemble des $3n$ agents. Les individus se différencient par leur dotation en capital humain $h_t^i, i = \{r, m, p\}$, avec en $t = 0$, $h_0^p < h_0^m < h_0^r$. De surcroît, chaque agent z (z entier naturel et $z \in [1, 3n]$) de type i ne vit qu'une seule période et donne naissance à un descendant z de même type. Ainsi, la taille de la population est constante.

Nous supposerons la technologie d'accumulation suivante :

$$h_{j_t,t+1}^{i(z)} = \kappa G_{j_t}^{\beta} \left(h_t^{i(z)}\right)^{1-\alpha-\beta} \widetilde{h}_t^{\alpha} \tag{1}$$

κ est un paramètre technique constant au cours du temps. A l'instar des articles de Bénabou $(1996a, b, c)$, deux types d'externalité entrent en jeu. $\widetilde{h}_t$, le niveau moyen de connaissance accumulée dans la société, symbolise l'externalité sociale. G_{j_t}, le bien collectif du quartier[4]

[2] Cette hypothèse de classes de taille identique peut sembler restrictive mais ne modifie en rien les implications du modèle et permet d'obtenir des résultats analytiques plus simples.

[3] Nous emploierons également le terme de "moyens" pour désigner la classe moyenne.

[4] Dans la suite de l'article, les termes "club", "communauté locale", "quartier", ou encore "réseau social" ont une signification équivalente.

auquel appartient un agent z de type i, se conçoit comme une externalité locale. Nous pouvons l'interpréter de différentes façons : écoles financées au niveau local[5], soutien scolaire assuré par une association de quartier, réseau social proche.

Par ailleurs, pour chaque nouvelle génération d'agents, nous supposons que l'organisation de la société en clubs est à reconstruire. A chaque date t, la partition réalisée en $t-1$ par les parents est remise en cause. De nouvelles coalitions apparaissent : elles peuvent être semblables ou bien différer des coalitions précédentes. Cette hypothèse d'endogénéisation spontanée des clubs nous permet ainsi une analyse de la mobilité sociale de cette économie.

Remarquons que toute partition est définie de la manière suivante :

Définition 1 *Une partition en clubs de* Ω *est telle que* $\bigcup_{j_t \in J_t} S_{j_t} = \Omega$ *et* $S_{j_t} \cap S_{j_t'} = \emptyset$ $\forall j_t, j_t' \in J_t$.

j_t, l'indice du club S_{j_t}, appartient à l'intervalle $[1, J_t]$ déterminé par le modèle[6]. Cette définition signifie que l'ensemble des clubs couvre toute la population et qu'aucun agent ne fait partie de plusieurs clubs simultanément.

Au sein de chaque communauté, le bien public local est financé de manière volontaire. Il est donc égal à la somme des contributions des membres diminuée de coûts de congestion :

$$G_{j_t} = \sum_{z \in S_{j_t}} g_{j_t}^{i(z)} - n_{j_t} a \tag{2}$$

$g_{j_t}^{i(z)}$ est la contribution d'un agent z de type i qui appartient au club S_{j_t}. L'introduction de coûts de congestion, dans notre cas linéaires par rapport au nombre de membres n_{j_t}, est nécessaire pour limiter la taille du club. Dans la suite de l'article, nous supposerons que a tend vers zéro.[7]

[5]Cooper (1998) insiste sur l'importance du financement local de l'éducation aux Etats-Unis en citant une étude du National Center for Education Statistics (1995) : "In 1992 to 1993, over 47 percent of public elementary and second educational revenues in the United States was from local resources."(p. 191)

[6]Nous adopterons la convention que plus le club est riche et plus son indice est faible.

[7]L'hypothèse de linéarité nous permet d'éviter les problèmes d'existence de la partition d'équilibre (voir Barham et alii pour une spécification des coûts de congestion plus générale et une discussion sur les notions d'équilibre). Nous posons que a tend vers 0 dans le but d'obtenir des expressions simples. Nous travaillerons donc avec $G_{j_t} = \sum_{z \in S_{j_t}} g_{j_t}^{i(z)}$ tout en gardant en tête l'existence de coûts de congestion infinitésimaux. Cependant, ceci ne modifie en rien les conclusions qualitatives du modèle. Remarquons enfin que a nul correspond au cas où le bien public est pur.

Enfin, les agents ont des préférences, représentées par une fonction log, qui dépendent de la consommation de bien privé et du capital humain légué à leur unique descendant[8] :

$$U\left(c_{j_t}^{i(z)}, h_{j_t,t+1}^{i(z)}\right) = \ln c_{j_t}^{i(z)} + \ln h_{j_t,t+1}^{i(z)} \tag{3}$$

Notre modèle de formation de clubs s'inspire de Jaramillo, Kempf, Moizeau (2000) [9] et, à chaque date, s'articule en deux étapes :

i- Dans un premier temps, les clubs se forment.

ii- Dans une seconde étape, chaque membre définit volontairement sa contribution au financement du bien collectif caractérisant le club auquel il appartient.

Le cadre stratégique est donc celui d'un jeu séquentiel que nous résolvons de manière récursive[10].

2.2 Le programme des agents

En t, prenons le cas d'un agent z de type i appartenant au club S_{j_t}. Le programme de cet agent s'écrit de la manière suivante :

$$\max_{g_{j_t}^{i(z)}} \ln c_{j_t}^{i(z)} + \ln h_{j_t,t+1}^{i(z)}$$

sous les contraintes budgétaire et d'accumulation suivantes :

$$\begin{gathered} g_{j_t}^{i(z)} + c_{j_t}^{i(z)} \leq h_t^{i(z)} \\ h_{j_t,t+1}^{i(z)} = \kappa G_{j_t}^{\beta} \left(h_t^{i(z)}\right)^{1-\alpha-\beta} \widetilde{h}_t^{\alpha} \\ g_{j_t}^{i(z)} \geq 0 \\ h_t^{i(z)} \text{ et } \widetilde{h}_t \text{ sont donnés.} \end{gathered}$$

[8]Nous retrouvons cette spécification de l'altruisme dans Saint-Paul et Verdier (1993) qui la justifient de la manière suivante : " Moreover it states that parents can care about some aspects they think important for their offspring's welfare (education here) without knowing a priori how this offspring would value himself those aspects" (note 2, p. 401).

[9]Voir également le modèle de formation de clubs avec agents identiques de Barham et alii.

[10]Alors qu'à la seconde étape du jeu l'équilibre obtenu est un équilibre de Nash, la formation des clubs satisfait un concept d'équilibre coopératif. Barham et alii. justifient cette approche (p. 13) : "... adopting a cooperative approach in [the second stage instead of a non-cooperative game] enables us to circumvent the problem of specifying the [necessarily ad-hoc] institutional details of the club formation process and leads to a unique, plausible partition..."

La condition du premier ordre nous donne le niveau optimal de cotisation :

$$g_{j_t}^{i(z)} = \begin{cases} h_t^{i(z)} - \frac{G_{j_t}}{\beta} & si \quad h_t^{i(z)} > \frac{G_{j_t}}{\beta} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

En sommant sur l'ensemble des membres de S_{j_t} qui cotisent, le bien de club a l'expression suivante[11] :

$$G_{j_t} = \frac{\beta \widehat{n}_{j_t}}{\beta + \widehat{n}_{j_t}} \overline{h}_{j_t} \tag{4}$$

avec $\overline{h}_{j_t}$ le niveau moyen de capital humain des membres du groupe j_t qui cotisent et $\widehat{n}_{j_t}$ leur nombre. D'où, la cotisation optimale se réécrit :

$$g_{j_t}^{i(z)} = \begin{cases} h_t^{i(z)} - \frac{\widehat{n}_{j_t}}{\beta+\widehat{n}_{j_t}} \overline{h}_{j_t} & si \quad h_t^{i(z)} > \frac{\widehat{n}_{j_t}}{\beta+\widehat{n}_{j_t}} \overline{h}_{j_t} \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{5}$$

Nous remarquons que, du fait que le bien de club est normal, la contribution de l'agent est croissante avec son revenu. Nous constatons également le caractère non coopératif du financement du bien de club : la cotisation individuelle décroît avec la contribution totale. D'où, le niveau de bien public local sera sous optimal.

La fonction d'utilité indirecte pour un agent z de S_{j_t} devient :

$$V_z\left(S_{j_t}\right) = (1+\beta)\ln G_{j_t} - \ln\beta + \ln\kappa + (1-\alpha-\beta)\ln h_t^{i(z)} + \alpha \ln \widetilde{h}_t \tag{6}$$

Les variables h_t^i et $\widetilde{h}_t$ étant données, l'intérêt de l'agent est d'appartenir au club produisant le maximum de bien collectif.

Nous remontons désormais à la seconde étape de résolution de ce jeu qui consiste à déterminer la partition d'équilibre de la société à chaque date, étant donné le comportement de cotisation de chacun.

2.3 La partition d'équilibre

Nous nous intéressons à une partition d'équilibre qui satisfait la condition de stabilité suivante :

Définition 2 *Une partition* $S_t^E = \left\{S_{1_t}^E, ..., S_{j_t}^E, ...\right\}$ *est dite partition d'équilibre si :*

$$\nexists \pounds_t \subset \Omega \text{ tel que} \qquad \forall z \in \pounds_t, V_z\left(\pounds_t\right) > V_z\left(S_t^E\right) \tag{7}$$

[11] Voir Bergstrom, Blume et Varian (1986), qui, dans un modèle plus général de financement volontaire d'un bien public pur, étudient les conditions d'existence et d'unicité de cet équilibre de Nash.

où $V_z\left(S_t^E\right)$ dénote l'utilité retirée par l'agent z dans la partition S_t^E.

Selon cette définition, une partition d'équilibre est telle qu'il n'existe pas de club alternatif n'appartenant pas à S_t^E qui est préféré par n'importe lequel de ses membres au club auquel celui-ci appartient dans S_t^E. En conséquence, à chaque date et pour une distribution donnée du capital humain, la partition d'équilibre que nous étudions appartient au coeur du jeu de formation des coalitions. En d'autres termes, il n'existe aucune coalition bloquante qui améliorerait le bien-être des agents par rapport à leur situation dans la partition d'équilibre.

Les clubs se formant sur la base de la capacité contributive des éventuels membres, la condition de positivité de la contribution individuelle est donc prépondérante dans la détermination de la partition d'équilibre. D'après (5) , elle correspond à l'inégalité suivante :

$$h_t^{i(z)} > \frac{\widehat{n}_{j_t}}{\beta + \widehat{n}_{j_t}} \overline{h}_{j_t} \tag{8}$$

Deux points sont à signaler.

Tout d'abord, pour tous les membres d'un club de la partition d'équilibre, cette condition doit être satisfaite. En effet, soit un club S_{j_t} dont un membre au moins ne vérifierait pas la condition (8). Cet agent ne cotise donc pas et accroît la congestion (infinitésimale). Tous les autres membres seraient donc mieux s'ils constituaient un groupe sans lui. Donc S_{j_t} ne vérifie pas la condition de stabilité (7) et ne peut appartenir à la partition d'équilibre[12]. Par conséquent, à l'équilibre, $\overline{h}_{j_t}$ est égal au niveau moyen de capital humain du club et $\widehat{n}_{j_t}$ est noté $n_{j_t}^E$, la taille du club $S_{j_t}^E$.

En outre, à partir de (8) et (4), il est aisé de montrer que les agents du même type appartiennent tous au même club d'équilibre[13]. En effet, si

$$h_t^i > \frac{n_{j_t}}{\beta + n_{j_t}} \overline{h}_{j_t} \text{ avec } \overline{h}_{j_t} = \frac{1}{n_{j_t}} \left(\sum_{z \in S_{j_t}} h_{j_t}^{i'(z)} + n h_t^i \right)$$

alors

$$\frac{\beta n_{j_t}}{\beta + n_{j_t}} \overline{h}_{j_t} > \frac{\beta n'_{j_t}}{\beta + n'_{j_t}} \left[\frac{1}{n'_{j_t}} \left(\sum_{z \in S_{j_t}} h_{j_t}^{i'(z)} + n' h_t^i \right) \right], \text{ quel que soit } n', n' < n$$

Il en découle donc que la partition d'équilibre est l'un des quatre cas de segmentation sociale suivants.

[12] Si a ne tend pas vers zéro, la condition d'entrée dans le club est plus restrictive : chaque membre devrait disposer d'un revenu suffisant pour acquitter une cotisation positive qui couvrirait la congestion que son entrée engendre.

[13] Ce résultat serait également vérifié avec a ayant une valeur finie.

Définition 3 *A chaque date, quatre régimes de segmentation sociale sont envisageables :*

1. *Régime I : chaque classe sociale forme son propre club.*
2. *Régime II : les pauvres et la classe moyenne constituent un club et les riches restent seuls.*
3. *Régime III : les riches et la classe moyenne sont ensemble et excluent les pauvres.*
4. *Régime IV : les trois classes sociales appartiennent à la même communauté.*

Fondamentalement, cette segmentation sociale dépend de la distribution des revenus. Sur ce point, Jaramillo, Kempf et Moizeau (2000) mettent en évidence, dans une économie avec un grand nombre de classes de revenu, le fait que la variable d'analyse cruciale de la formation de la partition d'équilibre est l'écart de revenu entre deux classes successives. L'intuition de ce résultat est simple : plus cet écart est grand (faible) et plus les comportements de contribution au sein du club sont hétérogènes (homogènes). En d'autres termes, dans une économie caractérisée par des écarts de revenu élevés, les comportements de free riding sont favorisés. De ce fait, l'étendue du club sera limitée (accrue) pour une distribution avec des écarts de revenus élevés (faibles).

Dans notre cas, deux variables d'écart seront nécessaires pour l'analyse :

- l_t est un ratio entre le capital humain du riche et celui de la classe moyenne :

$$l_t = \ln\left(\frac{h_t^r}{h_t^m}\right) \tag{9}$$

- m_t est un ratio entre le revenu de la classe moyenne et celui d'un pauvre :

$$m_t = \ln\left(\frac{h_t^m}{h_t^p}\right) \tag{10}$$

En réécrivant avec l_t et m_t les différentes conditions de positivité des contributions volontaires propres à chaque régime, nous pouvons avancer la proposition suivante :

Proposition 1 *En t, la partition d'équilibre S_t^E est :*

1. *le régime I si et seulement si $l_t \geq \ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)$ et $m_t \geq \ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)$.*
2. *le régime II si et seulement si $l_t \geq \ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)$ et $m_t < \ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)$.*
3. *le régime III si et seulement si $l_t < \ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)$ et $\ln\left(\frac{\beta+2n}{n}\right) - \ln\left(1+e^{l_t}\right) \leq m_t$.*
4. *le régime IV si et seulement si $l_t < \ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)$ et $\ln\left(\frac{\beta+2n}{n}\right) - \ln\left(1+e^{l_t}\right) > m_t$.*

Démonstration : Annexe A. ■

Le principe de la démonstration suit le raisonnement déjà utilisé dans Jaramillo, Kempf et Moizeau (2000) . Prenons le cas où les inégalités sont telles que $l_t < \ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)$ et $\ln\left(\frac{\beta+2n}{n}\right) - \ln\left(1+e^{l_t}\right) \leq m_t$. Dans cette situation, le revenu des moyens est suffisamment proche de celui des riches pour leur permettre de cotiser un montant positif dans un groupe commun et ainsi d'accroître le bien collectif. Il est donc dans l'intérêt des riches et des moyens de s'associer. En revanche, l'agent pauvre dispose d'un revenu trop distant de celui de la classe moyenne. De ce fait, dans l'éventualité d'un club regroupant l'ensemble de la population, l'agent pauvre choisirait une contribution optimale nulle. De plus, en l'absence de toute possibilité d'engagement, il ne peut promettre de manière crédible aux riches et aux moyens de cotiser un montant positif. Il en découle que les classes supérieures refuseront les pauvres dont l'entrée n'aurait pour unique conséquence que d'accroître les coûts de congestion (infinitésimaux). Cette coalition riches-moyens produit donc le niveau de bien local le plus élevé de tous les clubs possibles. Elle appartient donc à la partition d'équilibre. Les pauvres ainsi isolés auront pour meilleure option de s'associer entre eux. Ainsi, le régime III, dans ce cas de distribution des revenus, est la partition d'équilibre. Les autres cas de distribution du revenu qui laissent apparaître d'autres régimes en tant que partition d'équilibre s'expliquent de manière analogue. Nous remarquons donc que lorsque les inégalités sont relativement élevées (cas 1, 2 et 3 de la proposition 1) la partition d'équilibre est un régime caractérisé par de la ségrégation (régimes I, II et III). Dans ces cas, au moins un ratio (l_t ou m_t) est trop élevé de telle sorte qu'une classe de revenu éloignée d'agents plus riches sera exclue par ces derniers car elle ne cotise pas suffisamment dans leur club. En revanche, lorsque la distribution est relativement concentrée (cas 4 de la proposition 1), les comportements de contribution volontaire sont relativement homogènes et ainsi toutes les classes ont intérêt à être ensemble.

Par ailleurs, remarquons que, quel que soit le régime, la partition d'équilibre est caractérisée par les trois propriétés suivantes : la stratification, l'unicité et l'ordre des bien-être[14]. La propriété de stratification signifie qu'un club n'est formé que d'un seul intervalle, ou sous-ensemble de Ω. Par exemple, une partition comprenant un premier club composé des

[14]Ces propriétés sont désormais usuelles depuis Farrell et Scotchmer (1988) qui étudient la formation endogène d'une coalition avec l'hypothèse de répartition égalitaire du bien de club (groupe défini par le terme de partnership).

riches et des pauvres et une seconde coalition regroupant les moyens n'est pas une partition d'équilibre. En effet, la coalition riches-moyens serait une coalition bloquante qui améliorerait le bien être de ces deux classes de revenu. La segmentation sociale, c'est à dire le nombre de clubs et leur taille, est donc dans ce modèle uniquement liée aux caractéristiques de la distribution des revenus. En outre, pour une distribution donnée des revenus, il y a une unique partition d'équilibre. Par exemple, dans le cas de distribution des revenus précédemment considéré, le club regroupant l'ensemble des riches et des moyens représente l'unique et meilleure possibilité pour ses membres. Ce club appartient donc à la partition d'équilibre. Quant aux pauvres exclus, le mieux qu'il leur reste à faire est de former une coalition intégrant toute leur classe. Ceci implique donc que la partition d'équilibre composée de ces deux clubs est unique. Enfin, du fait que le bien public local est un bien normal, un agent riche est plus enclin à l'effort de contribution que ne l'est un agent plus pauvre (voir(5)). Il en découle ainsi que les clubs de la partition d'équilibre regroupant les individus les plus riches produisent un bien collectif plus élevé et engendrent un bien-être supérieur à celui des clubs constitués d'individus plus pauvres.[15]

Dès lors qu'il devient possible de définir la partition d'équilibre à chaque date étant donnée la distribution du revenu, la question est de décrire l'évolution de la segmentation sociale de cette économie.

3 Mobilité sociale et dynamique des inégalités

Le point important du modèle est que, durant la dynamique transitoire, la partition d'équilibre est modifiée. A l'instar de Durlauf (1996) et Quah (1998), il est permis qu'une dynastie $i\left(z\right)$, au cours du temps, change de club et bénéficie, dans l'accumulation individuelle de capital humain, d'un input bien collectif différent. Cette section décrit donc les différentes étapes de mobilité sociale pour chaque dynastie au cours du temps. Peuvent ap-

[15] Dans un modèle à la Bénabou (96b,c) avec des biens publics locaux financés par taxation et un marché de la terre, nous pourrions également retrouver nos différents cas de ségrégation. Dans ce cadre, l'agent maximise $\ln c_{j_t}^{i(z)} + \ln h_{j_t,t+1}^{i(z)}$ par rapport à la rente foncière qu'il est prêt à payer, noté ρ_{j_t}, sous les contraintes : $\rho_{j_t} + c_{j_t}^{i(z)} \leq h_t^{i(z)}$, $G_{j_t} = \tau_{j_t}\overline{h}_{j_t}$ et $h_{j_t,t+1}^{i(z)} = \kappa G_{j_t}^{\beta}\left(h_t^{i(z)}\right)^{1-\alpha-\beta}\widetilde{h}_t^{\alpha}$. τ_{j_t} est la taxe payée par les membres de la communauté j_t. Ainsi, l'individu arbitre entre la rente qu'il doit payer et les bénéfices qui résultent des moyens d'éducation produits au sein de la communauté, la capacité des plus pauvres à payer les rentes des quartiers riches dépendant de l'inégalité.

paraître des phénomènes d'ascension sociale au cours desquels les agents plus pauvres, qui profitent d'un bien de club plus efficace, accèdent à des groupes qui les refusaient auparavant. Des situations d'exclusion permanente sont également possibles. Enfin, à long terme, nous montrons qu'il existe deux possibilités de partition : toutes les classes sociales sont ensemble (équilibre intégré) ou bien un club formé des classes riche et moyenne laisse de côté tous les pauvres (équilibre ségrégé). Nous soulignerons le fait que la réalisation de tel ou tel équilibre stationnaire relève notamment de la distribution initiale qui détermine les mouvements de mobilité sociale ayant lieu.

Tout d'abord, remarquons que le rythme d'accumulation du capital humain individuel est la résultante de trois facteurs : la taille du groupe, le capital humain moyen du club et le capital humain moyen de la société. En remplaçant dans (1) G_{j_t} par son expression à l'équilibre, nous obtenons :

$$\frac{h^i_{j_t,t+1}}{h^i_t} = \kappa \left(\frac{\beta n_{j_t}}{\beta + n_{j_t}} \right)^\beta \left(\frac{\overline{h}_{j_t}}{h^i_t} \right)^\beta \left(\frac{\widetilde{h}_t}{h^i_t} \right)^\alpha \tag{11}$$

Analysons les effets de chaque facteur. D'après (11), le taux de croissance du capital humain individuel est croissant avec n_{j_t} via le terme $\frac{\beta n_{j_t}}{\beta + n_{j_t}}$. Ainsi, si les clubs pauvres sont les plus grands, leurs membres accumuleront du capital plus rapidement que les agents de groupes plus riches. Les héritiers des classes pauvres pourront donc prétendre à une ascension sociale. En revanche, si les clubs riches sont les plus grands, les coalitions pauvres perdront sans cesse du terrain sur les riches et la ségrégation se perpétuera.

Le terme $\frac{\overline{h}_{j_t}}{h^i_t}$ a pour effet que les agents les plus riches du club accumulent moins vite que les membres les plus pauvres. Deux implications sont alors à signaler. La première est que les revenus des membres d'un même groupe tendent à s'homogénéiser car ils bénéficient tous des mêmes externalités locale et sociale. La seconde conséquence repose sur le fait que les membres les plus riches sont freinés par les pauvres du club pour accéder aux groupes plus nantis.

Enfin, la composante "externalité sociale", $\frac{\widetilde{h}_t}{h^i_t}$, tend à homogénéiser les revenus de toute la société. Ainsi, cette force de convergence permet à des classes exclues par les riches d'avoir des perspectives d'ascension sociale.

La dynamique qui résulte des effets combinés de ces trois facteurs dépend de manière cruciale du rapport entre les élasticités β et α. Si α est supérieur à β, nous montrerons que la force de convergence générée par l'externalité sociale l'emporte sur les termes $\frac{\beta n_{j_t}}{\beta + n_{j_t}}$ et $\frac{\overline{h}_{j_t}}{h^i_t}$

susceptibles de perpétuer les inégalités. Ainsi à terme la société sera intégrée quelle que soit la distribution initiale du capital humain. En revanche si β est supérieur à α, il est possible qu'émerge une société ségrégée.

Remarquons par ailleurs qu'à partir de (1), (4), (9), (10), il est possible d'écrire les systèmes dynamiques des inégalités dans chaque régime. Nous constatons que la partition propre à chaque régime est déterminante dans la dynamique globale de la société. Lorsqu'en t, la partition d'équilibre S_t^E est :

- le régime I, alors :

$$l_{t+1} = (1-\alpha)\, l_t$$
$$m_{t+1} = (1-\alpha)\, m_t$$

- le régime II, alors :

$$m_{t+1} = (1-\alpha-\beta)\, m_t$$
$$l_{t+1} = \beta \ln\left(\frac{\beta+2n}{\beta+n}\right) - \beta \ln\left(1+e^{-m_t}\right) + (1-\alpha)\, l_t$$

- le régime III, alors :

$$l_{t+1} = (1-\alpha-\beta)\, l_t$$
$$m_{t+1} = \beta \ln\left(\frac{\beta+n}{\beta+2n}\right) + \beta \ln\left(1+e^{l_t}\right) + (1-\alpha)\, m_t$$

- le régime IV, alors :

$$l_{t+1} = (1-\alpha-\beta)\, l_t$$
$$m_{t+1} = (1-\alpha-\beta)\, m_t$$

Nous allons donc étudier la dynamique globale de cette économie et déterminer, à partir d'une distribution initiale du capital humain et de la partition originelle qui s'établit, les équilibres stationnaires. L'évolution de la segmentation sociale à travers les différents régimes sera également étudiée de façon à comprendre la convergence des partitions d'équilibre temporaires vers la partition stationnaire.

3.1 Les équilibres stationnaires

Dans ce modèle, à l'état stationnaire, les niveaux d'inégalité n'évoluent plus. D'après la proposition 1, la partition d'équilibre étant entièrement définie par des écarts de revenu, il en résulte qu'à long terme elle ne sera plus modifiée. La société n'évoluera donc plus d'un régime à l'autre. Il n'y aura plus de mobilité sociale.

Dans un premier temps, nous cherchons à caractériser les équilibres stationnaires. Soit Π la valeur suivante :

$$\Pi = \ln\left(\frac{\beta + 2n}{2n}\right) / \ln\left(\frac{2\beta + 2n}{\beta + 2n}\right) > 1$$

Nous pouvons avancer la proposition suivante :

Proposition 2 *Si*

$$\frac{\beta}{\alpha} \geq \Pi \tag{12}$$

alors il existe deux types d'équilibre stationnaire :

1. *L'équilibre intégré dont la partition d'équilibre est le régime IV et les niveaux d'inégalité stationnaires,* m_∞ *et* l_∞*, s'élèvent à :*

$$m_\infty = 0 \text{ et } l_\infty = 0$$

2. *L'équilibre ségrégé dont la partition d'équilibre est le régime III et les niveaux d'inégalité stationnaires,* m_∞ *et* l_∞*, s'élèvent à :*

$$m_\infty = \ln\frac{\overline{h}_{1\infty}}{\overline{h}_{2\infty}} = \frac{\beta}{\alpha}\ln\left(\frac{2n}{\beta + 2n} * \frac{(\beta + n)}{n}\right) > 0$$

et

$$l_\infty = 0$$

Sinon, il n'y a qu'un seul équilibre stationnaire qui est l'équilibre intégré.

Démonstration : Voir les diagrammes des phases des figures 2 et 3[16] ainsi que l'annexe B. ■

Nous avions souligné précédemment le fait que β détermine l'intensité de l'externalité locale qui est susceptible d'accroître les inégalités entre les agents alors que, de α, dépend la force de convergence générée par l'externalité sociale. Dans la proposition 2, l'inégalité (12) constitue une condition nécessaire et suffisante à l'apparition d'un second équilibre de long terme qui est l'équilibre ségrégé[17]. En effet, si le paramètre β est suffisamment plus élevé que α alors les effets de la composante “bien de club” du taux de croissance individuel dominent

[16] Bien que le temps soit une variable discrète, le diagramme des phases reste une bonne approximation de la dynamique du modèle sous certaines conditions que nous supposons vérifiées (durée de la période faible par rapport à la valeur des paramètres structurels).

[17] Sur l'intervalle $\beta \in [0, 1]$, Π est une fonction monotone croissante par rapport à β, avec $\lim\limits_{\beta \to 0} \Pi = 1$ et $\Pi(1) = \ln\left(\frac{1+2n}{2n}\right) / \ln\left(\frac{2+2n}{1+2n}\right) > 1$.

et peuvent favoriser le creusement des inégalités. L'équilibre stationnaire inégalitaire devient possible. D'ailleurs, cette propriété de multiplicité des équilibres stationnaires est propre au modèle d'accumulation de capital humain avec externalité locale (voir notamment Durlauf (1996)). Dans la sous section suivante, nous verrons que la distribution initiale de l'économie est prépondérante afin de connaître l'équilibre stationnaire qui sera atteint.

Remarquons que l'équilibre intégré décrit une situation d'égalité parfaite : les trois classes sociales, qui profitent du même bien de club, ont convergé et possèdent le même revenu. En revanche, à l'équilibre ségrégé, les revenus sont identiques au sein de chaque communauté mais divergent entre les membres de coalitions différentes. En effet, les riches et les moyens produisent le bien public local le plus élevé et, de ce fait, accumulant plus de capital humain que les pauvres, ils gardent leur distance avec ces derniers. Une situation d'exclusion perpétuelle apparaît dans laquelle les inégalités entre quartiers riches et pauvres se maintiendront. Les pauvres n'auront aucune perspective d'ascension sociale. Ainsi, la segmentation sociale qui s'établit à chaque date, peut aboutir, à terme, à des situations de ségrégation. Cette évolution doit être mise en rapport avec le phénomène de sécession urbaine étudié par les sociologues. Pour ces derniers, l'émergence, au sein même de la ville, de ghettos défavorisés et d'enclaves riches repliées sur elles-même, résulte d'un phénomène de sécession qui se base sur une logique de formation des communautés identique à celle de notre modèle :

> "Fuir les autres et les lieux dont on ne veut pas ou plus, se mettre à distance du risque de "contamination" qu'ils font peser sur soi, vouloir se choisir, s'établir entre soi dans la recherche d'une similarité rassurante, d'une affinité sociale, culturelle, refuser de payer pour les autres, ceux qui menacent votre sécurité, ceux dont on pense qu'il ne sert à rien de les aider : tels sont les traits distinctifs de la sécession urbaine." (Jaillet, 1999, p 153)

Ainsi la sécession urbaine repose sur le principe d'exclusion et d'acceptation qui est en oeuvre dans le modèle : les plus riches s'isolent car ils ne veulent pas contribuer pour des agents adoptant un comportement de cavalier libre.

Par ailleurs, si l'inégalité (12) de la proposition 2 n'est pas vérifiée alors l'effet de l'externalité sociale domine et tend à réduire les écarts de revenu. La distribution des revenus tend à s'homogénéiser et d'après la proposition 1, la partition d'équilibre devient, en un temps fini, le régime IV.

L'étude des sytèmes dynamiques des régimes III et IV nous donne la propriété de convergence suivante :

Proposition 3 *Dans le régime III, l'équilibre ségrégé est localement stable. Dans le régime IV, l'équilibre intégré est stable.*

Démonstration : Annexe C. ■

Le système dynamique du régime III se définissant par des équations dynamiques non linéaires, les propriétés de stabilité sont étudiées au voisinage de l'équilibre ségrégé. Nous verrons, dans la sous section suivante, que s'ajoute une nouvelle source d'instabilité qui est la possibilité offerte aux agents de modifier la partition d'équilibre et donc de quitter le régime III. En revanche, lorsque l'économie suit la dynamique du régime IV, elle converge asymptotiquement vers l'équilibre stationnaire intégré. De plus, l'étude de la dynamique transitoire mettra en évidence le fait que, dès lors que les agents forment la partition du régime IV, leurs héritiers n'auront aucun intérêt à modifier la partition existante.

Enfin, ces équilibres stationnaires se différencient également par leur rythme d'accumulation. Nous montrons, dans la proposition suivante, que la ségrégation sociale limite la croissance de long terme.

Proposition 4 *L'équilibre ségrégé se caractérise par un taux de croissance plus faible que celui de l'équilibre intégré.*

Démonstration :

A l'équilibre intégré, le taux de croissance s'élève à :

$$\gamma_t = \kappa \left(\frac{3\beta n}{\beta + 3n} \right)^{\beta} \tag{13}$$

A l'équilibre ségrégé, il y a deux clubs et le taux de croissance du capital humain moyen est le suivant :

$$\frac{\widetilde{h}_{t+1}}{\widetilde{h}_t} = \left(\frac{\kappa}{3n} \right) \left(\widetilde{h}_t \right)^{\alpha-1} \left[2n \left(\frac{2\beta n}{\beta + 2n} \overline{h}_{1_t} \right)^{\beta} \left(\overline{h}_{1_t} \right)^{1-\alpha-\beta} + n \left(\frac{\beta n}{\beta + n} h_t^p \right)^{\beta} \left(h_t^p \right)^{1-\alpha-\beta} \right]$$

En réarrangeant cette expression on obtient le taux de croissance η_t :

$$\eta_t = \kappa \left[\left(\frac{2\beta n}{\beta + 2n} \right)^{\beta} f + \left(\frac{\beta n}{\beta + n} \right)^{\beta} g \right] \tag{14}$$

Avec $f = \frac{2}{3} \left(\frac{\overline{h}_{1t}}{\frac{2\overline{h}_{1_t} + h_t^p}{3}} \right)^{1-\alpha}$ et $g = \frac{1}{3} \left(\frac{h_t^p}{\frac{2\overline{h}_{1_t} + h_t^p}{3}} \right)^{1-\alpha}$ et $f + g = \frac{E\left(h_t^{1-\alpha}\right)}{[E(h_t)]^{1-\alpha}} < 1$, d'après l'inégalité de Jensen.

D'où,

$$\gamma_t > \eta_t$$

■

Les conséquences de la ségrégation sociale sont de deux sortes. La première est que le nombre d'agents dans les clubs est en moyenne plus faible que lorsque l'équilibre est intégré. Les économies d'échelle sont donc réduites et limitent de ce fait la croissance. Le second effet, qui s'ajoute au premier, repose sur le fait qu'une société ségrégée reste hétérogène. La technologie d'accumulation étant à facteurs substituables, l'inégalité persistante freine la croissance[18]. Nous rejoignons ainsi les conclusions de nombreux articles quant à l'impact négatif de l'inégalité sur l'accumulation de capital (voir, entre autres, Persson et Tabellini (1994), Rusk (1993) et la revue de la littérature de Bénabou (1996d)).

Dans la sous section suivante qui analyse la dynamique transitoire de ce modèle, il est précisé qu'il n'y a pas d'équilibre stationnaire dans les régimes I et II. Nous insistons également sur le caractère crucial de la distribution initiale dans la détermination de la situation de long terme de l'économie. Plus précisément, nous décrivons, dans un premier temps, les différentes étapes de mobilité sociale possibles d'une économie. Puis, nous précisons les conditions sur la distribution initiale des revenus qui permettent de connaître l'équilibre stationnaire atteint par l'économie.

3.2 La dynamique transitoire

A partir du diagramme des phases de la figure 2, considérons une situation initiale telle que la partition d'équilibre correspond au régime I. Dans ce cas, les écarts initiaux étant trop grands, chaque catégorie de revenu forme son propre club. Cette partition se compose donc de communautés parfaitement homogènes et qui ont la même taille. En conséquence, l'unique composante du taux de croissance individuel qui diffère entre les agents est celle relative à l'externalité sociale. Il en découle que les niveaux de capitaux humains convergent et, à partir d'une certaine date, les héritiers peuvent être amenés à former une nouvelle partition. Deux options deviennent possibles : soit la classe moyenne bénéficie d'une ascension sociale en étant acceptée par les riches (régime III) , ou bien soit la classe moyenne admet les pauvres

[18] Se référer aux travaux de Bénabou (1996a) concernant l'influence du degré de substituabilité des facteurs de production sur la croissance.

(régime II) .

Plus précisément, nous entrerons dans le régime II si la classe moyenne accepte les pauvres avant que celle-ci ne soit acceptée par les riches. En d'autres termes, le régime II sera atteint si et seulement si m_t est inférieure à la valeur $\ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)$ avant l_t (voir figure 2). En conséquence, ce scénario se produira si et seulement si l'écart initial entre riches et classe moyenne est plus prononcé que celui entre pauvres et classe moyenne[19].

Lorsque la société passe dans le régime II, la classe moyenne et les pauvres forment un groupe de $2n$ agents. Trois effets sont ainsi en jeu pour expliquer la dynamique des inégalités. D'une part, au sein de la coalition moyens-pauvres, l'écart de revenu m_t se réduit et la présence de pauvres au sein de cette communauté freine le rythme d'accumulation de la classe moyenne. D'autre part, les effets taille du club et externalité sociale contrebalancent ce handicap et au total l'inégalité entre revenus riches et moyens diminue. A partir d'une date finie, la classe moyenne est promue socialement en accédant au quartier riche alors que la dynastie pauvre est reléguée dans une communauté composée uniquement de pauvres. L'économie entre dans le régime III.

Ainsi, il en découle qu'une économie qui se situe initialement dans le régime I entrera, soit directement, soit via le régime II, dans le régime III, à partir d'une date finie.

Dans le régime III, les riches et la classe moyenne bénéficient du niveau de bien de club le plus élevé. Au sein de ce groupe, les revenus vont converger (l_t va diminuer). En revanche, l'écart entre classe moyenne et pauvres se creuse sans cesse (m_t croît) du fait de l'effet taille en faveur de la communauté riche qui domine. Deux évolutions deviennent alors envisageables. Soit la société reste organisée selon le régime III et nous évoluons vers une situation d'exclusion perpétuelle de la dynastie pauvre (équilibre stationnaire ségrégé). Soit, les pauvres rattrapent suffisamment leur retard de sorte qu'ils sont acceptés dans le groupe riche. Cette dernière éventualité s'avère possible du fait de l'externalité sociale et de l'hétérogénéité qui ralentissent le rythme d'accumulation du capital humain moyen des

[19] En effet, ceci se déduit aisément en réécrivant le système dynamique du régime I :

$$\begin{aligned} l_t &= (1-\alpha)^t \, l_0 \\ m_t &= (1-\alpha)^t \, m_0 \end{aligned}$$

Remarquons que si les écarts initiaux sont identiques $(l_0 = m_0)$, les riches acceptent la classe moyenne à la même date que celle-ci accepte les pauvres. Cependant, nous entrons dans le régime III puisque la classe moyenne, en s'associant avec les riches, obtient un niveau d'utilité plus élevé qu'avec les pauvres.

classes moyenne et riche. En d'autres termes, la dynamique franchirait la frontière séparant les régimes III et IV. La partition d'équilibre ainsi modifiée ne varie plus puisque tous les agents bénéficiant des mêmes moyens d'éducation s'homogénéisent. L'économie converge vers l'équilibre intégré.

Il semble important de souligner que la dynamique transitoire ne présente pas de cycle. En effet, il est impossible que l'économie, une fois entrée dans le régime III, revienne dans les régimes I ou II. Nous voyons sur le diagramme des phases que les seules évolutions possibles à partir du régime III sont soit l'atteinte de l'équilibre ségrégé soit le passage dans le régime IV.

Deux aspects sont cruciaux afin de prévoir la dynamique que va suivre une économie : la mise en rapport des externalités illustrée par le ratio $\frac{\beta}{\alpha}$ et la distribution initiale des dotations.

Nous distinguons trois intervalles de valeurs pour $\frac{\beta}{\alpha}$ tels que, pour chacun d'eux, nous avançons des conditions sur la distribution initiale permettant de prévoir l'équilibre stationnaire atteint.

Pour cela, il est utile de noter :

$$\Gamma = \frac{\ln\left(\frac{\frac{\beta+2n}{n}}{1+\left(\frac{\beta+n}{n}\right)^{(1-\alpha-\beta)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)}$$

La proposition suivante présente des conditions nécessaires et suffisantes sur la distribution des revenus :

Proposition 5 *Lorsque* $\frac{\beta}{\alpha} \geq \Gamma$[20],

a)Si $l_0 < \ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)$ *et* $m_0 < \ln\left(\frac{\beta+2n}{n}\right) - \ln\left(1 + e^{l_0}\right)$ *alors l'économie converge vers l'équilibre intégré.*

b) Sinon elle atteindra l'équilibre ségrégé.

Démonstration : Annexe D. ■

Dans le cas d'un ratio $\frac{\beta}{\alpha}$ supérieur à la valeur seuil Γ, seule une distribution initiale relativement égalitaire telle que le régime IV soit partition d'équilibre permettrait à la société d'aboutir à l'équilibre intégré. En revanche, pour tout autre cas de distribution des revenus et

[20] Il est aisé de vérifier que Γ est monotone croissante par rapport à β sur l'intervalle considéré. En outre, nous démontrons en annexe D que lorsque $\frac{\beta}{\alpha} \geq \Gamma$ alors l'inégalité $\Gamma > \Pi$ est toujours satisfaite.

de partition d'équilibre, l'économie convergera vers l'équilibre ségrégé. Ceci provient du fait que l'élasticité de l'externalité locale susceptible de maintenir un certain niveau d'inégalité domine largement l'élasticité de l'externalité sociale.

Au contraire, pour des valeurs plus faibles de $\frac{\beta}{\alpha}$, il est moins aisé de déterminer les ensembles de couples $(l_{0,}m_0)$ qui convergent vers tel ou tel équilibre.

Nous avançons dans la proposition suivante une condition suffisante sur l'écart m_0 afin que l'économie évolue vers l'équilibre ségrégé. Pour cela, nous définissons un niveau critique m_0^c, tel que :

$$m_0^c = \frac{1}{(1-\alpha-\beta)^{t-\widehat{t}}(1-\alpha)^{\widehat{t}}} \ln\left(\frac{\beta+2n}{2n}\right)$$

avec $t \geq 0$ et $\widehat{t} \geq 0$, les dates d'entrée respectivement dans les régimes III et II.

Proposition 6 *Lorsque* $\Gamma > \frac{\beta}{\alpha} \geq \Pi$, *si, pour* l_0 *donné,* $m_0 \geq m_0^c$, *alors l'économie converge vers l'équilibre ségrégé.*

Démonstration : Annexe D. ■

Nous voyons donc qu'il existe une distance critique entre les moyens et les pauvres telle que, pour tout niveau initial d'inégalité m_0 supérieur à cette valeur critique, l'économie, à partir d'une date finie, se situera dans le régime III et convergera vers l'équilibre inégalitaire. En effet, les pauvres, dotés d'un revenu initialement trop distant de celui des moyens ne seront capables, à aucun moment, de décider d'une cotisation suffisante dans la communauté constituée des riches et des moyens. En d'autres termes, la dynamique d'une économie qui débute avec $m_0 \geq m_0^c$ n'entrera jamais dans le régime IV.

Pour des valeurs de $\frac{\beta}{\alpha}$ inférieures à Π, nous avions montré dans la proposition 2 que le modèle ne laisse apparaître que l'équilibre intégré. Nous en déduisons la proposition suivante :

Proposition 7 *Lorsque* $\Pi > \frac{\beta}{\alpha}$, *l'économie converge vers l'équilibre intégré quelle que soit la distribution initiale.*

Démonstration : évidente d'après la proposition 2. ■

Dans ce cas, quelle que soit l'organisation initiale de la société en communautés, l'effet externe du capital humain moyen de la société prévaut et tend à réduire inexorablement les inégalités. A une date finie, la société passe dans le régime IV et évolue vers l'équilibre intégré.

Nous soulignons donc dans cette section l'importance des distances initiales qui séparent les classes sociales. Elles définissent entièrement l'ensemble des partitions présentes et futures, ainsi que, le rythme d'accumulation de cette économie. Les différentes étapes de mobilité sont ainsi parfaitement décrites. Enfin, la partition stationnaire devient prévisible.

4 Conclusion

Le modèle développé dans cet article explore la relation entre distribution du revenu, mobilité sociale et croissance économique. Nous voyons ainsi que la distribution du revenu détermine l'organisation de la société en clubs, qui, à son tour, via le rythme d'accumulation du capital humain, définit un nouveau niveau d'inégalité caractérisé par une nouvelle partition. Les différentes étapes de mobilité, telles l'ascension sociale ou bien la chute sociale, deviennent prévisibles le long de la dynamique transitoire. Ce modèle se caractérise également par une multiplicité des équilibres stationnaires. L'un, l'équilibre ségrégé, présente une société inégalitaire organisée en deux clubs. Quant à l'équilibre intégré, il se caractérise par un seul club regroupant toute la population devenue homogène.

Les prolongements théoriques sont multiples. Dans notre modèle, la mobilité sociale de l'individu est toute entière déterminée par l'héritage. Une extension possible serait de concevoir le capital humain en tant qu'agrégat d'actifs innés (tels l'héritage) et acquis (tels les connaissances accumulées dépendant de l'effort individuel). Ainsi, la mobilité sociale en résultant mettrait en évidence le jeu exercé entre les mécanismes de transmission du savoir entre générations et l'instauration de l'égalité des chances. En outre, une voie de recherche prometteuse serait de traiter des communautés avec financement par taxation et de lier ainsi le thème de l'économie politique de la croissance à la problématique de la stratification sociale. Par ailleurs, dans ce modèle, nous avons supposé une fonction de production à facteurs substituables. A l'instar des travaux de Bénabou (1996a) qui travaille avec une fonction de production plus générale, la question serait de savoir quel est l'effet d'une variation du degré de substituabilité des facteurs sur la formation des clubs et la croissance économique.

Enfin, des travaux empiriques seraient nécessaires afin de mieux comprendre le lien croissance - stratification sociale.

A Démonstration de la proposition 1

L'admission dans un club repose sur la condition de positivité de la contribution optimale. Pour tout agent z de type i appartenant à S_{j_t}, on a :

$$h_t^i > \frac{n_{j_t}}{\beta + n_{j_t}} \overline{h}_{j_t} \qquad ((12))$$

– Premier cas : la distribution est telle que :

$$h_t^r > h_t^m > \frac{2n}{\beta + 2n} \left(\frac{h_t^m + h_t^r}{2} \right)$$

et

$$h_t^p \leq \frac{3n}{\beta + 3n} \left(\frac{h_t^p + h_t^m + h_t^r}{3} \right)$$

Les cotisations optimales des riches et de la classe moyenne sont strictement positives s'ils s'associent dans un groupe. Au contraire, les pauvres ne cotiseront rien si le club couvre toute la population. Cependant, il est tout à fait possible que les pauvres aient un revenu suffisant pour acquitter une cotisation positive dans le club constitué des pauvres et de la classe moyenne :

$$h_t^p > \frac{2n}{\beta + 2n} \left(\frac{h_t^m + h_t^p}{2} \right)$$

Néanmoins, la classe moyenne préfèrera former le club avec les riches car le bien local produit est plus élevé. En effet, d'après (4) , l'inégalité suivante est évidente :

$$\frac{\beta 2n}{\beta + 2n} \left(\frac{h_t^m + h_t^p}{2} \right) < \frac{\beta 2n}{\beta + 2n} \left(\frac{h_t^m + h_t^r}{2} \right)$$

Ainsi, le club constitué des riches et de la classe moyenne fait partie de la partition d'équilibre puisqu'il produit le niveau maximum possible de bien public. Les pauvres, exclus, formeront leur propre club. A partir des définitions de l_t et m_t, on peut réécrire ces inégalités de la façon suivante :

$$\ln \left(\frac{\beta + n}{n} \right) > \ln \left(\frac{h_t^r}{h_t^m} \right) \text{ d'où } l_t < \ln \left(\frac{\beta + n}{n} \right)$$

De la même façon, l'inégalité $h_t^p \leq \frac{2n}{\beta+2n} \left(\frac{h_t^m+h_t^r}{2} \right)$se réécrit aisément :

$$1 \leq \frac{2n}{\beta + 2n} \left(\frac{\frac{h_t^m}{h_t^p} + \frac{h_t^r}{h_t^m} * \frac{h_t^m}{h_t^p}}{2} \right)$$

$$\ln \left(\frac{\beta + 2n}{n} \right) \leq \ln \left(1 + e^{l_t} \right) + m_t$$

– Second cas : les revenus sont tels que

$$h_t^m \leq \frac{2n}{\beta + 2n}\left(\frac{h_t^m + h_t^r}{2}\right) \text{ et } h_t^p > \frac{2n}{\beta + 2n}\left(\frac{h_t^p + h_t^m}{2}\right)$$

Dans ce cas, la cotisation optimale de la classe moyenne est nulle si elle s'associe avec les riches. Donc les riches seront mieux seuls, étant donné l'existence de coûts de congestion infinitésimaux. Au contraire, les pauvres cotisent un montant strictement positif s'ils sont avec la classe moyenne. Pour ces deux classes, le meilleur club possible consiste à s'associer car, ensemble, ils produisent un bien de club plus élevé. Ces deux inégalités se réécrivent :

$$l_t \geq \ln\left(\frac{\beta + n}{n}\right) \text{ et } \ln\left(\frac{\beta + n}{n}\right) > m_t$$

– Troisième cas : les revenus sont tels que

$$h_t^p > \frac{3n}{\beta + 3n}\left(\frac{h_t^p + h_t^m + h_t^r}{3}\right)$$

La cotisation de la classe pauvre dans le groupe couvrant toute la population est strictement positive. Le bien de club est maximum si tous font partie du même groupe. La partition d'équilibre est donc un seul club comprenant tous les agents. D'où, avec l_t et m_t :

$$l_t < \ln\left(\frac{\beta + n}{n}\right)$$

$$\ln\left(\frac{\beta + 2n}{n}\right) > \ln\left(1 + e^{l_t}\right) + m_t$$

– Dernier cas : les revenus sont tels que

$$h_t^m \leq \frac{2n}{\beta + 2n}\left(\frac{h_t^m + h_t^r}{2}\right) \text{ et } h_t^p \leq \frac{2n}{\beta + 2n}\left(\frac{h_t^p + h_t^m}{2}\right)$$

Pour chaque classe, le mieux qu'elle puisse faire est de constituer son propre club.

Nous pouvons écrire les deux inégalités suivantes :

$$l_t \geq \ln\left(\frac{\beta + n}{n}\right)$$

$$m_t \geq \ln\left(\frac{\beta + n}{n}\right)$$

B Diagramme des phases

B.1 Construction de la courbe $\triangle m_t = 0$ dans le régime III :

Connaissant la dynamique de m_t, on peut écrire l'expression de la courbe $\triangle m_t = 0$:

$$m_{t+1} = \beta \ln\left(\frac{(\beta+n)}{\beta+2n}\right) + \beta \ln\left(1+e^{l_t}\right) + (1-\alpha)\, m_t$$

$$m_t = \frac{1}{\alpha}\left[\beta \ln\left(\frac{(\beta+n)}{\beta+2n}\right) + \beta \ln\left(1+e^{l_t}\right)\right]$$

En $l_t = 0$,

$$m_t = \frac{\beta}{\alpha} \ln\left(\frac{2\,(\beta+n)}{\beta+2n}\right)$$

C'est une fonction croissante à taux croissants par rapport à l_t.

$$\frac{\partial m_t}{\partial l_t} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{e^{l_t}}{1+e^{l_t}}$$

$$\frac{\partial^2 m_t}{\partial l_t^2} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{e^{l_t}}{\left(1+e^{l_t}\right)^2}$$

B.2 Evolution de l_t dans le régime II :

Dans la région délimitée par le régime II, il est aisé de démontrer que la suite (l_t) est monotone décroissante. La dynamique de l_t est décrite par l'équation suivante :

$$l_{t+1} = \beta \ln\left(\frac{\beta+2n}{\beta+n}\right) - \beta \ln\left(1+e^{-m_t}\right) + (1-\alpha)\, l_t$$

d'où

$$l_{t+1} - l_t = \beta \ln\left(\frac{\beta+2n}{\beta+n}\right) - \beta \ln\left(1+e^{-m_t}\right) - \alpha l_t$$

D'après la proposition 1, le régime II est tel que $m_t < \ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)$ et $l_t \geq \ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)$. On en déduit ainsi

$$l_{t+1} - l_t < -\alpha \ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right) < 0$$

La variable d'inégalité l_t décroît de manière monotone dans le régime II.

C Dynamique de l'économie

C.1 Stabilité de l'équilibre intégré

La dynamique dans le régime IV se réécrit :

$$l_t = (1-\alpha-\beta)^t \, l_0$$

$$m_t = (1-\alpha-\beta)^t \, m_0.$$

Ce système converge puisque $0 < (1-\alpha-\beta) < 1$.

C.2 Stabilité de l'équilibre ségrégé

La dynamique dans le régime III est déterminée par les équations suivantes :

$$l_{t+1} = (1-\alpha-\beta) \, l_t$$
$$m_{t+1} = \beta \ln\left(\frac{(\beta+n)}{\beta+2n}\right) + \beta \ln\left(1+e^{l_t}\right) + (1-\alpha) \, m_t.$$

En linéarisant le système au voisinage de l'état stationnaire $l_\infty = 0$ et $m_\infty = \frac{\beta}{\alpha} \ln\left(\frac{2(\beta+n)}{\beta+2n}\right)$,nous obtenons deux valeurs propres réelles $\lambda_1 = (1-\alpha-\beta)$ et $\lambda_2 = (1-\alpha)$ toutes deux inférieures à 1. En déterminant les vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2, le système dynamique s'écrit :

$$l_t = l_0 \, (1-\alpha-\beta)^t$$

$$m_t - m_\infty = \frac{l_0}{2}\left((1-\alpha)^t - (1-\alpha-\beta)^t\right) + (m_0 - m_\infty)\,(1-\alpha)^t$$

avec $m_\infty = \frac{\beta}{\alpha} \ln\left(\frac{2(\beta+n)}{\beta+2n}\right)$.

donc le modèle converge vers $\lim_{t\to\infty} (m_t - m_\infty) = 0$.

D Démonstration des propositions 6 et 7

Il est plus clair d'étudier l'évolution de l'économie en termes de distance entre les valeurs de m_t et la courbe qui sépare les régimes III et IV. La frontière entre les régimes III et IV a l'expression suivante :

$$m_t^L = \ln\left(\frac{\beta+2n}{n}\right) - \ln\left(1+e^{l_t}\right)$$

La distance, notée d_t, s'écrit :

$$d_t = m_t - m_t^L = m_t - \ln\left(\frac{\beta+2n}{n}\right) + \ln\left(1+e^{l_t}\right)$$

$$m_t = d_t + \ln\left(\frac{\beta+2n}{n}\right) - \ln\left(1+e^{l_t}\right) \tag{15}$$

Si on remplace l'équation (15) dans l'équation dynamique de m_t du régime III, on a :

$$\begin{aligned} d_{t+1} &= \beta\ln\left(\frac{\beta+n}{\beta+2n}\right) - \alpha\ln\left(\frac{\beta+2n}{n}\right) + \ln\left(1+e^{(1-\alpha-\beta)l_t}\right) \\ & -(1-\alpha-\beta)\ln\left(1+e^{l_t}\right) + (1-\alpha)\,d_t \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} d_{t+1} &= d_t \Leftrightarrow d = \frac{\beta}{\alpha}\ln\left(\frac{\beta+n}{\beta+2n}\right) - \ln\left(\frac{\beta+2n}{n}\right) + \frac{1}{\alpha}\ln\left(1+e^{(1-\alpha-\beta)l}\right) \\ & -\frac{(1-\alpha-\beta)}{\alpha}\ln\left(1+e^{l}\right) \end{aligned}$$

Lorsque $l=0$ cette courbe est égale à

$$d\,(l=0) = \frac{\beta}{\alpha}\ln\left(\frac{2\,(\beta+n)}{\beta+2n}\right) - \ln\left(\frac{\beta+2n}{2n}\right)$$

Lorque la société se situe sur la limite entre le régime II et le régime III, $l=\ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)$

$$d\left(l=\ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)\right) = \frac{\beta}{\alpha}\ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right) - \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\beta+2n}{n}\right) + \frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\left(\frac{\beta+n}{n}\right)^{(1-\alpha-\beta)}\right)$$

$$d\left(l=\ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} > \frac{\ln\left(\frac{\frac{\beta+2n}{n}}{1+\left(\frac{\beta+n}{n}\right)^{(1-\alpha-\beta)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)} \equiv \Gamma$$

Par ailleurs, nous savons que pour que les deux types d'équilibre stationnaire soient possibles, $d\,(l=0)$ doit être strictement positif c'est à dire :

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\ln\left(\frac{\beta+2n}{2n}\right)}{\ln\left(\frac{2(\beta+n)}{\beta+2n}\right)} \equiv \Pi > 1$$

D.1 Démonstration : $\frac{\beta}{\alpha} \geq \Gamma$ implique $\Gamma > \Pi$

Nous désirons démontrer que lorsque $\frac{\beta}{\alpha} \geq \Gamma$ alors :

$$\frac{\ln\left(\frac{\frac{\beta+2n}{n}}{1+\left(\frac{\beta+n}{n}\right)^{(1-\alpha-\beta)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)} > \frac{\ln\left(\frac{\beta+2n}{2n}\right)}{\ln\left(\frac{2(\beta+n)}{\beta+2n}\right)}$$

Admettons au contraire que

$$\frac{\ln\left(\frac{\frac{\beta+2n}{n}}{1+\left(\frac{\beta+n}{n}\right)^{(1-\alpha-\beta)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)} \leq \frac{\ln\left(\frac{\beta+2n}{2n}\right)}{\ln\left(\frac{2(\beta+n)}{\beta+2n}\right)}$$

Tout d'abord, nous savons que la courbe $d_{t+1} = d_t$ est strictement décroissante :

$$\frac{\partial d}{\partial l} = \frac{(1-\alpha-\beta)}{\alpha}\left[\frac{e^{(1-\alpha-\beta)l}}{1+e^{(1-\alpha-\beta)l}} - \frac{e^l}{1+e^l}\right] < 0$$

Or,

$$\begin{aligned}
\text{Si } \frac{\ln\left(\frac{\frac{\beta+2n}{n}}{1+\left(\frac{\beta+n}{n}\right)^{(1-\alpha-\beta)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)} &= \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\ln\left(\frac{\beta+2n}{2n}\right)}{\ln\left(\frac{2(\beta+n)}{\beta+2n}\right)} \\
alors\ d\left(l = \ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)\right) &= d\left(l=0\right) = 0
\end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec d strictement décroissante.

De même,

$$\begin{aligned}
\text{Si } \frac{\ln\left(\frac{\frac{\beta+2n}{n}}{1+\left(\frac{\beta+n}{n}\right)^{(1-\alpha-\beta)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)} &< \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\ln\left(\frac{\beta+2n}{2n}\right)}{\ln\left(\frac{2(\beta+n)}{\beta+2n}\right)} \\
\text{alors } d\left(l = \ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)\right) &> 0 > d\left(l=0\right)
\end{aligned}$$

ce qui contredit également le fait que d soit décroissante.

On en déduit donc que

$$\frac{\ln\left(\frac{\frac{\beta+2n}{n}}{1+\left(\frac{\beta+n}{n}\right)^{(1-\alpha-\beta)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)} > \frac{\ln\left(\frac{\beta+2n}{2n}\right)}{\ln\left(\frac{2(\beta+n)}{\beta+2n}\right)}$$

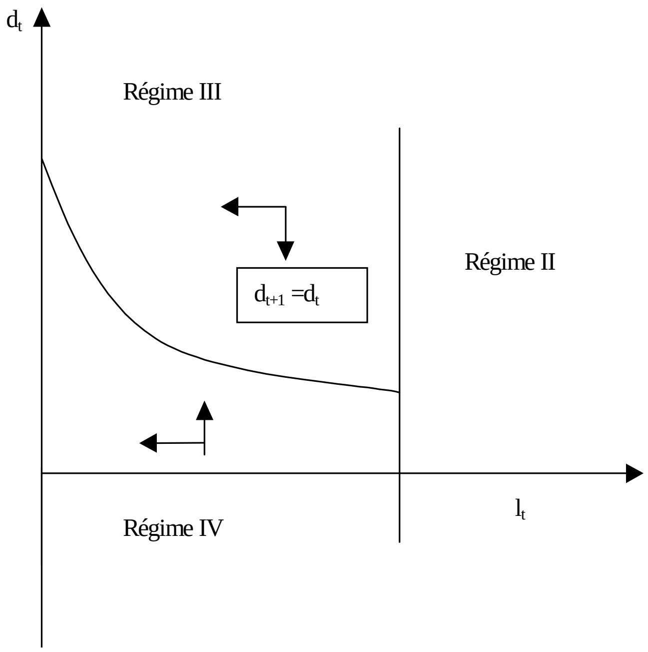

FIG. 1: Diagramme des phases quand $\frac{\beta}{\alpha} > \Gamma$.

D.2 Démonstration de la proposition 5

Construisons le diagramme des phases qui retrace la dynamique de l_t et d_t lorsque $\frac{\beta}{\alpha} \geq \frac{\ln\left(\frac{\frac{\beta+2n}{n}}{1+\left(\frac{\beta+n}{n}\right)^{(1-\alpha-\beta)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)}$. Nous voyons que, lorsque l'économie entre dans le régime III, la distance d_t sera toujours positive et convergera vers l'équilibre stationnaire ségrégé.

D.3 Démonstration de la proposition 6

En revanche, lorsque $\frac{\ln\left(\frac{\frac{\beta+2n}{n}}{1+\left(\frac{\beta+n}{n}\right)^{(1-\alpha-\beta)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{\ln\left(\frac{\beta+n}{n}\right)} > \frac{\beta}{\alpha} \geq \frac{\ln\left(\frac{\beta+2n}{2n}\right)}{\ln\left(\frac{2(\beta+n)}{\beta+2n}\right)}$, la fonction d n'est pas toujours positive. Cependant, toute société avec $d_t \geq d_t^c$ évoluera vers l'équilibre ségrégé. d_t^c se définit par :

$$d_t^c = m^c - \ln\left(\frac{\beta+2n}{n}\right) + \ln\left(1+e^{l_t}\right) \qquad \text{avec} \qquad m^c = \ln\left(\frac{\beta+2n}{2n}\right)$$

Notons que $d_t^c \geq 0$.

Selon la dynamique de d_t, si $d_t \geq d_t^c$ alors cette inégalité sera toujours vérifiée pour les dates ultérieures :

$$d_{t+1} \geq \beta \ln\left(\frac{\beta+n}{\beta+2n}\right) - \alpha \ln\left(\frac{\beta+2n}{n}\right) + \ln\left(1+e^{(1-\alpha-\beta)l_t}\right)$$

$$-(1-\alpha-\beta)\ln\left(1+e^{l_t}\right)+(1-\alpha)\,d_t^c$$

Démontrons que

$$\beta\ln\left(\frac{\beta+n}{\beta+2n}\right)-\alpha\ln\left(\frac{\beta+2n}{n}\right)+\ln\left(1+e^{(1-\alpha-\beta)l_t}\right)$$
$$-(1-\alpha-\beta)\ln\left(1+e^{l_t}\right)+(1-\alpha)\,d_t^c\geq d_{t+1}^c$$

En remplaçant d_{t+1}^c par son expression, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\beta\ln\left(\frac{\beta+n}{\beta+2n}\right)-\alpha\ln\left(\frac{\beta+2n}{2n}\right)+\beta\ln\left(1+e^{l_t}\right)\geq 0$$

Cette inégalité est vérifiée car, par hypothèse sur la valeur de $\frac{\beta}{\alpha}$, le terme de gauche est strictement positif.

Donc d_{t+1} sera strictement positif, quel que soit t,et convergera vers l'équilibre stationnaire $d\,(l=0)$.

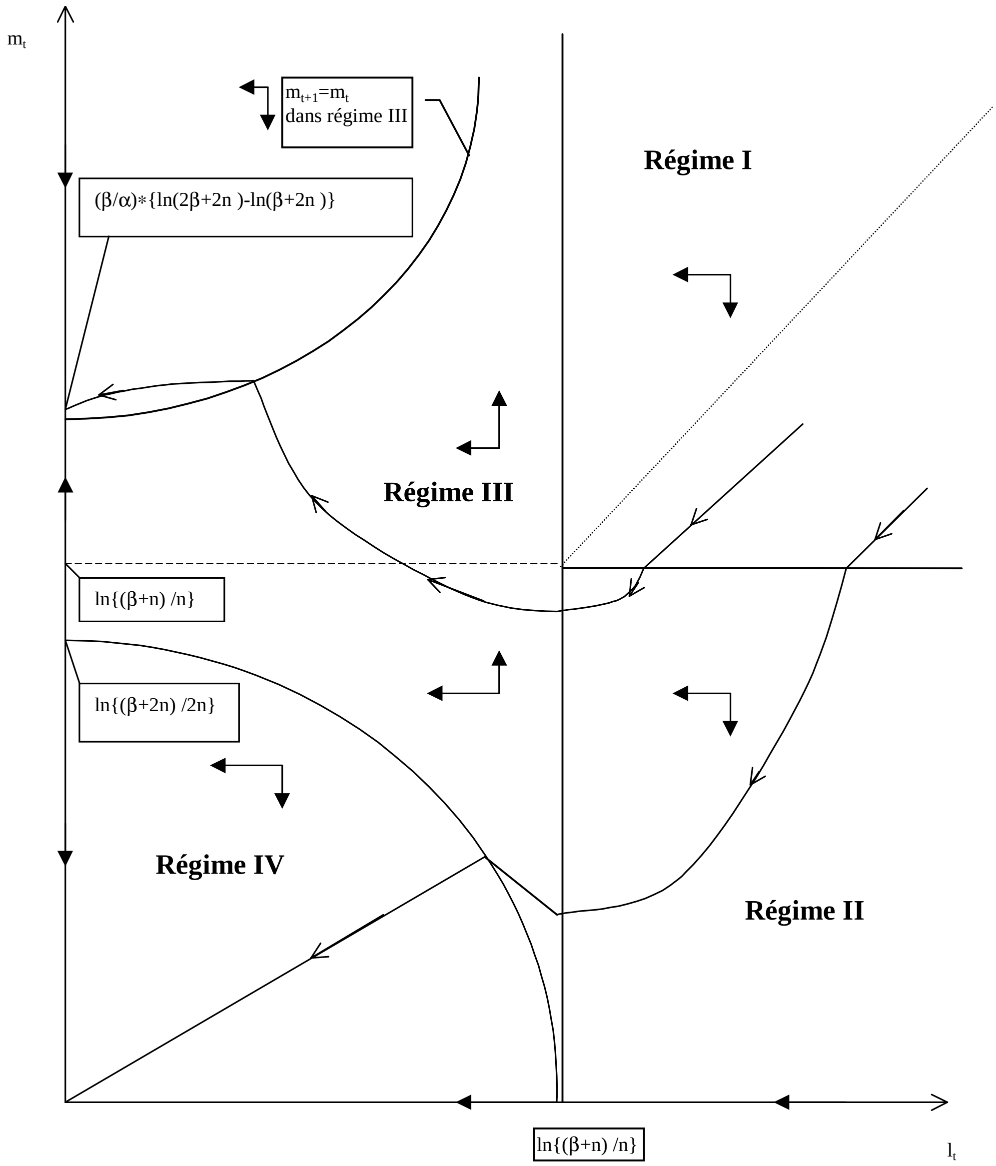

FIG. 2: Diagramme des phases avec $\Gamma > \frac{\beta}{\alpha} > \Pi$.

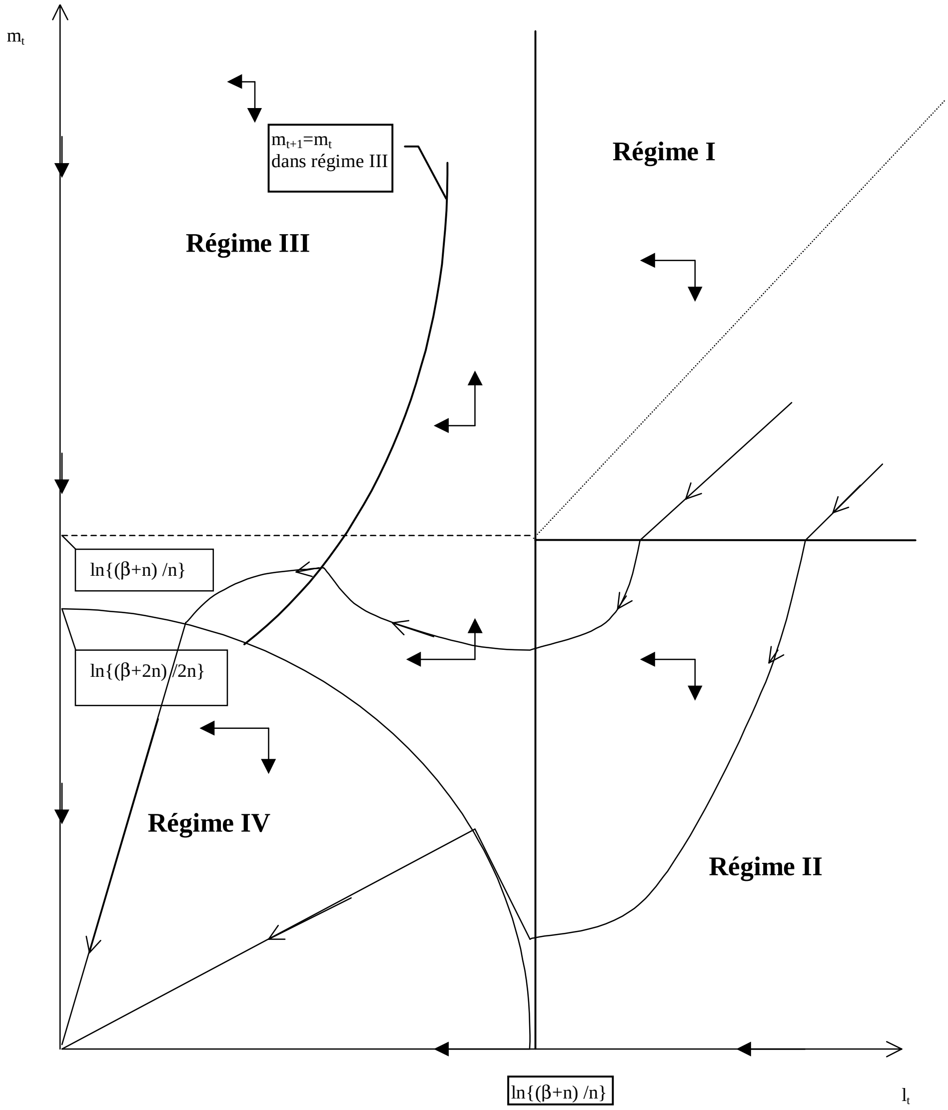

FIG. 3: Diagramme des phases avec $\Pi > \frac{\beta}{\alpha}$.

Références

[1] Aaronson, D., 1996, "Using sibling data to eliminate the impact of neighborhoods on children's educational outcomes", Working Paper Series, Federal Reserve Bank of Chicago, WP 96-19.

[2] Barham,V., B. Boadway, M. Marchand et P. Pestieau, 1997, "Volunteer work and club size : Nash equilibrium and Optimality", *Journal of Public Economics,* vol. 65, 9-22.

[3] Bénabou, R., 1996a, "Heterogeneity, stratification and growth : Macroeconomic implications of community structure and school finance", *American Economic Review* 86, 584-609.

[4] Bénabou, R., 1996b, "Education, income distribution, and growth : The Local connection", *MIT working paper,* 94-16.

[5] Bénabou, R., 1996c, "Equity and efficiency in human capital investment : the local connection", *Review of Economic Studies 63*, 237-264.

[6] Bénabou, R., 1996d, "Inequality and growth", Ben S. Bernanke and Julio J. Rotemberg eds., *NBER macro annual*, Cambridge, MA : MIT Press, **11** : 11-74.

[7] Bergstrom, T., L. Blume et H. Varian, 1986, "On the private provision of public goods", *Journal of Public Economics* 29, 25-50.

[8] Black, S.E., 1999, "Do better schools matter : parental valuation of elementary education", *Quarterly Journal of Economics* 114, 577-99.

[9] Borjas, G.J., 1995, "Ethnicity, neighborhoods, and human capital externalities", *American Economic Review* 85, 365-390.

[10] Caucutt, E., 2000, "Educational vouchers when there are peer group effects-size matters", *International Economic Review, forthcoming.*

[11] Coleman, J., 1988, "Social capital in the creation of human capital", *American Journal of Sociology* 94, S95-S120.

[12] Cooper, S., 1998, "A positive theory of income redistribution", *Journal of Economic Growth* 3, *1*71-95.

[13] Cooper, S., Durlauf, S., et Johnson, P., 1994, "On the evolution of economic status across generations", *Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association,* 50-58.

[14] Corcoran, M., R. Gordon, D. Laren, et G. Solon, 1989, "Effects of family and community background on men's economic status", *NBER 2896 working paper.*

[15] Datcher, L., 1982, "Effects of community and family background on achievement", *Review of Economics and Statistics 64*, 32-41.

[16] Durlauf, S., 1996, "A theory of persistent income inequality", *Journal of Economic Growth* 1*,* 75-93.

[17] Evans, W.N., Oates, W.M., et Schwab, R.E., 1992, "Measuring peer group effects : a study of teenage behavior", *Journal of Political Economy* 100, 966-91.

[18] Farrell, J. et S. Scotchmer, 1988, "Partnerships", *Quarterly Journal of Economics* 103(2), 279-97.

[19] Glomm, G. et R. Lagunoff, 1999, "A dynamic Tiebout theory of voluntary vs involuntary provision of public goods", *Review of Economic Studies 66*, 659-677.

[20] Helliwell, J. et R. Putnam, 1995, "Economic growth and social capital in Italy", *Eastern Economic Journal,* 295-307.

[21] Henderson, J. Vernon, P. Mieszkowski et Y. Sauvageau, 1978, "Peer group effects and educational production functions", *Journal of Public Economics* 10, 97-106.

[22] Jaillet, Marie-C., 1999, "Peut-on parler de sécessions urbaines à propos des villes européennes ?", *Esprit* 258, 145-167.

[23] Jaramillo F., H. Kempf et F. Moizeau, 2000, "Inequality and club formation", *Cahiers de la MSE série verte*, n° 2000.36.

[24] Merllié D. et Prévot J., 1997, "La mobilité sociale", *La découverte,* collection repères.

[25] Narayan, D. et L. Pritchett, 1997, "Cents and sociability : household income and social capital in rural Tanzania", World Bank Policy Research Working Paper n° 1796.

[26] Persson T. et G. Tabellini, 1994, "Is inequality harmful for growth ?", *American Economic Review*, 84(3), 600-621.

[27] Putnam, R., 1993, "Making Democracy work", *Princeton University Press, Princeton.*

[28] Quah, D., 1998, "Ideas determining convergence clubs", *LSE working paper.*

[29] Rusk, D., 1993, "Cities without suburbs", *John Hopkins University Press, Baltimore.*

[30] Saint Paul, G. et Verdier T., 1993, "Education, democracy and growth", *Journal of Development Economics*, 42, 399-407.

[31] Wilson, W. J., 1987, "The truly disadvantaged", *University of Chicago Press, Chicago.*