ANNALES D’ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 61 – 2001

Population, ressources naturelles et droits de propriété

Paul MAKDISSI *

RÉSUMÉ. – Dans cet article, nous analysons le lien théorique entre le stock de ressource naturelle disponible et la population dans le cadre d’un modèle de croissance avec décisions de fertilité endogènes. Nous considérons que l’être humain, à travers le travail qu’il fournit, est un facteur de production accumulable qui, combiné avec une ressource naturelle, produit un bien de consommation homogène. Dans un tel cadre, nous démontrons que, si les droits de propriété sont bien définis sur la ressource, l’état stationnaire sera caractérisé par une consommation *per capita* supérieure et un niveau de population moins élevé.

Population, Natural Resources and Property Rights

ABSTRACT. – In this paper, we analyze the theoretical link between the available stock of natural resource and the population within the framework of a growth model with endogenous fertility decisions. We consider that human being is an accumulable production factor which, combined with the natural resource, produces an homogeneous good. In this framework, we show that, if the property rights are well defined, the steady state is characterized by a higher *per capita* consumption and a lower population level.

* P. MAKDISSI : Département d’Économique et CEREF, Université de Sherbrooke, Québec et FEWEC/OAE, Vrije Universiteit, Amsterdam.

Je tiens à remercier NGUYEN MANH HUNG, J.-P. LAFFARGUE, P. MICHEL, Y. RICHELLE, C. TÉJÉDO ainsi que deux arbitres anonymes pour les précieux commentaires qu’ils m’ont formulés. Cette recherche a été financée par le ministère des Ressources naturelles du Canada et par le fond FCAR de la province de Québec.

1 Introduction

Dans la littérature récente en théorie économique, on remarque une résurrection de l'intérêt concernant le lien entre la croissance économique et les décisions de fertilité des ménages dans le cadre de la nouvelle économie du ménage (*new household economics*). Dans cette veine, la vision pessimiste de Malthus, présente dans son *Essai sur le principe de population*, revient hanter le débat sur la soutenabilité économique. Certains soulignent que, compte tenu de l'état actuel de la technologie, les capacités de l'écosystème terrestre à subvenir aux besoins économiques de l'humanité sont limitées à un certain niveau de population.

Il est intéressant de constater que la plupart des théoriciens accordent peu d'importance au lien entre la croissance démographique et le stock de ressources naturelles sur lequel la production de tout bien repose ultimement. En effet, faisant l'hypothèse que le travail peut être substitué au capital, BARRO et BECKER [1989] concluent que la croissance de la population demeure sans borne. BECKER, MURPHY et TAMURA [1990] tirent la même conclusion de leur modèle où le capital humain, plutôt que le capital physique, joue le rôle du facteur substituable. Mais, si le capital est considéré dans son sens le plus large, incluant aussi les ressources environnementales, l'accumulation du stock de capital est alors bornée et la substitution des facteurs de production n'est alors plus possible. Qu'arrive-t-il dans ce cas ?

D'autre part, il est bien connu, dans la littérature en économie des ressources naturelles, qu'il est important que les droits de propriété soient bien définis afin que les décisions prises par des agents économiques isolés conduisent à une gestion optimale d'une ressource naturelle renouvelable. Dans ce contexte, HARDIN [1968] fut le premier à souligner qu'il y aura surexploitation d'une ressource naturelle renouvelable si l'accès à celle-ci est libre. Il est donc important de limiter l'accès à cette ressource, soit par la définition de droits de propriété, soit par une gestion collective de celle-ci. Dans un cadre où l'accès à la ressource n'est pas sous la juridiction d'un seul pays, la gestion de son exploitation implique la concurrence entre les pays. Afin d'étudier ce problème, LEVHARI et MIRMAN [1980], dans une version discrète d'un jeu différentiel, étudient la dynamique ainsi que les propriétés de l'état stationnaire d'une population de poissons lorsque deux joueurs compétitionnent sur la ressource naturelle commune. Mais, est-ce que la définition de droits de propriété sur la ressource renouvelable peut affecter la décision d'un agent économique concernant l'importance de sa progéniture tel que le stipule DASGUPTA [1995] ?

L'objectif de cet article est d'analyser le lien théorique qui existe entre la définition du droit de propriété sur une ressource naturelle renouvelable nécessaire à la production et la population. Pour ce faire, on considère que l'être humain, à travers le travail qu'il fournit, est un facteur de production accumulable qui, combiné avec une ressource naturelle, produit un bien de consommation homogène. Dans un tel cadre, un des véhicules d'épargne à la disposition des ménages est leurs enfants dont le nombre est une décision endogène au modèle. L'utilité du ménage représentatif prend la forme dynastique de telle sorte que les décisions décentralisées d'une infinité d'agents de différentes générations peuvent être subsumées en un problème de planificateur *à la Ramsey*. Nous démontrerons que, dans un modèle de type dynastique qui exclut par hypothèse la possibilité de piège malthusien, l'absence de droits de propriété sur la ressource naturelle entraîne un état stationnaire caractérisé par une consommation *per capita* qui tend vers la consommation de subsistance et un niveau de population élevé.

La suite de l'article est organisée comme suit. Dans la deuxième section, nous exposons le modèle en détails. Dans la troisième section, nous résolvons le modèle et analysons l'importance de la définition du droit de propriété sur la ressource naturelle. Finalement, dans la dernière section, nous concluons en offrant des pistes pour des recherches futures.

2 Le modèle

Le modèle utilisé est une variante d'un modèle de croissance néoclassique dans lequel la population et une ressource naturelle, au lieu du capital physique, jouent le rôle des facteurs de production accumulables. Les préférences des agents sont représentées par une version en temps continu de la fonction d'utilité dynastique *à la Barro-Becker* (BECKER et BARRO [1988] et BARRO et BECKER [1989]) proposée par BARRO et SALA-I-MARTIN [1995]. Au temps 0, la fonction d'utilité du patriarche est fonction de sa propre consommation et de l'utilité de chacun de ses descendants de telle sorte que celle-ci prend la forme

$$V_0 = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} N_t^{1-\varepsilon} U(c_t)\, \mathrm{d}t, \tag{1}$$

où ρ est un facteur d'escompte temporel, N_t est le nombre de descendants à t et $0 < \varepsilon < 1$ représente le degré d'altruisme du patriarche (plus ε est petit, plus le patriarche est altruiste), c_t est le taux de consommation par individu à t et $U(\cdot)$ est supposée croissante et concave en c_t. On suppose que l'agent contrôle n_t, le taux de naissance à t, de telle sorte qu'en fixant un taux de mortalité à 1, le nombre d'agents vivant à t est

$$N_t = N_0 e^{\int_o^t (n_s - 1)\mathrm{d}s}. \tag{2}$$

Dans le but de se concentrer sur l'étude des décisions de fertilité endogènes, on utilise un processus de production extrêmement simple ne requérant qu'une ressource naturelle et du travail, dont l'offre dépend des décisions de fertilité de l'agent. Plus spécifiquement, on fait l'hypothèse que chaque agent est doté d'une unité de travail qu'il offre inélastiquement et que la propriété de la ressource naturelle est partagée également entre les différents adultes vivant à la période t. La production du bien de consommation est réalisée par une firme représentative dont les marchés du produit et des facteurs de production sont parfaitement compétitifs. La fonction de production qu'on suppose homogène de degré 1, peut alors être écrite comme $F(Q_t, N_t)$ où Q_t représente la quantité de ressource utilisée pour la production au temps t. La contrainte de ressource de l'économie est alors

$$F(Q_t, N_t) = N_t c_t + \beta N_t n_t. \tag{3}$$

où β représente le coût marginal d'un enfant qui est constant en termes d'unités de consommation. Sachant que $dN_t/dt = (n_t - 1)N_t$, on peut écrire (3) sous la forme de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} dN_t &= \left[\frac{1}{\beta}F(Q_t, N_t) - \frac{1}{\beta}N_t c_t - N_t\right] dt, \\ & N_0 \text{ donné.} \end{aligned} \tag{4}$$

Afin de décrire la dynamique de la biomasse de la ressource naturelle en absence d'exploitation, on utilise le modèle logistique Pearl-Verhulst (Pearl [1930] et Verhulst [1938]). Avec exploitation de la ressource, le taux de croissance de la biomasse est alors décrit par

$$\dot{S}_t = rS_t[1 - S_t/K] - Q_t, \tag{H1}$$

où S_t est la biomasse au temps t, r est le taux de croissance maximal de la biomasse et K est la biomasse maximale que cette ressource peut atteindre étant donné les limites de l'environnement dans lequel elle évolue.

Comme l'utilité d'un agent vivant à la période t dépend de sa propre consommation ainsi que du bien-être de tous ses descendants, cette relation récurrente, nous permet de subsumer dans la fonction d'utilité du patriarche l'utilité de ses descendants immédiats ainsi que de tous les autres à venir. On remarque que la forme fonctionnelle adoptée pour la fonction de préférence pour le temps ajustée par le nombre de descendants satisfait le critère de cohérence temporelle de Strotz. On peut donc étudier la suite des décisions individuelles en n'examinant que les décisions que prend le patriarche sur tout l'horizon temporel. Dans un tel cadre, le problème du patriarche est le suivant :

$$\begin{aligned} &\max_{\{q_t, c_t\}_{t=0}^{\infty}} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} N_t^{1-\varepsilon} U(c_t)\, dt \\ &\text{sujet à (4) et (H1),} \end{aligned} \tag{P}$$

ce qui revient à un problème de planification.

Avant d'aborder l'analyse dynamique de notre modèle, il est important de souligner que le programme (P) est un programme non standard de croissance économique où la population qui est une des variables d'état du modèle, apparaît dans la fonction objectif. Kurz [1968a] a démontré que sous ces conditions, si l'état stationnaire existe, il peut être multiple. Afin d'éviter ce problème et ainsi se concentrer sur l'étude du lien population-ressources naturelles, on adopte la fonction d'utilité suivante :

$$U(c_t) = c_t^{1-\sigma}/(1-\sigma). \tag{H2}$$

Enfin, le processus de production est représenté par une fonction Cobb-Douglas

$$\text{(H3)} \qquad F\left(Q_t, N_t\right) = Q_t^{1-\gamma} N_t^{\gamma},\ 0 < \gamma < 1.$$

3 Droits de propriété et population

L'objectif de cette section est d'analyser les effets de la définition de droits de propriété sur la ressource. Pour ce faire, nous allons supposer, dans un premier temps, qu'il n'y a qu'un seul patriarche à qui appartient la totalité de la ressource. Dans un deuxième temps, nous supposons que plusieurs patriarches utilisent la ressource sans que des droits de propriétés soient définis sur celle-ci. Nous analyserons l'effet de la définition des droits de propriété en comparant les équilibres stationnaires des deux modèles.

Supposons, dans un premier temps, qu'il n'y a qu'un seul patriarche. Dans le cadre défini à la section précédente, le programme de celui-ci est :

(P1)

$$\max_{\{q_t, c_t\}_{t=0}^{\infty}} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} N_t^{1-\varepsilon} \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt$$

sujet à

$$\dot{N}_t = \frac{1}{\beta} Q_t^{1-\gamma} N_t^{\gamma} - \frac{1}{\beta} N_t c_t - N_t,\ N_0 = 1,$$

$$\dot{S}_t = r S_t \left[1 - \left(S_t / K\right)\right] - Q_t,\ S_0 \text{ donné.}$$

Si $\{c_t, Q_t, N_t, S_t\}_{t=0}^{\infty}$ est la trajectoire optimale, alors elle satisfait les conditions de Pontryagin :

$$\text{(5)} \qquad N_t^{1-\varepsilon} c_t^{-\sigma} - \frac{\pi_t N_t}{\beta} = 0,$$

$$\text{(6)} \qquad \frac{1-\gamma}{\beta} \pi_t Q_t^{-\gamma} N_t^{\gamma} - \lambda_t = 0,$$

$$\text{(7)} \qquad \dot{\pi}_t = \rho \pi_t - (1-\varepsilon) N_t^{-\varepsilon} \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \pi_t \left[\frac{\gamma}{\beta} Q_t^{1-\gamma} N_t^{\gamma-1} - \frac{1}{\beta} c_t - 1\right],$$

$$\text{(8)} \qquad \dot{\lambda}_t = \rho \lambda_t - \lambda_t \left[r - 2\frac{r}{K} S_t\right],$$

$$\text{(9)} \qquad \dot{N}_t = \frac{1}{\beta} Q_t^{1-\gamma} N_t^{\gamma} - \frac{1}{\beta} N_t c_t - N_t,$$

$$\text{(10)} \qquad \dot{S}_t = r S_t \left[1 - S_t / K\right] - Q_t,$$

où π_t et λ_t représentent respectivement les prix efficients d'une unité de population (ou d'un enfant) et d'une unité de ressource. L'équation (4) représente la condition d'arbitrage entre la consommation actuelle et l'épargne réalisée à travers les enfants. L'équation (6) représente la condition d'arbitrage entre la vente de ressource sur le marché et l'épargne réalisée à travers la ressource naturelle. Les équations (7) et (8) réécrites de façon appropriée stipulent que le rendement net sur l'épargne en enfants et en ressource doit être égal au taux de préférence pour le temps.

Afin de caractériser la dynamique du modèle, dérivons $\dot{c}_t/c_t$ et $\dot{Q}_t/Q_t$ des équations (5), (6), (7) et (8). En différentiant (5) par rapport à t et en substituant dans (7), on obtient

$$(11) \qquad -\sigma \dot{c}_t/c_t = 1 + \rho - \varepsilon + \frac{\varepsilon - \gamma}{\beta} Q_t^{1-\gamma} N_t^{\gamma-1} + \frac{\sigma(\varepsilon - 1)}{\beta(1-\sigma)} c_t.$$

En différentiant (6) par rapport à t et en subsituant dans (8), on a

$$(12) \qquad \gamma \, \dot{Q}_t/Q_t = 1 + r - \gamma - \frac{\sigma - \varepsilon + \gamma(1-\sigma)}{\beta(1-\sigma)} c_t - 2\frac{r}{K} S_t.$$

La résolution du système d'équations (9) à (12) à l'état stationnaire permet d'obtenir les valeurs des variables à cet équilibre :

$$(13) \qquad c_\infty = \frac{\beta(1-\sigma)(1+\rho-\gamma)}{\sigma - \varepsilon + \gamma(1-\sigma)},$$

$$(14) \qquad S_\infty = \frac{K}{2r}(r - \rho),$$

$$(15) \qquad Q_\infty = r S_\infty [1 - S_\infty/K],$$

$$(16) \qquad N_\infty = Q_\infty [c_\infty + \beta]^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Il faut que $\sigma < 1$ et que $\varepsilon < \sigma$ afin d'assurer la concavité du programme et une consommation positive. D'autre part, il est nécessaire que le taux de croissance maximum de la biomasse soit supérieur au facteur d'escompte afin que $Q_0 < S_0$. Pour que cette condition soit satisfaite, on doit avoir $r > \rho$. La biomasse est alors nécessairement positive à l'équilibre stationnaire. En effet, si le rendement maximal sur la biomasse est inférieur au facteur d'escompte temporel, l'agent épargne moins en ressource naturelle et celle-ci disparaît donc asymptotiquement lorsque t tend vers l'infini, il n'y a alors pas d'équilibre stationnaire. À présent, on peut énoncer un premier résultat.

PROPOSITION 1: Sous les hypothèses que $0 < \varepsilon < \sigma < 1$ et que $r > \rho$, la trajectoire $\{c_t, Q_t, N_t, S_t\}_{t=0}^{\infty}$ satisfaisant (5)-(10) est optimale si

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} \pi_t N_t = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t} \pi_t \geqslant 0,$$

$$0 \leqslant N_t \leqslant \overline{N} \text{ pour un } \overline{N} < \infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_t S_t = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_t \geqslant 0 \text{ et},$$

$$0 \leqslant S_t \leqslant \overline{S} \text{ pour un } \overline{S} < \infty.$$

Preuve : Afin de prouver le résultat, il est utile de procéder à la transformation de variable suivante : $D_t = N_t c_t$. Le problème peut alors se réécrire de la façon suivante :

$$\max_{\{q_t, c_t\}_{t=0}^{\infty}} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} N_t^{\sigma-\varepsilon} \frac{D_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt$$

sujet à

$$\dot{N}_t = \frac{1}{\beta} Q_t^{1-\gamma} N_t^{\gamma} - \frac{1}{\beta} D_t - N_t, \quad N_0 = 1,$$

$$\dot{S}_t = r S_t \left[1 - (S_t/K)\right] - Q_t,\ S_0 \text{ donné}.$$

On remarque que l'argument dans la fonction objectif est concave en (D, Q, N, S). Les équations d'état sont, quant à elles, concaves en (D, Q, N, S). Il suffit alors d'appliquer le théorème 9.3.1 de LÉONARD et LONG[1] [1992, pp. 288-289] qui nous donne la condition suffisante pour l'optimalité de la trajectoire. ■

À ce stade, il convient de faire deux remarques. La première concerne la stabilité de l'état stationnaire décrit par les équations (13)-(16). KURZ [1968b] a montré que pour des problèmes autonomes à horizon infini avec un taux d'escompte $\rho > 0$, l'état stationnaire s'il existe, ne peut être localement stable. Nous savons donc que pour notre modèle, l'état stationnaire est alors, soit complètement instable, soit conditionnellement stable au sens d'un point de selle. Nous ne sommes pas en mesure d'offrir une analyse générale de la stabilité locale de l'équilibre stationnaire, celle-ci dépendant de la valeur des paramètres. Par exemple, si on analyse la stabilité de l'état stationnaire pour les valeurs suivantes de ceux-ci : $\beta = 0.01$, $\sigma = 0.9$, $\varepsilon = 0.7$, $\rho = 0.05$, $r = 0.1$, $K = 100$, et que l'on considère $\gamma \in (0,1)$, on remarque que la dynamique du modèle change de propriété selon que γ est inférieur ou supérieur à 0.7. Le tableau, en annexe, donne les valeurs propres du jacobien du système d'équations différentielles (9)-(12). En s'y référant, on remarque que pour $\gamma > 0.7$, l'équilibre stationnaire est instable. En revanche, pour $\gamma \leqslant 0.7$, l'équilibre stationnaire est caractérisé par une stabilité conditionnelle dans le sens du point de selle. Pour $\gamma = 0.7$, on aura un nœud sur la surface stable (*saddle-node*) et pour $\gamma < 0.7$, on aura un focus sur la surface stable (*saddle-focus*). Dans la suite de l'article, nous nous attardons à l'analyse et la

1. Un arbitre a porté à mon attention le fait que le résultat de ce théorème a été formulé par MANGASARIAN [1966].

comparaison d'états stationnaires. On fait donc l'hypothèse implicite que les paramètres du problème satisfont les conditions d'une stabilité conditionnelle au sens d'un point de selle.

La seconde remarque fait référence à la vision malthusienne voulant que la consommation stationnaire se situe au niveau de subsistance. Il est important de souligner que ce type de solution est exclue de notre modèle lorsqu'il n'y a qu'un seul patriarche. Pour introduire le concept de consommation de subsistance, on pourrait facilement utiliser une fonction de type Stone-Geary de la forme :

$$u\left(c_t\right) = \frac{\left(c_t - c_s\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \qquad \text{(H2}'\text{)}$$

où c_s représente la consommation de subsistance (notre modèle est un cas particulier où la consommation de subsistance a été normalisée à 0). Par contre, l'hypothèse (H2′) ne vient pas changer fondamentalement la dynamique de la solution. La consommation à l'état stationnaire serait strictement supérieure au niveau de subsistance c_s, tout comme dans notre modèle elle est strictement positive (la différence n'étant qu'une question de normalisation). En fait, ce résultat est dû au fait que l'utilité marginale de la consommation au niveau de subsistance est infinie. L'agent économique ne choisit donc jamais une trajectoire convergeant vers une consommation de subsistance. La seule façon d'avoir une consommation stationnaire au niveau de subsistance dans un modèle de type dynastique est de définir une fonction d'utilité telle que l'utilité marginale de la consommation n'est pas infinie au niveau de subsistance (voir HUNG et MAKDISSI [1999] pour une analyse détaillée de ce type de problème).

D'autre part, il est essentiel de se demander si la définition du droit de propriété sur la ressource joue un rôle dans la détermination des valeurs des différentes variables à l'état stationnaire. DASGUPTA [1995] soutient que l'absence de droits de propriétés bien définis sur une ressource inciterait les agents à avoir plus d'enfants. Cette absence de droits de propriété entraîne alors une diminution de la consommation *per capita*. Une question cruciale nous vient alors immédiatement à l'esprit. Est-ce que dans un modèle de type dynastique, avec utilité marginale de la consommation infinie au niveau de subsistance, il est possible qu'une mauvaise définition du droit de propriété sur une ressource naturelle renouvelable entraîne l'économie vers un état stationnaire où la consommation se stabilise au niveau de subsistance ?

Dans notre modèle, on fait une hypothèse stipulant que les différents agents vivant à la période t possèdent un droit de propriété bien défini sur une partie de la ressource. En revanche, il est opportun de se demander si une telle définition du droit de propriété est une hypothèse raisonnable lorsqu'on traite du cas d'une ressource naturelle renouvelable. Tout dépend du type de ressource. Par exemple, si cette ressource consiste en un troupeau évoluant sur un territoire bien défini et délimité, il n'y a pas de contrainte naturelle à ce que des droits de propriété puissent être définis. En revanche, si on considère le cas d'une ressource halieutique, le cadre naturel se prête moins à une définition du droit de propriété. Que se passe-t-il alors ? Est-ce que, comme le prétend DASGUPTA [1995], les agents ont alors tendance à augmenter l'importance de leur progéniture ?

Afin d'apporter une réponse à cette question dans le cadre de notre modèle, il est essentiel de reformuler le problème. En absence de droits de propriété sur la ressource et en absence d'un contrôle centralisé sur son exploitation, les agents vivant à la période t prennent leurs décisions en considérant les décisions des autres agents vivant à la même période comme donnée. De plus, ils prennent en compte le fait que leur descendants se comportent de la même façon. Dans ce contexte, le patriarche agit alors comme un leader de Stackelberg qui prend en compte les fonctions de réaction d'une infinité de descendants au moment de faire tous ses choix. La résolution de ce problème sur l'ensemble de l'horizon temporel est trop complexe car le nombre de joueurs est lui-même une variable endogène.

Comme nous ne sommes pas en mesure de fournir une solution au modèle tel que stipulé et, afin d'illustrer le problème que pose l'absence de droit de propriété sur la ressource, nous allons adopter une approche différente. Supposons qu'au temps $t = 0$, il y a N_0 patriarches dont la descendance constitue N_0 tribus. Si les droits de propriété sont bien définis, le modèle a exactement la même dynamique que précédemment et les valeurs des différentes variables à l'équilibre stationnaire sont données par les équations (13)-(16). En revanche, si on suppose que les droits de propriété sur la ressource sont inexistants, la dynamique du modèle est différente.

Supposons qu'en annonçant leur stratégie à $t = 0$, les patriarches peuvent s'engager de façon crédible à ce que celle-ci soit respectée par leurs descendants. Nous donnons donc ici la résolution du jeu sous une stratégie à boucle ouverte (*open-loop*). Il faut noter que l'équilibre de Nash d'un tel jeu n'est pas en général un équilibre parfait en sous-jeux (voir KARP et NEWBERY [1993]). En revanche, BENCHEKROUN et LONG [1998] soulignent que dans un jeu simultané avec agents symétriques (comme le jeu considéré ici), les équilibres « *non raisonnables* » avec menaces non crédibles n'apparaissent pas dans la solution à boucle ouverte. C'est pourquoi, nous adoptons ce type de modélisation qui, malgré sa simplicité, nous permet de discuter des incitatifs stratégiques auxquels les agents font face.

Dans ce contexte, le problème du patriarche de la tribu i peut se réécrire de la façon suivante :

$$\max_{\{q_{i,t},c_{i,t}\}_{t=0}^{\infty}} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} N_{i,t}^{1-\varepsilon} \frac{c_{i,t}^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt$$

(P2) sujet à

$$\dot{N}_{i,t} = \frac{1}{\beta} q_{i,t}^{1-\gamma} N_{i,t}^{\gamma} - \frac{1}{\beta} N_{i,t} c_{i,t} - N_{i,t},\ N_{i,0} = 1,$$

$$\dot{S}_t = r S_t \left[1 - (S_t/K)\right] - q_{i,t} - \sum_{j \neq i} q_{j,t},\ S_0 \text{ donné},$$

où $N_{i,t}$, $q_{i,t}$ et $c_{i,t}$ sont respectivement la population, l'extraction de ressource et la consommation *per capita* de la tribu i au temps t.

Si $\left\{c_{i,t}, q_{i,t}, N_{i,t}, S_t\right\}_{t=0}^{\infty}$ est la trajectoire optimale de la tribu i, alors elle satisfait aux conditions de Pontryagin :

$$N_{i,t}^{1-\varepsilon} c_{i,t}^{-\sigma} - \frac{\pi_{i,t} N_{i,t}}{\beta} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{1-\gamma}{\beta} \pi_{i,t} q_{i,t}^{-\gamma} N_{i,t}^{\gamma} - \lambda_{i,t} = 0, \tag{18}$$

$$\dot{\pi}_{i,t} = \rho \pi_{i,t} - (1-\varepsilon)\, N_{i,t}^{-\varepsilon} \frac{c_{i,t}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \pi_{i,t} \left[\frac{\gamma}{\beta} q_{i,t}^{1-\gamma} N_{i,t}^{\gamma-1} - \frac{1}{\beta} c_{i,t} - 1 \right], \tag{19}$$

$$\dot{\lambda}_{i,t} = \rho \lambda_{i,t} - \lambda_{i,t} \left[r - 2\frac{r}{K} S_{i,t} \right], \tag{20}$$

$$\dot{N}_{i,t} = \frac{1}{\beta} q_{i,t}^{1-\gamma} N_{i,t}^{\gamma} - \frac{1}{\beta} N_{i,t} c_{i,t} - N_{i,t}, \tag{21}$$

$$\dot{S}_t = r S_t \left[1 - S_t / K\right] - q_{i,t} - \sum_{j \neq i} q_{j,t}, \tag{22}$$

où $\pi_{i,t}$ et $\lambda_{i,t}$ représentent respectivement les prix efficients d'une unité de production et d'une unité de ressource pour la tribu i. Comme les N_0 tribus sont identiques, on sait que $N_t = N_0 N_{i,t}$, $Q_t = N_0 q_{i,t}$, $c_t = c_{i,t}$, $\pi_t = \pi_{i,t}$ et $\lambda_t = \lambda_{i,t}$ pour tout $i = 1$ à N_0. En substituant ces relations dans les équations (17)-(22), on retrouve exactement les équations (5)-(6) et (8)-(10), l'équation (7) se réécrit alors :

$$\dot{\pi}_t = \rho \pi_t - (1-\varepsilon) \frac{N_t^{-\varepsilon}}{N_0^{-\varepsilon}} \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \pi_t \left[\frac{\gamma}{\beta} Q_t^{1-\gamma} N_t^{\gamma-1} - \frac{1}{\beta} c_t - 1 \right]. \tag{23}$$

S'il n'y a qu'une seule tribu ($N_0 = 1$), l'équation (23) est identique à l'équation (7) et on retrouve alors exactement la même solution que précédemment.

Afin de caractériser le nouvel état stationnaire du modèle, dérivons $\dot{c}_t / c_t$ et $\dot{Q}_t / Q_t$ des équations (5), (6), (23) et (8). En différentiant (5) par rapport à t et en substituant dans (23), on obtient :

$$-\sigma \dot{c}_t / c_t = 1 + \rho - \varepsilon + \frac{\varepsilon - \gamma}{\beta} Q_t^{1-\gamma} N_t^{\gamma-1} + \\ + \frac{(\varepsilon - 1)\, N_0^{\varepsilon} - (1-\varepsilon)(1-\sigma)}{\beta\,(1-\sigma)} c_t. \tag{24}$$

En différentiant (6) par rapport à t et en substituant dans (8), on obtient :

$$\gamma\, \dot{Q}_t / Q_t = 1 + r - \gamma - \frac{(1-\varepsilon)\, N_0^{\varepsilon} - (1-\gamma)(1-\sigma)}{\beta\,(1-\sigma)} c_t - 2\frac{r}{K} S_t. \tag{25}$$

La résolution du système d'équations (9), (10), (24) et (25) à l'état stationnaire nous donne les valeurs des variables à cet équilibre :

$$c_\infty = \frac{\beta\,(1-\sigma)(1+\rho-\gamma)}{(1-\varepsilon)\, N_0^{\varepsilon} - (1-\gamma)(1-\sigma)}, \tag{26}$$

(27) $$S_\infty = \frac{K}{2r}(r-\rho),$$

(28) $$Q_\infty = r S_\infty [1 - S_\infty/K],$$

(29) $$N_\infty = Q_\infty [c_\infty + \beta]^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

On peut comparer les états stationnaires du modèle avec des droits de propriété privée et celui avec propriété commune de la ressource. On remarque que l'extraction totale de ressource ainsi que la biomasse à l'état stationnaire des deux modèles sont identiques. Nous pouvons en revanche, à l'aide de notre modèle, confirmer la proposition de DASGUPTA [1995] stipulant que l'absence de droits de propriété sur la ressource incite les agents à avoir plus d'enfants, ce qui implique une diminution de la consommation *per capita* à l'état stationnaire.

PROPOSITION 2 : L'élimination du droit de propriété sur la ressource naturelle renouvelable nécessaire à la production entraînera une augmentation de la population et une diminution de la consommation à l'état stationnaire.

Preuve : De (26) et (29) on obtient que $\frac{\partial c_\infty}{\partial N_0} < 0$ et $\frac{\partial N_\infty}{\partial N_0} > 0$. ■

Finalement, en observant le résultat de l'équation (26), on peut facilement remarquer que plus le nombre de tribus (N_0) est grand, plus la consommation à l'état stationnaire se rapproche du niveau de subsistance (normalisé à 0 dans notre modèle). La définition de droits de propriété sur la ressource naturelle assure une consommation plus élevée à l'état stationnaire. Même dans un modèle de type dynastique dont les hypothèses semblent exclure *a priori* la possibilité de piège malthusien, une mauvaise définition de ces droits peut entraîner l'économie vers un état stationnaire avec consommation de subsistance.

4 Conclusion

Cet article aborde dans un modèle de croissance avec décisions de fertilité endogènes le débat sur le lien entre la population et le développement durable. Le résultat principal est que l'absence de droits de propriété sur la ressource entraîne une augmentation de la population et une diminution de la consommation *per capita* à l'état stationnaire. La définition de droits de propriété devrait donc faire partie des objectifs pour une autorité publique désirant faire diminuer le taux de fertilité d'une population.

Afin de simplifier les calculs, la fonction de production est représentée par une Cobb-Douglas. Les hypothèses sur la fonction objectif du patriarche sont, en revanche, plus restrictives. Dans un cadre plus général, il aurait été impossible d'écarter la possibilité d'équilibres multiples. De plus, notre modèle exclut la croissance économique en supposant une technologie stable à travers le temps. Une extension possible de ce modèle serait de tenir compte des résultats de Becker, Murphy et Tamura [1990], c'est-à-dire de permettre à l'agent de réduire la production d'enfants afin qu'il investisse davantage dans l'accumulation du capital humain. ■

• Références bibliographiques

Barro R.J., Becker G.S. [1989]. – « Fertility Choice in a Model of Economic Growth », *Econometrica*, 57, pp. 481-501.

Barro R.J., Sala-i-Martin X. [1995]. – *Economic Growth*, McGraw-Hill, New York.

Becker G.S., Barro R.J. [1988]. – « A Reformulation of the Economic Theory of Fertility », *Quarterly Journal of Economics*, 103, pp. 1-25.

Becker B.S., Murphy K.M., Tamura R. [1990]. – « Human Capital, Fertility, and Economic Growth », *Journal of Political Economy*, 98, pp. s12-s36.

Benchekroun H., Long N.V. [1998]. – « Efficiency Inducing Taxation for Polluting Oligopolists », *Journal of Public Economics*, 70, pp. 325-342.

Dasgupta P. [1995]. – « The Population Problem: Theory and Evidence », *Journal of Economic Litterature*, 33, pp. 1879-1902.

Hardin G. [1968]. – « The Tragedy of the Commons », *Science*, 162, pp. 1243-1248.

Hung N.M., Makdissi P. [1999]. – « Poverty Trap and Endogenous Population », *Cahier de recherche* 9916, Département d'Économique, Université Laval.

Karp L., Newbery D. [1993]. – *Intertemporal Consistency Issues in Depletable Resources*, in Kneese, A.V. et J.L. Sweeny (eds.), Handbook of Natural Resource and Energy Economics, vol. III, Elsevier Science, Amsterdam.

Kurz M. [1968a]. – « Optimal Economic Growth and Welfare Effects », *International Economic Review*, 9, pp. 348-357.

Kurz M. [1968b]. – « The General Instability of a Class of Competitive Growth Processes », *Review of Economic Studies*, 35, pp. 155-174.

Leonard D., Long N.V. [1992]. – *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Levhari D., Mirman L.J. [1980]. – « The Great Fish War: An Example Using Dynamic Cournot-Nash Solution », *Bell Journal of Economics*,11(1), pp. 322-334.

Mangasarian O.L. [1966]. – « Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems », *SIAM Journal of Control*, 4, pp. 139-152.

Pearl R. [1930]. – *The Biology of Population Growth*, Knopf, New York, NY.

Verhulst P.F. [1838]. – « Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement », *Correspondance mathématique et physique*, 10, pp. 113-121.

ANNEXE

Afin de caractériser localement la stabilité de l'équilibre stationnaire, nous effectuons une approximation linéaire du système d'équations différentielles (13)-(16) décrivant la dynamique du modèle :

$$\begin{bmatrix} \dot{N}_t \\ \dot{S}_t \\ \dot{c}_t \\ \dot{Q}_t \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} N_t - N_\infty \\ S_t - S_\infty \\ c_t - c_\infty \\ Q_t - Q_\infty \end{bmatrix}$$

où J est le jacobien du système. Nous pouvons caractériser la stabilité locale du système en calculant les valeurs propres λ du jacobien en résolvant :

$$|J - \lambda I| = 0.$$

Pour les valeurs $\beta = 0.01$, $\sigma = 0.9$, $\varepsilon = 0.7$, $\rho = 0.05$, $r = 0.1$, $K = 100$, celles-ci sont données dans le tableau ci-dessous.

TABLEAU
Valeurs propres du jacobien

γ	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0.1	– 13.1517 + 131.733i	– 13.1517 – 131.733i	26.3548	0.0486316
0.2	– 6.05058 + 192.6i	– 6.05058 – 192.6i	12.1527	0.048457
0.3	– 3.53169 + 330.771i	– 3.53169 – 330.771i	7.11515	0.482316
0.4	– 2.26241 + 710.838i	– 2.26241 – 710.838i	4.57688	0.0479291
0.5	– 1.5 + 2175.46i	– 1.5 – 2175.46i	3.05249	0.0475021
0.6	– 0.991667 + 11950.2i	– 0.991667 – 11950.2i	2.03648	0.0468537
0.699999	– 0.628574 + 1280.72i	– 0.628574 – 1280.72i	1.31139	0.045753
0.7	0.388889	– 0.338889	0.102344	– 0.0523443
0.7000001	– 405.647	404.39	1.3114	0.045753
0.8	– 5.68392 $\times 10^{8}$	5.68392 $\times 10^{8}$	0.769019	0.0434807
0.9	3.93708 $\times 10^{18}$	– 3.93708 $\times 10^{18}$	0.352656	0.36233