

Catastrophe climatique irréversible et politique de l'effet de serre

Sébastien ROUILLON *

RÉSUMÉ. – Ce document étudie l'effet d'une catastrophe climatique irréversible sur la décision optimale dans un modèle de pollution cumulative. L'hypothèse retenue est celle d'une modification définitive de l'environnement au-delà d'un seuil critique de pollution. Le choix est donc essentiellement binaire : soit l'on dépasse cette limite, jugeant que cette norme implicite est trop coûteuse comparativement aux dommages catastrophiques qu'elle permet d'éviter, soit l'on s'y conforme, considérant, au contraire, que la destruction de l'environnement due à la catastrophe justifie des mesures de dépollution drastiques.

Irreversible Climatic Catastrophe and Climate Policy

ABSTRACT. – This paper considers the issue of a catastrophic environmental collapse and the way one should deal with it. In the model used here, one faces the choice to cross or not a critical threshold of pollution, which consequences are a definitive destruction of some environmental characteristic. The introduced decision-rule compares the economic cost of the emission constraint, designed to avoid the catastrophe, to the damage of the catastrophic event. Depending on the order between this alternative costs, the good choice can be either to cross the threshold of pollution or to respect it.

* S. ROUILLON : GRAPE-CEEP, Université Montesquieu Bordeaux IV.
Je remercie vivement D.L.PHAN pour ses commentaires. Mes remerciements vont également aux membres de l'ERASME (Université de Paris I).

1 Introduction

Le renforcement de l'effet de serre aura de multiples conséquences sur les activités humaines. Parmi celles-ci, les économistes retiennent surtout les dommages qui augmentent graduellement avec le réchauffement, comme par exemple l'élévation du niveau des océans, la diminution des rendements agricoles... Dans cette perspective, le modèle de pollution cumulative, conçu originellement par KEELER *et al.* [1971], PLOURDE [1972] et FORSTER [1973], suffit pour décrire l'arbitrage optimal entre la consommation présente et les nuisances futures.

Dans ce papier, nous nous intéressons aux changements brutaux et irréversibles de régimes climatiques, et aux incidences économiques qui les accompagneraient. L'avenir catastrophique que BROECKER [1997] présage pour les pays européens correspond pleinement au type de conséquences auxquelles nous faisons référence : un refroidissement rapide et de grande ampleur de l'Europe occidentale, suite à une modification de la course du « *Gulf Stream* ».

La littérature économique consacrée à ce thème comprend CLARKE et REED [1994], CONRAD [1988], CROPPER [1976], GOTTINGER [1991], PETHIG [1991] et ROE *et al.* [1994]. Pour point de départ de notre discussion, nous retenons les travaux de GOTTINGER et PETHIG uniquement. En effet, les autres postulent que l'échéance de la catastrophe, définie par un seuil critique de pollution, est aléatoire, hypothèse qui ne nous intéresse pas ici.

GOTTINGER et PETHIG posent, quant à eux, des problèmes comparables. Le premier imagine que le dépassement du seuil critique ampute définitivement la capacité productive de l'économie d'un pourcentage donné. Le second prévoit que l'utilité décroît irrémédiablement d'une quantité constante lorsque la pollution limite est franchie. Ils démontrent tous deux que le seuil critique devrait définir une norme sociale de pollution maximale si le bien-être obtenu en maintenant à jamais la pollution à cette valeur excède le bien-être postérieur à la catastrophe. Le modèle développé ci-après confirme ce point. En revanche, il rejette les propositions (différentes) de ces deux auteurs concernant les dynamiques d'approche du seuil naturel.

Notre discussion s'organise en deux points. La section 2 est consacrée à la construction et à la résolution d'un modèle de pollution cumulative aménagé pour étudier les conséquences d'une catastrophe climatique irréversible. La dernière section s'attache à interpréter et à approfondir les résultats de la section 2.

2 Pollution cumulative et catastrophe irréversible

Avec une pollution cumulative, l'objectif social est de maximiser la somme actualisée (ici au taux δ) des flux d'utilité, les systèmes économique et écologique étant liés l'un à l'autre.

La fonction d'utilité du consommateur $v(g, G)^1$ est supposée croissante, à taux décroissant, avec l'émission de gaz à effet de serre g et décroissante, à taux décroissant, avec la concentration de gaz à effet de serre G . En outre, nous posons qu'elle est concave et qu'elle vérifie les conditions $v_{gG} \geq 0$, $\lim_{g \rightarrow 0} v_g = \infty$, $\lim_{g \rightarrow \infty} v_g = 0$ et $v_G = 0$.

La dynamique du stock de polluants s'exprime sous la forme de l'équation différentielle :

$$(1) \quad \dot{G}(t) = g(t) - \beta G(t)$$

En vertu de (1), toute unité émise est accumulée dans l'atmosphère. Cette accumulation est réversible du fait de l'absorption naturelle des gaz à effet de serre par la biosphère au taux β .

Nous modélisons la catastrophe climatique comme suit. Au-delà d'un certain seuil critique de pollution, noté \bar{G} , un ou plusieurs événements détériorent le système². Le changement intervenu est intégré dans la fonction d'héritage $W(\bar{G})$. Elle mesure le bien-être postérieur à cet événement, définie par le problème de pollution cumulative suivant³ :

$$W(\bar{G}) = \text{Max}_{g(t)} \int_0^{\infty} e^{-\delta \cdot t} \bar{v}(g, G) dt,$$

sous les contraintes (a) $\dot{G} = g - \beta \cdot G$, (b) $G(0) = \bar{G} + \bar{\Delta}$ et (c) $g \leq 0$.

L'ensemble de ces hypothèses définit le problème de la façon suivante :

$$\text{Max}_{g(t)} \int_0^T e^{-\delta \cdot t} v(g, G) dt + e^{-\delta \cdot T} W(\bar{G}), \quad (P)$$

sous les contraintes

(a) $\dot{G} = g - \beta \cdot G$, (b) $G(0) = G_0$, (c) $g \geq 0$, (d) $G \leq \bar{G}$, (e) $G(T) = \bar{G}$ et (f) $T \in [0, \infty[$.

Intuitivement, il s'interprète comme suit. La date T est endogène. La réunion des événements « T finie» et $G(T) = \bar{G}$ signifie que l'on accepte la

-
1. Cette forme de la fonction d'utilité figure aussi bien des pertes de valeurs d'agrément que des effets contre-productifs, pour reprendre la terminologie de PEZZEY [1989]. Dans le premier cas, la qualité de l'environnement entre directement comme argument de l'utilité $u(\cdot)$ et les émissions déterminent la consommation, *via* une fonction de production $f(g)$. On écrit : $v(g, G) = u(f(g), G)$. Dans le cas d'effets contre-productifs, la préservation de l'environnement, en tant que telle, indiffère les consommateurs, car la pollution n'agit négativement que sur la capacité productive de l'économie. La production devient donc $f(g, G)$ et on écrit : $v(g, G) = u(f(g, G))$.
 2. Ici, nous avons à l'esprit plusieurs événements catastrophiques jugés possibles par certains climatologues :
 - i. un détournement du *Gulf Stream* (BROECKER [1997]), qui augmenterait sensiblement et brutalement les dommages climatiques par la destruction de certains écosystèmes.
 - ii. la fonte des *permafrosts* (sols gelés en permanence), qui libérerait d'importantes quantités de méthane (FANKHAUSER et PEARCE [1994]).
 - iii. la désertification réduirait la capacité naturelle d'absorption du dioxyde de carbone.
 3. Le symbole « $\bar{\cdot}$ » figure les conséquences de la catastrophe. Si elle est du type i., décrit dans la note précédente, on a alors $\bar{v}(g, G) < v(g, G)$, $\forall g, \forall G$. Dans l'hypothèse ii., la pollution augmente de $\bar{\Delta} > 0$. Dans le cas iii., le taux de recyclage des polluants diminue $\bar{\beta} < \beta$.

catastrophe, puisque l'on rejoint la pollution critique et que l'on perçoit l'héritage. À l'inverse, l'issue $T = \infty$ s'interprète comme un renoncement à l'héritage, assorti du choix de respecter la contrainte environnementale (d) à jamais, donc comme un refus de la catastrophe.

Le Hamiltonien courant associé à (P) s'écrit :

$$(2) \quad \tilde{H}(G, g, p) = v(g, G) - p.(g - \beta.G) + \lambda.(\bar{G} - G).$$

Les conditions d'optimalité sont :

$$(3) \quad v_g(g, G) = p,$$

$$(4) \quad \dot{p} = (\delta + \beta).p + v_G(g, G) - \lambda,$$

avec $\lambda \geq 0$, $\bar{G} - G \geq 0$ et $\lambda.(\bar{G} - G) = 0$,

$$(5') \quad \tilde{H}^0(\bar{G}, p(T)) = \delta.W(\bar{G}) \quad \text{si } T \text{ est finie}^4,$$

$$(5'') \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t}.p(t).G(t) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Puisque la contrainte (a) est linéaire, le Hamiltonien est concave (voir, les hypothèses sur $v(g, G)$). Il s'ensuit que les conditions nécessaires d'optimalité précédentes sont suffisantes.

FIGURE 1

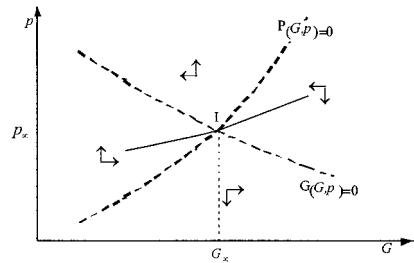


FIGURE 2

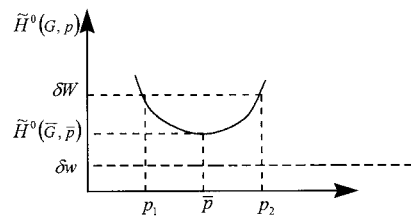


FIGURE 3

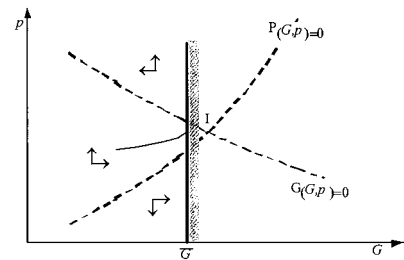
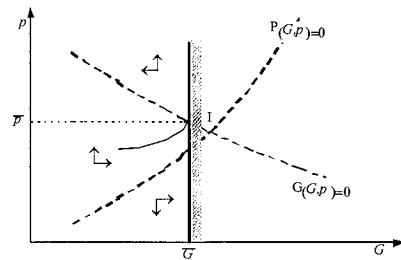


FIGURE 4



4. $\tilde{H}^0(G, p) = \max_g \tilde{H}(G, g, p)$.

Les enseignements du modèle de pollution cumulative classique, cas particulier de (P) quand \bar{G} n'est pas contraignant, sont bien connus (voir, par exemple, GOTTINGER [1991]). La solution optimale correspondante résout le système d'équations différentielles :

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{G} = g(G, p) - \beta \cdot G \\ \dot{p} = (\delta + \beta) \cdot p + v_G(g(G, p), G) \end{cases}$$

avec $G(0) = G_0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} \cdot p(t) \cdot G(t) = 0$

où $g(G, p)$ définit l'émission optimale en fonction de l'état de système et du prix implicite de l'accumulation des polluants. On montre que $g(G, p)$ décroît avec G et p (voir l'annexe 1).

Cette solution particulière se décrit qualitativement dans un diagramme des phases. On définit d'abord $\mathbf{G}(G, p) = g(G, p) - \beta \cdot G$ et $\mathbf{P}(G, p) = (\delta + \beta) \cdot p + v_G(g(G, p), G)$, dont les propriétés sont (voir l'annexe 2) :

i. la courbe représentant $\mathbf{G}(G, p) = 0$ est décroissante ; tout point au-dessus de cette courbe est tel que $\mathbf{G}(G, p) < 0$, et inversement.

ii. la courbe représentant $\mathbf{P}(G, p) = 0$ est croissante ; tout point au-dessus de cette courbe est tel que $\mathbf{P}(G, p) > 0$, et inversement.

En remarquant que $\dot{G} = \mathbf{G}(G, p)$ et $\dot{p} = \mathbf{P}(G, p)$, ces propriétés caractérisent le comportement du système (6) en tout point du plan (p, G) . Ainsi, sur le graphique 1, les ensembles $\mathbf{G}(G, p) = 0$ et $\mathbf{P}(G, p) = 0$ sont tracés en tirets et les propriétés du système sont symbolisées par des flèches donnant la direction du déplacement dans les quatre régions du plan.

Le système (6) admet un équilibre stationnaire unique (point I du graphique 1) si la fonction d'utilité satisfait les conditions posées précédemment (voir l'annexe 3). Finalement, la solution particulière (pour $\bar{G} = \infty$) est décrite par la trajectoire en trait plein du graphique 1. Elle conduit le système de l'état initial G_0 à l'état stationnaire (G_∞, p_∞) .

Cet ancrage par rapport au modèle standard achevé, revenons au cas où le seuil critique est contraignant (*i.e.* $\bar{G} < G_\infty$). La solution générale de (P) peut être présentée sous la forme d'une proposition unique.

PROPOSITION :

1) Si la pollution initiale est égale au seuil critique, *i.e.* $G_0 = \bar{G}$, deux choix sont possibles :

(a) Stopper l'accumulation nette des gaz à effet de serre en fixant les émissions au niveau $\bar{g} = \beta \bar{G}$. Le bien-être résultant est $v(\beta \bar{G}, \bar{G})/\delta$.

(b) Dépasser le seuil critique. Par hypothèse, le bien-être résultant est l'héritage $W(\bar{G})$.

Le choix dépend donc, sans surprise, du classement des gains correspondants.

2) Le critère de choix défini à l'instant s'applique pour tout niveau de pollution initial $G_0 < \bar{G}$, en ce sens qu'il conditionne la nature de la trajectoire d'émissions empruntée.

3) La trajectoire de passage est solution de (P) lorsque

$$W(\bar{G}) > v(\beta\bar{G}, \bar{G})/\delta.$$

Elle conduit le système de l'état G_0 à l'état \bar{G} en un temps fini, défini par l'égalité du Hamiltonien courant à $\delta W(\bar{G})$ (voir le graphique 3).

4) La trajectoire de préservation, solution de (P) lorsque $v(\beta\bar{G}, \bar{G})/\delta > W(\bar{G})$, résout le problème de contrôle optimal suivant, dans lequel l'horizon temporel est infini ($T = \infty$) et la contrainte environnementale (d) toujours active :

$$\text{Max}_{g(t)} \int_0^{\infty} e^{-\delta \cdot t} v(g; G) dt,$$

sous les contraintes (a), (b), (c) et (d).

La trajectoire correspondante conduit le système en un temps fini de l'état G_0 à l'état \bar{G} , équilibre stationnaire du système (voir le graphique 4). ■

Preuve :

1) Le premier point de la proposition est trivial.

2) Le deuxième point se démontre en deux temps : d'abord, la condition de passage est déduite de la condition de transversalité (5') ; ensuite, elle est comparée à celle définie dans le point 1.

Si la condition de transversalité (5') admet une solution, la date de passage optimale est finie. Sinon, on se retrouve *de facto* avec un problème en horizon infini (avec contrainte sur l'état).

La date T est finie s'il existe $p(T)$ satisfaisant la condition (5'). On démontre que :

$$(7) \quad d\tilde{H}^0(\bar{G}, p)/dp = -g(\bar{G}, p) + \beta \cdot \bar{G}.$$

Appelons \bar{p} la valeur de p telle que (7) s'annule (remarquons au passage que le point (\bar{G}, \bar{p}) ainsi défini appartient à l'isocline $\mathbf{G}(\bar{G}, \bar{p}) = 0$). Puisque $g_p(G, p) < 0$, le Hamiltonien maximisé croît avec p , quel que soit $p > \bar{p}$, et inversement (voir le graphique 2). Il s'ensuit qu'il est minimum en \bar{p} : $\tilde{H}^0(\bar{G}, p) > \tilde{H}^0(\bar{G}, \bar{p})$, quel que soit $p \neq \bar{p}$. Donc, si $\tilde{H}^0(\bar{G}, \bar{p}) > \delta \cdot W(\bar{G})$, la condition de transversalité (5') ne peut pas être satisfaite et la date T est indéterminée (donc infinie). Sur le graphique 2, ce cas se produit, par exemple, lorsque l'héritage vaut w . Sinon, on pourra trouver p conforme à (5') et une date T finie, définie comme le temps nécessaire pour rejoindre le point (\bar{G}, p) obtenu. Graphiquement, cette situation se produit lorsque l'héritage prend par exemple la valeur W^5 .

En vertu de la condition (5'), le choix dépend du classement de $\tilde{H}^0(\bar{G}, \bar{p})$ et de $\delta \cdot W(\bar{G})$. Mais, comme le point (\bar{G}, \bar{p}) est tel que $\mathbf{G}(\bar{G}, \bar{p}) = 0$, on a

5. On voit que (5') admet alors deux racines, notée p_1 et p_2 . La solution à retenir est p_1 , car aucune trajectoire faisable partant de $G_0 < \bar{G}$ ne peut rejoindre le point (\bar{G}, p_2) sans violer la contrainte (d).

$\tilde{H}^0(\bar{G}, \bar{p}) = v(\beta\bar{G}, \bar{G})$, si bien que la règle de décision définie se confond avec celle énoncée dans le point 1 de la proposition.

3) La trajectoire de passage, solution de (P) lorsqu'il est optimal de franchir le seuil critique, conduit le système de l'état initial à l'état final $(\bar{G}, p(T))$, racine de (5'). Cette trajectoire se situe au-dessus de la trajectoire témoin si la catastrophe a un effet négatif sur le bien-être (voir l'annexe 4).

4) La trajectoire de préservation, solution de (P) lorsqu'il n'est pas optimal de franchir le seuil critique, conduit le système de l'état initial à l'état (\bar{G}, \bar{p}) . Ce point constitue un équilibre stationnaire si λ est pris tel que $\dot{p} = 0$ (voir la relation (4)). On vérifie ensuite l'optimalité de cette trajectoire en remarquant qu'elle satisfait la condition de transversalité (5''). ■

3 Discussion

Dans la section précédente, nous avons établi que le choix entre la préservation et la destruction de l'environnement dépend du classement du bien-être stationnaire de la préservation et de l'héritage. Ainsi, toute modification ayant pour conséquence d'inverser cet ordre implique un changement de stratégie : toute variation d'un paramètre conduisant à augmenter $v(\beta\bar{G}, \bar{G})/\delta$ et/ou à diminuer $W(\bar{G})$ rend la préservation plus attractive, et inversement.

Pour tirer parti de la règle susdite, plaçons-nous dans la situation d'une catastrophe acceptable (peu grave). La trajectoire de passage est donc la solution de (P).

Imaginons, pour commencer, que la gravité de la catastrophe augmente. Ceci a pour effet de réduire l'héritage $W(\bar{G})$, sans modifier le bien-être stationnaire de la préservation. La préservation devient donc relativement plus intéressante, sans que la stratégie de passage soit *nécessairement* remise en cause. Ce basculement survient seulement lorsque l'héritage devient inférieur à $v(\beta\bar{G}, \bar{G})/\delta$.

L'aggravation de l'incidence de la catastrophe tend également à retarder son apparition. En effet, si $W(\bar{G})$ diminue, le prix de passage $p(T)$ vérifiant (5'), s'il existe encore, augmente (sachant que, dans la région du plan concernée, c'est-à-dire sous la courbe $\mathbf{G}(G, p) = 0$, le Hamiltonien maximisé décroît avec p). Il s'ensuit que la nouvelle trajectoire de passage se situe au-dessus de la précédente. Dès lors, le prix implicite augmente à toute date par rapport à la situation précédente, si bien que l'émission et l'accumulation du polluant diminuent. Le seuil critique est donc rejoint plus tard.

Supposons, maintenant, que le seuil critique de pollution diminue. L'effet de ce changement sur le bien-être stationnaire de la préservation dépend du signe de :

$$(8) \quad dv(\beta\bar{G}, \bar{G})/d\bar{G} = \beta.v_g(\beta\bar{G}, \bar{G}) + v_g(\beta\bar{G}, \bar{G}).$$

Dans l'annexe 5, nous montrons que la dérivée (8) est positive pour \bar{G} petit, et inversement. Ainsi, lorsque le seuil critique est déjà petit, une réduction de

ce dernier diminue le bien-être stationnaire de la préservation, ce qui, à évaluation identique de l'héritage, conduit à un choix plus systématique de la trajectoire de passage. En revanche, lorsque le seuil critique est grand, l'effet d'une variation de ce dernier sur la décision est ambigu.

4 Conclusion

Nous avons étudié la réponse optimale à une catastrophe climatique irréversible parfaitement prévue, aussi bien du point de vue des conditions de sa réalisation (le seuil critique de pollution) que de celui de son incidence sur l'économie (la valeur de l'héritage). Qualité appréciable, la règle de choix que nous mettons en évidence s'avère très intuitive (et temporellement cohérente) : quelle que soit la pollution initiale, on choisit une trajectoire de préservation si l'action de maintenir indéfiniment la pollution à sa valeur critique garantit un bien-être intertemporel supérieur à celui qui pourrait être obtenu après la catastrophe ; sinon, on choisit une trajectoire de passage.

Dans tous les cas, la perspective d'une catastrophe conduit à retarder l'instant où le seuil critique de pollution est rejoint, puis, éventuellement, dépassé (par rapport à la situation sans catastrophe). Ce délai supplémentaire augmente avec la gravité de la catastrophe, dans la limite de son acceptabilité. Passée celle-ci, le seuil critique est atteint à une date finie invariable, mais il n'est jamais dépassé, puisque la préservation devient préférable.

Le modèle présenté ici peut avoir de multiples prolongements. Son principal défaut provient de ce qu'il suppose que l'échéance et les effets de la catastrophe sont parfaitement anticipés. Cette hypothèse est audacieuse, au moins en ce qui concerne l'effet de serre. Le cas d'un seuil critique aléatoire est déjà traité dans la littérature (CLARKE et REED [1994], CONRAD [1988], CROPPER [1976] et ROE *et al.* [1994]). En revanche, le scénario d'une catastrophe aux conséquences incertaines reste à analyser. La démarche présentée, ici, s'adapte parfaitement à cette situation, puisqu'il suffit de substituer une valeur espérée de l'héritage pour la traiter. En poussant plus loin, il est envisageable, toujours dans ce même contexte et en aménageant légèrement ce même modèle, d'analyser le comportement d'investissement dans la recherche scientifique, vu comme un moyen d'atténuer l'incertitude. ■

• Références bibliographiques

- BROECKER W.S. (1997). – « Thermohaline Circulation, the Achilles Hell of our Climate System: Will Man-Made CO₂ Upset the Current Balance? », *Science*, 278, pp. 1582 - 1588.
- CLARKE H.R., REED W.J. (1994). – « Consumption/Pollution Tradeoffs in an Environment Vulnerable to Pollution-Related Catastrophic Collapse », *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, pp. 991-1010.
- CONRAD J.M. (1988). – « Pollution Control with Risk of Irreversible Accumulation », *Working papers in Agricultural Economics*, n° 88-2, Cornell University, Ithaca, NY.
- CROPPER M.L. (1976). – « Regulating Activities with Catastrophic Environmental Effects », *Journal of Environmental Economics and Management*, 3, pp. 1-15.
- FANKHAUSER S., PEARCE W.D. (1994). – « Les coûts sociaux des émissions de gaz à effet de serre », pages 75-92, , in OCDE, *Les aspects économiques du changement climatique*, Paris, 362 pages.
- FORSTER B.A. (1973). – « Optimal Consumption Planning in a Polluted Environment », *Economic Record*, 49, pp. 534-545.
- GOTTINGER H.S. (1991). – « Economic Models of Optimal Energy Use under Global Environmental Constraints », pages 133-183, in Pethig R. (Ed.), *Conflicts and Cooperation in Managing Environmental Resources*, Springer-Verlag, 273 p.
- HUNG N.M. (1991). – « Natural Resource, National Accounting and Economic Depreciation: A Rejoinder », *Cahier de recherche* n° 91.05 du Groupe de Recherche en Economie de l'Énergie et des ressources Naturelles, Université Laval, Québec.
- KEELER C., SPENCE M., ZECKHAUSER R. (1971). – « The Optimal Control of Pollution », *Journal of Economic Theory*, 4, pp. 19-34.
- LÉONARD D., LONG N.V. (1992). – *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge University Press, 352 p.
- PETHIG R. (1991). – « Problems of Irreversibility in the Control of PMPs », pages 93-103, in Opschoor, J.B. et Pearce, D.W. (Ed.), *Persistent Pollutants : Economics and Policy*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 219 p.
- PEZZEY J. (1989). – « Economic Analysis of Sustainable Growth and Sustainable Development », Environment Department *Working Paper* n° 15, World Bank, Washington D.C.
- PLOURDE G.C. (1972). – « A Model of Waste Accumulation and Disposal », *The Canadian Journal of Economics*, 5, pp. 119-125.
- ROE T., TSUR Y., ZEMEL A. (1994). – « Sustainable Growth and Global Climate Change », pages 223-231, in Symposium international, *Modèles de développement soutenable : des approches exclusives ou complémentaires de la soutenabilité*, Volume 1, Paris, 16-18 mars 1994.

ANNEXES

Annexe 1

La relation (3) est satisfaite pour toute valeur de G et de p . D'où, $v_{gg}.dg + v_{gG}.dG = dp$ et

$$\frac{dg}{dp} = \frac{1}{v_{gg}(g,G)} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{dg}{dG} = -\frac{v_{gG}(g,G)}{v_{gg}(g,G)} \leq 0. \quad \blacksquare$$

Annexe 2

Nous cherchons les propriétés de l'ensemble $\mathbf{G}(G,p) = 0$. On démontre que

$$\frac{\partial \mathbf{G}(G,p)}{\partial G} = -\frac{v_{gG}(g,G)}{v_{gg}(g,G)} - \beta < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{G}(G,p)}{\partial p} = \frac{1}{v_{gg}(g,G)} < 0$$

Le long de $\mathbf{G}(G,p) = 0$, on a $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial G}.dG + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial p}.dp = 0$. D'où,

$$\frac{dp}{dG} \Big/_{\mathbf{G}(G,p)=0} = -\frac{\partial \mathbf{G}/\partial G}{\partial \mathbf{G}/\partial p} = v_{gG} + \beta.v_{gg} < 0.$$

Puisque $\partial \mathbf{G}/\partial p < 0$, on en déduit que tout point au-dessus de $\mathbf{G}(G,p) = 0$ est tel que $\mathbf{G}(G,p) < 0$, et inversement. \blacksquare

On procède de la même façon pour démontrer les propriétés de $\mathbf{P}(G,p) = 0$. On démontre d'abord que

$$\frac{\partial \mathbf{P}(G,p)}{\partial G} = -\frac{(v_{gG})^2}{v_{gg}} + v_{GG} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{P}(G,p)}{\partial p} = \delta + \beta + \frac{v_{Gg}}{v_{gg}} > 0.$$

Sachant que le long de $\mathbf{P}(G,p) = 0$, $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial G}.dG + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p}.dp = 0$, il vient

$$\frac{dp}{dG} \Big/_{\mathbf{P}(G,p)=0} = -\frac{\partial \mathbf{P}/\partial G}{\partial \mathbf{P}/\partial p} = \frac{(v_{gG})^2 - v_{gg}.v_{GG}}{(\delta + \beta).v_{gg} + v_{Gg}} \geq 0$$

si $v(g,G)$ est concave.

Puisque $\partial \mathbf{P}/\partial p > 0$, on en déduit que tout point au-dessus de $\mathbf{P}(G,p) = 0$ est tel que $\mathbf{P}(G,p) > 0$, et inversement. \blacksquare

Annexe 3

L'équilibre stationnaire est tel que $(\delta + \beta).v_g(\beta.G,G) + v_G(\beta.G,G) = 0$. Compte tenu des propriétés de $v(g,G)$, cette expression décroît de façon

monotone avec G . Or, puisque $\lim_{g \rightarrow 0} v_g = \infty$, $\lim_{g \rightarrow \infty} v_g = 0$ et $v_G(g, 0) = 0$, on a $(\delta + \beta).v_g(\beta.G, G) + v_G(\beta.G, G) \rightarrow \infty$ quand $G \rightarrow 0$ et $(\delta + \beta).v_g(\beta.G, G) + v_G(\beta.G, G) < 0$ quand $G \rightarrow \infty$. Il existe donc bien une valeur G_∞ positive vérifiant l'égalité de départ. ■

Annexe 4

En tout point de la trajectoire optimale du modèle de la section 2, l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman nous permet d'écrire $\tilde{H}^0(G_t, p_t) = \delta.V(G_t)$, où

$$V(G_t) = \text{Max}_{g(t)} \int_0^\infty e^{-\delta.t} v(g, G) dt,$$

sous les contraintes

$$(a) \dot{G} = g - \beta.G, \quad (b) G(0) = G_t \quad \text{et} \quad (c) g \leq 0.$$

Cette égalité s'appliquant également au point \bar{G} , il s'ensuit que la trajectoire optimale sans catastrophe passe par le point (\bar{G}, \hat{p}) tel que

$$\tilde{H}^0(\bar{G}, \hat{p}) = \delta.V(\bar{G}).$$

Si la catastrophe a un effet négatif sur le bien-être, alors $V(\bar{G}) > W(\bar{G})$. Le point (\bar{G}, \hat{p}) de la trajectoire sans catastrophe ne satisfait donc pas la condition de transversalité (5'), puisque $\tilde{H}^0(\bar{G}, \hat{p}) = \delta.V(\bar{G}) > \delta.W(\bar{G})$. Donc, comme le point de passage appartient nécessairement à la région du plan au-dessous de $\mathbf{G}(G, p) = 0$ et comme $\partial \tilde{H}^0(G, p) / \partial p < 0$ dans cette région du plan, il faut choisir $p > \hat{p}$ pour avoir $\tilde{H}^0(\bar{G}, p) = \delta.W(\bar{G})$. ■

Annexe 5

Nous cherchons le signe de

$$dv(\beta.\bar{G}, \bar{G}) / d\bar{G} = \beta.v_g(\beta.\bar{G}, \bar{G}) + v_G(\beta.\bar{G}, \bar{G})$$

en fonction de \bar{G} .

Pour cela, constatons que (voir l'annexe 3 pour 2. et 3.) :

- 1) le terme de droite est une fonction monotone décroissante de \bar{G} ,
- 2) $dv(\beta.\bar{G}, \bar{G}) / d\bar{G} > 0$ quand $\bar{G} \rightarrow 0$,
- 3) $dv(\beta.\bar{G}, \bar{G}) / d\bar{G} < 0$ quand $\bar{G} \rightarrow G_\infty$.

La réunion de ces trois informations nous permet d'établir qu'il existe \hat{G} tel que, quel que soit $\bar{G} < \hat{G}$, $dv(\beta.\bar{G}, \bar{G}) / d\bar{G} > 0$, et inversement. ■

