ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 58 – 2000

La quantité optimale de monnaie dans un modèle avec appariements aléatoires

Guillaume ROCHETEAU *

RÉSUMÉ. – Cet article prolonge le modèle monétaire de prospection de KIYOTAKI et WRIGHT [1993] en introduisant une distribution des encaisses monétaires et des stocks de marchandises. La quantité optimale de monnaie est déterminée sous différentes hypothèses sur les stocks de biens et de monnaie des agents. La borne supérieure du stock d'encaisses est endogénéisée et l'existence d'équilibres multiples est démontrée.

Inventories, Money Holdings and the Optimal Quantity of Money in a Search Economy

ABSTRACT. – This article determines the optimum quantity of money for various extensions of the search-theoretic model of fiat money and examines the robustness of the KIYOTAKI and WRIGHT's results in the presence of money and inventory holdings. In the case of a bound on money holdings, the optimum quantity of money is reached when the distribution of money among agents is uniform. The choice of this upper bound by rational agents generates multiple equilibria.

---

* G. ROCHETEAU : DEEP - HEC, Université de Lausanne, (guillaume.rocheteau@hec.unil.ch).
Je remercie pour leurs nombreuses suggestions Y. LI et R. WRIGHT. Cet article a également bénéficié des remarques d'un rapporteur anonyme, de D. MORTENSEN, C. VEDEL, P. VILLIEU et des participants aux 15èmes Journées internationales d'économie monétaire et bancaire à Toulouse, au Colloque T2M à Marseille et au Congrès de l'EEA à Berlin. Les éventuelles erreurs ou insuffisances de cet article sont miennes.

1 Introduction

Dans une approche transactionnelle, la détention et la circulation de la monnaie sont expliquées par la présence de différents coûts inhérents à l'échange [1]. En particulier, dans une économie de troc décentralisée, deux individus n'accepteront d'échanger que si chacun détient un bien que l'autre souhaite acquérir : c'est la nécessité de la double coïncidence des désirs mentionnée par JEVONS [1875] et MENGER [1892]. La monnaie est l'outil dont disposent les agents pour s'affranchir de cette obligation et réduire le temps de l'échange. La quantité de monnaie dont une économie a besoin dépend alors du volume des transactions qu'elle doit réaliser, c'est-à-dire des caractéristiques de sa production, de son degré de spécialisation et du goût de ses agents pour la diversité des biens qu'ils consomment. Ainsi Jean-Baptiste SAY, écrit-il, dans le chapitre 23 de son *Traité d'Économie Politique* [1803] :

> « *La monnaie n'étant qu'un instrument qui sert à faciliter nos échanges, la quantité de monnaie dont un pays a besoin est déterminée par la somme des échanges que les richesses de ce pays et l'activité de son industrie entraînent nécessairement. (...) Quand la production est plus active, quand la consommation est plus étendue, on a plus d'échanges à conclure, on a besoin d'une plus forte somme de monnaie*. »

Le modèle monétaire de prospection, développé par KIYOTAKI et WRIGHT [1991, 1993] propose une description explicite des frictions de l'échange et du problème de la double coïncidence des désirs. Les rencontres entre individus sont coûteuses en temps, aléatoires et bilatérales. Le modèle de prospection a permis de mettre en évidence deux effets associés à un accroissement de l'offre de monnaie. Le premier est un effet de liquidité selon lequel un plus grand nombre d'individus étant dotés d'encaisses, chaque marchandise trouve un acquéreur plus rapidement [2]. La monnaie exerce également un « *effet d'éviction* » : les agents ne pouvant être simultanément acheteurs et vendeurs, tout accroissement de la liquidité de l'économie se traduit par une diminution de la proportion des offreurs présents sur le marché. La quantité optimale de monnaie est atteinte lorsque le gain en terme de bien-être social à améliorer la liquidité de l'économie est annulé par la perte en bien-être engendrée par l'éviction des offreurs [3].

La problématique de la quantité optimale de monnaie telle qu'elle est envisagée à l'aide du modèle de prospection s'éloigne considérablement de la littérature traditionnelle qui aborde cette question dans le cadre de l'équilibre général walrasien (voir, WOODFORD [1990]). Dans le modèle de prospection,

1. Voir, par exemple, NIEHANS [1978].

2. LIPPMAN et MCCALL [1986] ont montré l'intérêt d'utiliser un modèle de recherche pour étudier et définir le concept de liquidité. La liquidité d'un bien est mesuré par le temps moyen pour que ce bien soit transformé en monnaie.

3. Hormis KIYOTAKI et WRIGHT [1993], la détermination de la quantité optimale de monnaie dans le cadre du modèle de prospection a été envisagée par WILLIAMSON et WRIGHT [1994] en présence d'une asymétrie d'information sur la qualité des biens produits et par V. LI [1995,1997] sous l'hypothèse d'une intensité de recherche endogène.

la quantité optimale de monnaie indique le niveau de l'offre de monnaie en termes réels (*i.e.* le pouvoir d'achat des moyens de paiement dont dispose l'économie) qui maximise le bien-être social. FRIEDMAN [1969], pour sa part, détermine le taux de croissance de la quantité nominale de monnaie qui est compatible avec l'optimalité paretienne [4]. Plus fondamentalement, les deux approches se distinguent par leur prise en compte de la monnaie. Pour justifier la détention de la monnaie par les agents économiques, FRIEDMAN associe les services qu'elle rend à sa fonction d'intermédiaire des échanges et à sa capacité à surmonter le problème de la double coïncidence attaché au troc. Or, en recourant au paradigme walrasien, FRIEDMAN adopte une formalisation qui occulte le problème de la double coïncidence des désirs et dans laquelle tous les biens sont parfaitement liquides. Au contraire, le rôle transactionnel de la monnaie est parfaitement établi dans le modèle de KIYOTAKI et WRIGHT.

Pour autant, le modèle de prospection repose sur des hypothèses restrictives qui peuvent susciter quelques réserves quant à la robustesse de certains résultats. En particulier, les individus sont contraints à détenir au plus une unité de bien ou une unité de monnaie [5]. L'objet principal de notre travail est de lever cette restriction afin d'améliorer notre compréhension des effets de liquidité et d'éviction et de clarifier les résultats des modèles de prospection quant à la quantité optimale de monnaie.

Nous supposerons, dans un premier temps, que les stocks de biens et de monnaie des agents sont potentiellement illimités : chaque agent stocke et déstocke les biens, accumule et dépense les unités monétaires sans aucune restriction, au gré de la production et des échanges. La monnaie exerce alors, uniquement, un effet de liquidité. À la différence de KIYOTAKI et WRIGHT, nous mettrons en évidence deux régimes : l'un où l'économie est confrontée à une crise générale de surproduction, l'autre où le flux des biens produits est intégralement consommé. La masse monétaire critique qui sépare les deux régimes sera appelée *seuil optimal de la quantité de monnaie*. En dessous de ce seuil, toute augmentation de la quantité de monnaie est source d'effets réels ; à l'opposé, au-dessus du *seuil optimal*, la monnaie ne modifie ni le volume des échanges, ni le bien-être social. Le *seuil optimal* de la quantité de monnaie dépend des conditions de l'échange, de la consommation et de la production : il diminue, en particulier, lorsque les échanges de troc sont réalisables.

Dans un second temps, nous introduirons l'effet d'éviction en supposant que les individus ont une capacité de stockage des encaisses monétaires limitée. Toutefois, à la différence de KIYOTAKI et WRIGHT [1991,1993] pour qui le stock d'encaisses des agents ne peut dépasser une unité, nous supposerons que la borne supérieure du stock d'encaisses peut prendre n'importe quelle valeur sur l'ensemble des entiers. Cette restriction sera suffisante à l'obtention d'une quantité optimale de monnaie *finie* et *unique*. Sous l'hypothèse d'un processus de production instantané, nous montrerons que la

4. Pour FRIEDMAN, la politique monétaire optimale doit garantir un taux de déflation égal au taux d'intérêt réel (ou au taux de préférence pour le présent) de manière à ce que le coût d'opportunité de la détention d'encaisses, mesuré par le taux d'intérêt nominal, soit nul et égal au coût marginal de la monnaie.

5. Couplée avec l'hypothèse selon laquelle tous les objets présents dans l'économie (y compris la monnaie) sont indivisibles, cette restriction permet à KIYOTAKI et WRIGHT d'obtenir des termes de l'échange unitaires : une unité de monnaie achète exactement une unité de marchandise réelle. Il est alors impossible de distinguer la quantité nominale de la quantité réelle de monnaie.

quantité optimale de monnaie par individu est exactement égale à la moitié de la borne supérieure des encaisses individuelles ; ce faisant, nous généraliserons le résultat de KIYOTAKI et WRIGHT selon lequel à l'*optimum* le nombre des offreurs (les agents qui produisent) est égal au nombre des demandeurs (les agents dotés d'encaisses) [6].

Enfin, nous conclurons notre étude de l'effet d'éviction en endogénéisant la limite supérieure du stock d'encaisses monétaires des agents. Pour cela, nous supposerons que l'effort associé à la production est source de désutilité. Nous montrerons la décroissance de l'utilité marginale de la monnaie et l'existence d'un niveau de la richesse monétaire au-delà duquel un individu préfère stopper son activité de production pour consacrer son temps à dépenser ses unités de monnaie. Le comportement d'offre d'un agent est donc modifié par un effet d'encaisses réelles. Nous montrerons également que le choix de la borne supérieure du stock d'encaisses engendre des complémentarités stratégiques et des *équilibres multiples* [7].

La problématique de notre article s'inscrit dans un programme de recherche récent qui vise à étudier le rôle transactionnel de la monnaie à l'aide du modèle de prospection en présence d'une distribution des encaisses monétaires. Ce programme, qui remonte à DIAMOND et YELLIN [1985, 1990] a connu, avec le succès du modèle de KIYOTAKI et WRIGHT [1991, 1993], un regain d'intérêt. Toutefois, la plupart des travaux existants négligent l'influence des stocks en supposant que la production est instantanée (BERENTSEN [1998] ; GREEN et ZHOU [1998] ; MOLICO [1998] ; ZHOU [1999]). LI [1994] permet aux agents de stocker plusieurs unités de marchandise, mais suppose pour cela que les activités d'échange et de production sont incompatibles et maintient la restriction selon laquelle les agents ne peuvent détenir qu'une seule unité de monnaie.

Notre article est divisé en cinq sections. La première section propose un bref rappel de la littérature consacrée aux modèles de prospection et indique ses développements récents [8]. La deuxième section présente les hypothèses de notre modèle et caractérise le concept d'équilibre et le critère de bien-être social. L'effet de liquidité de la monnaie et le seuil optimal de la quantité de monnaie sont étudiés dans la troisième section. La quatrième section réintroduit l'effet d'éviction et endogénéise la contrainte postulée par KIYOTAKI et WRIGHT [1991, 1993] portant sur le stock d'encaisses des agents. La dernière section conclut l'article.

---

6. Ce résultat est également démontré par BERENTSEN [1998] dans une étude consacrée à la distribution optimale des encaisses monétaires.

7. La présence d'équilibres multiples est la règle dans les modèles consacrés à la monnaie fiduciaire. Voir, par exemple, KIYOTAKI et WRIGHT [1991,1993], SHI [1995], TREJOS et WRIGHT [1995]. À la différence de l'analyse de ZHOU [1999] qui endogénéise les prix, il y a une seule source d'indétermination dans notre modèle, à savoir le choix de la borne supérieure du stock d'encaisses.

8. Pour une présentation détaillée des modèles de prospection, voir ANGAOUI et BAUDASSÉ [1997].

2 Les développements récents des modèles de prospection

Les modèles avec appariements aléatoires, qu'ils soient appliqués au marché des biens ou au marché du travail, ont pour vocation de décrire, dans un univers décentralisé, le mécanisme par lequel les acheteurs parviennent à rencontrer les vendeurs. Ils offrent, de ce fait, un cadre théorique naturellement adapté à l'explication de la principale fonction de la monnaie, celle d'intermédiaire des échanges.

Dans un premier temps, les modèles de prospection ont décrit la genèse de la monnaie, c'est-à-dire l'émergence endogène d'un intermédiaire des échanges en l'absence de toute contrainte légale (KIYOTAKI et WRIGHT [1989] ; AIYAGARI et WALLACE [1991]). L'économie est alors composée de $N \geqslant 3$ biens, chacun procurant une utilité directe à certains individus, et d'un *continuum* d'agents spécialisés à la fois dans les activités de consommation et de production. Un individu qui produit le bien $i \in \{1, \cdots, N\}$ consomme uniquement le bien $i+1$ (modulo N) : la double coïncidence des désirs est impossible. Dans ce contexte, des échanges indirects doivent se réaliser et certains accepteront des marchandises qu'ils ne consomment pas. De plus, le bien utilisé comme intermédiaire des échanges n'est pas nécessairement celui qui a les coûts de stockage ou les coûts de reconnaissance (en présence d'incertitude) les plus faibles (KIYOTAKI et WRIGHT [1989] ; CUADRAS-MORATO [1994] ; Y. LI [1995]).

Après avoir décrit la genèse de la monnaie, différents auteurs (dont KIYOTAKI et WRIGHT à nouveau) ont cherché à promouvoir le modèle monétaire de prospection comme une alternative possible aux modèles monétaires existants (les modèles à encaisses préalables, à monnaie dans la fonction d'utilité ou encore à générations imbriquées). Basé sur le problème de la double coïncidence, le modèle d'appariement offre un cadre théorique susceptible de décrire la valorisation, l'utilisation et la circulation d'une monnaie fiduciaire sans utilité intrinsèque.

Le premier modèle de recherche introduisant une monnaie fiduciaire a été proposé par DIAMOND [1984]. Toutefois, la valorisation de la monnaie à l'équilibre, en l'absence de problème de double coïncidence, ne repose que sur la présence d'une contrainte d'encaisses préalables. KIYOTAKI et WRIGHT [1989] renoncent à cette contrainte et prolongent leur modèle de genèse de la monnaie de manière à y inclure une monnaie fiduciaire. Ils montrent l'existence d'un équilibre où tous les agents acceptent la monnaie. La résolution du modèle étant, malgré tout, assez lourde, KIYOTAKI et WRIGHT [1991, 1993]) proposent une version plus simple et manipulable de leur modèle de prospection [9]. Ils abandonnent pour cela les questions relatives à la genèse de la monnaie pour se consacrer à l'explication de l'utilisation et de la circulation d'une monnaie

9. Ce modèle a permis d'étudier le rôle de la monnaie en présence d'une asymétrie informationnelle (WILLIAMSON et WRIGHT [1994] ; KIM [1996]), l'acceptation et la circulation d'une monnaie internationale (MATSUYAMA *et alii* [1993] ; ZHOU [1997]), le lien entre la monnaie et la structure du marché (KULLTI [1994]), l'acceptation et la production de faux billets (GREEN et WEBER [1996]), l'impact de la monnaie sur le degré de spécialisation de l'économie (SHI [1997b]), l'émission de monnaies privées par les banques (CAVALCANTI *et alii* [1999]).

fiduciaire, en l'absence de toute contrainte légale [10], dans une économie composée d'un *continuum* de biens. KIYOTAKI et WRIGHT [1991, 1993] montrent l'existence de trois équilibres de NASH : un équilibre de troc où la probabilité d'acceptation de la monnaie est nulle ; un équilibre monétaire pur où la monnaie fiduciaire est acceptée par tous les agents ; un équilibre monétaire impur où la monnaie est acceptée avec une probabilité inférieure à l'unité. Le modèle de KIYOTAKI et WRIGHT souligne, de plus, l'importance des croyances des agents dans l'instauration de la monnaie. Des équilibres avec taches solaires où l'acceptation de la monnaie fluctue en fonction de la réalisation d'un événement aléatoire, exogène et indépendant des fondamentaux de l'économie, sont donc susceptibles de se réaliser (WRIGHT [1994]).

Toutefois, pour parvenir à capturer l'essence du phénomène monétaire, KIYOTAKI et WRIGHT [1991, 1993] ont dû recourir à plusieurs hypothèses très fortes et irréalistes : les agents ne peuvent détenir qu'une seule unité de bien ou de monnaie, tous les biens (y compris la monnaie) sont indivisibles. Ces deux hypothèses admettent alors comme corollaire qu'une unité de monnaie achète exactement une unité de marchandise réelle. Les travaux les plus récents sur les modèles de prospection proposent différentes manières de lever ces hypothèses.

2.1 La détermination du pouvoir d'achat de la monnaie

Les modèles consacrés à la logistique de l'échange évacuent la question des prix en supposant que ceux-ci sont fixés à leur niveau walrasien (voir, par exemple, OSTROY et STARR [1990]). Le modèle de prospection avec monnaie fiduciaire de KIYOTAKI et WRIGHT ne fait pas exception et considère le pouvoir d'achat de la monnaie comme exogène [11].

Toutefois, une théorie monétaire complète doit expliquer la détermination du niveau général des prix. La modélisation du fonctionnement des marchés décentralisés à l'aide de la théorie des jeux offre des outils pour prolonger de manière adéquate le modèle de base de KIYOTAKI-WRIGHT (voir, OSBORNE et RUBINSTEIN [1990]). L'abandon de l'hypothèse d'indivisibilité des biens (hormis pour la monnaie) et l'utilisation de l'approche stratégique de la négociation (ou de formes axiomatiques équivalentes) ont permis à SHI [1995] et TREJOS et WRIGHT [1995] d'aboutir à une deuxième génération de modèles monétaires de recherche [12]. Le pouvoir d'achat de la monnaie correspond alors à la quantité de marchandises réelles qu'une unité monétaire permet d'acquérir. Chaque offreur a dorénavant la possibilité de produire la quantité de bien (divisible par hypothèse) qu'il souhaite. Cette quantité fait l'objet d'une négociation décentralisée entre chaque couple d'acheteur-vendeur.

---

10. AIYAGARI et WALLACE [1997] montrent comment le gouvernement peut inciter les agents à utiliser la monnaie fiduciaire.

11. Plus exactement, le pouvoir d'achat de la monnaie est contraint par l'hypothèse d'indivisibilité des biens et de la monnaie et par la capacité de stockage limitée des agents.

12. Le modèle de prospection à prix endogènes est utilisé pour envisager de nombreuses problématiques monétaires : la circulation de plusieurs monnaies et la détermination du pouvoir d'achat d'une monnaie internationale (AYAGARI *et alii* [1996] ; SHI [1995] ; TREJOS et WRIGHT [1996]), la loi de *Gresham* (VELDE *et alii* [1998]), la détermination du pouvoir d'achat d'une monnaie marchandise (BURDETT *et alii* [1998]), l'introduction de titres concurrençant la monnaie (AIYAGARI *et alii* [1996] ; LI [1998] ; SHI [1996] ; WALLACE [1997a]).

Le résultat fondamental des modèles monétaires de recherche avec négociation est l'indétermination du niveau général des prix dès lors que les échanges de troc et les échanges monétaires coexistent [13]. Le niveau général des prix est fonction des croyances de chaque individu quant à la valeur que tous les autres agents de l'économie accordent à la monnaie. Si les vendeurs anticipent un pouvoir d'achat de la monnaie faible, alors ils sont disposés à offrir peu de biens en échange d'une unité monétaire. À l'inverse, les vendeurs offrent une quantité élevée de marchandises réelles s'ils pensent que la monnaie a une forte valeur d'échange. Les croyances des agents sont autoréalisatrices. L'économie monétaire, qui peut être confrontée à des équilibres avec taches solaires (SHI [1995]) ou à des cycles limites stables (COLES et WRIGHT [1998]), est donc caractérisée par une instabilité endogène.

Enfin, l'axe de recherche le plus prometteur pour le modèle de prospection est celui qui consiste à endogénéiser les prix tout en abandonnant l'hypothèse d'indivisibilité de la monnaie (SHI [1997a] ; LAING *et alii* [1997]). L'absence de neutralité de la monnaie obtenue dans les modèles de SHI [1995] ou TREJOS et WRIGHT [1995] n'est alors plus vérifiée. Toutefois, la monnaie peut ne pas être super-neutre.

2.2 La distribution des encaisses monétaires

Afin d'endogénéiser le niveau général des prix, SHI [1995] et TREJOS et WRIGHT [1995] conservent deux hypothèses fortes : celle d'une monnaie indivisible et celle d'une capacité de stockage limitée des unités monétaires. La distribution des avoirs monétaires des individus à l'équilibre a alors une forme très simple : elle est définie sur l'ensemble $\{0,1\}$ et la part des agents dotés d'encaisses coïncide exactement avec l'offre de monnaie exogène.

Les premiers auteurs à abandonner l'hypothèse limitant les avoirs monétaires des agents sont DIAMOND et YELLIN [1990]. Ils utilisent pour cela un modèle d'équilibre général à deux marchés (un marché du travail parfaitement concurrentiel et un marché des biens régi par appariements) et supposent que les travailleurs reçoivent un flux constant de salaire mais effectuent leurs achats à des instants aléatoires du temps. En l'absence de problème de double coïncidence, le modèle de DIAMOND et YELLIN [1990] n'explique la détention de monnaie que par la présence d'une contrainte d'encaisses préalables. De plus, seuls les travailleurs supportent les coûts de l'échange, les capitalistes pouvant consommer directement une fraction des biens qu'ils produisent.

Ces insuffisances ont motivé plusieurs travaux récents qui ont cherché à introduire un comportement de stockage des unités monétaires directement dans le modèle de KIYOTAKI et WRIGHT [1993]. Ainsi, GREEN et ZHOU [1998] ont abandonné la structure bipartite de l'économie de DIAMOND et YELLIN [1990] pour ne considérer, conformément au modèle de KIYOTAKI et WRIGHT [1993], qu'un ensemble d'agents à la fois producteurs et consommateurs. La production n'est coûteuse ni en temps, ni en terme d'utilité, et l'absence de double coïncidence des désirs rend le troc impossible. En supposant que le

13. Comme le signale SHI [1995], cette caractéristique est commune aux grandes catégories de modèles monétaires.

prix des biens est déterminé au moyen d'une offre à prendre ou à laisser et que la richesse monétaire de chaque agent est une information privée, GREEN et ZHOU montrent l'existence d'un *continuum* d'équilibres vérifiant la loi du prix unique : l'équilibre monétaire est donc complètement indéterminé.

ZHOU [1999] prolonge le modèle précédent au cas où la production est source de désutilité. Sachant que le seul moyen pour acquérir une unité réelle de monnaie consiste à vendre une unité d'*output* et que l'utilité marginale de la monnaie est décroissante [14], ZHOU établit l'existence d'une borne supérieure endogène sur le stock d'encaisses des agents. Pour un individu suffisamment riche, le coût associé à la production d'une unité de marchandise est supérieur au gain en terme d'espérance d'utilité à détenir une unité réelle de monnaie supplémentaire. L'indétermination de l'équilibre monétaire est, alors, renforcée par la coexistence de plusieurs équilibres caractérisés par différents niveaux de la borne supérieure du stock d'encaisses.

Enfin, MOLICO [1998] réussit un coup de force et lève la plupart des hypothèses restrictives du modèle de KIYOTAKI et WRIGHT [1993]. Les marchandises et la monnaie sont parfaitement divisibles et aucune contrainte exogène ne limite le stock d'encaisses des agents. Les acheteurs et les vendeurs qui se rencontrent par paires négocient à la fois la quantité de monnaie qui est déboursée par l'acheteur et la quantité de marchandises qui est livrée par le vendeur. Étant donné le caractère aléatoire de la prospection du marché, la distribution des encaisses des individus est non-dégénérée : il en va donc, de même, pour la distribution des prix. Toutefois, le modèle est extrêmement compliqué et ne peut être résolu qu'au moyen de méthodes numériques.

3 Le modèle

Notre modèle s'inscrit dans la lignée de celui proposé par GREEN et ZHOU [1998]. À la différence de ces derniers nous n'envisageons pas la détermination des prix mais nous introduisons les stocks de marchandises et la dimension temporelle du processus de production.

3.1 Les hypothèses

Considérons une économie d'échange et de production composée d'un *continuum* d'agents immortels indicés sur l'ensemble E, d'un *continuum* de biens indivisibles indicés sur le même ensemble E et d'une monnaie fiduciaire indivisible. La taille de la population est normée à un. La monnaie n'a aucune utilité intrinsèque ; elle circule, toutefois, dans l'économie pour permettre aux agents de surmonter le problème de la double coïncidence et ainsi d'économiser du temps dans les échanges.

14. Plus précisément, l'espérance d'utilité actualisée d'un agent en fonction du stock d'encaisses qu'il détient est croissante et concave.

Chaque agent est spécialisé à la fois dans l'activité de production et dans l'activité de consommation. Un individu $i \in E$ consomme tous les biens compris dans l'ensemble $E_i \subset E$ mais ne produit que le bien $i \notin E_i$. Sa fonction d'utilité instantanée définie sur E vérifie :

$$\begin{aligned} u_i(j) &= U > 0 \ \forall j \in E_i, \\ &= 0 \ \text{ sinon,} \end{aligned}$$

où $u_i(j)$ est l'utilité associée à la consommation d'une unité de bien j.

Pour formaliser les préférences idiosyncratiques des individus, et donc la réalisation de la simple et de la double coïncidence des désirs, nous recourons à des hypothèses très générales qui conservent la symétrie entre les individus. Considérons l'événement suivant : l'agent i rencontre un partenaire j choisi au hasard dans E. La probabilité que la marchandise j produite par l'agent j soit comprise dans E_i est égale à la probabilité de simple coïncidence des désirs notée $x \in (0,1)$.

$$x = \mathbb{P}[j \in E_i], \qquad \forall (i,j) \in E \times E.$$

Supposons la simple coïncidence réalisée $(j \in E_i)$. La probabilité (conditionnelle) que le bien i soit compris dans l'ensemble des biens que j consomme est égale à $y \in (0,1)$.

$$y = \mathbb{P}\left[i \in E_j \mid j \in E_i\right], \qquad \forall (i,j) \in E \times E.$$

La probabilité de la double coïncidence des désirs $(j \in E_i$ et $i \in E_j)$ est donc égale à xy. La plus ou moins grande difficulté à réaliser des échanges de troc dépend de la valeur du paramètre y [15].

Un agent ne consomme jamais plus d'une unité de marchandise à la fois (hypothèse de saturation) et stocke uniquement le bien qu'il produit. En outre, quel que soit le niveau de son stock d'encaisses, un individu qui prospecte le marché ne peut conserver dans son portefeuille qu'une seule unité de monnaie. Les termes de l'échange sont donc unitaires : une unité de monnaie achète exactement une unité de bien.

La production d'une unité de marchandise n'est source d'aucune désutilité ; cette hypothèse sera levée dans l'avant-dernière section de cet article. La consommation et la production ont lieu chacune à des dates discrètes du temps supposé continu. L'utilité intertemporelle d'un individu qui consomme aux dates $\{t_k, k \in \mathbb{N}\}$ est égale à

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} U \exp(-r t_k),$$

où $r > 0$ est le taux de préférence des agents pour le présent.

15. Cette formalisation, qui est empruntée à LI et WRIGHT [1998] et BURDETT *et alii* [1998], admet, comme cas particuliers, les spécifications utilisées dans les modèles de prospection antérieurs. Ainsi, supposons que E s'écrive comme une partition de $N \geqslant 3$ sous-ensembles disjoints $(E_1, \ldots, E_N)$ de même mesure $1/N$. Les individus $i \in E_k$ consomment uniquement les biens compris dans $E_{k+1 \bmod N}$. On retrouve alors la spécification de KIYOTAKI et WRIGHT [1989] et AIYAGARI et WALLACE ($x = 1/N$, $y = 0$) selon laquelle la double coïncidence des désirs n'est jamais réalisée. Si E est un cercle de circonférence égale à deux, et si un individu i consomme tous les biens j tels que la longueur de l'arc de cercle $\widehat{ij}$ est inférieure à x (mais strictement positive), alors $y = x$ et la probabilité de double coïncidence est x^2, conformément au modèle de KIYOTAKI et WRIGHT [1991, 1993].

Le temps est l'élément central du modèle. Il intervient comme *input* de la technologie de production, à côté des services de travail du producteur. Le temps consacré à la production d'une unité de bien est aléatoire et est distribué selon une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$; la durée moyenne de la production d'une unité d'*output* est donc égale à $1/\alpha$. Le paramètre α peut être interprété comme une mesure exogène de la productivité. Si α est infini la production est instantanée.

Le temps intervient également dans l'échange qui est modélisé à l'aide d'une technologie d'appariement linéaire [16]. Les individus se rencontrent au hasard et anonymement : il est donc impossible pour un agent d'acheter un bien au moyen d'une reconnaissance de dettes [17]. Le nombre de rencontres par agent sur un intervalle de temps de longueur $t > 0$ est distribué selon une loi de *Poisson* de paramètre βt, où $\beta > 0$ représente l'efficacité du processus d'appariement. (De manière équivalente, les temps d'inter-arrivées d'un partenaire pour un individu donné sont indépendants et distribués selon une loi exponentielle de paramètre β). Lorsque β tend vers l'infini, les agents se rencontrent instantanément ; l'économie ne comporte alors aucune friction due aux activités d'échange.

3.2 Les stocks de biens et de monnaie

Ni le stock de biens des agents, ni celui des encaisses monétaires ne sont contraints. Le stockage des biens et des unités monétaires est modélisé par un *réseau de deux files d'attente* reflétant la structure séquentielle de la production et de l'échange.

Le niveau des stocks de biens et de monnaie d'un individu est donné par la taille de chacune des deux files d'attente. Les arrivées dans la première file correspondent aux instants de production des biens. Les sorties de la première file indiquent les instants auxquels les marchandises sont déstockées pour être vendues. Les échanges sont directs (échanges de troc) ou indirects (échanges monétaires). Les arrivées dans la seconde file s'effectuent lorsqu'un individu vend une unité de bien contre une unité de monnaie. Les unités monétaires sortent de la seconde file lorsqu'elles sont dépensées. Un agent ne pouvant accroître son stock d'unités monétaires qu'en diminuant son stock de biens, les deux files sont alors en réseau [18]. Notons $X_m(t)$ et $X_n(t)$ les stocks de monnaie et de biens d'un agent à la date t.

• *La première file d'attente : le stock des biens*

Le temps de production d'une unité de bien est une variable aléatoire distribuée selon une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. Chaque agent stocke les unités du bien qu'il produit afin de les échanger directement contre les biens

16. Sous l'hypothèse d'une technologie d'appariement linéaire, le nombre de rencontres par unité de temps est proportionnel au nombre d'agents présents sur le marché. Pour une présentation des technologies d'appariement linéaire et quadratique, voir DIAMOND et MASKIN [1979]

17. L'introduction du crédit dans les modèles de recherche a été effectuée par DIAMOND [1987,1990].

18. Pour une présentation de la théorie des files d'attente, voir KLEINROCK [1975]. La théorie des réseaux de files d'attente est exposé dans GELENBE et PUJOLLE [1985]. Voir, en particulier, le chapitre 2 consacré aux réseaux de JACKSON.

qu'il consomme ou contre des unités de monnaie. Pour un agent donné, les échanges de troc se réalisent au taux $b > 0$ et l'acquisition d'unités monétaires au taux $a > 0$ [19].

• *La seconde file d'attente : le stock de monnaie*

Un agent stocke les unités de monnaie en vue de les échanger ultérieurement contre des unités de marchandise. Le temps nécessaire pour procéder à un tel échange est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $e > 0$.

Le réseau des deux files d'attente est représenté sur le graphique 1.

Les entrées et sorties de chaque système sont indiquées par des flèches. Au-dessus de chaque flèche figure le paramètre du processus de *Poisson* sous-jacent (*i.e.* de la loi exponentielle décrivant les temps d'inter-arrivées dans chacune des files).

Un équilibre dans notre modèle correspond à une situation de long terme où la distribution des encaisses monétaires des agents est stationnaire ; en revanche, pour certains des équilibres considérés le processus guidant l'évolution des stocks de marchandises pourra être transitoire ($X_n = +\infty$ presque-sûrement). La résolution du modèle consiste à déterminer, pour un individu donné, la distribution de probabilité à l'équilibre de son stock de monnaie et de biens. L'économie étant composée d'un *continuum* d'agents, on en déduit la distribution des encaisses et des stocks de biens de l'ensemble des individus.

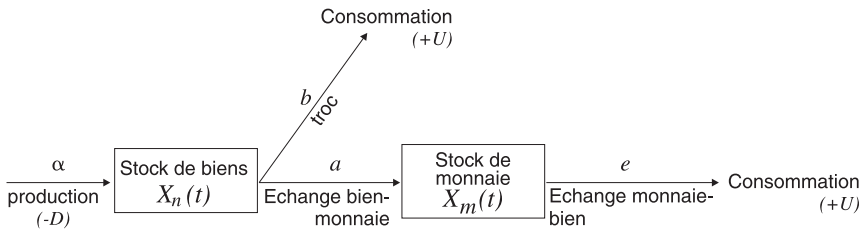
Les distributions des stocks de monnaie et de marchandises à l'équilibre, notées $\pi_m(.)$ et $\pi_n(.)$, vérifient (Voir annexe 1) :

$$\pi_n(n) = \left(1 - \frac{\alpha}{a+b}\right)\left(\frac{\alpha}{a+b}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } \alpha < a+b, \tag{3.1}$$

$$\pi_m(m) = \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}}{e}\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{\tilde{\alpha}}{e}\frac{a}{a+b}\right)^m, \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

où $\tilde{\alpha} = \min(\alpha, a+b)$. Deux régimes sont distingués selon que α est strictement inférieur, ou supérieur à $a+b$.

FIGURE 1
Les stocks de biens et de monnaie



19. On utilisera parfois, de manière quelque peu abusive, le terme de vitesse pour désigner des probabilités instantanées.

• *L'équilibre sur le marché des biens* $(\alpha < a + b)$.

D'après (3.1), le flux de biens produits est égal au flux de biens achetés, soit :

$$(a + b)\{1 - \pi_n(0)\} = \alpha.$$

La terme $(a + b)$ désigne la probabilité instantanée d'effectuer un échange (de troc ou monétaire); le terme $\{1 - \pi_n(0)\}$ indique la probabilité que le stock de biens ne soit pas nul ; le produit de ces deux termes correspond au flux des biens vendus. Les stocks de biens et d'encaisses sont distribués selon des lois géométriques de paramètres respectifs $\alpha a/\{e(a + b)\}$ et $\alpha/(a + b)$.

• *La surproduction de biens* $(\alpha \geqslant a + b)$.

Il n'existe pas de distribution stationnaire du stock de biens. Le processus $\left(X_n(t), t \in \mathbb{R}^+\right)$ est *transitoire* $(X_n(\infty) = +\infty$ presque-sûrement) ou récurrent nul $(X_n(\infty) \notin \{0,1,...,\bar{n}\}$ presque-sûrement pour tout $\bar{n} < +\infty)$: les offreurs sont confrontés à un *problème de débouchés*. Les marchandises ne pouvant s'écouler aussi vite qu'elles sont produites, le stock de chaque agent devient infini : l'économie connaît une crise générale de surproduction.

3.3 Le bien-être social

La problématique de notre article étant consacrée à la quantité optimale de monnaie, précisons le critère nous permettant de mesurer le bien-être social. Le caractère aléatoire du processus d'appariement engendre une hétérogénéité *ex post* entre les agents [20]. Dans le cas où $\alpha < a + b$ l'état d'un agent est entièrement caractérisé par sa richesse monétaire et par le niveau de ses stocks. L'espérance d'utilité actualisée d'un agent qui stocke n unités de biens et m unités d'encaisses est notée $\mathcal{V}(m,n)$. Sous un critère utilitariste, le bien-être social $\mathcal{W}$ est mesuré par la somme des espérances d'utilité de l'ensemble des agents de l'économie.

$$\mathcal{W} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \pi(m,n)\mathcal{V}(m,n).$$

La quantité $\mathcal{Z} = r\mathcal{W}$ représente alors le *« flux de bien-être social permanent »*. Le choix du critère de bien-être $\mathcal{Z}$ est cohérent avec notre concept d'équilibre de long terme. En effet, le lemme suivant établira que $\mathcal{Z}$ est indépendant du taux de préférence des individus pour le présent. Le planificateur social mesure le bien-être en supposant que les individus ne manifestent pas de préférence pour le présent et néglige donc tous les effets transitoires d'une variation de la quantité de monnaie [21]. Les modalités d'un accroissement de la quantité de monnaie n'ont dès lors aucune importance dans notre analyse [22].

20. Notre modèle suppose une symétrie entre les individus de l'économie. Seul le caractère aléatoire du processus d'appariement et du processus de production permet d'expliquer que certains agents aient accumulé plus de monnaie ou de marchandises que d'autres.

21. Cette méthodologie est utilisée notamment par Hosios [1990] pour étudier l'optimalité des équilibres dans les modèles d'appariement.

22. Berentsen [1998] simule la trajectoire de l'économie pour différentes distributions initiales des encaisses dans une économie dépourvue de stocks. Il montre que l'économie converge toujours vers l'équilibre de long terme quelle que soit la distribution initiale de la quantité de monnaie.

LEMME 3.1. Lorsque $\alpha < a + b$, l'expression du bien-être social à l'équilibre est donnée par :

$$\mathcal{Z} = \{1 - \pi_m(0)\}\, eU + \{1 - \pi_n(0)\}\, bU. \tag{3.3}$$

Preuve : Voir annexe 2. ■

Dans le cas où $\alpha \geqslant a + b$ la situation d'un agent est entièrement caractérisée par le niveau de ses encaisses monétaires : en effet, il n'est (presque-sûrement) jamais en rupture de stock. L'expression du bien-être social dans ce cas est donnée par :

$$\mathcal{Z} = \{1 - \pi_m(0)\}\, eU + bU. \tag{3.4}$$

À l'équilibre, il y autant d'individus qui quittent un état donné que d'individus qui le rejoignent ; les plus-values (en termes d'espérance d'utilité actualisée) des uns sont donc les moins-values des autres. La fonction de bien-être social $\mathcal{Z}$ cumule, en définitive, les flux d'utilité instantanée. Le premier terme du membre de droite de (3.3) et (3.4) est le produit de la part des agents dotés d'encaisses par la probabilité instantanée d'effectuer une vente par l'utilité liée à la consommation d'une unité d'*ouput* ; c'est donc la somme des flux d'utilité associés aux échanges monétaires. Le second terme recense les flux d'utilité associés aux échanges de troc.

La situation de référence est celle d'une économie dépourvue de frictions dans laquelle les échanges sont instantanés. La production de marchandises s'effectue pour chaque individu à des instants aléatoires : dès qu'un individu a produit une unité, il l'échange instantanément contre un bien qu'il consomme. Sur un intervalle de temps de longueur infinitésimale $\mathrm{d}t$, une fraction $\alpha \mathrm{d}t$ des agents produisent une unité de marchandise. La somme des flux d'utilité instantanée est alors égale à $\mathcal{Z}^W$ qui vérifie :

$$\mathcal{Z}^W = \alpha U.$$

3.4 L'acceptation de la monnaie

Comme cela a été rappelé dans la section précédente, KIYOTAKI et WRIGHT [1993] ont démontré dans le cas où les agents détiennent au plus une unité de monnaie ou une unité de marchandise l'existence de trois équilibres : un équilibre monétaire pur, un équilibre de troc et un équilibre monétaire impur. Dans cet article, seuls nous intéresseront les équilibres monétaires purs où la monnaie est acceptée avec une probabilité unitaire par tous les agents. Nous recenserons, toutefois, au préalable, les équilibres de *Nash* symétriques en stratégies pures et stationnaires, c'est-à-dire les équilibres tels que la décision de chaque agent d'accepter la monnaie est indépendante de son état (le niveau de ses stocks et de sa richesse monétaire). La probabilité avec laquelle la monnaie est acceptée dans l'économie est notée Π. Soit π la probabilité d'acceptation de la monnaie par un individu i quelconque et supposons b strictement positif (la discussion devenant triviale dans le cas où les échanges de troc sont impossibles).

Montrons, tout d'abord, que la stratégie $\pi = 0$ correspond bien à un équilibre de *Nash* ($\Pi = 0 \Rightarrow \pi = 0$). Si personne n'accepte la monnaie dans l'économie, l'espérance d'utilité actualisée d'un individu ne dépend que de son stock de biens. Notons $\mathcal{V}_{\Pi=0}(n)$ la fonction valeur d'un agent détenant n unités de marchandise. Elle vérifie l'équation d'absence d'arbitrage suivante :

$$r\mathcal{V}_{\Pi=0}(n) = b\left\{U + \mathcal{V}_{\Pi=0}(n-1) - \mathcal{V}_{\Pi=0}(n)\right\} + \tag{3.5}$$

$$+\alpha\left\{\mathcal{V}_{\Pi=0}(n+1) - \mathcal{V}_{\Pi=0}(n)\right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$r\mathcal{V}_{\Pi=0}(0) = \alpha\left\{\mathcal{V}_{\Pi=0}(1) - \mathcal{V}_{\Pi=0}(0)\right\}. \tag{3.6}$$

Le premier terme du membre de droite de (3.5) donne le gain d'un échange de troc : c'est la somme de l'utilité instantanée de la consommation (U) et de la moins-value associée à la diminution du stock de biens ($\mathcal{V}_{\Pi=0}(n-1) - \mathcal{V}_{\Pi=0}(n)$). Le second terme du membre de droite de (3.5) donne le gain en terme d'espérance d'utilité associé à la production d'une unité de marchandise (un événement qui se réalise avec une probabilité instantanée α). Il est démontré dans la section 5.1 pour une équation similaire que $\mathcal{V}_{\Pi=0}(n)$ est croissante et concave. En effet :

$$\mathcal{V}_{\Pi=0}(n) - \mathcal{V}_{\Pi=0}(n-1) = z^n U,$$

où z est un réel positif inférieur à l'unité. Dès lors :

$$\mathcal{V}_{\Pi=0}(n-1) < \mathcal{V}_{\Pi=0}(n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Un individu n'a pas intérêt à se déposséder d'une unité de bien pour acquérir une unité de monnaie lorsque celle-ci n'a aucune chance de pouvoir circuler par la suite. En réponse à $\Pi = 0$, l'individu i choisira donc la stratégie $\pi = 0$. En présence d'une monnaie fiduciaire, un équilibre non monétaire existe toujours.

Montrons, maintenant, que la situation où tous les individus choisissent la stratégie $\pi = 1$ correspond également à un équilibre de *Nash*. La probabilité d'acceptation de la monnaie dans l'économie est unitaire ($\Pi = 1$). Un individu qui accepte la monnaie peut utiliser cette dernière à la fois dans les rencontres avec double coïncidence des désirs et dans les rencontres avec simple coïncidence. Supposons toutefois que l'individu i dépense ses unités monétaires uniquement lorsque la double coïncidence des désirs est réalisée ; autrement dit, i n'utilise jamais la monnaie pour acquérir le bien produit par un individu j qui ne valorise pas le bien i ($i \notin E_j$). S'il est rationnel pour i d'accepter la monnaie dans ces conditions, cette stratégie est *a fortiori* rationnelle lorsque i a la possibilité d'utiliser la monnaie dans les rencontres où seule la simple coïncidence des désirs est réalisée (il a, en effet, le loisir de ne pas profiter de cette liberté supplémentaire). L'individu i échange la monnaie de la même manière qu'il échange les unités du bien qu'il produit : son espérance d'utilité, notée $\hat{V}_{\Pi=1}(m,n)$ ne dépend donc que de la quantité totale d'objets (les unités de marchandises (n) et les unités monétaires (m)) qu'il a en sa possession.

$$\hat{V}_{\Pi=1}(m,n) = \mathcal{V}^c_{\Pi=1}(m+n), \qquad \forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^2,$$

où $\mathcal{V}^c_{\Pi=1}(.)$ vérifie (3.5)-(3.6). On en déduit donc que

$$\hat{V}_{\Pi=1}(m+1,n-1) = \hat{V}_{\Pi=1}(m,n) = \mathcal{V}^c_{\Pi=1}(m+n), \quad \forall\,(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*.$$

Dans la mesure où i peut faire au moins aussi bien avec une unité de monnaie qu'avec une unité de marchandise, il n'a aucune raison de refuser la monnaie. Un individu choisit d'accepter un objet uniquement en fonction de ses propriétés de liquidité, c'est-à-dire en fonction de la facilité avec laquelle cet objet permet d'acquérir un bien qu'il consomme. Dès lors que la monnaie devient au moins aussi liquide que les autres biens de l'économie, les agents sont incités à l'accepter [23]. L'équilibre monétaire pur est un équilibre de *Nash*.

Poursuivons, toutefois, notre raisonnement, et montrons que i choisira rationnellement d'étendre l'utilisation de la monnaie aux rencontres avec simple coïncidence des désirs. Supposons que i rencontre un partenaire j qui produit un bien qu'il valorise ($j \in E_i$), mais que l'inverse n'est pas vrai ($i \notin E_j$) : il y a simple coïncidence des désirs. L'individu i choisit d'étendre une seule fois son utilisation de la monnaie à une rencontre avec simple coïncidence. Le gain pour i à acheter le bien j avec une unité de monnaie est le suivant :

$$U + \mathcal{V}^c_{\Pi=1}(m+n-1) - \mathcal{V}^c_{\Pi=1}(m+n) = \left(1 - z^{m+n}\right) U > 0.$$

L'individu i, qui manifeste une préférence pour le présent, accroît son utilité en utilisant également la monnaie lorsque seule la simple coïncidence des désirs se réalise.

De même que KIYOTAKI et WRIGHT [1993], notre modèle est caractérisé par deux équilibres de *Nash* en stratégies pures et stationnaires : un équilibre de troc ($\Pi = 0$) et un équilibre monétaire pur ($\Pi = 1$). Il permet ainsi, à la manière D'IWAI [1996] d'expliquer la monnaie comme une convention sociale.

4 L'effet de liquidité de la monnaie

4.1 En l'absence de double coïncidence ($y = 0$)

Dans un premier temps, l'absence de double coïncidence des désirs ($y = 0$) rend les échanges de troc impossibles [24]. Les *acheteurs effectifs* sont les agents qui disposent d'au moins une unité d'encaisse ; les *vendeurs effectifs* sont ceux qui stockent au moins une unité de marchandise.

23. La typologie des équilibres de KIYOTAKI et WRIGHT [1993] peut s'obtenir à partir des propriétés de liquidité des biens. Soit τ la variable aléatoire indiquant le temps nécessaire à un agent pour obtenir une unité d'un bien qu'il consomme. Notons $\mathbb{E}_1[\tau]$ l'espérance de cette variable aléatoire lorsque l'individu détient une unité de marchandise et $\mathbb{E}_m[\tau]$ l'espérance de cette même variable aléatoire dans le cas où il détient une unité de monnaie. À l'équilibre de troc : $\mathbb{E}_1[\tau] < \mathbb{E}_m[\tau] = +\infty$. À l'équilibre monétaire impur : $\mathbb{E}_1[\tau] = \mathbb{E}_m[\tau]$. À l'équilibre monétaire pur : $\mathbb{E}_1[\tau] > \mathbb{E}_m[\tau]$.

24. Ce cas est envisagé par KIYOTAKI et WRIGHT [1989] dans un modèle à trois biens ($x = 1/3$, $y = 0$) et par AIYAGARI et WALLACE [1991] dans un modèle à N biens ($x = 1/N$, $y = 0$).

4.1.1 Les probabilités instantanées d'échange

La probabilité d'occurrence d'un échange de troc est nulle ($b = 0$). Dès lors, les probabilités instantanées d'échange a et e, pour un individu donné, vérifient :

$$a = \beta x \left[1 - \pi_m(0)\right], \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} e &= \beta x \left[1 - \pi_n(0)\right], \qquad \text{si } \alpha < a, \\ &= \beta x \qquad \text{sinon.} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Selon (4.1) un *vendeur* reçoit la visite d'un *acheteur* qui consomme le bien qu'il produit avec une probabilité instantanée βx (le produit de la probabilité instantanée de rencontre par la probabilité de simple coïncidence) ; ce dernier détient des encaisses monétaires avec une probabilité $\{1 - \pi_m(0)\}$. Réciproquement, d'après (4.2) un *acheteur* trouve un partenaire qui produit un bien qu'il consomme avec une probabilité instantanée βx ; la probabilité que le stock du vendeur ne soit pas nul est égale à $\{1 - \pi_n(0)\}$ dans le cas où il n'y a pas surproduction, et à l'unité sinon. D'après la définition de la probabilité invariante, donnée par (3.1) et (3.2), les taux a et e vérifient :

$$a = \beta x \frac{\tilde{\alpha}}{e}, \qquad e = \beta x \frac{\tilde{\alpha}}{a}. \tag{4.3}$$

Ces deux équations sont équivalentes et ne permettent pas de déterminer de manière unique le couple (a, e). Une condition supplémentaire nous est donnée par l'égalité entre les encaisses détenues et les encaisses existantes dans l'économie, ou de manière équivalente entre l'offre et la demande de monnaie. En notant $\bar{m}$ la quantité moyenne d'encaisses par individu (qui est exogène), la somme des stocks individuels d'encaisses doit être égale à chaque instant à $\bar{m}$, soit :

$$\mathbb{E}\left[X_m(t)\right] = \bar{m}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{4.4}$$

Sachant que la distribution de probabilités de $X_m(\infty) = \lim_{t \to +\infty} X_m(t)$ est donnée par (3.2), on obtient d'après (4.4) :

$$\frac{\tilde{\alpha}}{e - \tilde{\alpha}} = \bar{m}. \tag{4.5}$$

L'offre de monnaie étant constante, le processus $\left(X_m(t), t \in \mathbb{R}^+\right)$ ne peut être transitoire ($e > \tilde{\alpha}$). On déduit de (4.3) et (4.5) l'expression des probabilités instantanées d'échange à l'équilibre :

$$e = \tilde{\alpha}\left(1 + \frac{1}{\bar{m}}\right), \tag{4.6}$$

$$a = \beta x \frac{\bar{m}}{1 + \bar{m}}. \tag{4.7}$$

D'après (4.7), le taux a auquel un producteur parvient à écouler sa production est une fonction croissante de la quantité de monnaie. La liquidité de chaque marchandise, dans le sens défini par LIPPMAN et MCCALL [1986], s'améliore [25]. En effet, toute élévation de $\bar{m}$ entraîne une augmentation du nombre des *acheteurs* effectifs, $\{1 - \pi_m(0)\}$. Inversement, d'après (4.6) le taux e auquel un individu dépense ses encaisses est une fonction décroissante de la quantité de monnaie. La fraction des individus en rupture de stocks s'accroît et le nombre des *vendeurs* effectifs diminue lorsque l'offre de monnaie augmente.

DÉFINITION 1. Un équilibre monétaire est entièrement caractérisé par :
(i) La distribution des encaisses monétaires donnée par (3.2).
(ii) La distribution des stocks donnée par (3.1) dans le cas où $\alpha < a + b$.
(iii) Les probabilités instantanées d'échange données par (4.6) et (4.7).

4.1.2 Le marché des biens est équilibré $(\alpha < a)$.

La vitesse à laquelle un agent parvient à écouler une unité de son stock de biens (a) est plus élevée que sa vitesse de production (α) : il existe une distribution stationnaire du stock de biens. Une condition nécessaire pour que l'offre ne soit pas rationnée $(\alpha < a)$ est donnée par $\sup_{\bar{m} \in \mathbb{R}+} a = \beta x > \alpha$.

D'après (4.7), l'inégalité $\alpha < a$ se réécrit comme suit :

$$\bar{m} > \frac{\alpha}{\beta x - \alpha} = m^*. \tag{4.8}$$

Si la masse monétaire est strictement supérieure à m^*, le temps moyen pour vendre une unité de marchandise $(1/a)$ est strictement inférieur au temps moyen de production $(1/\alpha)$ et les stocks de biens sont finis. De (3.2) et (3.3) on déduit l'expression de la fonction de bien-être social :

$$\mathcal{Z}(\bar{m}) = \alpha U, \qquad \forall \bar{m} > m^*. \tag{4.9}$$

Le flux de consommation par unité de temps est égal au flux de production, soit α.

Lorsque la quantité de monnaie en circulation dans l'économie est suffisante pour permettre à la production de s'écouler, toute augmentation de la masse monétaire laisse inchangé le bien-être social : la monnaie est *neutre* par rapport au volume des transactions et au bien-être social [26]. L'allocation des ressources est optimale et correspond à celle d'une économie dépourvue de frictions de l'échange : $\mathcal{Z}(\bar{m}) = \mathcal{Z}^W$, $\forall \bar{m} > m^*$. Toutefois, les modifications de la quantité de monnaie affectent les distributions des stocks de biens et d'encaisses des agents : en particulier, un accroissement de la quantité de monnaie diminue le niveau moyen des stocks.

25. Rappelons que LIPPMAN et MCCALL [1986, p. 45] mesurent la liquidité d'un actif par l'espérance du temps nécessaire pour convertir cet actif en monnaie.

26. WALLACE [1997] distingue neutralité à court terme et neutralité à long terme. On s'intéresse, ici, uniquement aux situations de long terme où les distributions des encaisses et des stocks sont invariantes.

4.1.3 La surproduction de biens $(\alpha \geqslant a)$

Les biens s'échangent moins rapidement qu'ils sont produits. Le processus qui décrit l'évolution du stock de marchandises est transitoire (ou récurrent nul en cas d'égalité des deux taux). Si $\alpha > a$, le stock de chaque agent devient infini presque sûrement : $X_n(\infty) = +\infty$. D'après (3.2) et (3.3), la fonction de bien-être social s'écrit :

$$\mathcal{Z} = aU,$$

soit d'après (4.7) :

$$\mathcal{Z}(\bar{m}) = \beta x \frac{\bar{m}}{1+\bar{m}} U, \qquad \forall \bar{m} \leqslant m^*. \tag{4.10}$$

Face à un problème de débouchés, tout accroissement de la masse monétaire augmente le flux des échanges et améliore le bien-être social. Il n'y a plus neutralité de la monnaie.

4.1.4 Quantité optimale de monnaie

La quantité optimale de monnaie maximise la fonction $\mathcal{Z}(\bar{m})$. D'après (4.9) et (4.10), la forme générale de $\mathcal{Z}(.)$ est donnée par :

$$\mathcal{Z}(\bar{m}) = \min\left(\beta x \frac{\bar{m}}{1+\bar{m}}, \alpha\right) U. \tag{4.11}$$

En premier lieu, si $\beta x \leqslant \alpha$ (*i.e.* si l'échange est plus coûteux en temps que la production) l'offre est toujours contrainte et la quantité de monnaie qui maximise le bien-être social est infinie. Il est alors impossible d'atteindre l'allocation des ressources d'une économie walrasienne.

En second lieu, si $\beta x > \alpha$, il n'existe pas un niveau unique de la masse monétaire qui maximise le bien-être social; la fonction $\mathcal{Z}$ est à son maximum pour toutes les valeurs de $\bar{m}$ supérieures à m^*. La quantité m^* est appelée seuil *optimal de la quantité de monnaie*. Lorsque l'offre de monnaie en termes réels est supérieure à m^*, le bien-être social est identique à celui d'une économie dans laquelle la production est instantanément consommée ; de plus, la monnaie est neutre. Ces différents cas sont résumés par la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. Considérons une économie monétaire pure dans laquelle l'absence de double coïncidence des désirs rend impossible les échanges de troc ($y = 0$).
Si $x \leqslant \alpha/\beta$, la quantité optimale de monnaie est infinie.
Si $x > \alpha/\beta$, l'allocation des ressources est optimale pour toute quantité de monnaie $\bar{m}$ supérieure à $m^* = \alpha/(\beta x - \alpha)$.

Le *seuil optimal* de la quantité de monnaie (m^*) dépend à la fois des conditions de l'échange (β et x) et de la production (α). Il est croissant en α (l'inverse du temps moyen nécessaire pour produire une unité de bien) et

décroissant en βx (la probabilité instantanée de rencontrer un individu multipliée par la probabilité de simple coïncidence). En l'absence de frictions de l'échange ($\beta \to +\infty$), le seuil optimal est nul [27]. Un accroissement de la quantité de monnaie est toujours inutile puisqu'il n'accroît ni ne diminue le bien-être des agents. À l'inverse, plus l'échange est difficile (lorsque, par exemple, chaque agent ne consomme qu'une petite fraction de l'ensemble des biens produits dans l'économie) et plus la quantité de monnaie doit être élevée.

4.2 En présence de troc ($y > 0$)

Supposons dorénavant que la double coïncidence des désirs est susceptible de se réaliser pour certaines rencontres ($y > 0$) [28]. Pour généraliser les résultats ci-dessus, seule est nécessaire l'étude du cas où $\alpha \geqslant a + b$, c'est-à-dire le cas où les individus ne sont jamais en rupture de stock (presque sûrement) [29].

Les probabilités instantanées d'échange pour un individu $i \in [0,1]$ dans le cas où $\alpha \geqslant a + b$ sont données par :

$$b = \beta x y, \tag{4.12}$$

$$a = \beta x\,(1 - y)\,[1 - \pi_m(0)]\,, \tag{4.13}$$

$$e = \beta x (1 - y). \tag{4.14}$$

Le réel positif b indique la probabilité instantanée avec laquelle l'individu i réussit un échange de troc. D'après (4.12), un échange de troc se réalise lorsque i rencontre un autre agent (avec une probabilité instantanée β) et s'il y a double coïncidence des désirs entre i et son partenaire (avec une probabilité xy). En effet, rappelons que lorsque $\alpha \geqslant a + b$ chaque partenaire potentiel stocke des biens à vendre. Selon (4.13), l'individu i échange une unité de marchandise contre une unité de monnaie dans les circonstances suivantes : s'il y a simple coïncidence des désirs ($i \in E_j$ et $j \notin E_i$) et si le partenaire de i détient des unités monétaires (un événement qui se réalise avec une probabilité $x(1 - y)\{1 - \pi_m(0)\}$). Enfin, le réel positif e indique la probabilité instantanée avec laquelle i échange une unité de monnaie contre une unité de bien qu'il consomme. D'après (4.14) i dépense une unité de monnaie s'il y a uniquement simple coïncidence avec son partenaire (en cas de double coïncidence il effectuerait un troc).

D'après (3.2), les équations (4.13) et (4.14) sont équivalentes. Le modèle est complètement déterminé grâce à la condition d'équilibre du marché de la

---

27. Pour être exact, dans le mesure où la double coïncidence des désirs ne se réalise jamais ($y = 0$), l'économie a besoin d'un intermédiaire des échanges même lorsque le processus d'appariement devient infiniment rapide : toutefois, la monnaie peut être en quantité infinitésimale et remplir efficacement son rôle.

28. Le cas particulier où $y = x$ est conforme aux hypothèses de KIOYATAKI et WRIGHT [1991, 1993].

29. Lorsque $\alpha < a + b$, le processus décrivant l'évolution des stocks est ergodique et le flux des biens échangés est égal au flux des biens produits. Ce cas est étudié dans l'annexe 3.

monnaie. D'après (3.2) la condition $\mathbb{E}[X_m(t)] = \bar{m}$ peut être réécrite comme suit :

$$\frac{a}{e-a} = \bar{m}. \tag{4.15}$$

En substituant (4.14) dans (4.15), on obtient :

$$a = \frac{\bar{m}}{1+\bar{m}}\beta x\,(1-y). \tag{4.16}$$

À nouveau, la probabilité instantanée avec laquelle une unité de bien est échangée contre une unité monétaire est croissante avec l'offre de monnaie : cette relation est la manifestation de l'effet de liquidité. Les équations (4.12) et (4.16) permettent de déterminer la probabilité instantanée avec laquelle une marchandise est déstockée :

$$a + b = \frac{\bar{m}}{1+\bar{m}}\beta x\,(1-y) + \beta xy. \tag{4.17}$$

Cette quantité est également croissante avec l'offre de monnaie. De plus, $\lim_{\bar{m}\to+\infty}(a+b) = \beta x$. La probabilité instantanée b étant constante, la part des échanges de troc dans l'ensemble des transactions décroît quand la liquidité de l'économie augmente.

Si la quantité de monnaie en circulation dans l'économie est nulle alors $a = 0$ (d'après (4.16)) et $a + b$ vérifie :

$$a + b = \beta xy. \tag{4.18}$$

On déduit de (4.18) que les stocks sont presque-sûrement finis (il n'y a pas de problème de surproduction) si $\beta xy > \alpha$ (avec ou sans monnaie).

Le seuil optimal de la quantité de monnaie, noté m^{**}, est défini par :

$$m^{**} = \left\{\inf m \in \mathbb{R}^+ \,|\alpha < a + b\right\}.$$

Étant donné que $a + b$ augmente avec l'offre de monnaie, le seuil m^{**} vérifie la condition $a + b = \alpha$, soit d'après (4.17) :

$$\begin{aligned} m^{**} &= +\infty \quad \text{si } \beta x \leqslant \alpha, \\ &= 0 \quad \text{si } \beta xy \geqslant \alpha, \\ &= \frac{\alpha - \beta xy}{\beta x - \alpha} \quad \text{sinon.} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Si $\alpha > \beta xy$ et $\beta x > \alpha$, le seuil optimal de la quantité de monnaie est strictement positif et fini. La comparaison de (4.8) et (4.19) nous indique en outre que :

$$m^{**} < m^*.$$

Comme cela était prévisible, la présence du troc réduit le seuil optimal de la quantité de monnaie. De plus, $\lim_{y \to 0} m^{**} = m^{*}$.

Le bien-être social est donné par une expression analogue à (4.9) :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\bar{m}) &= \alpha U, \qquad \forall \bar{m} > m^{**}, \\ &= (a+b)U, \qquad \bar{m} \leqslant m^{**}. \end{aligned}$$

Si la quantité de monnaie est supérieure au seuil optimal m^{**} alors toute la production est vendue en un temps fini. Au contraire, lorsque $\bar{m} \leqslant m^{**}$ l'économie est confrontée à un problème de débouché.

Le modèle permet de répondre à la question suivante : dans quels cas une économie peut-elle fonctionner de manière optimale en l'absence de monnaie, autrement dit, dans quels cas l'économie de troc n'est-elle pas strictement dominée par l'économie monétaire ? Si l'économie est dépourvue de monnaie ($\bar{m} = 0$), le bien-être social est égal à $\mathcal{Z}(0) = \min(\beta xy, \alpha)\, U$. Dans le cas où $xy > \alpha/\beta$, le bien-être social est à son maximum quel que soit le niveau de la quantité de monnaie. En effet, quand la probabilité de double coïncidence des désirs est suffisamment élevée, la monnaie ne joue aucun rôle [30]. En conclusion, la monnaie est utile si la double coïncidence des désirs est un événement peu fréquent (xy faible), si la fréquence de la production (α) est élevée ou si la fréquence des rencontres entre les agents (β) est faible.

L'ensemble des résultats précédents est résumé dans la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2. Considérons une économie monétaire pure dans laquelle les échanges de troc sont possibles ($y > 0$).

Si $x \leqslant \alpha/\beta$, la quantité optimale de monnaie est infinie.

Si $x \geqslant \alpha/\beta$ et $y < \alpha/\beta x$, l'allocation des ressources est optimale pour toute quantité de monnaie $\bar{m}$ supérieure à m^{**}.

Si $y \geqslant \alpha/\beta x$, l'allocation des ressources est toujours optimale et la monnaie est inutile.

Les propositions 4.1 et 4.2 indiquent qu'une économie suffisamment approvisionnée en intermédiaires des échanges atteint un niveau de bien-être identique à celui d'une économie walrasienne. Malgré la présence de frictions de l'échange, la monnaie permet aux biens de s'écouler aussi vite qu'ils sont produits. Une augmentation de la quantité de monnaie n'exerce jamais d'effets négatifs : ses effets sont nuls au-delà du *seuil optimal* et elle desserre la contrainte de rationnement des offreurs en dessous de ce seuil. La présence d'échanges de troc permet à une partie de la production de s'écouler en l'absence de monnaie : si la probabilité de double coïncidence (xy) n'est pas trop faible, la monnaie est inutile.

La proposition 4.2 établit le rôle respectif de la simple et de la double coïncidence des désirs. Dès lors que la probabilité de simple coïncidence est

30. Pour autant, l'équilibre monétaire pur est toujours un équilibre de *Nash* ; lorsque la monnaie est universellement acceptée, un individu peut toujours faire aussi bien avec la monnaie qu'avec une marchandise quelconque.

suffisamment élevée ($x \geqslant \alpha/\beta$), le besoin de monnaie dépend de la probabilité conditionnelle de double coïncidence (y). En particulier, si $y = 1$ (la simple coïncidence entraîne toujours la double coïncidence) alors la monnaie est inutile. À l'opposé, si $y = 0$ (la double coïncidence ne se réalise jamais) l'économie ne peut fonctionner sans monnaie.

5 L'effet d'éviction de la monnaie

En l'absence d'une borne supérieure sur le stock d'encaisses des agents, toute augmentation de la quantité de monnaie a un effet positif sur la liquidité de l'économie, et par voie de conséquence sur le bien-être social. La restriction de KIYOTAKI et WRIGHT selon laquelle chaque agent stocke au plus une unité de monnaie, bien que fortement critiquée pour son manque de fondements, permet de formaliser l'intuition selon laquelle l'abondance de monnaie, au même titre que la pénurie mais pour des raisons distinctes, est source de nuisances. Le but de cette section est de généraliser la restriction de KIYOTAKI et WRIGHT.

Supposons, dorénavant, que le processus de production est instantané ($\alpha \to +\infty$) et que la double coïncidence des désirs ne se réalise jamais ($y = 0$). Les individus ne stockent plus les marchandises et se contentent de produire lorsqu'ils rencontrent un acheteur. Ils ne peuvent détenir plus de $d \in \mathbb{N}^*$ unités de monnaie et cessent d'être *vendeur* dès que le niveau de leurs encaisses monétaires atteint le seuil critique d. On présente, brièvement, le cas particulier où le stock d'encaisses n'est pas contraint ($d = +\infty$), puis le cas général (d quelconque).

5.1 L'absence d'éviction ($d = +\infty$)

Le cas où les agents ne sont pas contraints sur leur stock d'encaisses a été envisagé dans la section précédente. La quantité optimale de monnaie si la production est instantanée ($\alpha = +\infty$) est infinie ($m^* = +\infty$).

Afin de déterminer sous quelles conditions un agent accepte de produire pour accumuler une unité d'encaisse supplémentaire, on calcule l'espérance d'utilité actualisée d'un agent qui détient m unités monétaires, notée $\mathcal{V}_\infty(m)$. La fonction valeur $\mathcal{V}_\infty(.)$ définie sur $\mathbb{N}$ est solution de l'équation fonctionnelle suivante :

$$r\mathcal{V}_\infty(m) = a\left\{\mathcal{V}_\infty(m+1) - \mathcal{V}_\infty(m)\right\} + \tag{5.1}$$

$$+e\left\{\mathcal{V}_\infty(m-1) - \mathcal{V}_\infty(m) + U\right\}, \qquad \forall m \in \mathbb{N}^*,$$

$$r\mathcal{V}_\infty(0) = a\left\{\mathcal{V}_\infty(1) - \mathcal{V}_\infty(0)\right\}. \tag{5.2}$$

Selon (5.1), un agent qui détient m unités monétaires obtient avec une probabilité instantanée a une unité d'encaisse supplémentaire qui lui rapporte

la plus-value $\mathcal{V}_\infty(m+1) - \mathcal{V}_\infty(m)$; avec une probabilité instantanée e, il achète une unité de bien qui lui procure un flux d'utilité U mais supporte la moins-value $\mathcal{V}_\infty(m-1) - \mathcal{V}_\infty(m)$. La suite $\{\mathcal{V}_\infty(m), m \in \mathbb{N}\}$ obéit à une équation de récurrence du second ordre. L'équation (5.2) donne une condition initiale. On a, d'autre part, la condition terminale suivante :

$$\lim_{m \to +\infty} \mathcal{V}_\infty(m) = eU/r < +\infty. \tag{5.3}$$

L'équation (5.3) donne l'espérance d'utilité actualisée d'un individu dont les encaisses sont infinies : ce dernier consomme à chaque fois qu'il rencontre un vendeur d'un bien qu'il valorise, un événement qui se réalise avec une probabilité instantanée e.

La solution de (5.1)-(5.3) est donnée par :

$$\mathcal{V}_\infty(m) = -\frac{(z_1)^{m+1}}{1 - z_1} U + \frac{eU}{r}, \qquad \forall m \in \mathbb{N},$$

où z_1 est la solution de $-az^2 + (r + a + e)z - e = 0$ qui est strictement inférieure à l'unité. L'espérance d'utilité d'un agent augmente avec ses encaisses monétaires. Le surplus associé à la détention d'une unité d'encaisse supplémentaire vérifie :

$$\mathcal{V}_\infty(m+1) - \mathcal{V}_\infty(m) = (z_1)^{m+1} U, \qquad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Ce surplus est décroissant avec le stock d'encaisses réelles de l'individu : la fonction $\mathcal{V}_\infty(.)$ est concave. L'accumulation d'une unité monétaire supplémentaire est une assurance pour l'agent de ne pas être à court de liquidité dans le futur lorsqu'il rencontrera des producteurs du bien qu'il consomme. Mais un individu qui déprécie le futur accorde d'autant moins de valeur à cette assurance que son stock de monnaie est élevé. Cette diminution du surplus associé à la détention d'encaisses monétaires rappelle la décroissance de l'utilité marginale de la monnaie dans les analyses de HICKS-WALRAS-PATINKIN.

PROPOSITION 5.1. L'équilibre où $d = +\infty$ est soutenu par des stratégies individuellement rationnelles

Preuve : Il est rationnel pour un individu de continuer à accumuler des encaisses lorsque son stock de monnaie est infini si, et seulement si,

$$\lim_{m \to +\infty} \mathcal{V}_\infty(m+1) - \mathcal{V}_\infty(m) \geqslant 0.$$

Or, selon (5.4) $\lim_{m \to +\infty} \mathcal{V}_\infty(m+1) - \mathcal{V}_\infty(m) = 0.$ ■

Il n'y a pas d'effet d'éviction de la monnaie sur la sphère de la production si la désutilité à produire est nulle. *A contrario*, la limite sur le stock d'encaisses

des agents pourrait être justifiée comme le résultat de comportements rationnels à condition que l'activité de production soit coûteuse.

5.2 Le cas général ($d < +\infty$)

À la manière de KIYOTAKI et WRIGHT, nous imposons une restriction *ad hoc* sur le stock d'encaisses des agents : un individu qui a atteint un certain niveau de richesse arrête d'accumuler des unités monétaires (on justifiera, dans la suite, l'existence d'une telle contrainte). Les individus quittent le côté de l'offre du marché dès que le niveau de leurs encaisses monétaires est égal à la borne supérieure d (qui est exogène). La distribution des stocks d'encaisses à l'équilibre stationnaire, notée $\pi_m^d(.)$, vérifie (Voir annexe 4) :

$$\pi_m^d(m) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{d+1}}\rho^m, \quad \text{si } \rho = \frac{a}{e} \neq 1, \tag{5.5}$$

$$= \frac{1}{d+1}, \qquad \text{si } \rho = 1, \qquad \forall m \in \{0,1,\ldots,d\}. \tag{5.6}$$

C'est une distribution géométrique tronquée si $\rho < 1$ et une distribution uniforme si $\rho = 1$.

La part des vendeurs et la part des acheteurs dans l'ensemble des agents sont données respectivement par $\left\{1-\pi_m^d(d)\right\}$ et $\left\{1-\pi_m^d(0)\right\}$. Les individus dont le niveau des encaisses est compris entre 1 et $d-1$ sont simultanément acheteurs et vendeurs. Les probabilités instantanées d'échange vérifient donc :

$$a = \left\{1-\pi_m^d(0)\right\}\beta x, \tag{5.7}$$

$$e = \left\{1-\pi_m^d(d)\right\}\beta x. \tag{5.8}$$

La valeur de ρ à l'état stationnaire est donnée par la condition d'équilibre du marché de la monnaie selon laquelle l'offre de monnaie doit être détenue, soit :

$$\bar{m} = \sum_{m\in\{0,\ldots,d\}} m\pi_m^d(m).$$

D'après (5.5) et (5.6) on a donc :

$$\frac{\{1+d(1-\rho)\}(1-\rho^{d+1}) - (d+1)(1-\rho)}{(1-\rho^{d+1})(1-\rho)} = \bar{m}, \qquad \text{si } \rho \neq 1, \tag{5.9}$$

$$\frac{d}{2} = \bar{m}, \qquad \text{si } \rho = 1 \tag{5.10}$$

LEMME 5.2. $\forall \bar{m} < d$, l'équilibre existe et est unique.

Preuve : Voir annexe 5. ■

Un équilibre est possible à l'unique condition que la quantité de monnaie par individu ($\bar{m}$) soit strictement inférieure à la limite supérieure de chaque stock d'encaisses individuel (d).

LEMME 5.3. A $\bar{m}$ donné, ρ est une fonction décroissante de d.

Preuve : Voir annexe 6. ■

Si la borne supérieure d augmente, à ρ donné, le stock moyen d'encaisses des agents s'élève. Pour rétablir l'équilibre du marché de la monnaie, le rapport des probabilités instantanées d'échange $\rho = a/e$ doit diminuer.

La fonction de bien-être social, notée $\mathcal{Z}_d$, est la somme des revenus permanents de l'ensemble des agents de l'économie à l'état stationnaire, soit :

$$\mathcal{Z}_d = \sum_{i \in \{0,\ldots,d\}} \pi_m^d(i) r \mathcal{V}_d(i) = \mathbb{E}\left[r\mathcal{V}_d\left(X_m\right)\right],$$

où $\mathcal{V}_d(i)$ est l'espérance d'utilité actualisée d'un individu qui détient i unités de monnaie. Sur un intervalle infinitésimal de longueur dt, une fraction a dt des vendeurs effectifs effectuent une vente et une fraction e dt des acheteurs effectifs effectuent un achat ; l'utilité instantanée d'un achat est égale à U. La fonction de bien-être social vérifie donc à l'équilibre stationnaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_d &= \left\{1 - \pi_m^d(0)\right\} eU \\ &= \left\{1 - \pi_m^d(0)\right\} \left\{1 - \pi_m^d(d)\right\} \beta x U. \end{aligned} \tag{5.11}$$

La part des acheteurs et des vendeurs présents dans l'économie dépend de la quantité de monnaie choisie par le planificateur social. D'après (5.11), la quantité optimale de monnaie maximise le produit du nombre des vendeurs effectifs par le nombre des acheteurs effectifs : il est donc équivalent de maximiser le bien-être social ou de maximiser le nombre de rencontres entre acheteurs et vendeurs effectifs.

LEMME 5.4. La fonction de bien-être social est maximisée en $\rho = 1$.

Preuve : Le terme $\beta x U$ étant strictement positif, on cherche ρ^* qui vérifie :

$$\rho^* = \arg\max_{\rho \in \mathbb{R}^+} \left\{1 - \pi_m^d(0)\right\} \left\{1 - \pi_m^d(d)\right\}.$$

Or, pour $\rho \neq 1$,

$$\left\{1 - \pi_m^d(0)\right\}\left\{1 - \pi_m^d(d)\right\} = \rho\left(\frac{1-\rho^d}{1-\rho^{d+1}}\right)^2$$

La dérivée de cette fonction est du signe de $\left\{(1-\rho^{2d+1}) - (2d+1)\rho^d(1-\rho)\right\}$. Cette quantité est décroissante en ρ et vaut 0 lorsque ρ tend vers 1. D'où le résultat. ■

D'après le lemme 5.4, la masse monétaire optimale est telle que la probabilité instantanée avec laquelle un agent acquiert une unité monétaire est exactement égale à la probabilité instantanée avec laquelle il la dépense. Dans ce cas, la part des agents sur le côté de l'offre du marché $\left\{1 - \pi_m^d(d)\right\}$ est égale à la part des agents sur le côté de la demande $\left\{1 - \pi_m^d(0)\right\}$: le marché est symétrique. De manière équivalente, le nombre d'individus dans l'incapacité d'effectuer un achat ($\pi_m^d(0)$) est égal au nombre d'individus ne pouvant effectuer une vente ($\pi_m^d(d)$). Lorsque $\rho > 1$, la part des agents en dehors de la sphère de la production est trop élevée ; inversement, lorsque $\rho < 1$, la part des agents en dehors de la sphère de l'échange est trop importante.

PROPOSITION 5.5 La quantité optimale de monnaie pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ vérifie :

$$m_d^* = \frac{d}{2}. \tag{5.12}$$

Preuve : C'est une conséquence directe du lemme précédent et de l'équation (5.10). ■

La quantité optimale de monnaie est égale à la moitié de la borne supérieure du stock d'encaisses. Plus la contrainte sur les stocks d'encaisses est sévère (d faible) et plus la quantité optimale de monnaie est faible. La proposition précédente généralise le résultat de KIYOTAKI-WRIGHT (*i.e.* $m_1^* = 1/2$ lorsque $d = 1$).

La quantité optimale de monnaie est unique et finie dès que l'on prend en considération, à côté de l'*effet de liquidité*, une limite sur le stock d'encaisses des agents qui conduit à une *éviction des offreurs par les demandeurs* quand la quantité de monnaie augmente. Cette quantité optimale de monnaie a une expression simple (elle est égale à la moitié de la borne supérieure du stock d'encaisses de chaque agent) et elle correspond à un marché symétrique : la part des acheteurs est égale à la part des vendeurs. Enfin, la situation optimale est caractérisée par une distribution uniforme des encaisses; il y a donc autant d'individus *« riches »* que d'individus *« pauvres »*.

5.3 La détermination de *d*

Le modèle est prolongé de manière à endogénéiser, et donc à justifier, la limite supérieure sur le stock d'encaisses des agents (d). Pour cela, supposons dorénavant que la production d'une unité de marchandise, qui n'est pas

coûteuse en temps, engendre une désutilité instantanée $D > 0$ $(D < U)$. Un individu qui est contacté par un acheteur potentiel acceptera de produire ou non en fonction de sa richesse monétaire : si le gain en terme d'espérance d'utilité à détenir une unité de monnaie supplémentaire est inférieur à la désutilité de la production, l'individu préférera consacrer son temps à dépenser les unités monétaires qu'il a déjà accumulées. Nous avons montré précédemment que l'utilité marginale de la monnaie était décroissante et tendait vers 0 : la borne supérieure du stock d'encaisses est donc finie.

Seuls les équilibres de *Nash* symétriques, où chaque agent choisit la même borne supérieure d, sont recensés. Le choix optimal d^* dépend des probabilités instantanées d'échange (a et e).

$$d^*(a,e) = \sup\left\{ d \in \mathbb{N}^* \middle| \mathcal{V}_d(d;a,e) - \mathcal{V}_d(d-1;a,e) \geqslant D \right\}, \tag{5.13}$$

où $\mathcal{V}_d(m;a,e)$ est l'espérance d'utilité actualisée d'un individu détenant m unités de monnaie et qui prend a et e comme des données. La condition (5.13) s'écrit également :

$$\mathcal{V}_{d^*}(d^*;a,e) - \mathcal{V}_{d^*}(d^*-1;a,e) \geqslant D, \tag{5.14}$$

$$\mathcal{V}_{d^*+1}(d^*+1;a,e) - \mathcal{V}_{d^*+1}(d^*;a,e) < D \tag{5.15}$$

Selon (5.14), les agents détenant (d^*-1) unités acceptent de produire en vue d'accumuler une unité d'encaisse supplémentaire. Selon (5.15), il n'est pas rationnel pour un agent de continuer à vendre des biens lorsque son stock d'encaisses a atteint la borne supérieure d^*. La condition (5.15) peut s'écrire différemment. Considérons un individu détenant d^*+1 unités de monnaie. Son espérance d'utilité, notée $\mathcal{V}_{d^*}(d^*+1;a,e)$, vérifie :

$$r\mathcal{V}_{d^*}(d^*+1;a,e) = e\left\{\mathcal{V}_{d^*}(d^*;a,e) - \mathcal{V}_{d^*}(d^*+1;a,e) + U\right\}. \tag{5.16}$$

Selon (5.16), un agent détenant d^*+1 unités de monnaie ne produit pas tant que son stock d'encaisses monétaires est supérieur à d^*. Il dépense une unité d'encaisses avec une probabilité instantanée e et bénéficie alors d'un flux d'utilité U. La stratégie d^* est optimale si l'agent ne dévie pas de cette stratégie, même une seule fois, c'est-à-dire si :

$$\mathcal{V}_{d^*}(d^*+1;a,e) - D < \mathcal{V}_{d^*}(d^*;a,e),$$

et donc

$$r\mathcal{V}_{d^*}(d^*;a,e) > eU - (r+e)D. \tag{5.17}$$

La fonction valeur $\mathcal{V}_d(.;a,e)$ définie sur $\{0,...,d\}$ vérifie les équations d'absence d'arbitrage suivantes :

$$\begin{aligned} r\mathcal{V}_d(m;a,e) &= a\left\{\mathcal{V}_d(m+1;a,e) - \mathcal{V}_d(m;a,e) - D\right\} + \\ &+ e\left\{\mathcal{V}_d(m-1;a,e) - \mathcal{V}_d(m;a,e) + U\right\}, \qquad 0 < m < d, \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$r\mathcal{V}_d(0;a,e) = a\left\{\mathcal{V}_d(1;a,e) - \mathcal{V}_d(0;a,e) - D\right\}, \tag{5.19}$$

$$r\mathcal{V}_d(d;a,e) = e\left\{\mathcal{V}_d(d-1;a,e) - \mathcal{V}_d(d;a,e) + U\right\}. \tag{5.20}$$

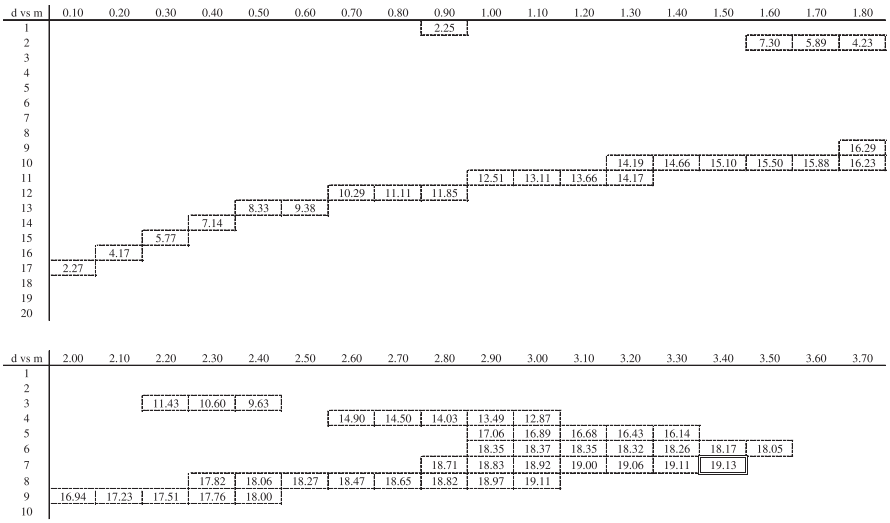
Le premier terme entre accolades du membre de droite de (5.18) représente le gain en terme d'espérance d'utilité engendré par la vente d'une unité d'*output*, un événement qui se réalise avec une probabilité instantanée a ; le second terme entre accolades indique le surplus d'utilité suite à l'achat d'une unité d'un bien de consommation, un événement qui se réalise avec une probabilité instantanée e. L'équation (5.19) donne l'espérance d'utilité d'un individu dépourvu d'encaisses ; l'équation (5.20) définit l'espérance d'utilité d'un individu détenant d unités de monnaie.

À l'équilibre symétrique, chaque agent choisit le même d^*. Sous l'hypothèse d'anticipations rationnelles, les probabilités instantanées a et e doivent être cohérentes avec le choix de la borne supérieure optimale d^*. En particulier, $\rho = a/e$ doit vérifier (5.9)-(5.10) lorsque $d = d^*(a,e)$.

DÉFINITION 2. Un équilibre monétaire est entièrement caractérisé par :
(i) La distribution des encaisses monétaires et les probabilités instantanées d'échange : $\pi_m^{d^*}(.) : \left\{0,...,d^*\right\} \to (0,1)$, $a \in \mathbb{R}^+$, $e \in \mathbb{R}^+$*données par* (5.5)-(5.8).
(ii) La borne supérieure du stock d'encaisses : $d^* \in \mathbb{N}^*$ *donnée par* (5.13).
(iii) Les fonctions valeurs : $\mathcal{V}_d(.;a,e) : \left\{0,...,d^*\right\} \to \mathbb{R}^+$ *données par* (5.18)-(5.20).

Une méthode numérique est utilisée pour déterminer la quantité optimale de monnaie (voir l'annexe 7). Pour cela, les valeurs des paramètres du modèle sont fixées comme suit : $U = 30$, $D = 5$, $r = 0.1$, $x = 0.1$, et $\beta = 10$. Tous

FIGURE 2
Multiplicité des équilibres et bien-être social



les équilibres de *Nash* sont recensés pour des valeurs de la masse monétaire comprises entre 0 et 4. Les résultats sont reproduits sur la figure 2. L'existence d'un équilibre de *Nash* est signalé par un rectangle contenant la valeur du bien-être social associé à cet équilibre. L'équilibre garantissant le bien-être le plus élevé est indiqué par un double trait.

Pour une même valeur de la quantité de monnaie, plusieurs équilibres sont associés à différents niveaux de la borne supérieure du stock d'encaisses. Cette indétermination s'explique par la présence d'externalités de l'échange. Selon (5.7) et (5.8), la fréquence des transactions dépend de d^*. Par exemple, lorsqu'un individu accepte de produire pour des niveaux plus élevés de son stock d'encaisses alors le nombre des vendeurs sur le marché augmente ce qui rend l'activité de prospection moins coûteuse pour les acheteurs (une externalité de marché profond). La présence de ces externalités rend le choix de d^* généralement sous-optimal du point de vue du bien-être social. Les externalités de l'échange engendrent également des complémentarités stratégiques : si tous les agents sauf un choisissent une borne supérieure du stock d'encaisses plus faible, l'individu restant est encouragé à faire de même.

Pour certaines valeurs de la quantité de monnaie ($\bar{m} = 2.9$ et $\bar{m} = 3$ par exemple), le bien-être social est positivement corrélé avec la valeur de la borne supérieure du stock d'encaisses [31]. Dans ce cas, un équilibre caractérisé par une faible valeur de la borne supérieure du stock d'encaisses peut être justifié par la logique auto-réalisatrice suivante. Les agents qui anticipent que l'utilité marginale de la monnaie est faible ne sont pas enclins à accumuler un nombre élevé d'unités monétaires ; le nombre de vendeurs sur le marché est donc réduit et l'utilité marginale de la monnaie est effectivement faible, conformément aux croyances initiales des agents. Ce résultat est dans le même esprit que celui obtenu précédemment par SHI [1995] et TREJOS et WRIGHT [1995] qui montrent que le pouvoir d'achat de la monnaie est indéterminé ou par KIYOTAKI et WRIGHT [1991, 1993] qui indiquent que la probabilité d'acceptation de la monnaie est indéterminée.

En présence d'une multiplicité d'équilibre, le choix d'une quantité de monnaie ne garantit jamais l'obtention d'un optimum de second rang. Un gouvernement qui choisirait une masse monétaire $\bar{m} = 3.4$ ne peut forcer les agents à se coordonner sur $d^* = 7$ plutôt que sur $d^* = 6$. Finalement, le couple $(d^{**}, \bar{m}^{**})$ qui maximise le bien-être social est $(d^{**}, \bar{m}^{**}) = (+\infty, +\infty)$. En effet, d'après la proposition 5.5, pour une valeur de d donnée, la quantité de monnaie qui maximise le bien-être social est $m_d^* = d/2$ avec $Z_d = \{d/(d+1)\}^2 \beta x (U - D)$. Pour atteindre un optimum de premier rang, le choix de d devrait être :

$$d^{**} = \arg\sup_{d \in \mathbb{N}} \left(\frac{d}{d+1}\right)^2 \beta x (U - D) = +\infty.$$

31. La mesure du bien-être social peut aussi être interprétée comme un critère de *Pareto ex ante*. En effet, supposons que l'individu ne connaît pas son état à l'équilibre. L'espérance du revenu permanent d'un individu avant que sa dotation en monnaie ne lui soit révélée est mesurée par $\mathcal{Z}_d = \mathbb{E}[r\mathcal{V}_d(X_m)]$.

Les agents gagneraient à se coordonner et à ne jamais refuser de produire une unité de marchandise ; dans ce cas, le gouvernement pourrait accroître la liquidité de l'économie sans aucune limite.

6 Conclusion

Le modèle monétaire avec appariements aléatoires, développé par KIYOTAKI et WRIGHT, a été utilisé dans cet article pour déterminer la quantité optimale de monnaie d'une économie en présence d'une distribution des encaisses monétaires et des stocks de marchandises. La monnaie exerce deux effets, un effet de liquidité et un effet d'éviction, qui ont des conséquences opposées sur le bien-être social. En l'absence d'éviction, si la quantité de monnaie est trop faible, l'économie connaît une crise générale de surproduction. Aussi a-t-on défini un seuil optimal de la quantité de monnaie, qui dépend des conditions de l'échange et de la production. Au-delà de ce seuil, l'économie atteint une situation optimale. L'effet d'éviction, qui décrit l'impact négatif sur le bien-être social d'une liquidité excessive de l'économie, est introduit en supposant l'existence d'une limite supérieure sur le stock d'encaisses des agents. La quantité optimale de monnaie, qui assure à l'économie le volume de transaction le plus élevé, est telle que le nombre d'acheteurs effectifs présents sur le marché est exactement égal au nombre de vendeurs effectifs : la distribution des encaisses monétaires est alors uniforme. Enfin, en endogénéisant la borne supérieure du stock d'encaisses, nous avons montré que l'économie pouvait être confrontée à des équilibres multiples.

Ce modèle offre un cadre approprié pour étudier l'effet de liquidité de la monnaie et peut être étendu de manière à envisager une dépréciation des stocks de marchandises, les conséquences d'une plus ou moins grande spécialisation des agents ou les effets d'une taxe d'inflation modélisée à la manière de LI [1994]. Une extension importante du modèle consisterait à introduire une théorie des prix ce qui permettrait d'endogénéiser le stock d'encaisses réelles de l'économie. On abandonne ces développements possibles de notre modèle à des travaux ultérieurs.

• Références bibliographiques

AIYAGARI S.R., WALLACE N. (1991). – « The Existence of Steady States with Positive Consumption in the Kiyotaki-Wright Model, *Review of Economic Studies* 58, pp. 901-916.

AIYAGARI S.R., WALLACE N. (1997). – « Government Transaction Policy, the Medium of Exchange and Welfare », *Journal of Economic Theory* 74, pp. 1-18.

AIYAGARI S.R., WALLACE N., WRIGHT R. (1996). – « Coexistence of Money and Interest-Bearing Securities », *Journal of Monetary Economics* 37, pp. 397-419.

ANGAOUI M., BAUDASSÉ T. (1997). – « Acceptabilité de la monnaie, liquidité et prix dans les modèles de prospection », *Revue d'Économie Politique* 107, pp. 608-635.

BERENTSEN A. (1998). – « The Optimum Distribution of Money », *Communication* au congrès de l'EEA 98.

BURDETT K., TREJOS A., WRIGHT R. (1998). – « Cigarette Money », University of Pennsylvania, *mimeo*.

CAVALCANTI R., EROSA A., TEMZELIDES T. (1999). – « Private Money and Reserve Management in a Random Matching Model », *Journal of Political Economy* 107, pp. 929-945.

COLES M., WRIGHT R. (1998). – « A dynamic Equilibrium Model of Search, Bargaining, and Money », *Journal of Economic Theory*, 78, pp. 32-54.

CUADRAS-MORATO X. (1994). – Commodity Money in the Presence of Goods of Heterogeneous Quality », *Journal of Economic Theory* 4, pp. 579-591.

DIAMOND P.A. (1984). – « Money in Search Equilibrium », *Econometrica* 52, pp. 1-20.

DIAMOND P.A. (1987). – « Multiple Equilibria in Models of Credit », *American Economic Review* 77, pp. 82-86.

DIAMOND P.A. (1990). – « Pairwise Credit in Search Equilibrium », *Quarterly Journal of Economics* 105, pp. 285-320.

DIAMOND P.A., MASKIN E. (1979). – « An Equilibrium Analysis of Search and Breach of Contracts, I : steady states, *Bell Journal of Economics* 10, pp. 282-316.

DIAMOND P.A., YELLIN J. (1985). – « The Distribution of Inventory Holdings in a Pure Exchange Barter Search Economy », *Econometrica* 53, pp. 409-432.

DIAMOND P.A., YELLIN J. (1990). – « Inventories and Money Holdings in a Search Economy », *Econometrica* 58, pp. 929-950.

FRIEDMAN M. (1969). – *The Optimum Quantity of Money*, In The Optimum Quantity of Money and Other Essays, Aldine, Chicago.

GELENBE E., PUJOLLE G. (1985). – *Introduction aux réseaux de files d'attente*, 2ème édition, Eyrolles, Paris.

GREEN E.J., WEBER W.E. (1996). – « Will the New $100 Bill Decrease Counterfeiting? », *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review* 20, pp. 3-10.

GREEN E.J., ZHOU R. (1998). – « A Rudimentary Random-Matching Model with Divisible Money and Prices », *Journal of Economic Theory* 81, pp. 252-271.

HOSIOS A.J. (1990). – « On the Efficiency of Matching and Related Models of Search and Unemployment », *Review of Economic Studies* 57, pp. 279-298.

IWAI K. (1996). – « The Bootstrap Theory of Money: a Search-Theoretic Foundation of Monetary Economics », *Structural Change and Economic Dynamics* 7, pp. 451-477.

JACKSON J.R. (1957). – « Networks of Waiting Lines », *Operations Research* 5, pp. 518-521.

JEVONS W.S. (1875). – *Money and the Mechanism of Exchange*, reproduit dans Ross Starr, 1990, General Equilibrium Models of Monetary Economics, New York, Academic Press.

KIM Y.S. (1996). – « Money, Barter and Costly Information Acquisition », *Journal of Monetary Economics* 37, pp. 119-142.

KIYOTAKI N., WRIGHT R. (1989). – « On Money as a Medium of Exchange », *Journal of Political Economy* 97, pp. 927-954.

KIYOTAKI N., WRIGHT R. (1991). – « A Contribution to the Pure Theory of Money », *Journal of Economic Theory* 53, pp. 215-235.

KIYOTAKI N., WRIGHT R. (1993). – « A Search-Theoretic Approach to Monetary Economics », *American Economic Review* 83, pp. 63-77.

KLEINROCK L. (1975). – *Queueing Systems*, vol.1, Wiley-Interscience, New-York.

KULLTI K. (1994). – « Money and Markets », *Economics Letters* 45, pp. 59-62.

LAING D., LI V., WANG P. (1997). – « Money and Prices in a Multiple-Matching Search Model », PennState, *document de travail*.

LI V.E. (1994). – « Inventory Accumulation in a Search-Based Monetary Economy », *Journal of Monetary Economics* 34, pp. 511-536.

LI V.E. (1995). – « The Optimal Taxation of Fiat Money in Search Equilibrium », *International Economic Review* 36, pp. 927-942.

LI V.E. (1997). – « The Efficiency of Monetary Exchange in Search Equilibrium », *Journal of Money, Credit and Banking* 29, pp. 61-72.

LI Y. (1995). – « Commodity Money under Private Information », *Journal of Monetary Economics* 36, pp. 573-592.

LI Y. (1998). – « Monetary Policy in a Search Model with Money and Circulating Private Debt », *mimeo* (National Tsing Hua University).

LI Y, WRIGHT R. (1998). – « Government Transaction Policy, Media of Exchange, and Prices », *Journal of Economic Theory* 81, pp. 290-313.

LIPPMAN S.A., MCCALL J.J. (1986). – « An Operational Measure of Liquidity », *American Economic Review* 76, pp. 43-55.

MATSUYAMA K., KIYOTAKI N., MATSUI A. (1993). – « Toward a Theory of International Currency », *Review of Economic Studies* 60, pp. 283-307.

MENGER K. (1892). – « On the Origin of Money », *Economic Journal* 2, pp. 239-255, reproduit dans Ross Starr, 1990, General Equilibrium Models of Monetary Economics, New York, Academic Press.

MOLICO M.P. (1998). – « The Distribution of Money and Prices in Search Equilibrium », Pennsylvania State University, *mimeo*.

NIEHANS J. (1978). – *The Theory of Money*, Johns Hopkins University Press, Baltimore.

OSBORNE M.J., RUBINSTEIN A. (1990). – *Bargaining and Markets*, Academic Press.

OSTROY J.M., STARR R.M. (1990). – *The Transaction Role of Money*, in Handbook of Monetary Economics, B. Friedman and F. Hahn (eds), Amsterdam, North-Holland.

RITTER J.A. (1994). – « The Transition from Barter to Fiat Money », *American Economic Review* 85, pp. 134-149.

SAY J.B. (1803). – *Traité d'économie politique*, Paris.

SHI S. (1995). – « Money and Prices : a Model of Search and Bargaining », *Journal of Economic Theory* 67, pp. 467-496.

SHI S. (1996). – « Credit and Money in a Search Model With Divisible Commodities », *Review of Economic Studies* 63, pp. 627-652.

SHI S. (1997a). – « A Divisible Search Model of Fiat Money », *Econometrica* 65, pp. 75-102.

SHI S. (1997b). – « Money and Specialization », *Journal of Economic Theory* 10, pp. 99-113.

TREJOS A. (1997). – « Incentives to Produce Quality and the Liquidity of Money », *Journal of Economic Theory* 9, pp. 355-365.

TREJOS A., WRIGHT R. (1995). – « Search, Bargaining, Money and Prices », *Journal of Political Economy* 103, pp. 118-141.

TREJOS A., WRIGHT R. (1996). – « Search-Theoretic Models of International Currency », *Federal Reserve Bank of St Louis Review* 78, pp. 117-132.

VELDE F., WEBER W., WRIGHT R. (1998). – « A Model of Commodity Money with Applications to Gresham's Law and the Debasement Puzzle », *Review of Economic Dynamics* 2.

WALLACE N. (1997a). – « Absence-of-Double Coïncidence Models of Money: A Progress Report », *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 21, pp. 2-20.

WALLACE N. (1997b). – « Short-Run and Long-Run Effects of Changes in Money in a Random-Matching Model », *Journal of Political Economy* 105, pp. 1293-1307.

WILLIAMSON S., WRIGHT R. (1994). – « Barter and Monetary Exchange under Private Information », *American Economic Review* 84, pp. 104-123.

WOODFORD M. (1990). – *The Optimum Quantity of Money*, In Friedman, B.M. and Hahn, F.H., editors, Handbook of Monetary Economics, Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

WRIGHT R. (1994). – « A Note on Sunspot Equilibria in Search Models of Fiat Money », *Journal of Economic Theory* 64, pp. 234-241.

ZHOU R. (1997). – Currency Exchange in a Random Search Model », *Review of Economic Studies* 64, pp. 289-310.

ZHOU R. (1999). – « Individual and Aggregate Real Balances in a Random-Matching Model », *International Economic Review* 40, pp. 1009-1038.

ANNEXE 1

Distribution des stocks de biens et de monnaie

Le couple $(X_m(t), X_n(t), t \in \mathbb{R}+)$ est un processus markovien de sauts défini par le générateur infinitésimal $A(m,n)$ suivant :

$$A((m,n),(m+1,n-1)) = a, \qquad m \geqslant 0, \quad n \geqslant 1, \tag{6.1}$$

$$A((m,n),(m,n+1)) = \alpha, \qquad m \geqslant 0, \quad n \geqslant 0, \tag{6.2}$$

$$A((m,n),(m,n-1)) = b, \qquad m \geqslant 0, \quad n \geqslant 1, \tag{6.3}$$

$$A((m,n),(m-1,n)) = e, \qquad m \geqslant 1, \quad n \geqslant 0, \tag{6.4}$$

$$A((m,n),(m,n)) = -\sum_{(m',n') \in \mathbb{N}^2 - \{(m,n)\}} A\big((m,n),(m',n')\big). \tag{6.5}$$

Le générateur $A(.,.)$ indique la probabilité instantanée de passage d'un état à un autre ainsi que les différentes transitions possibles.

Lorsqu'il est récurrent positif [32], le processus $(X_m(t), X_n(t), t \in \mathbb{R}^+)$ admet une probabilité invariante $\pi\,(m,n)$ sur $\mathbb{N}^2$. D'après le théorème de JACKSON [1957], la probabilité invariante $\pi(m,n)$ est une mesure produit ; elle s'écrit donc :

$$\pi(m,n) = \pi_m(m)\pi_n(n), \qquad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2.$$

À l'équilibre les distributions des stocks d'encaisses et de biens des agents sont indépendantes [33]. La probabilité invariante $\pi(.,.)$, si elle existe, vérifie $\pi A(m,n) = 0$ pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, soit :

$$\sum_{(m',n') \in \mathbb{N}^2} \pi(m',n') A\big((m',n'),(m,n)\big) = 0. \tag{6.6}$$

À l'équilibre, les flots entrants et sortants d'un état sont égaux : l'équation (6.6) est appelée *équation du trafic*, ou *équation de balance globale*.

L'offre de monnaie étant constante, la condition $\alpha < e$ est toujours vérifiée. On distingue deux cas selon que α est inférieur ou non à $(a+b)$.

(i) Les biens s'échangent plus vite qu'ils sont produits $(\alpha < a+b)$.

32. Un processus Markovien est récurrent s'il est irréductible (tout état conduit à tout autre) et si tous les états sont récurrents. Un état est récurrent si la probabilité en partant de cet état d'y revenir en un temps fini est égale à un. Enfin, le processus est récurrent positif s'il admet une mesure invariante bornée.

33. Ce résultat très puissant est loin d'être trivial. Il n'est plus vérifié, en particulier, si l'on impose une borne à la première file d'attente (en supposant, par exemple, que la capacité de stockage des marchandises est limitée).

Le processus $(X_m(t), X_n(t))$ est *récurrent positif* et admet donc une probabilité invariante $\pi(.,.)$ qui est le produit des deux probabilités suivantes :

$$\pi_m(m) = \left(1 - \frac{\alpha}{e}\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{\alpha}{e}\frac{a}{a+b}\right)^m, \qquad \forall m \in \mathbb{N},$$

$$\pi_n(n) = \left(1 - \frac{\alpha}{a+b}\right)\left(\frac{\alpha}{a+b}\right)^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(*ii*) Les biens s'échangent moins vite qu'ils sont produits ($\alpha \geqslant a+b$).

Le système est *récurrent nul* [34] (égalité entre les deux taux) ou *transitoire* [35] (le taux des entrées est strictement supérieur au taux des sorties) : la première file d'attente forme un *« goulot »*. Dans ce cas, le processus $(X_n(t), t \in \mathbb{R}^+)$ qui décrit l'évolution du stock des biens est lui-même *transitoire* $(X_n(\infty) = +\infty$ p. s.) ou récurrent nul $(X_n(\infty) \neq 0$ p. s.).

Le processus $(X_n(t), t \in \mathbb{R}^+)$ étant transitoire, les sorties de la première file d'attente (la file des biens) se réalisent selon un processus de *Poisson* de paramètre $(a+b)$: au-delà du *« goulot »*, le réseau conserve sa structure *Poissonienne*. Autrement dit, c'est l'échange qui détermine la vitesse d'écoulement des biens et non la production. D'après la condition d'équilibre du marché de la monnaie, le processus $(X_m(t), t \in \mathbb{R}^+)$ est récurrent positif ; la probabilité invariante associée au stock d'encaisses vérifie :

$$\pi_m(m) = \left(1 - \frac{a}{e}\right)\left(\frac{a}{e}\right)^m, \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

En notant $\tilde{\alpha} = \min(\alpha, a+b)$, la distribution des stocks d'encaisses vérifie dans le cas général :

$$\pi_m(m) = \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}}{e}\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{\tilde{\alpha}}{e}\frac{a}{a+b}\right)^m, \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

34. Le processus admet une mesure invariante non bornée (*i.e.* n'admet pas de probabilité invariante).

35. Le processus Markovien est transitoire si, et seulement si, il tend presque sûrement vers l'infini (au sens où, presque sûrement il quitte toute partie finie), pour toute loi initiale.

ANNEXE 2

Preuve du lemme 1

L'espérance d'utilité actualisée d'un individu qui stocke $m \in \mathbb{N}$ unités de monnaie et $n \in \mathbb{N}$ unités de biens, notée $\mathcal{V}(m,n)$, vérifie l'équation d'absence d'arbitrage suivante :

$$r\mathcal{V}(m,n) = b1_{\mathbb{N}^*}(n)\{U + \mathcal{V}(m,n-1) - \mathcal{V}(m,n)\} + \tag{6.7}$$

$$+a1_{\mathbb{N}^*}(n)\{\mathcal{V}(m+1,n-1) - \mathcal{V}(m,n)\} +$$

$$+e1_{\mathbb{N}^*}(m)\{U + \mathcal{V}(m-1,n) - \mathcal{V}(m,n)\} +$$

$$+\alpha\{\mathcal{V}(m,n+1) - \mathcal{V}(m,n)\}, \qquad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,$$

où $1_{\mathbb{N}^*}(.)$ désigne la fonction indicatrice définie sur $\mathbb{N}^*$. Le membre de droite de l'équation (6.7) recense les gains instantanés et les plus ou moins-values associées aux changements d'état d'un individu initialement dans l'état (m,n). La fonction de bien-être social vérifie :

$$\mathcal{Z} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \pi(m,n) r\mathcal{V}(m,n),$$

soit en remplaçant $\mathcal{V}\ (m,n)$ par son expression donnée par (6.7) :

$$\mathcal{Z} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} [b1_{\mathbb{N}^*}(n)\{U + \mathcal{V}(m,n-1) - \mathcal{V}(m,n)\} +$$

$$+a1_{\mathbb{N}^*}(n)\{\mathcal{V}(m+1,n-1) - \mathcal{V}(m,n-1)\} +$$

$$+a1_{\mathbb{N}^*}(n)\{\mathcal{V}(m,n-1) - \mathcal{V}(m,n)\}$$

$$+e1_{\mathbb{N}^*}(m)\{U + \mathcal{V}(m-1,n) - \mathcal{V}(m,n)\} +$$

$$+\alpha\{\mathcal{V}(m,n+1) - \mathcal{V}(m,n)\}]\pi_m(m)\pi_n(n),$$

soit :

$$\mathcal{Z} = \{1 - \pi_m(0)\} eU + \{1 - \pi_n(0)\} bU +$$

$$+ \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} a\pi_m(m)\pi_n(n)\{\mathcal{V}(m+1,n-1) - \mathcal{V}(m,n-1)\} +$$

$$+ \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} (a+b)\pi_m(m)\pi_n(n)\{\mathcal{V}(m,n-1) - \mathcal{V}(m,n)\} +$$

$$+ \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} e\pi_m(m+1)\pi_n(n-1)\left\{\mathcal{V}(m,n-1) - \mathcal{V}(m+1,n-1)\right\} +$$

$$+ \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \alpha\pi_m(m)\pi_n(n-1)\left\{\mathcal{V}(m,n) - \mathcal{V}(m,n-1)\right\}.$$

En utilisant l'expression des probabilités invariantes $\pi_n(.)$ et $\pi_m(.)$ données par (3.1) et (3.2), on montre que les quatre dernières sommes s'annulent. Par exemple, si $\alpha < (a+b)$,

$$a\pi_m(m)\pi_n(n) = e\pi_m(m+1)\pi_n(n-1).$$

D'où :

$$\mathcal{Z} = \{1 - \pi_m(0)\}\, eU + \{1 - \pi_n(0)\}\, bU.$$

ANNEXE 3

Introduction des échanges de troc ($y > 0$) dans le cas où $\alpha < a + b$

Afin d'obtenir une solution explicite pour les probabilités instantanées d'échange (b, a et e) nous adoptons l'approximation selon laquelle la probabilité instantanée avec laquelle une unité monétaire est dépensée (e) est indépendante du stock de biens. (En toute rigueur, on devrait distinguer deux valeurs de e selon que l'individu est ou non en rupture de stocks). Cette approximation est bonne lorsque y est proche de 0 ou lorsque α est proche de $a + b$. De plus, sous cette hypothèse, nous avons indiqué dans l'annexe 1 que les distributions des stocks et des encaisses étaient effectivement indépendantes.

Les probabilités instantanées d'échange d'un individu i quelconque sont données par :

$$b = \beta x y \left[1 - \pi_n(0)\right], \tag{6.8}$$

$$a = \beta x \left[1 - \pi_m(0)\right]\left[1 - y\left(1 - \pi_n(0)\right)\right], \tag{6.9}$$

$$e = \beta x \left[1 - \pi_n(0)\right]\left[1 - y\left(1 - \pi_n(0)\right)\right]. \tag{6.10}$$

Selon (6.8), un échange de troc se réalise en cas de double coïncidence entre i et son partenaire (avec une probabilité xy), et si ce dernier stocke des biens à vendre (avec une probabilité $1 - \pi_n(0)$). Selon (6.9), i échange une unité de bien contre une unité de monnaie dans les circonstances suivantes : s'il y a double coïncidence des désirs et si son partenaire détient de la monnaie mais aucune marchandise (un événement qui se réalise avec une probabilité $xy\left\{1 - \pi_m(0)\right\}\pi_n(0)$ ou s'il y a simple coïncidence et si le partenaire de i détient des unités monétaires (un événement qui se réalise avec une probabilité $x(1 - y)\left\{1 - \pi_m(0)\right\}$). Selon (6.10) i achète une unité de bien avec une unité de monnaie dans les situations suivantes : premièrement, s'il y a simple coïncidence mais absence de double coïncidence (avec une probabilité $x(1 - y)$) et si le partenaire de i détient des marchandises (avec une probabilité $\left\{1 - \pi_n(0)\right\}$) ; deuxièmement, s'il y a double coïncidence (avec une probabilité xy) et si i est en rupture de stock (avec une probabilité $\pi_n(0)$) alors que le partenaire de i détient au moins une unité de marchandise à vendre (avec une probabilité $\left\{1 - \pi_n(0)\right\}$).

D'après (3.1), (3.2) et (6.8)-(6.10), les probabilités instantanées d'échange vérifient :

$$b = \beta x y \frac{\alpha}{a + b}, \tag{6.11}$$

$$a = \beta x \frac{\alpha a}{e(a + b)}\left(1 - y\frac{\alpha}{a + b}\right), \tag{6.12}$$

$$e = \beta x \frac{\alpha}{(a + b)}\left(1 - y\frac{\alpha}{a + b}\right). \tag{6.13}$$

Les deux dernières relations sont équivalentes. La condition d'équilibre du marché de la monnaie, *i.e.* $\mathbb{E}[X_m(t)] = \bar{m}$, et (2.2) permettent d'obtenir l'équation suivante :

$$\frac{\alpha a}{e(a+b) - \alpha a} = \bar{m}. \tag{6.14}$$

D'après (6.11) et (6.13), nous avons :

$$e(a+b) = \alpha\,(\beta x - b)\,. \tag{6.15}$$

En substituant cette dernière expression dans (6.14), nous obtenons la probabilité instantanée a :

$$a = \frac{\bar{m}}{1+\bar{m}}\,(\beta x - b)\,. \tag{6.16}$$

On en déduit alors une relation implicite entre $(a+b)$ et $\bar{m}$. En effet, après quelques manipulations (6.16) et (6.11) donnent :

$$(a+b)\,(1+\bar{m}) - \frac{\alpha\beta x y}{a+b} = \bar{m}\beta x. \tag{6.17}$$

Sachant que $(a+b) \leqslant \beta x$, on déduit de (6.17) que $(a+b)$ est croissant avec l'offre de monnaie. De plus, d'après (6.11), b décroît avec $\bar{m}$ alors que a est une fonction croissante de l'offre de monnaie. Une augmentation de la quantité de monnaie s'accompagne d'une éviction des échanges de troc par les échanges monétaires.

ANNEXE 4

Distribution des stocks d'encaisses en présence d'une borne supérieure $d \in \mathbb{N}^*$

Les encaisses monétaires des agents $X_m(t)$ obéissent à un processus markovien de sauts associé à une file d'attente de type $M/M/1/d$ (*i.e.* la capacité du système est maintenant limitée à d unités). Le générateur infinitésimal associé à ce processus de saut est donné par :

$$A(m,m+1) = a, \qquad m < d,$$

$$A(m,m-1) = e, \qquad m \geqslant 1,$$

$$A(m,m) = -\sum_{j \neq m} A(m,j).$$

La probabilité instantanée d'effectuer une vente est égal à a aussi longtemps que les encaisses monétaires sont inférieures à d. Le système est toujours récurrent positif et admet donc une probabilité invariante notée $\pi_m^d(.)$ donnée par :

$$\sum_{n \in \{0,\ldots,d\}} \pi_m^d(n) A(n,m) = 0, \qquad \forall m \in \{0,\ldots,d\}.$$

De là on en déduit l'expression de $\pi_d(.)$ qui vérifie :

$$\begin{aligned} \pi_m^d(m) &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{d+1}}\rho^m, \quad \text{si} \quad \rho = \frac{a}{e} \neq 1, \\ &= \frac{1}{d+1}, \qquad \text{si} \qquad \rho = 1, \qquad \forall m \in \{0,1,\ldots,d\}. \end{aligned}$$

ANNEXE 5

Preuve du lemme 5.2

On réécrit l'équation (5.9) comme suit :

$$\frac{(d+1)}{\sum_{i=0}^{d} \rho^i} - 1 = (d - \bar{m})(1 - \rho) \tag{6.18}$$

À d et $\bar{m}$ donnés, le membre de gauche de (6.18) est strictement convexe et décroissant en ρ (pour s'en convaincre, il suffit d'étudier le signe de la dérivée seconde de $(1-\rho)/(1-\rho^{d+1})$) et le membre de droite de (6.18) est linéaire et strictement décroissant en ρ (car $\bar{m} < d$) : hormis les cas de tangence, il existe deux solutions à (6.18) dont $\rho = 1$. Si $\bar{m} = d/2$, les membres de droite et de gauche de (6.18) admettent la même dérivée au point $\rho = 1$: on en déduit alors que $\rho = 1$ est l'unique solution de (6.18). Pour $\bar{m} \neq d/2$, il existe une unique valeur de ρ distincte de 1 qui satisfait (6.18). L'équation (6.18) définit donc un équilibre unique.

ANNEXE 6

Preuve du lemme 5.3

D'après le lemme 5.2, à $\bar{m}$ et d donné, l'équilibre est unique. Or le membre de gauche de (5.9) décrit $(0,d)$ quand ρ décrit $\mathbb{R}^+$: on en déduit le membre de gauche de (5.9) est strictement croissant en ρ. Pour démontrer que le membre de gauche de (5.9) est strictement croissant en d, on vérifie l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=0}^{d} i\pi_m^d(i) < \sum_{i=0}^{d+1} i\pi_m^{d+1}(i),$$

qui se réécrit comme suit :

$$\sum_{i=0}^{d} i\left(\pi_m^d(i) - \pi_m^{d+1}(i)\right) < (d+1)\pi_m^{d+1}(d+1).$$

Or, $i < d+1$ pour tout $d \in \{0,\ldots,d\}$. On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{d} i\left(\pi_m^d(i) - \pi_m^{d+1}(i)\right) &< (d+1)\sum_{i=0}^{d}\left(\pi_m^d(i) - \pi_m^{d+1}(i)\right) \\
&< (d+1)\left\{1 - \sum_{i=0}^{d}\pi_m^{d+1}(i)\right\} \\
&< (d+1)\pi_m^{d+1}(d+1)
\end{aligned}$$

Le membre de gauche de (5.9) est donc strictement croissant en ρ et d.

ANNEXE 7

Recherche des équilibres de *Nash* dans le cas où d^* est endogène

Pour $\bar{m}$ et d^* donnés, la condition d'équilibre du marché de la monnaie (5.9)-(5.10) permet de déterminer la grandeur ρ.

Connaissant ρ, les probabilités instantanées d'échange a et e vérifient (5.7) et (5.8). Connaissant a et e, l'équation (5.18) peut être résolue. La solution générale est :

$$\mathcal{V}_d(m;a,e) = k_1 z_1^m + k_2 z_2^m + \frac{eU - aD}{r}, \quad k_1,k_2 \in \mathbb{R}, \quad m \in \{0,1,...,d\},$$

où z_1 et z_2 sont les deux racines de l'équation suivantes :

$$-az^2 + (r + a + e)z - e = 0,$$

et où k_1 et k_2 sont déterminés par (5.19) et (5.20) :

$$k_1 = \frac{1}{\det}\left[-\left\{(r+e)z_2^d - ez_2^{d-1}\right\}eU - (r + a - az_2)aD\right],$$

$$k_2 = \frac{1}{\det}\left[\left\{(r+e)z_1^d - ez_1^{d-1}\right\}eU + (r + a - az_1)aD\right],$$

$$\det = \{r + a(1 - z_1)\}\left\{(r+e)z_2^d - ez_2^{d-1}\right\} -$$

$$- \left\{(r+e)z_1^d - ez_1^{d-1}\right\}\{r + a(1 - z_2)\}.$$

On vérifie alors que d^* satisfait bien les conditions (5.14) et (5.17).