ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 59 – 2000

Agents hétérogènes, croissance et détermination de l'équilibre

Carine NOURRY, Alain VENDITTI *

RÉSUMÉ. – Nous étudions un modèle de croissance à un secteur dans lequel coexistent à chaque période un *continuum* d'agents à durée de vie finie, et d'agents à durée de vie infinie. Nous montrons que deux types d'équilibres stationnaires peuvent exister. Un équilibre correspondant au stock de capital de la règle d'or modifiée existe lorsque la consommation des agents à durée de vie infinie est strictement positive. Un ou plusieurs états stationnaires avec consommation nulle pour les agents à durée de vie infinie peuvent également exister. Nous donnons des conditions suffisantes de détermination locale de l'équilibre intérieur indépendantes de la « taille » des agents à durée de vie infinie. Un exemple permet finalement de montrer qu'il peut exister une indétermination locale de l'équilibre alors que le modèle de DIAMOND sous-jacent admet une unique trajectoire d'équilibre.

Heterogeneous Agents, Growth and Determinacy of Equilibrium

ABSTRACT. – We consider a one-sector growth model which combines overlapping generations of finite lived agents and infinite lived consumers. We show that two types of equilibrium may exist. A first type corresponds to the modified golden rule if the stationary consumption of infinite lived agents is strictly positive. A second type of steady state in which infinite lived agents do not consume may also exist. We give sufficient conditions for local determinacy of the interior steady state which does not depend on the "*size*" of infinitely lived agents. An example finally shows that the equilibrium may be locally indeterminate when both types of agents are present while the associated DIAMOND model has one unique equilibrium.

* C. NOURRY : GREQAM et EPEE, Université d'Évry-Val d'Essonne ;
A. VENDITTI : CNRS-GREQAM.
Nous remercions P. CARTIGNY, P. MICHEL, S. GRÉGOIR ainsi que deux rapporteurs anonymes pour leurs commentaires. Nous avons également bénéficié des remarques reçues lors d'une présentation au « *4ème Colloque Théories et Méthodes de la Macroéconomie* », Montréal, 14-15 Mai 1999. Nous restons les seuls responsables de la présence d'erreurs éventuelles.

1 Introduction

Nous considérons un modèle de croissance à un secteur dans lequel coexistent des générations d'agents à durée de vie finie, et des agents à durée de vie infinie. Les formulations de DIAMOND [1965] et de RAMSEY [1928] sont simultanément considérées à travers l'existence de proportions exogènes pour chaque type d'individus. Il existe donc, à chaque période, un *continuum* de consommateurs des deux types. Notre modèle se distingue ainsi de trois contributions qui combinent également ces deux catégories d'agents : MULLER et WOODFORD [1988] supposent qu'il existe un nombre fini d'agents à chaque date ; AIYAGARY [1989] étudie l'existence d'un équilibre concurrentiel dans lequel la combinaison des agents est endogène ; NOURRY et VENDITTI [2000] adoptent une formulation comparable avec des agents à durée de vie infinie représentés par des dynasties altruistes, et prennent en compte la contrainte de positivité des legs.

Nous étudions les propriétés de détermination locale de l'équilibre dans une économie où les agents sont hétérogènes du point de vue de leurs préférences et de leur cycle de vie. On parlera d'indétermination locale dès lors qu'il existe une multiplicité d'équilibres distincts à partir d'un stock de capital initial et d'une richesse initiale pour les agents à durée de vie infinie. L'indétermination des équilibres avec prévisions parfaites soulève plusieurs types de problèmes[1]. Nous nous intéressons, ici, à cette propriété comme une condition suffisante pour l'existence d'équilibres à taches solaires et, donc, de fluctuations stochastiques fondées sur les croyances des agents[2].

Les préférences des deux types d'agents respectent les hypothèses initialement retenues par RAMSEY [1928] et DIAMOND [1965] : les agents à durée de vie infinie sont caractérisés par une fonction d'utilité temporellement additivement séparable tandis que les agents à durée de vie finie ont une fonction d'utilité de cycle de vie générale. Notre formulation est de ce point de vue identique à celle de MULLER et WOODFORD [1988]. Ces caractéristiques communes permettront d'identifier clairement les facteurs qui distinguent les deux modèles.

La coexistence d'agents ayant des horizons de vie différents nous conduit à définir la longueur d'une période sur la base du modèle de DIAMOND. Depuis l'article fondateur de BARRO [1974], il est courant d'interpréter un agent à durée de vie infinie comme une dynastie d'agents altruistes à durée de vie finie. Cependant, dans une contribution précédente[3], nous montrons que la prise en compte de la contrainte de positivité des legs modifie significativement les conclusions de MULLER et WOODFORD. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de legs stationnaires non contraints implique, en effet, que le stock de capital stationnaire est une fonction discontinue de la proportion d'agents altruistes lorsque celle-ci est égale à zéro. Cette disconti-

1. Voir WOODFORD [1984] et, plus récemment, BARINCI [2000].
2. Voir WOODFORD [1986].
3. Voir NOURRY et VENDITTI [2000].

nuité permet de montrer que l'équilibre est génériquement déterminé dès lors que cette proportion est strictement positive. Nous rejetons donc l'interprétation *à la* BARRO. On peut alors supposer que certaines institutions telles que les admistrations publiques doivent être modélisées commme des agents à durée de vie infinie tandis que les ménages ont une durée de vie finie[4].

Sous les hypothèses de la concurrence pure et parfaite, KEHOE et LEVINE [1985], et KEHOE, LEVINE et ROMER [1990] montrent qu'il existe des économies avec un nombre infini d'agents à durée de vie finie, caractérisées par une indétermination robuste de l'équilibre, alors que dans les économies avec un nombre fini d'agents à durée de vie infinie, l'équilibre est génériquement déterminé. L'analyse du cas mixte par MULLER et WOODFORD [1988] apporte deux conclusions essentielles qui mettent en évidence l'importance de la « *taille* » des agents à durée de vie infinie, et de l'effet du taux d'intérêt sur les décisions de consommation des agents à durée de vie finie :

i) La Proposition 4 (p. 276) montre que si les agents à durée de vie infinie sont « *petits* », il existe un ensemble ouvert d'économies dans lesquelles l'état stationnaire est localement indéterminé. Le concept de « *petit* » agent est défini comme suit : les consommateurs à durée de vie infinie détiennent une grande partie de la richesse totale mais leur consommation représente une faible proportion de la consommation totale. Ils montrent par un argument de continuité qu'un équilibre indéterminé dans une économie à générations imbriquées est robuste à l'introduction de « *petit*s » consommateurs à durée de vie infinie.

ii) La Proposition 8 (p. 282) montre que si pour les agents à durée de vie finie les effets revenu suivant une modification des prix sont négligeables, l'état stationnaire ne peut pas être localement indéterminé.

La considération simultanée de ces deux propositions permet de formuler l'assertion suivante : pour tout effet revenu suffisamment important (et éventuellement supérieur aux effets de substitution)[5], il existe des économies ayant un état stationnaire indéterminé si la consommation des agents à durée de vie infinie est suffisamment faible.

Dans le présent article, nous considérons un modèle similaire à celui de MULLER et WOODFORD. Deux éléments importants permettent cependant de le distinguer : il existe à chaque période un *continuum* d'agents, et l'économie est composée d'un unique bien homogène. Cette deuxième propriété est fondamentale pour caractériser les deux cas polaires. Dans le modèle à générations imbriquées, la dynamique est uni-dimensionnelle et l'équilibre est, sauf cas dégénéré, localement déterminé. Cependant, l'existence d'une multiplicité d'états stationnaires peut conduire à une indétermination globale. Dans le modèle de RAMSEY, la dynamique est bi-dimensionnelle (richesse identifiée au capital et prix) et l'équilibre est globalement déterminé. L'analyse du modèle mixte repose, donc, sur l'étude d'un système dynamique à trois dimensions (capital, richesse et prix).

4. Voir par exemple THOMPSON [1967].

5. Dans la suite de l'article, à chaque fois que nous parlerons des effets de substitution et des effets revenu, il s'agira de l'effet du taux d'intérêt sur les décisions de consommation des agents à durée de vie finie.

Nous montrons tout d'abord que deux types d'équilibres stationnaires peuvent co-exister. Un équilibre correspondant à la règle d'or modifiée existe lorsque la consommation des agents à durée de vie infinie est positive. Un ou plusieurs états stationnaires avec consommation nulle pour les agents à durée de vie infinie peuvent également exister. Si le niveau d'épargne stationnaire des agents à durée de vie finie n'excède pas la règle d'or modifiée, le premier équilibre existe quelle que soit la combinaison des agents dans l'économie. Dans ce cas, nous retrouvons une discontinuité du stock de capital stationnaire par rapport à la proportion d'agents à durée de vie infinie ainsi que la détermination locale de l'équilibre intérieur qui en découle. Si, au contraire, les agents à durée de vie finie offrent une épargne excédentaire relativement à la règle d'or modifiée, on définit une proportion limite d'agents à durée de vie infinie au-dessus de laquelle l'état stationnaire correspondant à la règle d'or modifiée existe. Dans ce cas, bien que la consommation des agents à durée de vie infinie soit « *petite* » dans un voisinage de cette proportion limite, on montre que l'équilibre intérieur est localement déterminé si pour les agents à durée de vie finie l'effet revenu, suite à une modification du facteur d'intérêt, n'est pas trop important relativement à l'effet de substitution. L'assertion dérivée des conclusions de MULLER et WOODFORD n'est donc pas vérifiée.

La discontinuité de l'état stationnaire dans la première configuration, et l'existence d'une proportion limite dans la deuxième montrent qu'il est impossible dans notre modèle d'établir par des arguments de continuité un parallèle entre les propriétés de détermination de l'équilibre en présence d'agents à durée de vie infinie et dans le modèle de DIAMOND. Nous confirmons cette conclusion en proposant un exemple simple avec préférences CES et technologie Cobb-Douglas dans lequel l'équilibre stationnaire est localement indéterminé lorsque la consommation des agents à durée de vie infinie est suffisamment faible. Un tel résultat est basé sur une richesse stationnaire négative pour les agents à durée de vie infinie, et il est obtenu alors que le modèle de DIAMOND est globalement déterminé.

L'article est organisé de la façon suivante : dans la seconde section nous présentons le modèle. L'équilibre stationnaire est étudié dans la section 3. Nous proposons des conditions suffisantes de détermination de l'équilibre dans la quatrième section. Un exemple d'indétermination est donné dans la section 5. La totalité des démonstrations est contenue dans une annexe.

2 Le modèle

Nous considérons une économie composée à chaque période t d'un *continuum* de mesure N_t d'agents dont une proportion $0 < p \leqslant 1$ correspond à des agents à durée de vie infinie (r), et une proportion $q = 1 - p$ à des agents à durée de vie finie (e). La taille de la population active N_t est donc égale à la somme des agents à durée de vie finie nés en t, $(1 - p)N_t$, et des agents à durée de vie infinie à la période t, pN_t. Nous supposons que les deux types de population croissent à un taux constant identique n de sorte que

$N_{t+1} = (1+n)N_t$, et les proportions, supposées exogènes, sont constantes dans le temps.

Chaque génération $t = 0,1,2,...$ d'agents à durée de vie finie est composée d'individus identiques qui vivent deux périodes : ils travaillent durant la première (avec une unité de travail offerte de façon inélastique) et leurs préférences pour la consommation (c^e, lorsqu'ils sont jeunes, et d^e, lorsqu'ils sont vieux) sont définies par la fonction d'utilité $u^e(c^e, d^e)$ qui vérifie :

HYPOTHÈSE 1 : La fonction d'utilité $u^e(c^e, d^e)$ est strictement croissante par rapport à chaque argument ($u_1^e(c^e, d^e) > 0$ et $u_2^e(c^e, d^e) > 0$), strictement concave et $\mathbf{C}^2$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^2_{++} =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. De plus, pour tout niveau de consommations c^e, $d^e \geqslant 0$,

$$\lim_{\xi\to 0} u_1^e(\xi, d^e) = \infty = \lim_{\psi\to 0} u_2^e(c^e, \psi).$$

HYPOTHÈSE 2 : Les consommations c_t^e et d_{t+1}^e sont des biens normaux.

Sous l'hypothèse de prévisions parfaites, un agent à durée de vie finie e maximise son utilité de cycle de vie :

$$(1) \qquad \begin{array}{ll} \max\limits_{c_t^e, d_{t+1}^e, s_t^e} & u^e(c_t^e, d_{t+1}^e) \\ s.c. & w_t = c_t^e + s_t^e \\ & (1+r_{t+1})s_t^e = d_{t+1}^e \end{array}$$

Les conditions du premier ordre donnent l'épargne de chaque agent e comme une fonction du taux de salaire w_t et du facteur d'intérêt $R_{t+1} = 1 + r_{t+1}$:

$$(2) \qquad s_t^e = s^e(w_t, R_{t+1})$$

Sous l'hypothèse 2 la fonction d'épargne croît avec le taux de salaire tandis que sa variation en fonction du facteur d'intérêt reste *a priori* indéterminée.

Chaque agent à durée de vie infinie r a des préférences intertemporelles additivement séparables caractérisées par la fonction d'utilité instantanée $u_r(c^r)$ vérifiant :

HYPOTHÈSE 3 : La fonction d'utilité $u_r(c^r)$ est strictement croissante, strictement concave, $\mathbf{C}^2$ sur $\mathbb{R}_{++}$, telle que $\lim\limits_{c\to 0} u_r(c) = \infty$ et $\lim\limits_{c\to\infty} u_r(c) = 0$.

Les prix des facteurs de production étant considérés comme des données, la dynamique de la richesse de chaque agent est régie par l'équation :

$$(3) \qquad x_{t+1} = \frac{1}{1+n}[R_t x_t + w_t - c_t^r]$$

Le programme de maximisation d'un individu r est donc :

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\max_{c_t^r} && \sum_{t=0}^{+\infty} \delta^t u_r(c_t^r) \\ &s.c. && x_{t+1} = \frac{1}{1+n}[R_t x_t + w_t - c_t^r] \\ & && x_0 = \bar{x}_0 \text{ donné} \end{aligned}$$

Le facteur d'actualisation $\delta \in]0,1]$ traduit une préférence pour le présent.

Nous pouvons associer aux richesses x_t, x_{t+1} des prix implicites q_t, q_{t+1} et définir à chaque date $t \geqslant 0$ le Lagrangien suivant :

$$(5)\qquad \mathcal{L}_t = u_r(c_t^r) + \frac{\delta}{1+n} q_{t+1} \left[R_t x_t + w_t - c_t^r\right] - q_t x_t$$

Dans le cas d'une solution intérieure, la maximisation de $\mathcal{L}_t$ par rapport à c_t^r et x_t donne les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité[6] :

$$(6)\qquad \frac{\delta}{1+n} q_{t+1} = u_r'(c_t^r)$$

$$(7)\qquad \frac{\delta}{1+n} q_{t+1} R_t = q_t$$

$$(8)\qquad \lim_{t\to\infty} \delta^t q_t x_t = 0$$

$$(9)\qquad x_{t+1} = \frac{1}{1+n}[R_t x_t + w_t - c_t^r]$$

avec $x_0 = \bar{x}_0$ donné. On déduit des conditions (6) et (7) l'équation d'Euler-Lagrange :

$$(10)\qquad -u_r'(c_t^r)(1+n) + \delta R_{t+1} u_r'(c_{t+1}^r) = 0$$

La fonction de production d'une firme représentative, notée $F(K,L)$, dépend du stock de capital K et du travail L. Nous supposons que $F(K,L)$ est homogène de degré un, et que le stock de capital se déprécie au taux $\mu \in [0,1]$ au cours du processus de production. En posant $k = K/L$ le stock de capital par tête, nous définissons la production nette de façon intensive

$$f(k) = F(k,1) + (1-\mu)k$$

et nous supposons que $f(k)$ vérifie :

HYPOTHÈSE 4 : La fonction de production sous forme intensive $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est continue, strictement croissante, $\mathbf{C}^2$ et strictement concave sur $\mathbb{R}_{++}$. De plus $\lim_{k\to 0} f'(k) > \dfrac{1+n}{\delta}$ et $\lim_{k\to\infty} f'(k) < \dfrac{1+n}{\delta}$.

6. Voir MICHEL [1990].

Les conditions d'équilibre concurrentiel impliquent que le facteur d'intérêt R_t et le taux de salaire w_t vérifient :

$$R_t = f'(k_t) \equiv R(k_t) \tag{11}$$

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \equiv w(k_t) \tag{12}$$

Dans cette économie, l'équilibre sur le marché du travail garantit $L_t = N_t$. À chaque période, l'épargne agrégée assure le financement du stock de capital de la période suivante. L'équilibre sur le marché des capitaux permet donc de formuler la dynamique du capital comme suit :

$$(1+n)k_{t+1} = (1-p)s^e(w_t, R_{t+1}) + p(1+n)x_{t+1} \tag{13}$$

pour tout $t \geqslant 0$. À la date initiale 0, il existe une génération d'agents à durée de vie finie nés en – 1. Leur épargne s^e_{-1} est donnée, le capital par tête initial s'écrit $k_0 = (1-p)s^e_{-1} + p(1+n)\bar{x}_0$ et les prix sont déterminés.

3 État stationnaire et statique comparative

En utilisant les prix concurrentiels, un équilibre stationnaire est défini à partir des trois équations suivantes :

$$(1+n)k - (1-p)s^e\Big(w(k), R(k)\Big) - p(1+n)x = 0 \tag{14}$$

$$-(1+n)u_r'(c^r) + \delta R(k) u_r'(c^r) = 0 \tag{15}$$

$$\Big[R(k) - (1+n)\Big]x + w(k) = c^r \tag{16}$$

Il peut, en fait, exister deux types d'états stationnaires. Dans le cas standard où la consommation stationnaire des agents à durée de vie infinie est strictement positive, $c^r = \bar{c}^r > 0$, l'équation (15) permet d'obtenir le capital stationnaire de la règle d'or modifiée k^* :

$$R^* = \frac{1+n}{\delta} = f'(k^*)$$

On déduit de l'équation (14) la richesse stationnaire x^* :

$$p(1+n)x^* = (1+n)k^* - (1-p)s(w^*, R^*)$$

Il reste, cependant, à vérifier que l'équation (16) évaluée à la règle d'or modifiée définisse une consommation stationnaire positive

$$\bar{c}^r = \Big[R^* - (1+n)\Big]x^* + w^* > 0$$

Le cas échéant, une valeur stationnaire pour le prix implicite q^* est donnée par $q^* = (1+n)u_r'(\bar{c}^r)/\delta$. Or, on observe précisément que la richesse stationnaire x^* peut être négative de sorte que la dernière équation n'est pas nécessairement satisfaite.

Que l'équilibre de la règle d'or modifiée existe ou non, un deuxième type d'état stationnaire peut être solution des équations (14) et (16). Il s'agit du cas où les agents à durée de vie infinie ont une consommation stationnaire c^r égale à 0. L'utilisation de l'équation d'Euler-Lagrange pour caractériser l'équilibre correspondant est alors impossible. La valeur de la richesse stationnaire est obtenue à partir de (16)

$$\hat{x} = -w(k)\Big[R(k) - (1+n)\Big]^{-1} \tag{17}$$

et à partir de l'équation (14) le stock de capital stationnaire $\hat{k} = \hat{k}(p)$ est solution de[7] :

$$(1+n)k - (1-p)s^e\Big(w(k), R(k)\Big) + p(1+n)w(k)\Big[R(k) - (1+n)\Big]^{-1} = 0 \tag{18}$$

L'existence et l'unicité d'un tel stock de capital ne sont pas garanties. Elles dépendent des propriétés de la fonction

$$\Theta(k) \equiv (1-p)s^e\,(w(k), R(k)) - p(1+n)\frac{w(k)}{R(k)-(1+n)} \tag{19}$$

Précisons, cependant, que tout triplet $(0, \hat{k}, \hat{x})$ solution des équations (17) et (18) ne peut être réellement considéré comme un équilibre stationnaire du modèle dans la mesure où il n'est pas obtenu à partir de l'équation d'Euler-Lagrange (15). Il doit, en réalité, être interprété comme la valeur limite d'un équilibre dynamique le long duquel la consommation des agents à durée de vie infinie est strictement positive.

La considération de l'équation (17) montre que deux configurations très différentes peuvent apparaître pour le stock de capital $\hat{k}$ et la richesse $\hat{x}$ lorsque la consommation des agents à durée de vie infinie est nulle[8] :

i) la sous-accumulation avec $R(\hat{k}) > 1+n$ et $\hat{x} < 0$;

ii) la suraccumulation avec $R(\hat{k}) < 1+n$ et $\hat{x} > 0$.

Il est, cependant, possible de montrer que tout stock de capital en suraccumulation ne peut correspondre à la valeur limite d'un équilibre intertemporel optimal dès lorsque $p > 0$. Pour cela, nous allons raisonner par contradiction : supposons qu'il existe un équilibre (c_t, k_t, x_t) tel que

---

7. On notera que le stock de capital stationnaire dépend dans ce cas de la proportion p.

8. Dans un exemple simple avec utilité logarithmique pour les agents à durée de vie finie $u(c,d) = (1-\beta)\ln c + \beta \ln d$ et fonction de production Cobb-Douglas $f(k) = k^\alpha$, il existe toujours deux solutions à l'équation (18) : l'une en sous-accumulation et l'autre en suraccumulation. Par ailleurs, selon la valeur des paramètres, il existe également l'équilibre stationnaire de la règle d'or modifiée.

$\lim_{t \to +\infty} k_t = \hat{k}$ en suraccumulation, $\lim_{t \to +\infty} c_t^r = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} x_t = \hat{x} = w(\hat{k})/(1+n-R(\hat{k})) > 0$. Cela signifie qu'il existe une date $T > 0$ à partir de laquelle $f'(k_t) < 1+n$, $x_t > 0$ et $c_t < w_t$. Or, à partir de T, il existe à prix donnés une trajectoire réalisable telle que $x_t' = 0$ et $c_t' = w_t$ qui procure une utilité supérieure. La trajectoire (c_t, k_t, x_t) n'est donc pas un équilibre optimal. On montre, également, qu'une telle trajectoire ne vérifie pas la contrainte budgétaire intertemporelle de l'agent à durée de vie infinie[9]. Nous concluons, ainsi, que tout stock de capital stationnaire admissible, lorsque la consommation des agents à durée de vie infinie est nulle, doit être strictement inférieur au stock de la règle d'or, *i.e.* $\hat{k}(p) < f^{-1}(1+n)$[10].

L'ensemble de ces propriétés est résumé dans la Proposition suivante :

PROPOSITION 1 : Sous les hypothèses 1-4, notons $(\tilde{c}^r, \tilde{k}, \tilde{x})$ la solution du système composé des équations (14) et (16), et telle que $f'(k) = \dfrac{1+n}{\delta}$. Il existe un état stationnaire correspondant à la règle d'or modifiée avec consommation strictement positive pour les agents à durée de vie infinie si et seulement si, $\tilde{c}^r > 0$. Cet état stationnaire sera noté $(c^*, k^*, x^*) \equiv (\tilde{c}^r, \tilde{k}, \tilde{x})$. Supposons par ailleurs que la fonction $\Theta(k)$ définie par l'équation (19) vérifie $\lim_{k \to 0} \Theta'(k) > 1+n$. Alors, il existe un ou plusieurs états stationnaires $(0, \hat{k}, \hat{x})$ solutions des équations (17) et (18) avec consommation nulle pour les agents à durée de vie infinie, un stock de capital inférieur à la règle d'or, $\hat{k} < f'^{-1}(1+n)$, et une richesse négative, $\hat{x} < 0$[11].

Il est intéressant d'interpréter ces conclusions à la lumière des contributions de RAMSEY [1928] et BECKER [1980]. Ces derniers montrent en effet que dans une économie composée d'agents à durée de vie infinie ayant des taux de préférence pour le présent distincts, seul le plus patient consomme à long terme. Tous les autres agents se sont trop endettés pour consommer dans le court terme, et ils remboursent leurs emprunts à long terme. Leur niveau de consommation stationnaire est alors nul. De ce point de vue, il apparaît que, dans notre modèle, les agents à durée de vie infinie ne sont pas nécessairement les plus patients.

On peut maintenant s'interroger sur l'influence du nombre d'agents à durée de vie finie sur la consommation et la richesse stationnaires des agents à durée de vie infinie.

9. Soit les facteurs d'actualisation définis par $\mathcal{R}_0 = 1/R_0$ et pour $t \geqslant 1$, $\mathcal{R}_t = \mathcal{R}_{t-1}/R_t$. La contrainte budgétaire intertemporelle est équivalente à $\lim_{t\to+\infty} \mathcal{R}_t(1+n)^t x_{t+1} L_0 = 0$ (voir MICHEL [1993]). On vérifie, alors, aisément que le long de la trajectoire (c_t, k_t, x_t), $R_t < 1+n$ à partir de T de sorte que $\lim_{t\to+\infty} \mathcal{R}_t(1+n)^t x_{t+1} L_0 = +\infty$.

10. On voit, ainsi, apparaître une discontinuité en $p = 0$ de l'équilibre stationnaire puisque le modèle de DIAMOND peut être caractérisé par un état stationnaire en suraccumulation.

11. L'existence de tels équilibres est parfaitement compatible avec l'existence de l'équilibre stationnaire de la règle d'or modifiée. Remarquons, également, que l'unicité d'un équilibre de ce type est garantie si la fonction $\Theta(k)$ est concave pour tout $k \in]0, f'^{-1}(1+n)[$.

Proposition 2 : Sous les hypothèses 1-4, lorsque les agents à durée de vie infinie ont une consommation stationnaire positive, leur richesse stationnaire x^* est une fonction décroissante du nombre d'agents à durée de vie finie si, et seulement si, $s^e(w^*, R^*) \geqslant (1+n)k^*$.

Ce résultat de statique comparative permet de préciser le concept d'agent à durée de vie infinie « *impatient* » évoqué ci-dessus. Lorsque chaque agent à durée de vie finie a une épargne excédentaire par rapport à la règle d'or modifiée, *i.e.* $s^e(w^*, R^*) \geqslant (1+n)k^*$, les agents à durée de vie infinie accroissent leur niveau de consommation au fur et à mesure que l'épargne totale augmente. Or, celle-ci croît avec la proportion $q = 1 - p$ d'agents à durée de vie finie. Il en résulte que la richesse stationnaire des agents à durée de vie infinie croît avec p et corrélativement diminue avec q. Une telle propriété conduit naturellement au résultat suivant :

Proposition 3 : Sous les hypothèses 1-4, si $s^e(w^*, R^*) \leqslant (1+n)k^*$, alors pour tout $p \in]0,1]$, il existe un état stationnaire correspondant à la règle d'or modifiée avec consommation strictement positive. Si $s^e(w^*, R^*) > (1+n)k^*$, alors il existe une proportion $\bar{p} \in]0,1[$ telle que pour tout $p \in]\bar{p},1]$, il existe un état stationnaire correspondant à la règle d'or modifiée avec consommation strictement positive. De plus, $k^* = f'^{-1}\left(\frac{1+n}{\delta}\right)$ est solution de l'équation (18) pour $p = \bar{p}$, et $\lim_{p \to \bar{p}_+} \bar{c}^r = 0$.

L'existence d'une telle proportion limite se comprend aisément. Lorsque $s^e(w^*, R^*) > (1+n)k^*$, la consommation de long terme des agents à durée de vie infinie ne peut être positive que s'ils sont suffisamment nombreux pour absorber l'excès d'épargne des agents à durée de vie finie. Dans le cas contraire, leur niveau d'endettement est trop important et la totalité de leur revenu est utilisée pour rembourser leurs emprunts.

4 Détermination de l'équilibre intérieur

Nous devons, maintenant, définir précisément le système d'équations aux différences qui caractérise l'équilibre intertemporel intérieur de l'économie. Considérons les conditions du premier ordre (6) et (7) :

Lemme 1 : Sous les hypothèses 3-4, la consommation c_t^r s'exprime comme une fonction différentiable de (q_t, R_t), *i.e.* $c_t^r = c^r(q_t, R_t)$.

Grâce au Lemme 1, on peut définir la fonction

$$\psi(k_t,q_t,x_t,k_{t+1}) \equiv (1-p)s^e(w_t,R_{t+1}) + p(R_t x_t + w_t - c^r(q_t,R_t)) - (1+n)k_{t+1} \tag{20}$$

avec $w_t = w(k_t)$, $R_{t+1} = R(k_{t+1})$, et l'équation d'accumulation du capital (13) devient $\psi(k_t,q_t,x_t,k_{t+1}) = 0$. Ceci est une équation aux différences implicite d'ordre 1 en k. Le lemme suivant donne une formulation explicite.

LEMME 2 : Sous les hypothèses du Lemme 1, soit (k^*,q^*,x^*) l'équilibre stationnaire intérieur. Si

$$\psi_4(k^*,q^*,x^*,k^*) = f''(k^*)(1-p)s_2^e\left(w^*,R^*\right) - (1+n) \neq 0$$

alors l'équation d'accumulation du capital s'exprime localement comme une fonction différentiable de (k_t,q_t,x_t), *i.e.* $k_{t+1} = \phi(k_t,q_t,x_t)$.

On obtient finalement le système dynamique qui décrit les trajectoires d'équilibre dans un voisinage de l'état stationnaire intérieur (k^*,q^*,x^*) :

$$k_{t+1} = \phi(k_t,q_t,x_t)$$

$$q_{t+1} = \frac{(1+n)q_t}{\delta f'(k_t)}$$

$$x_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left[f'(k_t)x_t + f(k_t) - k_t f'(k_t) - c^r\Big(q_t, f'(k_t)\Big)\right]$$

Il s'agit d'un système de dimension trois comportant deux variables prédéterminées, k_t, x_t, et une variable prospective, q_t. Nous devons, maintenant, préciser la notion d'indétermination locale utilisée par la suite :

DÉFINITION 1 : Soit $\{(k_t,q_t,x_t)\}_{t=0}^{\infty}$ un équilibre de l'économie avec une condition initiale (k_0,q_0,x_0). On dira que l'équilibre est localement indéterminé si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une autre trajectoire $\left\{(k_t',q_t',x_t')\right\}_{t=0}^{\infty}$, avec $0 < |q_0' - q_0| < \varepsilon$ et $(k_0',x_0') = (k_0,x_0)$, qui est également un équilibre.

La dimension de l'indétermination locale ne peut pas être supérieure à 1. L'état stationnaire (k^*,q^*,x^*) est *localement indéterminé* si, et seulement si, la variété stable locale est de dimension 3. On parlera, au contraire, de *détermination locale* dans tous les autres cas. En utilisant la terminologie de WOODFORD [1984], on peut alors distinguer la *détermination locale exacte* lorsqu'il existe une unique trajectoire d'équilibre convergeant vers l'état stationnaire[12], de l'*instabilité totale* lorsque la dimension de la variété stable

12. Cela correspond à la stabilité au sens du point selle qui caractérise le modèle de croissance optimale de RAMSEY [1928].

locale est inférieure ou égale à 1. Ce dernier cas englobe deux configurations très différentes : l'existence d'une unique trajectoire qui converge vers un cycle périodique ou quasi-périodique[13], et la non existence d'une trajectoire d'équilibre. Nous considérons donc la définition suivante :

DÉFINITION 2 : Un état stationnaire (k^*,q^*,x^*) est exactement localement déterminé si, et seulement si, la variété stable locale est de dimension 2.

En fonction du signe de la dérivée $\psi_4^* \equiv \psi_4(k^*,q^*,x^*,k^*)$, différents résultats concernant les propriétés de détermination locale de l'équilibre peuvent être obtenus. Considérons, dans un premier temps, le cas simple $\psi_4^* < 0$ en adoptant la restriction suivante :

HYPOTHÈSE 5 : La fonction d'épargne des agents à durée de vie finie, $s^e(w,R)$, est une fonction non décroissante du facteur d'intérêt R dans un voisinage de l'état stationnaire (w^*,R^*).

Une telle propriété est obtenue si, et seulement si, pour les agents à durée de vie finie l'effet de substitution suite à une augmentation du taux d'intérêt est supérieur (en valeur absolue) à l'effet revenu, *i.e.* si, et seulement si, la fonction d'utilité $u^e(c^e,d^e)$ satisfait $u_1^e u_2^e \geqslant \left(u_2^e u_{12}^e - u_1^e u_{22}^e\right) R^* s^e(w^*,R^*)$.

THÉORÈME 1 : Sous les hypothèses 1-5, si $0 < p \leqslant 1$, l'état stationnaire (k^*,q^*,x^*) est localement déterminé dès lors que les agents à durée de vie infinie ont une consommation stationnaire $\bar{c}^r$ strictement positive.

Remarque. Ce résultat est également valide avec $s_2^e(w^*,R^*) < 0$ dès lors que $\psi_4^* = f''(k^*)(1-p)s_2^e\left(w^*,R^*\right) - (1+n) < 0$.

Le Théorème 1 établit que la propriété de détermination locale ne dépend pas de la proportion p des agents à durée de vie infinie alors que :

i) les effets revenu sont aussi importants que les effets de substitution ;

ii) le modèle avec $p = 0$ peut présenter une indétermination de l'équilibre[14]. Comme nous l'avons déjà précisé dans l'introduction, la contribution de MULLER et WOODFORD [1988] permet de formuler l'assertion suivante : pour tout effet revenu suffisamment important (éventuellement supérieur aux effets de substitution), il existe des économies ayant un état stationnaire indéterminé si la « *taille* » des agents à durée de vie infinie est suffisamment faible.

13. Voir, par exemple, MICHEL et VENDITTI [1997]. On parle dans ce cas de détermination locale exacte du cycle.

14. Dans le modèle de DIAMOND, l'équilibre peut être globalement indéterminé lorsque l'épargne décroît avec le facteur d'intérêt (Voir GRANDMONT [1985], GALOR et RYDER [1989], et le récent survol de la littérature de DRUGEON [2000]). Or, puisque le résultat du Théorème 1 est valide dès lors que $\psi_4^* < 0$, il est également compatible avec une indétermination globale de l'équilibre lorsque $p = 0$.

Dans notre modèle, la notion de petit agent à durée de vie infinie est associée à une faible proportion p. Le Théorème 1 montre cependant que lorsque $p > 0$, l'assertion précédente ne peut pas être vérifiée. Pour comprendre cette différence avec les conclusions de MULLER et WOODFORD, nous devons distinguer deux configurations en fonction de l'importance de l'épargne des agents à durée de vie finie relativement à la règle d'or modifiée.

i) Supposons que $(1+n)k^* \geqslant s^e(w^*,R^*)$. La richesse stationnaire x^* est nécessairement positive de sorte que $\bar{c}^r > 0$. Puisque pour toute proportion $p > 0$, $(1+n)k^* = (1-p)s^e(w^*,R^*) + p(1+n)x^*$, on obtient :

$$\lim_{p\to 0} px^* = k^* - \frac{s^e(w^*,R^*)}{1+n} = \ell > 0$$

On déduit également de l'équation (16) que $\lim_{p\to 0} p\bar{c}^r = \Big[R^* - (1+n)\Big]\ell > 0$. Ces résultats impliquent une discontinuité de l'équilibre stationnaire intérieur lorsque $p = 0$[15]. Bien que la proportion d'agents à durée de vie infinie soit de plus en plus faible, leur poids économique en terme de richesse et de consommation reste borné inférieurement. Il est donc impossible d'utiliser l'argument de continuité de MULLER et WOODFORD[16].

ii) Supposons maintenant que $s^e(w^*,R^*) > (1+n)k^*$. La Proposition 3 montre qu'il existe une proportion $\bar{p} > 0$ telle que $\bar{c}^r > 0$ pour tout $p > \bar{p}$, et corrélativement $\bar{c}^r = 0$ pour tout $p \leqslant \bar{p}$. De plus, nous avons $\hat{k}(\bar{p}) = k^*$ et $\lim_{p\to \bar{p}_+} \bar{c}^r = 0$. Lorsque $p > \bar{p}$ est proche de $\bar{p}$, les agents à durée de vie infinie sont « *petits* » au sens où leur richesse est négative et leur consommation est faible. Malgré ces propriétés, l'équilibre stationnaire est localement déterminé dès lorsque $p > \bar{p}$. Il est donc, là encore, impossible d'utiliser un argument de continuité tel que celui de MULLER et WOODFORD dans la mesure où l'on ne peut considérer de proportion inférieure à $\bar{p}$. Un niveau faible de consommation stationnaire pour les agents à durée de vie infinie est obtenu pour une proportion proche de $\bar{p}$, mais supérieure à $\bar{p}$, *i.e.* « *loin* » de $p = 0$.

Considérons, maintenant, le cas d'une « *petite population d'agents à durée de vie finie* » en supposant que la proportion p est proche de 1. Nous obtenons un résultat similaire à la Proposition 7 de MULLER et WOODFORD ([1988], p. 282).

COROLLAIRE 1. Sous les hypothèses 1-4, si la proportion p d'agents à durée de vie infinie est proche de 1, alors l'état stationnaire (k^*,q^*,x^*) est exactement localement déterminé.

Supposons, enfin, que l'hypothèse 5 ne soit pas satisfaite et que $\psi_4^* > 0$. Pour les agents à durée de vie finie, l'effet revenu suite à une modification du facteur d'intérêt est donc significativement supérieur à l'effet de substitution.

---

15. On vérifie en effet que $\lim_{p\to 0} x^* = +\infty$ et $\lim_{p\to 0} \bar{c}^r = +\infty$.
16. Nous retrouvons, ainsi, le même résultat que celui proposé par NOURRY et VENDITTI [2000] : la condition nécessaire et suffisante pour la positivité du legs stationnaire lorsque p est proche de zéro correspond exactement à $(1+n)k^* > s^e(w^*,R^*)$.

THÉORÈME 2 : Sous les hypothèses 1-4, soit la proportion limite $\bar{p}$ définie par la Proposition 3. Supposons également que $\psi_4^* > 0$ et $s^e(w^*,R^*) > (1+n)k^*$. L'état stationnaire (k^*,q^*,x^*) est localement déterminé pour tout $p \in]\bar{p},1]$ dès lors que $s_1^e(w^*,R^*)k^* + s_2^e(w^*,R^*) \geqslant 0$.

Ce résultat confirme la conclusion obtenue sur la base du Théorème 1 : bien que $\lim\limits_{p \to \bar{p}_+} \bar{c}^r = 0$, et, la fonction d'épargne des agents à durée de vie finie étant décroissante relativement au facteur d'intérêt, l'indétermination globale de l'équilibre dans le modèle de DIAMOND soit *a priori* possible, l'état stationnaire du modèle avec agents hétérogènes est localement déterminé indépendamment de la « *taille* » de l'agent à durée de vie infinie.

5 Un exemple d'indétermination

Les théorèmes précédents nous donnent des conditions suffisantes de détermination locale de l'équilibre. On peut s'interroger sur la robustesse d'une telle propriété lorsque ces conditions ne sont pas satisfaites. Étudions pour cela un exemple avec utilités CES et technologie Cobb-Douglas. Nous supposerons pour simplifier que le capital se déprécie totalement en une période $(\mu = 1)$:

$$u^e(c^e,d^e) = \frac{\sigma_e}{\sigma_e - 1}\left[(c^e)^{\frac{\sigma_e-1}{\sigma_e}} + \beta(d^e)^{\frac{\sigma_e-1}{\sigma_e}}\right] \quad \text{avec} \quad \sigma_e > 0, 0 < \beta \leqslant 1$$

$$u_r(c^r) = \frac{(c^r)^{1-\sigma_r}}{1-\sigma_r} \quad \text{avec} \quad \sigma_r > 0$$

$$f(k) = k^\alpha \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1$$

On déduit aisément la fonction d'épargne des agents à durée de vie finie

$$s^e(w,R) = \frac{w}{1+\beta^{-\sigma_e}R^{1-\sigma_e}}$$

Lorsque l'élasticité de substitution σ_e est inférieure à l'unité, $s^e(w,R)$ décroît avec le facteur d'intérêt. Concentrons nous, tout d'abord, sur les propriétés du modèle de DIAMOND standard ($p = 0$). L'équation d'accumulation du capital s'écrit :

$$(1+n)k_{t+1} = \frac{(1-\alpha)k_t^\alpha}{1+\beta^{-\sigma_e}\left(\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}\right)^{1-\sigma_e}}$$

On peut donc obtenir une équation prospective

$$k_t = \varphi(k_{t+1}) \equiv \left(\frac{1+n}{1-\alpha}k_{t+1}\left(1+\beta^{-\sigma_e}\left(\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}\right)^{1-\sigma_e}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

telle que :

$$\varphi'(k_{t+1}) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1+n}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} k_{t+1}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left[1+\beta^{-\sigma_e}\left(\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}\right)^{1-\sigma_e}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \times$$

$$\left(1+\beta^{-\sigma_e}\left[\alpha k_{t+1}^{(\alpha-1)}\right]^{(1-\sigma_e)}\left[\alpha+\sigma_e(1-\alpha)\right]\right) > 0$$

La monotonie de $\varphi(k_{t+1})$ implique qu'il existe une fonction inverse globale pour toute valeur de l'élasticité intertemporelle de substitution $\sigma_e > 0$ des agents à durée de vie finie. La trajectoire d'équilibre est, donc, uniquement déterminée.

Considérons, maintenant, le modèle avec agents hétérogènes. La règle d'or modifiée est :

$$k^* = \left(\frac{\alpha\delta}{1+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

En utilisant les valeurs suivantes des paramètres [17], $\sigma_e = 0.001$, $\beta = 0.9$, $\sigma_r = 3.5$, $\alpha = 0.005$, $\delta = 0.88$, et $n = 8\,\%$, on vérifie numériquement que :

i) si $p = 0$ le modèle de DIAMOND admet un unique équilibre stationnaire en suraccumulation ;

ii) pour tout $p \in]0,1[$ il existe un unique état stationnaire admissible avec consommation nulle pour les agents à durée de vie infinie, *i.e.* avec un stock de capital en sous-accumulation ;

iii) il existe un unique équilibre stationnaire avec consommation positive pour les agents à durée de vie infinie et un stock de capital correspondant à la règle d'or modifiée si, et seulement si, $p > \bar{p} \approx 5.71\,\%$. Corrélativement nous avons $\bar{c}^r = 0$ pour tout $p \leqslant \bar{p}$ avec $\hat{k}(\bar{p}) = k^*$ et $\lim_{p \to \bar{p}_+} \bar{c}^r = 0$. Supposons maintenant que $p = 8\,\%$. On obtient

$$\psi_4^* > 0,\ s^e(w^*,R^*) > (1+n)k^*,\ x^* \approx -4.57,\ \bar{c}^r \approx 0.29$$

et $s_1^e(w^*,R^*)k^* + \ s_2^e(w^*,R^*) < 0$.

Seule la condition ii) du Théorème 2 est violée, et le polynôme caractéristique admet trois racines réelles à l'intérieur du cercle unité. L'état stationnaire est donc localement indéterminé.

Un tel résultat s'explique aisément de façon heuristique. Bien qu'il soit impossible d'étudier la stabilité locale de l'équilibre en $\bar{p}$ à partir du polynôme caractéristique à cause de l'hypothèse 3, on remarque qu'avec des préférences CES, $u_r'(c^r)/u_r''(c^r) = -c^r/\sigma_r$. En calculant cette expression directement en $c^r = 0$, on déduit [18] $P(1) = 0$ et $P(0) > 0$. Avec une fonction d'épargne $s^e(w,R)$ suffisamment décroissante en R, on obtient aisément $P(-1) < 0$ de sorte que le choix d'une proportion légèrement supérieure à $\bar{p}$ peut conduire à une indétermination locale de l'équilibre.

---

17. Notons que ces valeurs n'ont pas de signification économique. Cet exemple a pour seul objet de montrer la possibilité théorique d'une indétermination locale de l'équilibre.
18. Voir les démonstrations des Théorèmes 1 et 2 dans l'annexe.

Ce résultat met en évidence deux types de conclusions :

– La simple violation d'une condition suffisante de détermination peut conduire à l'existence d'un *continuum* de trajectoires d'équilibre. Les résultats sont donc relativement sensibles aux paramètres des fondamentaux ;

– L'indétermination locale obtenue au moyen de cet exemple est de nature très différente de celle étudiée par MULLER et WOODFORD. En effet, ces auteurs se basent sur une indétermination locale de l'équilibre dans le modèle avec agents à durée de vie finie pour étendre par continuité cette configuration au modèle mixte. Une telle démarche n'a pas de sens ici. D'une part, dans notre exemple le modèle de DIAMOND admet une unique trajectoire d'équilibre. D'autre part, les Théorèmes 1 et 2 montrent qu'il est impossible de réellement utiliser un argument de continuité similaire à celui de MULLER et WOODFORD.

Le problème d'optimisation intertemporelle de chaque type d'agent contient une externalité basée sur les décisions des agents de l'autre type. Le bouclage macroéconomique est donc défini par un problème de point fixe sur l'espace des trajectoires de capital et de richesse. Il est, ainsi, possible de conjecturer que cette indétermination locale repose sur le problème de point fixe en dimension infinie. Il convient, cependant, de noter qu'une telle indétermination semble nécessiter une richesse stationnaire négative pour les agents à durée de vie infinie.

• Références bibliographiques

AIYAGARI R. (1989). – « Equilibrium Existence in an Overlapping Generations Model with Altruistic Preferences », *Journal of Economic Theory*, 47, pp. 130-152.

BARINCI J.P. (2000). – « Équilibres multiples, indéterminations et taches solaires dans les modèles d'accumulation de capital », *Revue d'Économie Politique*, 101, pp. 9-52.

BARRO R. (1974). – « Are Government Bonds Net Wealth? », *Journal of Political Economics*, 82, pp. 1095-1117.

BECKER R.A. (1980). – « On the Long-Run Steady-State in a Simple Dynamic Model of Equilibrium with Heterogeneous Households », *Quarterly Journal of Economics*, 95, pp. 375-382.

DIAMOND P.A. (1965). – « National Debt in a Neoclassical Growth Model », *American Economic Review*, 55, pp. 1126-1150.

DRUGEON J.P. (2000). – « Non-linéarités, indéterminations et endogénéité des fluctuations », dans *Analyse Macroéconomique*, Tome 2, J.O. Hairault (dir.), Ed. La Découverte.

GALOR O., RYDER H. (1989). – « Existence, Uniqueness, and Stability of Equilibrium in an Overlapping Generations Model with Productive Capital », *Journal of Economic Theory*, 49, pp. 360-375.

GRANDMONT J.M. (1985). – « On Endogenous Competitive Business Cycles », *Econometrica*, 53, pp. 995-1045.

KEHOE T., LEVINE D. (1985). – « Comparative Statics and Perfect Foresight in Infinite Horizon Economies », *Econometrica*, 53, pp. 433-453.

KEHOE T., LEVINE D., ROMER P. (1990). – « Determinacy of Equilibria in Dynamic Models with Finitely Many Consumers », *Journal of Economic Theory*, 50, pp. 1-21.

MICHEL P. (1990). – « Some Clarifications on the Transversality Condition », *Econometrica*, 58, pp. 705-723.

MICHEL P. (1993). – « Croissance et équilibre intertemporel : une présentation simple d'un modèle de base », dans *Macroéconomie. Développements Récents*, P. Malgrange et L. Salvas-Bronsard (dir.), Presses de l'Université du Québec et Economica.

MICHEL P., VENDITTI A. (1997). – « Optimal Growth and Cycles in Overlapping Generations Models », *Economic Theory*, 9, pp. 511-528.

MULLER W.J., WOODFORD M. (1988). – « Determinacy of Equilibria in Stationary Economies with Both Finite and Infinite Lived Consumers », *Journal of Economic Theory*, 46, pp. 255-290.

NOURRY C., VENDITTI A. (2000). – « Determinacy of Equilibrium in an Overlapping Generations Model with Heterogeneous Agents », *Journal of Economic Theory*, à paraître.

RAMSEY F.P. (1928). – « A Mathematical Theory of Saving », *Economic Journal*, 38, pp. 543-559.

THOMPSON E.A. (1967). – « Debt Instruments in Both Macroeconomic Theory and Capital Theory », *American Economic Review*, 57, pp. 1196-1210.

WOODFORD M. (1984). – « Indeterminacy of Equilibrium in the Overlapping Generations Model : A Survey », *miméo*, Stanford University.

WOODFORD M. (1986). – « Stationary Sunspot Equilibria : the Case of Small Fluctuations Around a Deterministic Steady Sate », *miméo*, University of Chicago.

ANNEXES

Démonstration de la Proposition 1 :

Sous l'hypothèse 4, si $\bar{c}^r \neq 0$ il existe un unique stock de capital stationnaire k^* solution de $f'(k^*) = (1+n)\delta^{-1}$. On en déduit l'existence et l'unicité de la richesse stationnaire x^*. À l'état stationnaire, le programme d'optimisation (1) des agents à durée de vie finie peut être formulé comme suit :

$$s^e = \arg\max_s u^e\left(w^* - s, R^* s\right)$$

avec $s \in \left[0, w^*\right]$, $w^* = f(k^*) - k^* f'(k^*)$, et $R^* = f'(k^*)$.

Sous l'hypothèse 1, s^e existe et est unique. Les contraintes de budget permettent alors d'obtenir des consommations stationnaires uniques $\bar{c}^e$, $\bar{d}^e$.

Dans le cas d'une consommation stationnaire nulle pour les agents à durée de vie infinie, considérons la fonction $\Theta(k)$ définie par l'équation (19). On vérifie aisément que

$$\lim_{k \to k_-^{RO}} \Theta(k) = -\infty$$

L'existence d'un stock de capital stationnaire $\hat{k}(p) < f'^{-1}(1+n)$ solution de (18) est donc garantie si

$$\lim_{k \to 0} \Theta'(k) > 1 + n \qquad \blacksquare$$

Démonstration de la Proposition 2 :

Évaluée à la règle d'or modifiée k^*, l'équation d'accumulation du capital donne

$$x^* = \frac{(1+n)k^* - (1-p)s^e(w^*, R^*)}{(1+n)p} \tag{21}$$

Puisque $\partial k^*/\partial p = 0$, nous obtenons

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \frac{1}{(1+n)p^2}\left[s^e(w^*, R^*) - (1+n)k^*\right] \qquad \blacksquare$$

Démonstration de la Proposition 3 :

L'expression de la richesse stationnaire (21) montre que si $s^e(w^*, R^*) > (1+n)k^*$, alors

$$\lim_{p \to 0} x^* = -\infty$$

Puisque $\bar{c}^r = \left[R^* - (1+n)\right] x^* + w^*$, on en déduit qu'il existe $\bar{p} \in]0,1[$ tel que $\bar{c}^r > 0$ pour tout $p > \bar{p}$ et $\bar{c}^r = 0$ pour tout $p \leqslant \bar{p}$. Plaçons-nous en $p = \bar{p}$. Le stock de capital stationnaire est solution de :

$$(1+n)k - (1-\bar{p})s^e\Big(w(k), R(k)\Big) = -\bar{p}(1+n)\frac{w(k)}{R(k)-(1+n)} \tag{22}$$

On vérifie également que

$$\lim_{p \to \bar{p}_+} p(1+n)\frac{\bar{c}^r - w^*}{R^* - (1+n)} = (1+n)k^* - (1-\bar{p})s^e(w^*, R^*)$$

Une des solutions de l'équations (22) correspond donc à la règle d'or modifiée de sorte que $k(\bar{p}) = k^*$. On obtient ainsi $\lim_{p \to \bar{p}_+} \bar{c}^r = 0$.

Démonstration du Lemme 1 :

En substituant l'équation (6) dans l'équation (7) on obtient :

$$u_r'(c_t^r)R_t - q_t = 0 \tag{23}$$

Sous l'hypothèse 3, le long d'un sentier optimal intérieur, il existe pour-chaque (q_t, R_t) un unique niveau de consommation $c_t^r = c^r(q_t, R_t)$ satisfaisant l'équation (23). On vérifie que $c_1^r(q_t, R_t) = 1/u_r''(c_t^r)R_t$, et $c_2^r(q_t, R_t) = -u_r'(c_t^r)/u_r''(c_t^r)R_t$. ■

Démonstration du Lemme 2 :

Considérons l'équation d'accumulation du capital (20) :

$$\psi(k_t, q_t, x_t, k_{t+1}) = (1-p)s^e(w_t, R_{t+1}) + p\Big(R_t x_t + w_t - c^r(q_t, R_t)\Big) - (1+n)k_{t+1}$$

En utilisant les prix d'équilibre concurrentiel, la dérivée par rapport à k_{t+1} est

$$\psi_4(k_t, q_t, x_t, k_{t+1}) = f''(k_{t+1})(1-p)s_2^e\left(w_t, R_{t+1}\right) - (1+n)$$

Supposons que $\psi_4(k^*, q^*, x^*, k^*) \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites implique que dans un voisinage de (k^*, x^*, q^*), $k_{t+1} = \phi(k_t, q_t, x_t)$, avec ϕ une fonction différentiable telle que :

$$\phi_1 = \frac{f''(k_t)}{\psi_4}\left[(1-p)s_1^e k_t - p\Big(x_t - k_t - c_2^r\Big)\right]$$

$$\phi_2 = \frac{pc_1^r}{\psi_4}$$

$$\phi_3 = -\frac{pf'(k_t)}{\psi_4}$$

et c_1^r, c_2^r donnés dans la démonstration du lemme 1.

Démonstration du Théorème 1 :

Le polynôme caractéristique est obtenu à partir de la matrice Jacobienne $\mathcal{J}$ du système dynamique évaluée à l'état stationnaire :

$$\mathrm{Det}\left[\mathcal{J} - \lambda I_3\right] \equiv \begin{vmatrix} \phi_1^* - \lambda & \phi_2^* & \phi_3^* \\ -\dfrac{\delta f''(k^*) q^*}{1+n} & 1-\lambda & 0 \\ \dfrac{f''(k^*)}{1+n}\left[x^* - k^* - c_2^r\right] & -\dfrac{c_1^r}{1+n} & \dfrac{1}{\delta} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

avec c_1^r, c_2^r donnés dans la démonstration du lemme 1, et ϕ_1^*, ϕ_2^*, ϕ_3^*, ψ_4^* donnés dans celle du lemme 2. On obtient finalement :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 \mathcal{T} + \lambda \Im - \mathcal{D} = 0 \tag{24}$$

avec

$$\mathcal{T} = 1 + \delta^{-1} + \frac{f''(k^*)}{\psi_4^*}\left[(1-p)s_1^e(w^*, R^*)k^* - p\left(x^* - k^* + \frac{\delta u_r'}{(1+n)u_r''}\right)\right]$$

$$\Im = \delta^{-1} + \frac{k^* f''(k^*)}{\psi_4^*}(1-p)s_1^e(w^*, R^*)(1+\delta^{-1}) - \frac{f''(k^*)p}{\psi_4^*}(x^* - k^*)$$

$$\mathcal{D} = \delta^{-1}\frac{k^* f''(k^*)}{\psi_4^*}(1-p)s_1^e(w^*, R^*)$$

Lorsque $\lambda = 1$, nous avons :

$$P(1) = \frac{\delta u_r' f''(k^*) p}{(1+n)u_r'' \psi_4^*}$$

Sous les hypothèses 4 et 5, $P(1)$ est strictement négatif. De plus,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} P(\lambda) = +\infty$$

Il existe donc $\lambda^* > 1$ tel que $P\left(\lambda^*\right) = 0$. ■

Démonstration du Corollaire 1 :

Si $p = 1$ on a $P(0) = -\mathcal{D} = 0$, et une valeur propre est nulle. Nous obtenons également $k^* = x^*$ et $\psi_4^* = -(1+n)$ de sorte que

$$\mathcal{T} = 1 + \delta^{-1} + \frac{\delta u_r' f''(k^*)}{u_r''(1+n)^2}, \text{ et } \Im = \delta^{-1}$$

Le résultat se déduit de $P(0) = \Im > 1$, $P(1) = -\dfrac{\delta u_r' f''(k^*)}{u_r''(1+n)^2} < 0$, et de la continuité des valeurs propres en δ dans un voisinage de 1. ■

Démonstration du Théorème 2 :

Lorsque $\lambda = -1$, le polynôme caractéristique (24) devient :

$$P(-1) = -\frac{2(1+\delta^{-1})}{\psi_4^*}\left[f''(k^*)(1-p)(s_1^e k^* + s_2^e) - (1+n)\right]$$
$$+2\frac{f''(k^*)p}{\psi_4^*}(x^* - k^*) + \frac{\delta u_r' f''(k^*)p}{u_r''(1+n)\psi_4^*}$$

Puisque $\psi_4^* > 0$, on déduit aisément que si $s_1^e k^* + s_2^e \geqslant 0$ et $k^* \geqslant x^*$, alors $P(-1) > 0$. Par ailleurs

$$\lim_{\lambda \to -\infty} P(\lambda) = -\infty$$

Il existe donc $\lambda^* < -1$ tel que $P(\lambda^*) = 0$. ■