ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 58 – 2000

# Structure financière optimale et sensibilité informationnelle des titres

**Emmanuelle GABILLON ***

**RÉSUMÉ.** – Dans un contexte d'asymétrie d'information, MYERS et MAJLUF [1984] introduisent la théorie du *« pecking order »* qui établit un ordre de préférence selon lequel une entreprise va financer ses investissements : la firme a recours en priorité à l'autofinancement, puis à l'endettement. En revanche, selon cette théorie, les entreprises ne devraient jamais émettre d'actions. Notre objectif est donc de montrer que l'émission d'actions a une place dans la stratégie financière d'une entreprise. Nous montrons que l'émission d'actions est un moyen efficace pour inciter les investisseurs externes à s'informer sur l'entreprise. L'émission d'actions permet donc de réduire l'asymétrie d'information entre la firme et le marché. La structure financière optimale que nous obtenons concilie émission de dette et émission d'actions.

## Optimal Financial Structure and Information Sensitive Securities

**ABSTRACT**. – In an asymetric information framework, MYERS and MAJLUF [1984] introduced the pecking order theory. This theory specifies a hierarchy beetween the different sources of corporate funds: firms prefer to rely on internal sources of funds and prefer debt to equity if external financing is required. According to this theory, there is no reason to issue equity. In this paper, I show that the firm has an incentive to issue equity when we allow investors to get information on the firm at some cost. Indeed, when the cost of information is not too high, the optimal financial structure includes both debt and equity.

* E. GABILLON : GREMAQ, Université de Toulouse I.
Je remercie pour leurs commentaires M. DEWATRIPONT, X. FREIXAS, J.C. GABILLON, D. LACOUE-LABARTHE, D. MARTIMORT, J.C. ROCHET. Je reste, seule, responsable des éventuelles erreurs subsistantes.

# 1 Introduction

Dans un contexte d'asymétrie d'information, Myers et Majluf [1984] introduisent la fameuse théorie du *« pecking order »* qui établit un ordre de préférence selon lequel une entreprise va financer ses investissements. Cette théorie spécifie que la firme aura recours en priorité à l'autofinancement, puis à l'endettement. En revanche, cette théorie ne justifie pas les émissions d'actions. Notre objectif est donc de montrer que l'émission d'actions a une place dans la stratégie financière de l'entreprise. Autrement dit, dans notre modèle, il existe une structure financière optimale conciliant émission de dette et émission d'actions. La règle hiérarchique du *« pecking order »* n'est plus vérifiée.

Dans le modèle de Myers et Majluf, les intervenants sur le marché financier ne connaissent pas la qualité de l'entreprise (bonne ou mauvaise). Par conséquent, les titres émis par une bonne entreprise ont tendance à être sous-évalués par le marché financier. Cette sous-évaluation représente un handicap pour la bonne firme car elle renchérit le coût de ses financements externes. Myers et Majluf [1984] montrent donc que, pour financer ses investissements, la firme a intérêt à limiter son recours aux financements externes en s'autofinançant. De plus, la qualité de la firme, qui est sous-estimée par le marché financier, est davantage reflétée dans les dividendes versés par les actions que dans les revenus de la dette. Il en résulte une plus grande sous-évaluation des actions par rapport aux titres de dette. Par conséquent, si les ressources internes de l'entreprise s'avèrent insuffisantes, cette dernière privilégiera l'émission de dette afin d'émettre les titres les moins sous-évalués. Toutes les actions de la firme resteront donc entre les mains des actionnaires internes. À l'équilibre mélangeant considéré par Myers et Majluf [1984], la mauvaise firme imite la stratégie financière de la bonne. Le principe de la théorie du *« pecking order »* est donc qu'une entreprise n'émet jamais d'actions. L'objectif de ce travail est donc de proposer une théorie qui explique le rôle des actions dans la stratégie financière des entreprises.

Pour cela, nous conservons l'hypothèse d'asymétrie d'information de Myers et Majluf tout en introduisant une modification fondamentale : les investisseurs, qui interviennent sur le marché financier, peuvent s'informer sur la qualité de l'entreprise moyennant le paiement d'un certain coût. En effet, Myers et Majluf travaillent à asymétrie d'information donnée entre l'entreprise et le marché financier. Au contraire, dans notre modèle, certains agents vont s'informer et apprendre la qualité de l'entreprise. Le nombre d'informés s'établit de façon endogène et va dépendre de la stratégie financière de la firme. Nous montrons que :

1) Les agents qui ont décidé de s'informer préfèrent acheter des actions que des titres de dette parce qu'ils rentabilisent davantage leur investissement informationnel.

2) Si la firme émet des actions, les agents qui décident de s'informer sur la firme sont (donc) plus nombreux. Plus elle émet d'actions, plus ils sont nombreux.

3) Émettre des actions est (donc) un moyen efficace pour stimuler l'acquisition d'information. En effet, la firme est sous-évaluée ; il est donc dans son

intérêt que l'on s'informe sur elle. Émettre des actions est plus efficace pour inciter les agents à s'informer qu'émettre de la dette. Nous mettons, donc, en évidence le rôle possible de l'émission d'actions dans la stratégie financière des entreprises. C'est ce que nous appelons l'effet informationnel des actions. Nous avançons l'idée que l'émission de certains titres peut diminuer le degré d'asymétrie d'information entre une entreprise et le marché financier et nous montrons que justement les actions ont cet avantage sur la dette.

Cependant, la firme continue à émettre des titres de dette. En effet, selon le résultat de MYERS et MAJLUF, la dette est moins sous-évaluée que les actions. À asymétrie d'information donnée, elle est donc moins coûteuse à émettre. Les actions, elles, permettent de diminuer l'importance de l'asymétrie d'information.

Il existe donc une structure financière optimale. Cette structure financière optimale consiste à se financer dans une certaine proportion par actions et dans une autre proportion par dette.

L'effet informationnel des actions s'explique de la façon suivante : les agents qui ont décidé de s'informer obtiennent une information privilégiée sur l'entreprise. Si la firme est bonne, ils savent que tous les titres émis par l'entreprise sont sous-évalués par le marché financier. Ils cherchent donc à acheter en priorité les titres les plus sous-évalués. Les actions étant plus sous-évaluées que la dette, ces investisseurs rentabilisent davantage leur investissement informationnel s'ils peuvent acheter des actions. De même, si la firme est mauvaise, les informés savent que les titres sont surévalués. Ils cherchent à vendre à découvert en priorité les titres les plus surévalués c'est-à-dire les actions. Nous montrons que plus la firme émet d'actions, plus il est rentable de s'informer. C'est pourquoi, une bonne entreprise est incitée à assurer une liquidité suffisante au marché de ses actions afin de stimuler l'acquisition d'information. En effet, plus les investisseurs s'informent, plus les titres émis par l'entreprise sont correctement évalués par l'ensemble du marché. Le comportement d'achat ou de vente de titres des informés révèle une partie de l'information qu'ils ont acquise. Plus la firme émet d'actions, plus les informés sont nombreux et plus leur comportement va révéler de l'information. Par conséquent, les prix d'équilibre des titres émis par l'entreprise se rapprochent de leurs fondamentaux au fur et à mesure que l'émission d'actions augmente. L'émission d'actions, grâce à son effet informationnel, permet donc à une bonne entreprise de diminuer l'ampleur de la sous-évaluation dont elle est victime.

Notre approche est aussi liée à celle de BOOT et THAKOR [1993]. En effet, ces derniers autorisent les agents à s'informer sur le type de la firme. Paradoxalement, dans le modèle de BOOT et THAKOR, c'est l'émission de dette sans risque qui stimule l'acquisition d'information. En effet, elle rend les actions de la firme *« moins chères »* (puisque la partie non risquée du revenu de la firme est affectée à la dette) tout en leur conservant le même attrait informationnel. Plus précisément, la sous-évaluation des actions de la firme, qui intéressent les informés, reste la même. Or, dans ce modèle, chaque informé ne peut investir qu'un montant fixe. La baisse du prix des actions permet donc de mieux rentabiliser l'acquisition d'information. Par conséquent, le nombre d'informés augmente à la suite de l'émission de dette sans risque et les prix deviennent plus informatifs.

Il est à remarquer néanmoins, qu'en dehors de cet effet revenu (subordonné à la possibilité d'émettre de la dette sans risque), la structure financière est neutre dans le modèle de BOOK et THAKOR. En particulier, on ne retrouve pas *« l'effet Myers-Majluf »* qui donne un avantage à la dette. En effet, BOOT et THAKOR supposent que la firme vend l'intégralité de ses *cash-flows* futurs sous la forme d'une émission de titres. Or, étant sous-évaluée, il serait moins coûteux pour l'entreprise de conserver son projet d'investissement et de n'émettre des titres qu'à hauteur de son coût d'investissement. La firme minimise ainsi son appel au marché et le coût de sous-évaluation qui l'accompagne. Lorsque la firme adopte un tel comportement, on retrouve l'effet en faveur de la dette mis en évidence par MYERS et MAJLUF [1984]. Il s'agit pour l'entreprise d'émettre les titres les moins sous-évalués et de garder pour elle les revenus résiduels de son projet d'investissement qui donneraient lieu à la plus grande sous-évaluation s'ils étaient sousmis à l'appréciation du marché [1].

C'est pourquoi, afin de rationnaliser le comportement de l'entreprise, nous supposerons que la firme n'émet des titres qu'à hauteur du montant de son investissement. Nous pourrons ainsi traiter la question de la dette risquée et le problème de l'existence d'une structure financière optimale dette-actions.

La section 2 est consacrée à la présentation du modèle (agents et chronologie). Dans la section 3, nous étudions le problème de la révélation de l'information liée d'une part au choix de la structure financière de la firme et, d'autre part, aux interventions sur le marché financier des agents informés sur la qualité de l'entreprise. Les sections 4 et 5 détaillent le comportement des investisseurs présents sur le marché financier. La section 6 détermine le nombre d'investisseurs qui s'informent sur l'entreprise en fonction de la stratégie financière de la firme. Dans la section 7, nous caractérisons la stratégie financière optimale de l'entreprise. La section 8 est une application numérique.

# 2 Le modèle

Nous considérons un modèle à quatre dates (0, 1, 2, 3). Le taux d'actualisation d'une période à l'autre est normalisé à 0.

## 2.1 Les agents

$H1$ : *On suppose que tous les agents sont neutres au risque* [2].

### 2.1.1 La firme

Nous considérons une entreprise qui cherche à financer un projet d'investissement qui permet d'obtenir un *cash-flow* aléatoire à la date 3. La qualité ou

1. En effet, la dette est moins sous-évaluée que les actions émise à partir du moment où une certaine quantité d'actions est conservée par les actionnaires internes (la firme n'émet des titres que pour financer son coût d'investissement). Dans le cas contraire, où la firme émet des titres en contrepartie de tous ses *cash-flows* futurs (vente de la firme), la structure financière redevient neutre.

2. Les agents sont donc uniquement intéressés par leur espérance de gain.

type de la firme est assimilée à la qualité de son projet d'investissement. Elle est notée $t$.

*H2 : La qualité de la firme, $t$, peut être bonne $(b)$ ou mauvaise $(m)$ selon une distribution de probabilité* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

On note $\overline{Y}_b$ l'espérance de *cash-flow* du bon projet d'investissement et $\overline{Y}_m$ l'espérance de *cash-flow* du mauvais projet d'investissement. Les deux projets sont supposés rentables. Si on note $I$ le coût de l'investissement, on a donc :

$$\overline{Y}_b \geqslant \overline{Y}_m \geqslant I \tag{2.1}$$

*H3 : On suppose qu'à la date* 0*, la firme est la seule à connaître la qualité de son projet d'investissement. Les intervenants externes (à la firme) sur le marché financier ne connaissent que la distribution de probabilité* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *du type de la firme.*

Par conséquent, la valeur de marché des titres émis par l'entreprise pourra différer de leur vraie valeur.

Si on note $f_t(.)$ la fonction densité de la distribution des *cash-flows* de l'entreprise de type $t$ définie sur le support (fini ou infini) $\left[\underline{Y}, \overline{Y}\right]$, on a :

$$\overline{Y}_t = \int_{\underline{Y}}^{\overline{Y}} y f_t(y)\, dy \tag{2.2}$$

*H4 : Pour financer son projet, la firme peut émettre des actions et de la dette* [3].

Notons $\overline{Y}_t^a(D)$ l'espérance de revenu de l'ensemble des actions de la firme de type $t$ lorsque la valeur faciale de la dette est égale à $D$. On a :

$$\overline{Y}_t^a(D) = \int_D^{\overline{Y}} (y - D)\, f_t(y)\, dy \tag{2.3}$$

Les actions émises à la date 0 pour financer le projet d'investissement donnent droit à leurs souscripteurs à une part $\alpha \in [0,1]$ des revenus futurs de l'ensemble des actionnaires. La valeur de ces actions est égale à $\alpha \overline{Y}_t^a(D)$. La valeur des actions détenue par les actionnaires internes est égale à $(1-\alpha)\overline{Y}_t^a(D)$.

L'espérance de revenu de la dette émise par l'entreprise de type $t$, notée $\overline{Y}_t^d(D)$, s'écrit :

$$\overline{Y}_t^d(D) = \int_0^D y f_t(y)\, dy + D\left(1 - F_t(D)\right) \tag{2.4}$$

3. Pour simplifier, nous supposons que l'autofinancement est nul.

On note $V_t^a(D)$ la valeur de marché de l'ensemble des actions de la firme de type $t$ et $V_t^d(D)$ la valeur de marché de la dette de la firme de type $t$. La valeur de marché des actions émises est égale à $\alpha V_t^a(D)$.

$H5$ : *A la date* $0$*, la firme de type* $t$ *annonce son taux d'endettement*[4] $d_t$.

Cela revient à annoncer le montant de son financement par endettement $d_t I$ et le montant de son financement par actions $(1-d_t)I$.

Les variables $\alpha$ et $D$ doivent donc vérifier les équations suivantes :

$$\alpha V_t^a(D) = (1-d_t)I \text{ et } V_t^d(D) = d_t I \tag{2.5}$$

Ce qui implique aussi que la valeur de marché des titres émis est égale à $I$ :

$$\alpha V_t^a(D) + V_t^d(D) = I \tag{2.6}$$

Enfin, en notant $F_t(.)$ la fonction de répartition des *cash-flows* de la firme de type $t$, on fait une hypothèse sur les taux de hasard des distributions des cash flows de la bonne et de la mauvaise entreprise :

$$H6 : \quad \forall y \in \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right], \frac{f_b(y)}{1-F_b(y)} \leqslant \frac{f_m(y)}{1-F_m(y)}$$

On montre en Annexe 1 que l'hypothèse $H6$ implique les propriétés suivantes :

Propriété 1

$$\forall D \in \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right], F_b(D) \leqslant F_m(D)$$

Cette propriété signifie que la probabilité de faillite de la bonne firme est toujours inférieure à la probabilité de faillite de la mauvaise.

Propriété 2

$$\forall D \in \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right], \frac{\overline{Y}_b^a(D)}{1-F_b(D)} \geqslant \frac{\overline{Y}_m^a(D)}{1-F_m(D)}$$

Cette propriété signifie que l'espérance de revenu des actions de la bonne firme conditionnellement à l'état de non faillite est toujours supérieure à celle de la mauvaise firme.

Propriété 3

$$\forall D \in \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right] \quad \overline{Y}_b^a(D) \geqslant \overline{Y}_m^a(D)$$

---

4. Il ne s'agit pas du taux d'endettement de la firme mais du taux d'endettement lié au financement du projet d'investissement (part de la dette dans le financement du projet d'investissement).

Quel que soit le niveau d'endettement, l'espérance de revenu des actions de la bonne firme est supérieure à l'espérance de revenu des actions de la mauvaise firme. En particulier, lorsque $D = 0$ on retrouve l'hypothèse $\overline{Y}_b \geqslant \overline{Y}_m$ faite précédemment.

PROPRIÉTÉ 4

$$\forall D \in \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right] \quad \overline{Y}_m^d\,(D) \leqslant \overline{Y}_b^d\,(D)$$

Quel que soit le niveau d'endettement, l'espérance de revenu de la dette de la bonne firme est supérieure à l'espérance de revenu de la dette de la mauvaise firme.

*H*7 : *On suppose que la firme maximise la richesse de ses actionnaires en place* [5].

### 2.1.2 Les intervenants externes sur le marché financier

Il y a trois catégories différentes d'intervenants sur le marché qui partagent les mêmes croyances *a priori* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sur le type de la firme.

#### Les agents non-informés et les agents informés

*Date* 1

*H*8 : *Chaque agent non-informé peut choisir de rester non-informé ou, au contraire, d'apprendre parfaitement le type de l'entreprise moyennant le paiement d'un coût fixe* $C$*. Dans ce cas, on parlera d'agents informés.*

Le nombre d'agents informés sera noté [6] $n^*$.

*Date* 2

Une fois leur information acquise, les informés lancent des ordres d'achat ou de vente des titres émis par l'entreprise.

*H*9 : *Le comportement des agents informés est supposé non-concurrentiel.*

Autrement dit, chaque informé tient compte de l'influence qu'il a sur le prix lorsqu'il place un ordre d'achat ou de vente sur le marché. Il s'agit, en fait, pour chaque informé, d'exploiter son pouvoir de monopole informationnel en limitant la taille de ses ordres afin d'éviter une trop grande révélation de l'information par les prix [7].

---

5. L'expression de la richesse des actionnaires en place est donnée à la section 3.1.

6. La variable $n^*$ sera déterminée de façon endogène.

7. HELLWIG [1980] montre que l'hypothèse alternative de comportement concurrentiel n'est compatible qu'avec un nombre infini d'informés. Or, on montrera que le nombre d'informés $n^*$ est fini dès que le coût à s'informer $C$ est positif. Enfin, la technologie à la disposition des informés leur permet d'apprendre exactement le type de la firme. Un tel pouvoir d'investigation est davantage l'apanage de gros intervenants tels que les banques, les assurances, les sociétés de gestion de portefeuilles que celui de petits investisseurs au comportement concurrentiel et moins bien informés. Ces derniers seront désignés dans ce modèle sous le nom de spéculateurs.

### Les spéculateurs

Les spéculateurs ont trois caractéristiques principales :

$H10$ : *Les spéculateurs ont un comportement concurrentiel.*

Ils sont nombreux et « *petits* » par rapport au marché et ils ne tiennent pas compte de l'influence de leurs actions individuelles sur les prix.

$H11$ : *Chaque spéculateur investit sur le marché une somme limitée qui est normalisée à* $\frac{1}{2}$ *s'il s'agit d'un achat et à* $-\frac{1}{2}$ *s'il s'agit d'une vente à découvert.*

$H12$ : *Chaque spéculateur reçoit à la date* 1 *un signal bruité individuel sur le type de la firme. Tous les signaux perçus par les spéculateurs sont issus d'une même distribution de probabilité discrète à deux valeurs (cf. Annexe 2). On suppose, en outre, que la précision de cette distribution (précision des signaux perçus par les spéculateurs) est inconnue des autres intervenants sur le marché. Enfin, on suppose que cette précision est tirée d'une loi uniforme.*

Dès lors, on peut montrer que l'ordre total lancé par les spéculateurs sur le marché des actions et l'ordre total lancé par les spéculateurs sur le marché de la dette sont eux-mêmes aléatoires. La description détaillée du comportement des spéculateurs est exposée dans l'Annexe 2.

Les spéculateurs lancent leurs ordres d'achat ou de vente à la date 2.

On note $\gamma$ la proportion des interventions des spéculateurs qui concerne le marché des actions et $1-\gamma$ la proportion des interventions des spéculateurs qui concerne le marché de la dette [8].

On montre en Annexe 2 que l'ordre total [9] lancé par les spéculateurs sur le marché des actions s'écrit $\gamma\widetilde{l}$ et l'ordre total lancé par les spéculateurs sur le marché de la dette s'écrit $(1-\gamma)\widetilde{l}$ ; $\widetilde{l}$ étant une variable aléatoire.

Le montant de l'ordre total lancé par les spéculateurs sur le marché des actions est donc égal à $\gamma\widetilde{l}\alpha V_t^a(D)$ et le montant de l'ordre total lancé par les spéculateurs sur le marché de la dette est donc égal à $(1-\gamma)\widetilde{l}V_t^d(D)$. Pour chaque réalisation de $\widetilde{l}$, la position des spéculateurs sur le marché des actions $\left|\gamma\widetilde{l}\alpha V_t^a(D)\right|$ croît avec la taille du marché mesurée par $\alpha V_t^a(D)$ (montant de l'émission). De même, la position des spéculateurs sur le marché de la dette $\left|(1-\gamma)\widetilde{l}V_t^d(D)\right|$ croît avec le montant de l'émission $V_t^d(D)$. Or, par hypothèse, chaque spéculateur investit une somme constante. Cela veut donc dire (*cf*. Annexe 2) que nous faisons l'hypothèse suivante :

$H13$ : *Le nombre de spéculateurs intervenant sur un marché augmente avec la taille de ce marché.*

---

8. La variable $\gamma$ sera déterminée de façon endogène à la section 4. En particulier, on verra que la valeur de $\gamma$ est bien indépendante du type de la firme.

9. Il s'agit d'une quantité (de titres).

Cette hypothèse repose sur la constatation que plus un marché est large, plus il est liquide et plus nombreux sont les intervenants sur ce marché. Le comportement des spéculateurs, en raison de son caractère aléatoire, va introduire du bruit sur le marché financier. L'amplitude du bruit sur un marché sera donc proportionnelle à la taille de ce marché.

Sous l'hypothèse $H12$, on démontre, en Annexe 2 que $\widetilde{l}$ suit une loi uniforme [10] :

$$\widetilde{l} \sim U\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Le choix de la loi uniforme est un choix de simplification. En effet, il va permettre d'isoler uniquement deux états de la nature différents à la date 2. Cette simplification de l'aléa assure une résolution explicite plus poussée du modèle et une plus grande lisibilité des résultats [11].

La présence de bruit sur un marché est nécessaire pour que les prix ne soient pas parfaitement révélateurs [12]. Les hypothèses généralement adoptée pour obtenir ce résultat consistent :

– soit à considérer des dotations en titres aléatoires (GLOSTEN [1989], BHATTACHARYA et SPIEGEL [1992]) ; ce qui ne peut pas être le cas dans notre modèle puisque c'est la firme qui émet les titres échangés.

– soit à introduire des *« liquidity traders »* c'est-à-dire des agents dont les ordres sont aléatoires et qui interviennent sur le marché pour des motifs de liquidité exogènes (KYLE [1985 et 1989], BOOT et THAKOR [1993]).

Cette dernière hypothèse n'est pas retenue ici pour deux raisons :

Tout d'abord, le comportement des spéculateurs tel que nous le modélisons permet d'étudier une autre possibilité de bruit sur les marchés : celle provenant d'activités de spéculation motivées par des informations différentes. Ces interventions sont, sans aucun doute, une source de bruit sur les marchés notamment sur le marché de titres spéculatifs comme le marché des actions. On montrera, d'ailleurs, que la détention d'information privilégiée associée à un comportement concurrentiel incite effectivement les spéculateurs à n'intervenir que sur le marché des actions et à délaisser le marché de la dette.

Ce dernier point est la seconde raison de notre choix. En effet, l'utilisation du *« liquidity trading »* imposerait une répartition arbitraire de ce dernier entre le marché des actions et le marché de la dette comme dans BOOT et THAKOR [1993] par exemple. Au contraire, ici, les spéculateurs vont s'orienter de façon endogène vers le marché des actions. Nous discuterons davantage des conséquences de ce résultat par la suite.

---

10. On remarque ici que les distributions des ordres $\gamma\widetilde{l}$ et $(1-\gamma)\ \widetilde{l}$ vont être indépendantes du type de la firme en dépit des signaux perçus les spéculateurs. Cette propriété provient de l'hypothèse de loi uniforme faite en $H\{12\}$ (*cf.* Annexe 2). Sans conséquence pour les résultats, cette propriété permet d'alléger sensiblement le modèle.

11. L'hypothèse d'une loi uniforme n'est cependant pas responsable de nos résultats même si une résolution plus générale imposerait sans doute des conditions sur la distribution de la variable $\widetilde{l}$.

12. En effet, GROSSMAN et STIGLITZ [1980] montrent qu'il faut que les prix ne transmettent pas toute l'information pour que l'acquisition coûteuse de l'information (par les non-informés dans notre modèle) soit rentable.

## 2.2 La chronologie du modèle

*Date 0 : Stratégie d'émission de la firme*

La firme annonce son taux d'endettement $d_t$. Cette annonce est connaissance commune de l'ensemble des intervenants sur le marché.

*Date 1 : Acquisition d'information*

Un certain nombre $n^*$ (endogène) de non-informés décide de s'informer sur le type de l'entreprise. Les spéculateurs reçoivent leurs signaux.

*Date 2 : Lancement des ordres et prix d'équilibre*

Les informés et les spéculateurs lancent leurs ordres d'achat ou de vente sur le marché des actions et sur le marché de la dette. Seul l'ordre total émanant des informés et des spéculateurs est observable sur chaque marché. On notera $\widetilde{Z}_t^a$ l'ordre total lancé sur le marché des actions et $\widetilde{Z}_t^d$ l'ordre total lancé sur le marché de la dette. Ces ordres dépendent du type $t$ de la firme puisqu'ils contiennent les ordres des informés.

Une fois $\widetilde{Z}_t^a$ et $\widetilde{Z}_t^d$ connus, les prix d'équilibre $V_t^a\,(D)$ et $V_t^d\,(D)$ s'établissent sur les marchés (ces prix sont, en fait, des fonctions de la valeur faciale de la dette $D$). La règle de formation des prix est la suivante : comme dans KYLE [1985], les non-informés sont contrepartie des ordres lancés par les autres intervenants sur le marché. Dans ce modèle cela revient à supposer que des *« teneurs de marché »* non-informés achètent les titres émis par la firme et sont contrepartie des ordre lancés par les informés et les spéculateurs. Toujours comme dans KYLE [1985], le marché est supposé concurrentiel dans le sens où les non-informés ont une espérance de profit nulle étant donnée l'information dont ils disposent [13]. L'information des non-informés, à ce stade du *« jeu »*, consiste en l'observation de $d_t$, $\widetilde{Z}_t^a$ et $\widetilde{Z}_t^d$. Si l'on note $(q, 1-q)$ les croyances *a posteriori* des teneurs de marché (une fois $d_t, \widetilde{Z}_t^a$ et $\widetilde{Z}_t^d$ observés), les prix $V_t^a\,(D)$ et $V_t^d\,(D)$ vérifient :

$$V_t^a\,(D) = q\overline{Y}_b^a\,(D) + (1-q)\,\overline{Y}_m^a\,(D) \tag{2.7}$$

$$V_t^d\,(D) = q\overline{Y}_b^d\,(D) + (1-q)\,\overline{Y}_m^d\,(D) \tag{2.8}$$

Une fois les prix formés, la quantité exacte $\alpha$ d'actions émises et le montant exact de la valeur faciale de la dette $D$ s'établissent selon l'équation 2.5.

*Date 3 : Le cash-flow du projet d'investissement se réalise*

La chronologie qui vient d'être présentée est très proche de celle du modèle d'échange d'actifs financiers de KYLE [1985]. Cependant, il y a certaines différences fondamentales avec ce modèle : le nombre et la nature des titres échangés (actions et dette au lieu d'un seul titre), les titres échangés sont émis par une entreprise et cette entreprise choisit sa structure financière, la nature du bruit présent sur le marché, l'existence de plusieurs informés comme dans KYLE [1989] avec détermination endogène du nombre d'informés comme dans BOOT et THAKOR [1993].

13. Concurrence *à la Bertrand*.

# 3 La révélation de l'information

## 3.1 Révélation de l'information et stratégie d'émission

*A priori*, la structure financière $d_t$ choisie par la firme à la date 0 peut dépendre de son type $t$. En effet, il s'agit d'un jeu de signal dans lequel le signal envoyé par la firme peut révéler $(d_b \neq d_m)$ ou ne pas révéler $(d_b = d_m)$ le type de la firme.

L'objectif de l'entreprise de type $t$ est de maximiser la richesse de ses actionnaires en place $W_{0t}(d)$ en choisissant sa stratégie d'émission $d_t$. Les actionnaires en place recevront une part $1 - \alpha$ du revenu des actions de l'entreprise. À la date 0, $\alpha$ et $D$ n'étant pas encore connus, la firme doit donc résoudre le programme suivant :

$$\max_d W_{0t}(d) = E_t\left[(1 - \widetilde{\alpha})\,\overline{Y}_t^a\left(\widetilde{D}\right)\right] \tag{3.1}$$

où $E_t[.]$ est l'opérateur espérance conditionnellement au type de la firme.

DÉFINITION 1. Un équilibre bayesien parfait de ce jeu de signal est un couple de stratégies $d_b$ et $d_m$ et une fonction de croyances $q(d)$ tels que :

$$d_b = \arg\max_d \left[W_{0b}(d)\right]$$

et

$$d_m = \arg\max_d \left[W_{0m}(d)\right]$$

avec $q(d_b)$ et $q(d_m)$ définies selon la règle de Bayes.

On peut démontrer la Proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. Les hypothèses $H5$ et $H7$ sur le comportement de la firme impliquent qu'il existe une infinité d'équilibres mélangeants $(d_b, d_m, q(.))$ caractérisés par :

$$d_b = d_m = d^*$$

$$q\left(d^*\right) = \frac{1}{2},\ \ \forall d \neq d^*,\ \ q(d) = 0$$

Il n'existe pas d'équilibre séparateur.

***Démonstration*** : Annexe 3

La mauvaise firme a toujours intérêt à se faire passer pour une bonne firme afin d'obtenir des conditions de financement plus favorables. Par conséquent, il n'y a pas d'équilibre séparateur. En revanche, il existe plusieurs équilibres mélangeants. Le problème de la sélection d'un équilibre mélangeant parmi tous les équilibres possibles sera abordé dans la section 7. Par la suite, on notera $d^*$ la stratégie financière adoptée par l'entreprise (bonne ou mauvaise) à l'équilibre mélangeant sélectionné. Cette stratégie financière étant indépendante du type de la firme, les ordres $\widetilde{Z}_t^a$ et $\widetilde{Z}_t^d$ lancés par les informés et les spéculateurs seront donc les seules sources d'information sur le type de la firme pour les teneurs de marché.

## 3.2 Révélation de l'information par les quantités

À la date 2, en lançant des ordres sur le marché, les informés vont révéler (aux non-informés) une partie de l'information qu'ils détiennent. On note $x_t^a$ l'ordre d'un informé sur le marché des actions et $x_t^d$ l'ordre d'un informé sur le marché de la dette lorsque la firme est de type $t$. Les expressions de $\widetilde{Z}_t^a$ et de $\widetilde{Z}_t^d$ sont donc les suivantes :

$$\widetilde{Z}_t^a = n^* x_t^a + \gamma \widetilde{l} \tag{3.2}$$

$$\widetilde{Z}_t^d = n^* x_t^d + (1-\gamma)\widetilde{l} \tag{3.3}$$

Comme $\widetilde{l}$ suit une loi uniforme dont le support est $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on a en particulier :

$$\widetilde{Z}_b^a \sim U\left[n^* x_b^a - \frac{\gamma}{2}, n^* x_b^a + \frac{\gamma}{2}\right] \text{ et } \widetilde{Z}_m^a \sim U\left[n^* x_m^a - \frac{\gamma}{2}, n^* x_m^a + \frac{\gamma}{2}\right] \tag{3.4}$$

Les quantités $\widetilde{Z}_b^a$ et $\widetilde{Z}_m^a$ suivent donc deux lois uniformes caractérisées par des supports différents et des densités identiques égales à $\frac{1}{\gamma}$. Si on note $\Delta^a$ l'intersection de ces deux supports, deux états de la nature peuvent se produire à la date 2 : soit $\widetilde{Z}_t^a \in \Delta^a$ et aucune information sur le type de la firme n'est révélée car $\widetilde{Z}_b^a$ et $\widetilde{Z}_m^a$ ont la même probabilité d'appartenir à $\Delta^a$ puisqu'ils ont la même densité, soit $\widetilde{Z}_t^a \notin \Delta^a$ et l'observation de $\widetilde{Z}_t^a$ révèle parfaitement le type de la firme.

On peut faire le même raisonnement pour $\widetilde{Z}_b^d$ et $\widetilde{Z}_m^d$ en notant $\Delta^d$ l'intersection du support de ces deux variables aléatoires de même densité $\frac{1}{1-\gamma}$ :

$$\widetilde{Z}_b^d \sim U\left[n^* x_b^d - \frac{1-\gamma}{2}, n^* x_b^d + \frac{1-\gamma}{2}\right] \tag{3.5}$$

$$\text{et } \widetilde{Z}_m^d \sim U\left[n^* x_m^d - \frac{1-\gamma}{2}, n^* x_m^d + \frac{1-\gamma}{2}\right]$$

Au total, nous aurons deux états de la nature possibles à la date 2 :

– un état informatif dans lequel le type de la firme est parfaitement révélé. Cela a lieu [14] lorsque $\widetilde{Z}_t^a \notin \Delta^a$ ou/et $\widetilde{Z}_t^d \notin \Delta^d$. Dans cet état :

$$(3.6) \qquad V_t^a(D) = \overline{Y}_t^a(D) \quad \text{et} \quad V_t^d(D) = \overline{Y}_t^d(D)$$

– un état non informatif (ENI) dans lequel aucune information n'est révélée aux teneurs de marché. Cela a lieu [15] lorsque $\widetilde{Z}_t^a \in \Delta^a$ et $\widetilde{Z}_t^d \in \Delta^d$. Dans cet état, les teneurs de marché n'apprennent rien et les prix sont calculés à l'aide des croyances *a priori* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ :

$$(3.9) \qquad V_t^a(D) = \frac{\overline{Y}_b^a(D) + \overline{Y}_m^a(D)}{2} \quad \text{et } V_t^d(D) = \frac{\overline{Y}_b^d(D) + \overline{Y}_m^d(D)}{2}$$

On notera $\alpha_{eni}$ et $D_{eni}$ la quantité d'actions émises et la valeur faciale de la dette dans l'ENI (*cf.* équation 2.5) :

$$(3.8) \quad \alpha_{eni} = \frac{(1-d^*)I}{\frac{\overline{Y}_b^d(D_{eni}) + \overline{Y}_m^d(D_{eni})}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{Y}_b^d(D_{eni}) + \overline{Y}_m^d(D_{eni})}{2} = d^*I$$

Ces deux égalités impliquent que le choix d'une variable parmi les trois variables $\alpha_{eni}$, $D_{eni}$ et $d^*$ implique forcément le choix des deux autres. Autrement dit, ces trois variables sont liées. En particulier, en annonçant son taux d'endettement $d^*$ à la date 0, la firme choisit un couple $(\alpha_{eni}, D_{eni})$ particulier [16].

De plus, dans l'ENI, l'équation 2.6 s'écrit :

$$(3.9) \qquad \alpha_{eni}\frac{\overline{Y}_b^d(D_{eni}) + \overline{Y}_m^d(D_{eni})}{2} + \frac{\overline{Y}_b^d(D_{eni}) + \overline{Y}_m^d(D_{eni})}{2} = I$$

Cette équation établit une relation décroissante entre $\alpha_{eni}$ et $D_{eni}$. En effet, plus la firme augmente son émission d'actions ($\alpha_{eni}$ augmente) moins elle a besoin de s'endetter ($D_{eni}$ diminue) pour financer $I$ (*cf.* Annexe 4).

En conclusion, dans l'état informatif, l'entreprise est correctement évaluée par les investisseurs sur le marché. En revanche, dans l'ENI, une bonne entreprise est sous-évaluée alors qu'une mauvaise entreprise est surévaluée.

La typicité de ces résultats est naturellement due à l'hypothèse d'une distribution uniforme. Le choix d'une distribution de probabilité différente (comme la loi normale, par exemple) aurait donné une infinité d'états de la nature, chacun correspondant à un degré de révélation de l'information différent. La distribution uniforme, elle, néglige les états de la nature intermédiaires et ne

---

14. Pour que le type de la firme soit révélé, il suffit qu'il soit révélé sur un seul marché.
15. Pour que le type de la firme ne soit pas révélé, il faut qu'il ne soit révélé sur aucun des deux marchés.
16. En particulier, tous les agents anticipent $\alpha_{eni}$ et $D_{eni}$ dès la date 0 en apprenant la valeur de $d^*$.

retient que les deux états de la nature extrêmes, celui où toute l'information est révélée et celui où aucune information n'est révélée. Autrement dit, le choix de la loi uniforme doit être interprété comme une simplification car il permet de ne retenir que ce qui est essentiel aux résultats et permet aussi des calculs plus simples [17]. En effet, le point important est que, dans tous les cas, l'observation de $\widetilde{Z}_t^a$ et de $\widetilde{Z}_t^d$ révèle de l'information car ces ordres sont lancés par des agents détenant une information privilégiée.

C'est uniquement dans l'ENI qu'un détenteur d'information (informé ou spéculateur) peut obtenir un profit positif en tirant avantage de son information. Dans l'état informatif, le gain de tout intervenant est nul puisque la valeur de marché des titres échangés est égale à la vraie valeur de ces titres. Par conséquent, seul l'ENI sera pertinent dans le calcul des spéculateurs et des informés.

# 4 Le comportement des spéculateurs

Les spéculateurs, après avoir pris connaissance de leur information (signaux), peuvent intervenir sur deux marchés : le marché des actions et le marché de la dette. Se pose donc le problème de la répartition $\gamma$ des interventions des spéculateurs entre ces deux marchés. Dans cette section, on montre que les spéculateurs interviennent exclusivement sur le marché des actions. En effet, on montre qu'il est plus rentable d'intervenir sur le marché des actions lorsque l'on détient une information privilégiée (signal) et que l'on a un comportement concurrentiel.

Une fois la valeur de son signal observée, chaque spéculateur révise ses croyances sur le type de la firme. On note $(p_b, 1-p_b)$les croyances *a posteriori* d'un spéculateur.

À la date 1, la valeur des actions émises par la firme dans l'ENI pour ce spéculateur s'écrit $\alpha_{eni}\left[p_b\overline{Y}_b^a\left(D_{eni}\right)+\left(1-p_b\right)\overline{Y}_m^a\left(D_{eni}\right)\right]$ et la valeur de la dette s'écrit $p_b\overline{Y}_b^d\left(D_{eni}\right)+\left(1-p_b\right)\overline{Y}_m^d\left(D_{eni}\right)$.

Étant donné la nature des signaux perçus par les spéculateurs (*cf.* Annexe 2), deux cas peuvent se produire : soit $p_b > \frac{1}{2}$, soit $p_b < \frac{1}{2}$.

Si $p_b > \frac{1}{2}$, alors les propriétés 3 et 4 impliquent :

$$\alpha_{eni}\left[p_b\overline{Y}_b^a\left(D_{eni}\right)+\left(1-p_b\right)\overline{Y}_m^a\left(D_{eni}\right)\right] > \alpha_{eni}\left[\frac{\overline{Y}_b^a\left(D_{eni}\right)+\overline{Y}_m^a\left(D_{eni}\right)}{2}\right] \tag{4.1}$$

17. On peut retrouver un nombre fini d'états de la nature en supposant, comme dans GORTON et PENNACCHI [1990], que le « *liquidity trading* » peut prendre uniquement deux valeurs. Toutefois, nous préférons ici l'hypothèse de la loi uniforme car elle permet d'éviter des résultats spécifiques qui seraient trop liés à une hypothèse de loi discrète.

et

$$(4.2) \qquad p_b\overline{Y}_b^d(D_{eni}) + (1-p_b)\,\overline{Y}_m^d(D_{eni}) > \frac{\overline{Y}_b^d(D_{eni}) + \overline{Y}_m^d(D_{eni})}{2}$$

Le spéculateur considère que les titres émis par la firme (actions et dette) sont sous-évalués dans l'ENI.

Dans ce cas, le spéculateur va acheter les titres émis par la firme.

L'espérance de rendement $\overline{R}^a(D_{eni})$ qu'il compte retirer d'une intervention sur le marché des actions est égale à la probabilité de l'ENI multipliée par la rentabilité obtenue dans l'ENI :

(4.3)

$$\overline{R}^a(D_{eni}) = \text{prob}(ENI)\left\{\frac{\alpha_{eni}\left[p_b\overline{Y}_b^a(D_{eni}) + (1-p_b)\,\overline{Y}_m^a(D_{eni})\right]}{\alpha_{eni}\left[\dfrac{\overline{Y}_b^a(D_{eni}) + \overline{Y}_m^a(D_{eni})}{2}\right]}\right\}$$

$$= \text{prob}(ENI)\left\{\frac{p_b\overline{Y}_b^a(D_{eni}) + (1-p_b)\,\overline{Y}_m^a(D_{eni})}{\dfrac{\overline{Y}_b^a(D_{eni}) + \overline{Y}_m^a(D_{eni})}{2}}\right\}$$

Sachant que le spéculateur a un comportement concurrentiel, il ne tient pas compte de l'influence de ses ordres d'achat ou de vente sur la probabilité de l'ENI qu'il considère donc comme exogène.

L'espérance de rendement $\overline{R}^d(D_{eni})$ d'une intervention sur le marché de la dette s'écrit :

$$(4.4) \quad \overline{R}^d(D_{eni}) = \text{prob}(ENI)\left[\frac{p_b\overline{Y}_b^d(D_{eni}) + (1-p_b)\,\overline{Y}_m^d(D_{eni})}{\dfrac{\overline{Y}_b^d(D_{eni}) + \overline{Y}_m^d(D_{eni})}{2}}\right]$$

Si $p_b < \dfrac{1}{2}$ alors les inégalités 4.1 et 4.2 sont renversées.

Le spéculateur considère que les titres émis par la firme (actions et dette) sont surévalués dans l'ENI.

Dans ce cas, le spéculateur va vendre à découvert les titres émis par la firme.

L'espérance de rendement qu'il compte retirer d'une intervention sur le marché des actions s'écrit :

$$(4.5)\qquad \overline{R}^a\left(D_{eni}\right) = \text{prob}\left(ENI\right)\left\{\frac{\dfrac{\overline{Y}_b^a\left(D_{eni}\right)+\overline{Y}_m^a\left(D_{eni}\right)}{2}}{p_b\overline{Y}_b^a\left(D_{eni}\right)+\left(1-p_b\right)\overline{Y}_m^a\left(D_{eni}\right)}\right\}$$

L'espérance de rendement d'une intervention sur le marché de la dette s'écrit :

$$(4.6)\qquad \overline{R}^d\left(D_{eni}\right) = \text{prob}\left(ENI\right)\left[\frac{\dfrac{\overline{Y}_b^d\left(D_{eni}\right)+\overline{Y}_m^d\left(D_{eni}\right)}{2}}{p_b\overline{Y}_b^d\left(D_{eni}\right)+\left(1-p_b\right)\overline{Y}_m^d\left(D_{eni}\right)}\right]$$

On peut démontrer la Proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. L'hypothèse $H6$ sur la distribution des *cash-flows* implique que : $\forall D_{eni},\ \overline{R}^a\left(D_{eni}\right) > \overline{R}^d\left(D_{eni}\right)$.

***Démonstration*** : Annexe 5

Les revenus de la dette sont constants sauf en cas de faillite. Les revenus des actions sont des revenus résiduels liés aux performances de la firme. Les revenus versés par les actions sont donc beaucoup plus dépendants de la qualité de la firme (bonne ou mauvaise) que ne le sont les revenus des titres de dette. La valeur attribuée à une action est donc plus sensible à l'information détenue sur l'entreprise que la valeur attribuée à un titre de dette. C'est pourquoi les spéculateurs rentabilisent mieux leur information en intervenant sur le marché des actions.

La Proposition 4.1 et les hypothèses $H1$, $H10$, $H11$ et $H12$ sur le comportement des spéculateurs impliquent le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. Tous les spéculateurs interviennent sur le marché des actions :

$$\gamma = 1.$$

Quelles que soient ses croyances, chaque spéculateur a intérêt à intervenir uniquement sur le marché des actions.

Par conséquent, $\gamma = 1$ (tous les spéculateurs interviennent sur le marché des actions) est le seul équilibre possible quand la firme émet des actions et de la dette.

À l'équilibre, le marché de la dette n'est donc pas bruité. Ce résultat n'a été établi que lorsque la firme émet à la fois de la dette et des actions : les spéculateurs délaissent le marché de la dette pour celui des actions. Lorsque la firme n'émet que de la dette, on supposera cependant que le marché de la dette reste non bruité. En effet, on a vu que sur le marché des actions, le bruit est proportionnel au montant de l'émission d'actions (*cf.* section 2.1.2). Quand ce montant tend vers zéro le bruit sur le marché des actions tend lui aussi vers zéro. Cependant, tant que l'émission d'actions reste positive, le marché de la dette n'est pas bruité (*cf.* Corollaire 1). Par continuité, on supposera donc que lorsque la firme n'émet plus d'actions le marché de la dette reste non bruité. Afin de justifier cette hypothèse, on peut supposer que les spéculateurs ont accès à des marchés plus rentables ailleurs (par exemple, actions d'autres firmes sur lesquelles ils ont aussi de l'information).

Nous avons donc :

$$\widetilde{Z}_t^a = n^* x_t^a + \widetilde{l} \text{ et } \widetilde{Z}_t^d = n^* x_t^d \tag{4.7}$$

Étant donné que le marché de la dette n'est pas bruité par les ordres des spéculateurs, tout informé intervenant sur ce marché révèlerait immédiatement son information. Par conséquent, on aura $x_t^d = 0, \forall t \in (b,m)$ et $\widetilde{Z}_t^d \equiv 0$. Seuls les non-informés interviennent sur le marché de la dette.

Comme $\widetilde{Z}_t^d \equiv 0$, seule la variable $\widetilde{Z}_t^a$ est susceptible de révéler de l'information sur le type de la firme. On a :

$$\widetilde{Z}_b^a \sim U\left[n^* x_b^a - \frac{1}{2}, n^* x_b^a + \frac{1}{2}\right] \text{ et } \widetilde{Z}_m^a \sim U\left[n^* x_m^a - \tfrac{1}{2}, n^* x_m^a + \frac{1}{2}\right] \tag{4.8}$$

Comme $x_b^a$ est positif et $x_m^a$ est négatif (les informés achètent lorsque la firme est bonne et vendent à découvert lorsqu'elle mauvaise), l'intersection des deux supports s'écrit [18] :

$$\Delta^a = \left[n^* x_b^a - \frac{1}{2}, n^* x_m^a + \frac{1}{2}\right] \tag{4.9}$$

La probabilité de l'ENI est donc égale à la probabilité que $\widetilde{Z}_t^a$ appartienne à $\Delta^a$. Cette probabilité est indépendante du type de la firme puisque $\widetilde{Z}_b^a$ et $\widetilde{Z}_m^a$ ont la même densité égale à 1.

En calculant cette probabilité, on obtient la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2

L'hypothèse $H12$ implique que *:*

$$\Pr(ENI) = n^* x_m^a - n^* x_b^a + 1$$

***Démonstration*** : Annexe 6

18. *A priori* cette intersection pourrait être nulle si $n^* x_b^a - \frac{1}{2} > n^* x_m^a + \frac{1}{2}$. Dans ce cas, la probabilité de l'ENI est nulle et le type de la firme est systématiquement révélé au marché. Cependant, les informés vont choisir $x_b^a$ et $x_m^a$ de façon que la probabilité de l'ENI soit positive. Dans le cas contraire, les informés révèleraient systématiquement leur information au marché et ne feraient jamais de gain.

La probabilité de l'ENI dépend des ordres lancés par les informés. En effet, ces derniers, en intervenant sur le marché, vont révéler une partie de l'information qu'ils détiennent en modifiant la distribution des deux états de la nature à la date 2.

# 5 Comportement stratégique des informés

Une fois le type de la firme découvert, chaque informé va lancer un ordre sur le marché des actions ($x_b^a$ ou $x_m^a$) à la date 2. On rappelle que le comportement des informés est supposé non concurrentiel (hypothèse $H_9$). Par conséquent, chaque informé tient compte de l'impact de son ordre sur la distribution des deux états de la nature à la date 2.

Dans l'état informatif, le gain réalisé par n'importe quel investisseur est nul puisque la valeur de marché des titres est égale à leur vraie valeur. C'est donc dans l'ENI que les informés vont rentabiliser leur acquisition d'information. Dans cet état, ils ont une information supérieure à celle des *« teneurs de marché »* non-informés.

Si la firme est bonne, la Proposition 4.2 permet d'écrire l'espérance de gain que maximise chaque informé $i$ $\left(i = 1,\ldots,n^*\right)$ par rapport à la quantité d'actions $x_b^{ai}$ qu'il veut acheter :

$$\max_{x_b^{ai}} \left\{ \left[ x_m^{ai} - x_b^{ai} + \left(n^* - 1\right) x_m^a - \left(n^* - 1\right) x_b^a + 1 \right] \left[ x_b^{ai} \alpha_{eni} \left( \overline{Y}_b^a \left(D_{eni}\right) - \frac{\overline{Y}_b^a \left(D_{eni}\right) + \overline{Y}_m^a \left(D_{eni}\right)}{2} \right) \right] \right\} \tag{5.1}$$

avec

$x_b^{ai}$ la quantité d'actions achetée par l'informé $i$ lorsque $t = b$.

$x_m^{ai}$ la quantité d'actions achetée par l'informé $i$ lorsque $t = m$.

$(n^* - 1)x_b^a$ et $(n^* - 1)x_m^a$ les quantités échangées par les autres informés lorsque respectivement $t = b$ et $t = m$.

Le premier terme dans la fonction objectif de l'informé représente la probabilité de l'ENI dans l'expression de laquelle on a isolé les ordres de l'informé $i$. On est dans le cas où la firme est bonne ; il faut donc interpréter $x_m^{ai}$ et $x_m^a$ comme les quantités que l'informé $i$ et les autres informés auraient choisies si la firme avait été mauvaise. En particulier, $x_m^{ai}$ est donc la quantité qui maximise l'espérance de gain de l'informé $i$ lorsque la firme est mauvaise. Le second terme dans la fonction objectif de l'informé $i$ est le gain de l'informé une fois l'ENI réalisé. C'est la différence entre la vraie valeur des actions acquises $x_b^{ai}\alpha_{eni}\overline{Y}_b^a(D_{eni})$ et leur valeur de marché

$$x_b^{ai}\alpha_{eni}\frac{\overline{Y}_b^a(D_{eni})+\overline{Y}_m^a(D_{eni})}{2}.$$

Notons $S^a(\alpha_{eni})$ la sous-évaluation des actions émises [19] :

$$\begin{aligned}S^a(\alpha_{eni}) &= \alpha_{eni}\left[\overline{Y}_b^a(D_{eni})-\frac{\overline{Y}_b^a(D_{eni})+\overline{Y}_m^a(D_{eni})}{2}\right]\\ &= \frac{\alpha_{eni}\left[\overline{Y}_b^a(D_{eni})-\overline{Y}_m^a(D_{eni})\right]}{2}\end{aligned}\quad (5.2)$$

Le programme précédent se réécrit :

$$\max_{x_b^{ai}}\left\{\left[x_m^{ai}-x_b^{ai}+(n^*-1)x_m^a-(n^*-1)x_b^a+1\right]\left[x_b^{ai}S^a(\alpha_{eni})\right]\right\}\quad (5.3)$$

Lorsque la firme est mauvaise, on définie de la même façon le programme d'un informé $i$ :

$$\max_{x_m^{ai}}\left\{\left[x_m^{ai}-x_b^{ai}+(n^*-1)x_m^a-(n^*-1)x_b^a+1\right]\left[-x_m^{ai}S^a(\alpha_{eni})\right]\right\}\quad (5.4)$$

La résolution de ces deux programmes permet d'établir la Proposition suivante :

PROPOSITION 5.1. Les hypothèses $H_1$ et $H_9$ sur le comportement des informés impliquent que : $x_b^a=-x_m^a=\dfrac{1}{2n^*+1}$ et $\Pr(ENI)=\dfrac{1}{2n^*+1}$

***Démonstration*** : Annexe 7

Lorsque la firme est bonne, les informés achètent les actions émises par l'entreprise ($x_b^a>0$). En effet, avec une certaine probabilité (qui est celle de l'ENI) ces titres seront sous-évalués par « le marché » à la date 2. En revanche, lorsque la firme est mauvaise, les informés vendent à découvert ($x_m^a<0$) car avec une certaine probabilité les actions émises seront surévaluées.

L'ordre lancé par un informé diminue avec le nombre d'informés $n^*$. C'est un résultat classique de concurrence imparfaite entre informés (KYLE [1989]) ; chaque informé limitant d'autant plus sa position que le nombre d'informés concurrents est élevé. Cependant, l'ordre total lancé par les informés $\left|n^*x_t^a\right|$ augmente avec le nombre d'informés $n^*$. En effet, chaque informé ne diminue *« pas assez »* sa position lorsque $n^*$ augmente parce que

19. Étant donné qu'il existe une relation monotone décroissante entre $\alpha_{eni}$ et $D_{eni}$ (*cf.* équation 2.6), on peut écrire indifféremment la sous-évaluation des actions émises comme fonction de l'une ou de l'autre de ces deux variables. Nous choisissons $\alpha_{eni}$.

son comportement devient de plus en plus concurrentiel. Par conséquent, les prix deviennent de plus en plus informatifs avec le nombre d'informés présents sur le marché. Avec le choix d'une distribution de probabilité uniforme, ce phénomène se traduit par une diminution de la probabilité de l'ENI avec [20] $n^*$. Enfin, si $n^* = 0$, la probabilité de l'ENI est égale à 1 : les ordres lancés sur le marché ne sont pas informatifs sur le type de la firme.

# 6 Le nombre d'informés à l'équilibre

À la date 1, les non-informés vont décider de s'informer tant que l'espérance de gain à s'informer est positive. On note $G(n)$ l'espérance de gain à s'informer pour un non-informé lorsqu'il y a déjà $n$ agents informés. En utilisant la Proposition 5.1, on obtient l'expression de $G(n)$ :

$$
\begin{aligned}
G(n) = &- C + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2n+1}\right) x_b^{ai} S^a(\alpha_{eni})\right\} \\
&+ \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2n+1}\right)\left(-x_m^{ai} S^a(\alpha_{eni})\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Le premier terme dans l'expression de $G(n)$ représente le coût à s'informer. Le deuxième terme (resp. le dernier terme) correspond à l'espérance de gain liée à la détention d'une information privilégiée lorsque la firme est bonne (resp. mauvaise) multipliée par la probabilité *a priori* $\frac{1}{2}$ d'avoir affaire à une bonne (resp. mauvaise) firme. Toujours en utilisant la Proposition 5.1, on peut réécrire $G(n)$ de la façon suivante :

$$
G(n) = -C + \frac{S^a(\alpha_{eni})}{(2n+1)^2}
\tag{6.2}
$$

Le gain à s'informer est donc une fonction décroissante de $n$. En effet, la rente monopolistique liée à la détention d'information privilégiée diminue avec le nombre d'informés sur le marché. En effet, on a vu que plus il y a d'informés plus les prix deviennent informatifs c'est-à-dire plus la probabilité de l'ENI diminue. Or, c'est dans l'ENI que les informés réalisent un gain. Enfin, le gain à s'informer est croissant avec $S^a(\alpha_{eni})$ qui mesure l'amplitude de la sous-évaluation ou de la surévaluation des actions émises par la firme dans l'ENI.

20. Avec une distribution de probabilité plus générale, ce phénomène se serait traduit par un déplacement de la distribution caractérisé par une pondération plus forte des valeurs de marché proches de la vraie valeur de la firme.

On obtient le nombre d'informés $n^*$ en posant :

$$G(n^*) = 0 \tag{6.3}$$

Les résultats obtenus sont résumés dans la Proposition suivante :

PROPOSITION 6.1.

$$G(n^*) = 0 \Rightarrow 2n^* + 1 = \max\left\{\left[\frac{S^a(\alpha_{eni})}{C}\right]^{\frac{1}{2}}, 1\right\}$$

et l'hypothèse $H_6$ implique que :

$$\forall \alpha_{eni} \in [0,1], \quad S^{a'}(\alpha_{eni}) > 0.$$

***Démonstration*** : Annexe 8

Lorsque le coût à s'informer est trop élevé $\left(C \geqslant S^a(\alpha_{eni})\right)$ le gain à s'informer est négatif quel que soit $n$ (*cf.* équation 6.2). Le nombre d'informés $n^*$ est donc nul.

Si $C < S^a(\alpha_{eni})$, le nombre d'informés devient positif et $n^*$ augmente avec $S^a(\alpha_{eni}) = \dfrac{\alpha_{eni}\left[\overline{Y}_b^a(D_{eni}) - \overline{Y}_m^a(D_{eni})\right]}{2}$ pour deux raisons :

Tout d'abord, $\dfrac{\left[\overline{Y}_b^a(D_{eni}) - \overline{Y}_m^a(D_{eni})\right]}{2}$ mesure l'amplitude de la sous-évaluation ou la surévaluation des actions de la firme dans l'ENI.

Plus *« le marché »* se trompe dans son évaluation des actions de la firme, plus la détention d'information est rentable et plus nombreux sont les agents à s'informer.

La seconde raison est que plus le marché des actions est large ($\alpha_{eni}$ élevé), plus il y a de spéculateurs qui interviennent sur ce marché (*cf.* section 2.1.2). Autrement dit, le bruit augmente avec la taille du marché. Ce phénomène permet aux informés d'augmenter le montant de leurs ordres sans révéler davantage d'information. En effet, les interventions des spéculateurs, qui bruitent le marché, sont proportionnelles à $\alpha_{eni}\dfrac{\overline{Y}_b^a(D_{eni}) + \overline{Y}_m^a(D_{eni})}{2.}$. Par conséquent, les informés peuvent eux aussi lancer des ordres proportionnels à $\alpha_{eni}\dfrac{\overline{Y}_b^a(D_{eni}) + \overline{Y}_m^a(D_{eni})}{2.}$.

Autrement dit, quand $\alpha_{eni}\dfrac{\overline{Y}_b^a(D_{eni}) + \overline{Y}_m^a(D_{eni})}{2.}$ augmente les informés peuvent prendre des positions plus importantes sans révéler davantage d'information car les spéculateurs font la même chose.

Enfin, comme $S^a(\alpha_{eni})$ croît avec [21] $\alpha_{eni}$, on en conclut qu'une augmentation de l'émission d'actions $(1-d^* \text{ ou } \alpha_{eni})$ est un moyen de stimuler l'acquisition d'information. C'est le rôle informationnel des actions qui sera déterminant dans la stratégie financière de la firme.

Notons $\overline{\alpha}_{eni}$ la valeur maximale de $\alpha_{eni}$ que l'on obtient quand la firme se finance exclusivement par actions [22].

Étant donné la Proposition 6.1, $S^a(\overline{\alpha}_{eni})$ est la sous-évaluation maximale des actions émises par la firme $\left(\forall \alpha_{eni} < \overline{\alpha}_{eni}, S^a(\alpha_{eni}) < S^a(\overline{\alpha}_{eni})\right)$.

Les propositions 5.1 et 6.1 nous permettent d'établir le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2. $\Pr(ENI) = \min\left\{\left[\dfrac{C}{S^a(\alpha_{eni})}\right]^{\frac{1}{2}}, 1\right\}$ c'est-à-dire :

Si $C \geqslant S^a(\overline{\alpha}_{eni})$ alors $\Pr(ENI) = 1$.

Si $C < S^a(\overline{\alpha}_{eni})$, il existe $\widehat{\alpha}_{eni}$ tel que :

$\Pr(ENI) = 1$ sur $[0, \widehat{\alpha}_{eni}[$

$\Pr(ENI) = \left[\dfrac{C}{S^a(\alpha_{eni})}\right]^{\frac{1}{2}}$ décroît avec $\alpha_{eni}$ (resp croît avec $D_{eni}$) sur $[\widehat{\alpha}_{eni}, 1]$

***Démonstration*** : Annexe 9

Si $C \geqslant S^a(\overline{\alpha}_{eni})$, l'acquisition d'information n'est pas rentable quelle que soit la structure financière choisie par la firme $(\forall \alpha_{eni} \leqslant \overline{\alpha}_{eni})$. En effet, le gain d'un informé est toujours négatif (*cf.* équation 6.2). Par conséquent, le nombre d'informés à l'équilibre $n^*$ est égal à zéro et $P(ENI) = 1$.

En revanche, si $C < S^a(\overline{\alpha}_{eni})$, des structures financières incluant suffisamment d'actions $(\alpha_{eni} \geqslant \widehat{\alpha}_{eni})$ incitent les agents à s'informer selon la règle suivante : plus l'émission d'actions est importante, plus le nombre d'informés $n^*$ est grand. En effet, on a vu qu'une augmentation de l'émission d'actions stimule l'acquisition d'information. C'est le rôle informationnel des actions. Cela se traduit par une diminution de la probabilité de l'ENI ou encore par une augmentation de la probabilité de l'état informatif. Émettre des actions est donc un moyen pour la bonne entreprise de réduire la probabilité d'être sous-évaluée.

---

21. Quand on augmente $\alpha_{eni}$ les deux termes dans l'expression de $S^a(\alpha_{eni})$ augmentent. En effet, la sous-évaluation des actions de la firme $\dfrac{\overline{Y}_b^a(D_{eni}) - \overline{Y}_m^a(D_{eni})}{2}$ augmente aussi avec $\alpha_{eni}$.

22. On a $\overline{\alpha}_{eni}\dfrac{\overline{Y}_b + \overline{Y}_m}{2} = I$ et $D_{eni} = 0$.

# 7 La stratégie financière de la bonne firme

On rappelle que l'équilibre du jeu de signal qui se déroule à la date 0 est un équilibre mélangeant. Comme dans MYERS et MAJLUF [1984] plusieurs équilibres mélangeants sont possibles (*cf.* Annexe 2). On choisira donc d'étudier le même équilibre que MYERS et MAJLUF [1984] ; équilibre [23] qui a donné naissance à la théorie du *pecking order*. Il s'agit de l'équilibre mélangeant pour lequel l'espérance de gain de la bonne entreprise est maximale. En effet, la mauvaise firme imitant systématiquement la bonne, on considère que la bonne firme va choisir la stratégie financière qui minimise la sous-évaluation dont elle est victime [24].

On recherche donc la stratégie d'émission $d^*$ qui maximise la richesse des actionnaires en place dans la bonne entreprise $W_{0b}(d)$.

Grâce à la Proposition 5.1, l'équation 3.1 peut se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \max_d W_{0b}(d) = & \left(1 - \frac{1}{2n^*+1}\right)\left(\overline{Y}_b - I\right) \\ & + \left(\frac{1}{2n^*+1}\right)(1-\alpha_{eni})\,\overline{Y}^a_b(D_{eni}) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Le premier terme dans l'expression de cette richesse espérée est égal à la probabilité de l'état informatif multipliée par la richesse des actionnaires en place dans cet état. Dans l'état informatif, la firme est correctement évaluée par *« le marché »* et la richesse des actionnaires en place est égale à la valeur actualisée nette du projet d'investissement $\overline{Y}_b - I$.

Le second terme dans l'expression de $W_{0b}(d)$ est égal à la probabilité de l'ENI multipliée par la richesse des actionnaires en place dans cet état. Cette richesse correspond à la part $1-\alpha_{eni}$ des revenus des actions de la firme déterminée par les croyances des non-informés dans l'ENI.

On démontre en Annexe 10 que la maximisation de la richesse des actionnaires en place revient à minimiser l'espérance de sous-évaluation des titres émis par la bonne entreprise que l'on notera $\overline{S}(d)$. En effet, la richesse des actionnaires en place est égale à la valeur actualisée nette du projet d'investissement diminuée de l'espérance de la sous-évaluation des titres émis. Par conséquent, le programme précédent devient :

$$\min_d \overline{S}(d) = \left(\frac{1}{2n^*+1}\right)\left[\alpha_{eni}\overline{Y}^a_b(D_{eni}) + \overline{Y}^d_b(D_{eni}) - I\right] \tag{7.2}$$

23. Ce même équilibre a été repris par BOOT et THAKOR [1993].

24. On peut démontrer que parmi tous les équilibres possibles cet équilibre est le seul à être robuste au critère de divinité universelle de BANKS et SOBEL [1987]. Pour la démonstration, s'adresser à l'auteur.

L'espérance de sous-évaluation des titres émis est égale à la probabilité de l'ENI multipliée par la différence entre la vraie valeur des titres émis et leur valeur de marché (cette différence étant nulle dans l'état informatif).

Notons $S(D_{eni})$ la sous-évaluation dans l'ENI des titres émis [25].

$$S(D_{eni}) = \alpha_{eni}\overline{Y}_b^a(D_{eni}) + \overline{Y}_b^d(D_{eni}) - I \tag{7.3}$$

On peut démontrer la Proposition suivante :

PROPOSITION 7.1. L'hypothèse $H6$ implique que : $\forall D_{eni},\ S^{'}(D_{eni}) < 0$

***Démonstration*** : Annexe 11

Comme $D_{eni}$ décroît avec $\alpha_{eni}$ on peut aussi dire que $S(D_{eni})$ croît avec $\alpha_{eni}$. La sous-évaluation des titres émis par l'entreprise diminue avec l'endettement de l'entreprise. Ce résultat est le même que celui de MYERS-MAJLUF [1984] [26]. La dette est un titre moins sous-évalué que les actions. En effet, les revenus perçus par un actionnaire sont fortement liés aux performances de la firme car ce sont des revenus résiduels. La valeur que l'on attribue à une action est donc très sensible aux croyances que l'on a sur la qualité de l'entreprise. En revanche, un titre de dette donne droit à un revenu constant $D_{eni}$ indépendant du type de la firme. Ce n'est que dans une situation de faillite que les revenus de la dette sont liés aux performances de l'entreprise. Par conséquent, la valeur de marché d'un titre de dette est moins sensible aux croyances des investisseurs que la valeur de marché d'une action. Il en résulte une moindre sous-évaluation de la dette dans l'ENI. Minimiser la sous-évaluation des titres dans l'ENI reviendrait donc à émettre uniquement de la dette $\left(d^* = 1\right)$. Autrement dit, il n'y aurait pas d'augmentation de capital et les anciens actionnaires détiendraient toutes les actions de la firme. C'est le résultat de MYERS-MAJLUF [1984] qui a l'inconvénient de signifier aussi que les firmes ne devraient pas procéder à des augmentations de capital. Or, nous avons démontré que l'émission d'actions pouvait être utile à la bonne firme en dépit de sa plus grande sous-évaluation dans l'ENI. En effet, elle permet de stimuler l'acquisition d'information et de réduire la probabilité de l'ENI (*cf.* Corollaire 2).

On peut démontrer la Proposition suivante :

PROPOSITION 7.2. L'hypothèse $H7$ sur le comportement de la firme implique que :
Il existe $\widehat{C} > 0$ tel que :
Si $C > \widehat{C}$ alors $d^* = 1$.

---

25. Étant donné qu'il existe une relation monotone décroissante entre $\alpha_{eni}$ et $D_{eni}$ (*cf.* équation 2.6), on peut écrire indifféremment la sous-évaluation des titres dans l'ENI comme fonction de l'une ou de l'autre de ces deux variables. Nous choisissons $D_{eni}$.

26. Par rapport à MYERS et MAJLUF [1984] qui établissent leur résultat grâce à la théorie des options, on définit, ici, une condition plus générale sur la distribution des *cash-flows* de la bonne et de la mauvaise entreprise (*cf.* H7) sous laquelle ce résultat est valable.

Si $C = \widehat{C}$ alors $d^* = 1$ mais il existe $d^* \in ]0,1[$.
Si $C < \widehat{C}$ alors $d^* \in ]0,1[$.
Lorsque $d^* \in ]0,1[$, $d^*$ est indépendant de $C$.

***Démonstration*** : Annexe 12

Si $C > \widehat{C}$, l'émission d'actions ne génère pas suffisamment d'informés sur le marché car l'acquisition d'information n'est pas assez rentable. L'effet informationnel des actions qui permet de diminuer la probabilité de l'ENI est donc faible. La sous-évaluation importante des actions dans l'ENI (par rapport à la dette) l'emporte donc sur l'effet informationnel. La structure financière optimale ne contient que de la dette.

Si $C = \widehat{C}$, il existe une structure financière incluant à la fois de la dette et des actions qui « *fait aussi bien* » que la structure financière n'incluant que de la dette. Cependant, l'effet informationnel des actions n'est pas encore assez fort pour inclure obligatoirement des actions dans la structure financière optimale.

Si $C < \widehat{C}$, la présence d'actions dans la structure financière est nécessaire pour minimiser $\overline{S}(d)$. En effet, quand le coût à s'informer n'est pas trop élevé, l'émission d'actions permet à l'entreprise d'accroître significativement le nombre d'informés et de diminuer efficacement la probabilité de l'ENI (*cf.* Corollaire 2). L'émission de dette, quant à elle, lui permet de modérer l'ampleur de la sous-évaluation des titres dans l'ENI (*cf.* Proposition 7.1).

À asymétrie d'information donnée entre la firme et le marché, l'émission de dette permet de réduire la sous-évaluation des titres émis par la firme. L'émission d'actions, elle, permet de réduire l'intensité de l'asymétrie d'information entre la firme et le marché. Dans un modèle à deux états de la nature comme celui-ci, cela se traduit par une baisse de la probabilité de l'ENI [27].

Enfin, lorsque $C \leqslant \widehat{C}$, l'espérance de sous-évaluation $\overline{S}(d)$ diminue avec la valeur de $C$ mais la structure financière optimale $d^* \in ]0,1[$ reste la même.

# 8 Application numérique

Afin d'illustrer les résultats obtenus, on suppose que les *cash-flows* de la bonne et de la mauvaise firme suivent les lois exponentielles suivantes :

$$f_b(y) = \gamma_b \exp(-\gamma_b y)\, \forall y \geqslant 0 \text{ et } f_b(y) = 0 \text{ sinon}$$

$$f_m(y) = \gamma_m \exp(-\gamma_m y)\, \forall y \geqslant 0 \text{ et } f_m(y) = 0 \text{ sinon}$$

avec $\gamma_b = 0.02$ et $\gamma_m = 0.04$.

27. Dans un modèle où l'aléa serait traité de façon continue, la distribution des prix (valeur de marché des actions et de la dette) deviendrait plus informative avec l'augmentation de l'émission d'actions. Autrement dit, la distribution de chaque prix serait plus concentrée autour de la vraie valeur.

On pose $I = 20$.

On peut vérifier que l'équation 2.1 et l'hypothèse H7 sont bien vérifiées.

La figure 1 représente l'évolution de l'espérance de sous-évaluation $\overline{S}(d)$ en fonction du taux d'endettement $d$ pour trois valeurs différentes du coût à s'informer $C$. Les trois valeurs de $C$ ont été choisies pour illustrer les trois situations possibles énoncées dans la Proposition 7.2.

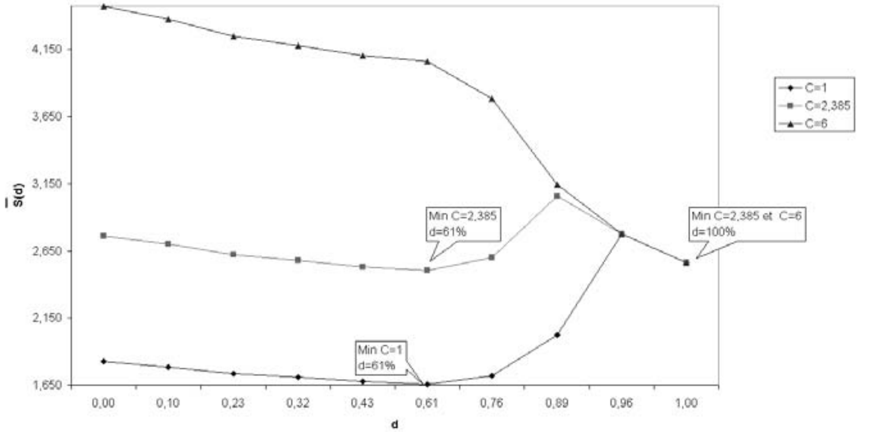
Lorsque $C = 1$, l'espérance de sous-évaluation admet un minimum unique sur $[0,1]$. Ce minimum correspond à une structure financière intérieure correspondant à un taux d'endettement de 61 %.

Lorsque $C = 2{,}285$, il existe deux structures financières optimales : la structure financière intérieure correspondant au taux d'endettement de 61 % [28] et la structure financière correspondant au taux d'endettement de 100 %. On en déduit que $\widehat{C} = 2{,}285$.

Quel que soit $C$ supérieur à 2,285, la structure financière optimale correspond à un endettement de 100 %. À partir de $C = 6$, la fonction $\overline{S}(d)$ devient toujours décroissante.

Pour $C = 2{,}285$, la probabilité de l'ENI prend la valeur 1 en $d = 0{,}89$. La courbe « $C = 2{,}285$ » rejoint donc la courbe « $C = 6$ » en $d = 0{,}89$. En effet, les deux courbes représentent alors la sous-évaluation des titres dans l'ENI $S(D_{eni})$ qui est décroissante avec l'endettement. Lorsque $C = 1$, la probabilité de l'ENI prend la valeur 1 uniquement en $d = 0{,}96$ et la courbe « $C = 1$ » rejoint alors les deux autres courbes.

FIGURE 1
***Espérance de sous-évaluation des titres émis en fonction du taux d'endettement***




28. On retrouve $d = 61$ % comme dans le cas précédent puisque la Proposition 7.2 nous dit que la structure financière optimale est la même pour toute valeur de $C \leqslant \widehat{C}$.

## • Références bibliographiques

BHATTACHARYA U., SPIEGEL M. (1992). – « Insiders, Outsiders and Market Breakdowns », *Review of Financial Studies*, vol 4, pp. 255-282.

BOOT A., THAKOR A. (1993). – « Security Design », *Journal of Finance*, vol 84, pp. 1349-1378.

GLOSTEN L. (1989). – « Insider Trading, Liquidity and the Role of the Monopolist Specialist », *Journal of Business*, vol 62, pp. 211-235.

GORTON G., PENNACCHI G. (1990). – « Financial Intermediaries and Liquidity Creation », *Journal of Finance*, vol 45, pp. 49-72.

GROSSMAN S., J. STIGLITZ J. (1980) « On the Impossibility of Efficient Markets », *American Economic Review*, vol 70, pp. 393-408.

HELLWIG M. (1980). – « On the Aggregation of Information in Competitive Markets », *Journal of Economic Theory*, vol 22, pp. 477-498.

KYLE A. (1985). – « Continuous Actions and Insider Trading », *Econometrica*, vol 53, pp. 1315-1335.

KYLE A. (1989). – « Informed Speculation with Imperfect Competition », *Review of Financial Studies*, vol 56, pp. 317-356.

MYERS S.C., MAJLUF N.S. (1984). – « Corporate Financing and Investment Decisions when Firms Have Information that Investors Do Not Have », *Journal of Financial Economics*, vol 13, pp. 187-221.

# ANNEXE 1

La fonction de survie d'une distribution $1 - F_t(D)$ étant égale à $\exp\left[-\int_{\underline{Y}}^{D} \frac{f_t(y)}{1-F_t(y)} dy\right]$, la démonstration de la Propriété 1 est directe.

$$\frac{\overline{Y}_t^a(D)}{1-F_t(D)} = \frac{\int_0^{\overline{Y}} (y-D)\, f_t(y)\, dy}{1-F_t(D)}$$

En intégrant par parties, cette égalité devient :

$$\frac{\overline{Y}_t^a(D)}{1-F_t(D)} = \int_D^{\overline{Y}} \frac{1-F_t(y)}{1-F_t(D)} dy$$

De plus, l'hypothèse $H6$ implique que :

$$\frac{-f_b(y)}{1-F_b(y)} + \frac{f_m(y)}{1-F_m(y)} > 0$$

En multipliant l'expression précédente par $\frac{[1-F_b(y)][1-F_m(y)]}{[1-F_m(y)]^2}$, on obtient la dérivée de $\frac{1-F_b(y)}{1-F_m(y)}$ par rapport à $y$ qui est donc positive :

$$\frac{\partial\left[\frac{1-F_b(y)}{1-F_m(y)}\right]}{\partial y} = \frac{-f_b(y)[1-F_m(y)] + f_m(y)[1-F_b(y)]}{[1-F_m(y)]^2} > 0$$

On a donc $\forall D, \forall y \geqslant D$ :

$$\frac{1-F_b(y)}{1-F_m(y)} > \frac{1-F_b(D)}{1-F_m(D)} \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \frac{1-F_b(y)}{1-F_b(D)} > \frac{1-F_m(y)}{1-F_m(D)}$$

Cette inégalité implique :

$$\int_D^{\overline{Y}} \frac{1-F_b(y)}{1-F_b(D)} dy > \int_D^{\overline{Y}} \frac{1-F_m(y)}{1-F_m(D)}\, dy$$

d'où la Propriété 2.

La Propriété 3 est une conséquence directe des Propriétés 1 et 2.

Enfin, en intégrant par parties l'équation 3 on obtient :

$$\overline{Y}_t^d(D) = D - \int_{\underline{Y}}^{D} F_t(y)\, dy$$

Ce résultat et la Propriété 1 impliquent la Propriété 4.

# ANNEXE 2

Considérons le signal $\widetilde{s}$ :

$$\widetilde{s} \in \left\{\underline{s},\overline{s}\right\}$$

La distribution de $\widetilde{s}$ parmi les spéculateurs est la suivante :

Si la firme est bonne (resp mauvaise) une proportion $\nu_b$ ($\nu_m$) de spéculateurs (tirée au hasard) reçoit le signal $\overline{s}$ et une proportion $1 - \nu_b$ $(1 - \nu_m)$ reçoit le signal $\underline{s}$.

Chaque spéculateur $j$ reçoit donc un signal individuel $\widetilde{s}_j$ dont la distribution de probabilité est la suivante : si la firme est bonne (resp mauvaise) $\widetilde{s}_j$ prend la valeur $\overline{s}$ avec la probabilité $\nu_b$ ($\nu_m$) et la valeur $\underline{s}$ avec la probabilité $1 - \nu_b$ $(1 - \nu_m)$.

Le signal étant informatif sur le type de la firme, on a : $\nu_b > \nu_m$

Les spéculateurs ont donc plus de chance d'observer $\overline{s}$ et moins de chance d'observer $\underline{s}$ lorsque la firme est bonne que lorsque la firme est mauvaise.

Après avoir observé son signal, chaque spéculateur révise ses croyances. Ainsi, si $\widetilde{s}_j = \overline{s}$, la probabilité *a posteriori* que la firme soit bonne $p_b\ (\overline{s})$ pour le spéculateur $j$ s'écrit :

$$p_b\ (\overline{s}) = \frac{\frac{1}{2}\nu_b}{\frac{1}{2}\nu_b + \frac{1}{2}\nu_m} = \frac{\nu_b}{\nu_b + \nu_m}$$

On a $p_b\ (\overline{s}) > \frac{1}{2}$ car $\nu_b > \nu_m$.

De même, la probabilité *a posteriori* que la firme soit bonne lorsque $\widetilde{s}_j = \underline{s}$, s'écrit :

$$p_b\ (\underline{s}) = \frac{\frac{1}{2}(1 - \nu_b)}{\frac{1}{2}(1 - \nu_b) + \frac{1}{2}(1 - \nu_m)} = \frac{(1 - \nu_b)}{(1 - \nu_b) + (1 - \nu_m)}$$

On a $p_b\ (\underline{s}) < \frac{1}{2}$ car $1 - \nu_b < 1 - \nu_m$.

Nous allons étudier un équilibre dans lequel les spéculateurs anticipent (au moment de lancer leurs ordres) que les actions et la dette auront des valeurs de marché respectivement égales à $\dfrac{\overline{Y}_b^a\ (D) + \overline{Y}_m^a\ (D)}{2}$ et à $\dfrac{\overline{Y}_b^d\ (D) + \overline{Y}_m^d\ (D)}{2}$ avec une certaine probabilité $P$ et que ces titres seront correctement valorisés avec la probabilité $1 - P$. Nous montrons dans la section 3.2, qu'étant donné ces anticipations (et le comportement des spéculateurs qui en découle), les valeurs de marché suivent bien cette distribution de probabilité.

Lorsque le spéculateur reçoit le signal $\overline{s}$, il attribue une valeur aux actions de la firme $p_b\ (\overline{s})\,\overline{Y}_b^a\,(D) + [1 - p_b\ (\overline{s})]\,\overline{Y}_m^a\,(D)$ supérieure à $\dfrac{\overline{Y}_b^a\,(D) + \overline{Y}_m^a\,(D)}{2}$ (*cf.* propriétés 3 et 4). De même, il attribue une valeur aux titres de dette $p_b\ (\overline{s})\,\overline{Y}_b^d\,(D) + (1 - p_b\ (\overline{s}))\,\overline{Y}_m^d\,(D)$ supérieure à $\dfrac{\overline{Y}_b^d\,(D) + \overline{Y}_m^d\,(D)}{2}$.

Lorsque le spéculateur reçoit le signal $\underline{s}$, il attribue une valeur aux actions de la firme $p_b\ \left(\underline{s}\right)\overline{Y}_b^a\,(D) + \left(1 - p_b\ \left(\underline{s}\right)\right)\overline{Y}_m^a\,(D)$ inférieure à $\dfrac{\overline{Y}_b^a\,(D) + \overline{Y}_m^a\,(D)}{2}$. De même, il attribue une valeur aux titres de dette $p_b\ \left(\underline{s}\right)\overline{Y}_b^d\,(D) + \left(1 - p_b\ \left(\underline{s}\right)\right)\overline{Y}_m^d\,(D)$ inférieure à $\dfrac{\overline{Y}_b^d\,(D) + \overline{Y}_m^d\,(D)}{2}$.

Par conséquent, si la firme est bonne, une proportion $\nu_b$ des spéculateurs pense que la firme sera sous-évaluée avec la probabilité $P$ alors qu'une proportion $1 - \nu_b$ pense que la firme sera surévaluée. En revanche, si la firme est mauvaise, une proportion $\nu_m$ des spéculateurs pense que la firme sera sous-évaluée avec la probabilité $P$ alors qu'une proportion $1 - \nu_m$ pense que la firme sera surévaluée.

Les spéculateurs qui anticipent une sous-évaluation vont acheter des titres alors que ceux qui anticipent une surévaluation vont vendre à découvert.

Notons $\gamma N^a$ le nombre de spéculateurs intervenant sur le marché des actions et $(1 - \gamma)\,N^d$ le nombre de spéculateurs intervenant sur le marché de la dette avec [29] $\gamma \in [0{,}1]$. Notons $L_t^a$ le montant de l'ordre total lancé par les spéculateurs sur le marché des actions et $L_t^d$ le montant de l'ordre total lancé par les spéculateurs sur le marché de la dette. Sachant que le montant de l'intervention d'un spéculateur individuel est normalisé à $\pm\frac{1}{2}$, $L_t^a$ et $L_t^d$ s'écrivent :

$$L_t^a = \frac{\nu_t \gamma N^a}{2} - \frac{(1 - \nu_t)\,\gamma N^a}{2} = \frac{(2\nu_t - 1)\,\gamma N^a}{2}$$

et

$$L_t^d = \frac{(2\nu_t - 1)\,(1 - \gamma)\,N^d}{2}$$

On rappelle que $(1 - d_t)I$ représente le montant de l'émission d'actions et que $d_t I$ représente le montant de l'émission de dette. On note $l_t^a = \dfrac{L_t^a}{(1 - d_t)\,I}$

29. Voir un peu plus loin pour l'interprétation de la variable $\gamma$.

et $l_t^d = \frac{L_t^d}{d_t I}$ la taille [30] de l'ordre total lancé par les spéculateurs sur le marché des actions et sur le marché de la dette.

Nous supposons que le nombre de spéculateurs intervenant sur un marché augmente avec la taille de ce marché (hypothèse H13) [31]. Pour simplifier au maximum, on pose $N^a = (1 - d_t) I$ et $N^d = d_t I$. Dans ce cas, on obtient

$$l_t^a = \frac{\gamma\,(2\nu_t - 1)}{2} \text{ et } l_t^d = \frac{(1-\gamma)\,(2\nu_t - 1)}{2}$$

À présent, supposons que la précision des signaux perçus par les spéculateurs est une variable aléatoire que nous noterons $\widetilde{\varepsilon}$. Plus précisément, nous supposons que $\nu_t$ dépend de $\widetilde{\varepsilon}$ selon les relations suivantes :

$$\nu_b = \widetilde{\varepsilon} \text{ et } \nu_m = 1 - \widetilde{\varepsilon}$$

Plus la précision $\widetilde{\varepsilon}$ augmente plus les signaux perçus par les spéculateurs sont informatifs. En effet, lorsque $\widetilde{\varepsilon}$ augmente, la probabilité d'observer $\overline{s}$ augmente quand la firme est bonne et diminue quand la firme est mauvaise. Parallèlement la probabilité d'observer $\underline{s}$ diminue quand la firme est bonne et augmente quand la firme est mauvaise.

Avec l'introduction de $\widetilde{\varepsilon}$, les ordres lancés par les spéculateurs deviennent aléatoires et s'écrivent :

$$\widetilde{l}_b^a = \frac{\gamma\,(2\widetilde{\varepsilon} - 1)}{2} \text{ et } \widetilde{l}_m^a = \frac{\gamma\,(1 - 2\widetilde{\varepsilon})}{2}$$

$$\widetilde{l}_b^d = \frac{(1-\gamma)\,(2\widetilde{\varepsilon} - 1)}{2} \text{ et } \widetilde{l}_m^d = \frac{(1-\gamma)\,(1 - 2\widetilde{\varepsilon})}{2}$$

Si l'on suppose que $\widetilde{\varepsilon}$ suit une loi uniforme sur $[0{,}1]$ alors, on obtient :

$$\widetilde{l}_t^a \sim U\left[-\frac{\gamma}{2}, \frac{\gamma}{2}\right] \quad \widetilde{l}_t^d \sim U\left[-\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1-\gamma}{2}\right]$$

Autrement dit,

$$\widetilde{l}_t^a = \gamma \widetilde{l} \text{ et } \widetilde{l}_t^d = (1-\gamma)\,\widetilde{l} \text{ avec } \widetilde{l} \sim U\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

La variable $\gamma$ s'interprète donc comme une règle de répartition des interventions des spéculateurs entre les deux marchés.

30. Il s'agit d'une quantité (de titres).
31. Pour un commentaire de cette hypothèse, se référer à la section 2.1.2.

# ANNEXE 3

Supposons qu'il existe un équilibre séparateur caractérisé par les stratégies d'émission $d_b$ et $d_m$ avec $d_b \neq d_m$. Les croyances *a posteriori* de tous les agents sur le marché vont donc être les suivantes :

$$q_b\,(d_b) = 1 \text{ et } q_b\,(d_m) = 0$$

où $q_b(d)$ est la probabilité que la firme soit bonne pour tous les agents après que celle-ci ait annoncé $d$.

La stratégie d'émission révélant le type de la firme, les conditions de financement $(\alpha_t, D_t)$ proposées à la firme de type $t$ s'écrivent :

$$\alpha_t \overline{Y}_t^a\,(D_t) = (1 - d_t)\,I \text{ et } \overline{Y}_t^d\,(D_t) = d_t I$$

Les propriétés 3 et 4 impliquent que $\alpha_b \leqslant \alpha_m$ et $D_b \leqslant D_m$.

La mauvaise firme a donc toujours intérêt à dévier de la stratégie $d_m$ pour adopter la stratégie $d_b$ et bénéficier ainsi de conditions de financement plus favorables.

Par conséquent, il n'existe pas d'équilibre séparateur. En revanche, toute stratégie d'émission $d^*$ est un équilibre mélangeant soutenu par les croyances hors équilibre :

$$\forall d \neq d^*, q_b(d) = 0$$

La firme, quel que soit son type, préfère adopter la stratégie $d^*$ plutôt que d'être considérée comme une mauvaise firme en annonçant $d \neq d^*$.

# ANNEXE 4

On différencie l'équation 3.9 par rapport à $D_{eni}$ et $\alpha_{eni}$ :

$$\left(\overline{Y}_b^a(D_{eni}) + \overline{Y}_m^a(D_{eni})\right) d\alpha_{eni} - \alpha_{eni}\left[2 - F_b\left(D_{eni}\right) - F_m\left(D_{eni}\right)\right] dD_{eni}$$
$$+ \left[2 - F_b(D_{eni}) - F_m(D_{eni})\right] dD_{eni} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\left(\overline{Y}_b^a(D_{eni}) + \overline{Y}_m^a(D_{eni})\right) d\alpha_{eni} +$$
$$(1 - \alpha_{eni})\left[2 - F_b(D_{eni}) - F_m(D_{eni})\right] dD_{eni} = 0$$

On obtient (*cf.* Propriété 1) :

$$\frac{d\alpha_{eni}}{dD_{eni}} = \frac{(\alpha_{eni} - 1)\left[2 - F_b\left(D_{eni}\right) - F_m\left(D_{eni}\right)\right]}{\overline{Y}_b^a\left(D_{eni}\right) + \overline{Y}_m^a\left(D_{eni}\right)} < 0$$

# ANNEXE 5

Par des calculs simples et en utilisant l'égalité $\overline{Y}_t = \overline{Y}_t^a(D) + \overline{Y}_t^d(D)$, on montre que :

$$\left[\frac{p_b\overline{Y}_b^a(D) + (1-p_b)\,\overline{Y}_m^a(D)}{\dfrac{\overline{Y}_b^a(D) + \overline{Y}_m^a(D)}{2}}\right] - \left[\frac{p_b\overline{Y}_b^d(D) + (1-p_b)\,\overline{Y}_m^d(D)}{\dfrac{\overline{Y}_b^d(D) + \overline{Y}_m^d(D)}{2}}\right]$$

$$= \frac{2\left[\overline{Y}_b^a(D)\,\overline{Y}_m - \overline{Y}_m^a(D)\,\overline{Y}_b\right](2p_b - 1)}{\left(\overline{Y}_b^a + \overline{Y}_m^a\right)\left(\overline{Y}_b^d + \overline{Y}_m^d\right)}$$

La démonstration de la Proposition 4.1 revient à étudier le signe de cette différence.

Le terme $\left[\overline{Y}_b^a(D)\,\overline{Y}_m - \overline{Y}_m^a(D)\,\overline{Y}_b\right]$ est du même signe que $\dfrac{\overline{Y}_b^a(D)}{\overline{Y}_m^a(D)} - \dfrac{\overline{Y}_b}{\overline{Y}_m}$.

Or, pour $D = 0$, cette expression est nulle puisque $\overline{Y}_b^a(0) = \overline{Y}_b$ et $\overline{Y}_m^a(0) = \overline{Y}_m$.

En outre (*cf.* Propriété 2) :

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\overline{Y}_b^a(D)}{\overline{Y}_m^a(D)}\right)}{\partial D} = \frac{-(1-F_b(D))\overline{Y}_m^a(D) + (1-F_m(D))\overline{Y}_b^a(D)}{(\overline{Y}_m^a(D))^2} > 0$$

Donc

$$\forall D, \frac{\overline{Y}_b^a(D)}{\overline{Y}_m^a(D)} - \frac{\overline{Y}_b}{\overline{Y}_m} > 0$$

Par conséquent, le signe de la différence que nous avons calculée ne dépend que du signe de $(2p_b - 1)$. D'où la Proposition 4.1.

# ANNEXE 6

Sous l'hypothèse $H12$, $\widetilde{l}$ suit une loi uniforme de densité égale à 1. On a donc :

$$\Pr(ENI) = \Pr\left(n^* x_b^a - \frac{1}{2} \leqslant \widetilde{l} \leqslant n^* x_m^a + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \int_{n^* x_b^a - \frac{1}{2}}^{n^* x_m^a + \frac{1}{2}} 1 dl = n^* x_m^a - n^* x_b^a + 1$$

# ANNEXE 7

La fonction objectif de l'informé $i$ peut se réécrire :

$$\max_{x_b^i} \left\{ \left[ x_m^{ai} - x_b^{ai} - X + 1 \right] \left[ x_b^{ai} S^a \left( \alpha_{eni} \right) \right] \right\}$$

avec $X = (n^* - 1)x_b^a - (n^* - 1)x_m^a$.

Ce programme est concave et la condition de premier ordre s'écrit après simplification :

$$2x_b^i - x_m^i + X = 1$$

De même, si la firme est mauvaise, la fonction objectif de l'informé $i$ s'écrit :

$$\max_{x_m^i} \left\{ \left[ x_m^{ai} - x_b^{ai} - X + 1 \right] \left[ -x_m^{ai} S^a \left( \alpha_{eni} \right) \right] \right\}$$

On obtient la condition de premier ordre suivante :

$$x_b^{ai} - 2x_m^{ai} + X = 1$$

Les deux conditions de premier ordre impliquent que $x_b^{ai} = -x_m^{ai} = x^a$. En rentrant ce résultat dans une condition de premier ordre, on obtient :

$$x^a = \frac{1}{2n^* + 1}$$

La probabilité de l'état non-informatif devient alors :

$$\Pr(ENI) = \frac{1}{2n^* + 1}$$

# ANNEXE 8

En posant $G(n) = 0$, on obtient la solution suivante :

$$2n + 1 = \left[ \frac{S^a\ (\alpha_{eni})}{C} \right]^{\frac{1}{2}}$$

En tenant compte de la contrainte $n^* \geqslant 0$, la solution devient :

$$2n^* + 1 = \max \left\{ \left[ \frac{S^a\ (\alpha_{eni})}{C} \right]^{\frac{1}{2}} ,1 \right\}$$

$$\frac{\partial S^a(\alpha_{eni})}{\partial \alpha_{eni}} = \overline{Y}_b^a(D_{eni}) - \overline{Y}_m^a(D_{eni}) + \alpha_{eni}(F_b(D_{eni}) - F_m(D_{eni}))\frac{\partial D_{eni}}{\partial \alpha_{eni}} > 0$$

En effet, $\frac{\partial D_{eni}}{\partial \alpha_{eni}} < 0$ (*cf.* Annexe 4), $F_b(D_{eni}) - F_m(D_{eni}) < 0$ (*cf.* Propriété 1) et $\overline{Y}_b^a(D_{eni}) - \overline{Y}_m^a(D_{eni}) > 0$ (*cf.* Propriété 3).

# ANNEXE 9

On a :

$$P(ENI) = \min\left\{\left[\frac{C}{S^a(\alpha_{eni})}\right]^{\frac{1}{2}},1\right\}$$

L'expression $\left[\frac{C}{S^a(\alpha_{eni})}\right]^{\frac{1}{2}}$ est décroissante avec $\alpha_{eni}$ puisque $S^a(\alpha_{eni})$ est croissant en $\alpha_{eni}$.

Si $C \geqslant S^a\left(\overline{\alpha}_{eni}\right)$ alors $P\left(ENI\right) = 1$ car

$$\left[\frac{C}{S^a\left(\alpha_{eni}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} > 1,\ \forall\alpha_{eni} \in [0,\overline{\alpha}_{eni}].$$

L'expression $\left[\frac{C}{S^a\left(\alpha_{eni}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$ croît jusqu'en $+\infty$ quand $\alpha_{eni}$ tend vers zéro (*cf*. équation 5.2).

Si $C < S^a\left(\overline{\alpha}_{eni}\right)$, il existe donc $\widehat{\alpha}_{eni} < \overline{\alpha}_{eni}$ tel que l'expression

$$\left[\frac{C}{S^a\left(\widehat{\alpha}_{eni}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} = 1.$$

On a donc :

$$\forall\alpha_{eni} \geqslant \widehat{\alpha}_{eni}, P\left(ENI\right) = \left[\frac{C}{S^a\left(\alpha_{eni}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Comme $S^a(\alpha_{eni})$ croît avec $\alpha_{eni}$, la probabilité de l'ENI décroît avec l'émission d'actions (augmente avec l'endettement).

$$\forall\alpha_{eni} < \widehat{\alpha}_{eni}, P\left(ENI\right) = 1.$$

# ANNEXE 10

L'équation 7.1 se réécrit :

$$\Leftrightarrow W_{0b}(d) = \overline{Y}_b - I - \frac{1}{2n^* + 1}\left[(\alpha_{eni} - 1)\overline{Y}_b^a\,(D_{eni}) + \overline{Y}_b - I\right]$$

En utilisant $\overline{Y}_b^d(D_{eni}) = \overline{Y}_b - \overline{Y}_b^a(D_{eni})$, on obtient :

$$\overline{S}(d) = \left(\frac{1}{2n^* + 1}\right)\left[\alpha_{eni}\overline{Y}_b^a(D_{eni}) + \overline{Y}_b^d\,(D_{eni}) - I\right]$$

# ANNEXE 11

La sous-évaluation des titres émis $S\left(D_{eni}\right)$ peut se réécrire (*cf.* Annexe 10) :

$$S(D_{eni}) = \left[(\alpha_{eni} - 1)\,\overline{Y}_b^a\,(D_{eni}) + \overline{Y}_b - I\right]$$

Dérivons $S(D_{eni})$ par rapport à $D_{eni}$ :

$$\frac{\partial S(D_{eni})}{\partial D_{eni}} = \frac{\partial \alpha_{eni}}{\partial D_{eni}}\overline{Y}_b^a(D_{eni}) + (1-\alpha_{eni})(1-F_b(D_{eni}))$$

$$= \frac{(1-\alpha_{eni})\left[(1-F_b(D_{eni}))\overline{Y}_m^a(D_{eni}) - (1-F_m(D_{eni}))\overline{Y}_b^a(D_{eni})\right]}{\overline{Y}_b^a(D_{eni}) + \overline{Y}_m^a(D_{eni})}$$

La propriété 2 nous permet de conclure que cette dérivée est toujours négative.

# ANNEXE 12

Nous avons vu que le choix des trois variables $d$, $\alpha_{eni}$ et $D_{eni}$ était équivalent. Nous allons donc considérer ici $\overline{S}(d)$ comme une fonction de $D_{eni}$ notée $\overline{S}(D_{eni})$.

Notons $\widehat{D}_{eni}$ la valeur de $D_{eni}$ correspondant à $\widehat{\alpha}_{eni}$. $\forall D_{eni} \leqslant \widehat{D}_{eni}$ $(\Leftrightarrow \forall \alpha_{eni} \geqslant \overline{\alpha}_{eni})$, l'espérance de sous-évaluation des titres émis par l'entreprise s'écrit :

$$\overline{S}\left(D_{eni}\right)=\left[\frac{C}{S^{a}\left(\alpha_{eni}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\left(\alpha_{eni}-1\right)\overline{Y}_{b}^{a}\left(D_{eni}\right)+\overline{Y}_{b}-I\right]$$

Dérivons cette expression par rapport à $D_{eni}$ :

$$\frac{\partial\overline{S}\left(D_{eni}\right)}{\partial D_{eni}}=-\frac{C}{2}\left[\frac{C}{\alpha_{eni}\left(\overline{Y}_{b}^{a}-\overline{Y}_{m}^{a}\right)}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times\frac{\dfrac{\partial\alpha_{eni}}{\partial D_{eni}}\left(\overline{Y}_{b}^{a}\left(D_{eni}\right)-\overline{Y}_{m}^{a}\left(D_{eni}\right)\right)+\alpha_{eni}\left[F_{b}\left(D_{eni}\right)-F_{m}\left(D_{eni}\right)\right]}{\alpha_{eni}^{2}\left(\overline{Y}_{b}^{a}\left(D_{eni}\right)-\overline{Y}_{m}^{a}\left(D_{eni}\right)\right)^{2}}$$

$$\times\left[\left(\alpha_{eni}-1\right)\overline{Y}_{b}^{a}\left(D_{eni}\right)+\overline{Y}_{b}-I\right]$$

$$+\left[\frac{C}{S^{a}\left(\alpha_{eni}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial\alpha_{eni}}{\partial D_{eni}}\overline{Y}_{b}^{a}\left(D_{eni}\right)-\alpha_{eni}\left(1-F_{b}\left(D_{eni}\right)\right)\right]$$

$$\frac{\partial\overline{S}\left(D_{eni}\right)}{\partial D_{eni}}=\left[\frac{C}{S^{a}\left(\alpha_{eni}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left\{-\frac{\dfrac{\partial\alpha_{eni}}{\partial D_{eni}}\left(\overline{Y}_{b}^{a}\left(D_{eni}\right)-\overline{Y}_{m}^{a}\left(D_{eni}\right)\right)+\alpha_{eni}\left[F_{b}\left(D_{eni}\right)-F_{m}\left(D_{eni}\right)\right]}{2\alpha_{eni}\left(\overline{Y}_{b}^{a}\left(D_{eni}\right)-\overline{Y}_{m}^{a}\left(D\right)\right)}\right.$$

$$\times\left[\left(\alpha_{eni}-1\right)\overline{Y}_{b}^{a}\left(D_{eni}\right)+\overline{Y}_{b}-I\right]$$

$$\left.+\left[\frac{\partial\alpha_{eni}}{\partial D_{eni}}\overline{Y}_{b}^{a}\left(D_{eni}\right)-\alpha_{eni}\left(1-F_{b}\left(D_{eni}\right)\right)\right]\right\}$$

Calculons le signe de $\dfrac{\partial \overline{S}(D_{eni})}{\partial D_{eni}}$ en $D_{eni} = 0$ :

$$\frac{\partial \overline{S}(D_{eni} = 0)}{\partial D_{eni}}$$

$$= \left[\frac{C}{S^a(\overline{\alpha}_{eni})}\right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{-\dfrac{\partial \alpha_{eni}}{\partial D_{eni}}}{2\overline{\alpha}_{eni}} \left[\overline{\alpha}_{eni}\overline{Y}_b - I\right] + \frac{\partial \alpha_{eni}}{\partial D_{eni}}\overline{Y}_b - \overline{\alpha}_{eni} \right\}$$

$$= \left[\frac{C}{S^a(\overline{\alpha}_{eni})}\right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha_{eni}}{\partial D_{eni}}\overline{Y}_b + \frac{\partial \alpha_{eni}}{\partial D_{eni}}\frac{I}{2\overline{\alpha}_{eni}} - \overline{\alpha}_{eni} \right\} < 0$$

car $\dfrac{\partial \alpha_{eni}}{\partial D_{eni}} < 0$.

La fonction $\overline{S}(D_{eni})$ a donc un minimum sur $\left[0, \widehat{D}_{eni}\right]$. En ce point, $D_{eni} \neq 0$ et $\alpha_{eni} \neq 0$.

En outre, $\forall D_{eni} > \widehat{D}_{eni}$, $\overline{S}(D_{eni}) = S(D_{eni})$. Donc la fonction $\overline{S}(D_{eni})$ est décroissante en $D_{eni}$ sur l'intervalle $\left[\widehat{D}_{eni}, \overline{D}_{eni}\right]$ (avec $\overline{D}_{eni}$ valeur faciale de la dette lorsque la firme ne se finance que par dette).

Pour trouver le minimum global de $\overline{S}(D_{eni})$, il faut donc comparer la valeur minimale de $\overline{S}(D_{eni})$ sur $\left[0, \widehat{D}_{eni}\right]$ à $\overline{S}\left(\overline{D}_{eni}\right)$. Cherchons sous quelles conditions la valeur minimale de $\overline{S}(D_{eni})$ sur $\left[0, \widehat{D}_{eni}\right]$ est inférieure à $\overline{S}\left(\overline{D}_{eni}\right)$ :

$$\min_{D_{eni} \in \left[0, \widehat{D}_{eni}\right]} \left[\overline{S}(D_{eni})\right] < \overline{S}\left(\overline{D}_{eni}\right)$$

$$\Leftrightarrow \min_{D_{eni} \in \left[0, \widehat{D}_{eni}\right]} \left[ \left[\frac{C}{S^a(\alpha_{eni})}\right]^{\frac{1}{2}} \left[(\alpha - 1)\overline{Y}_b^a(D_{eni}) + \overline{Y}_b - I\right] \right] < \overline{S}(\overline{D}_{eni})$$

$$\Leftrightarrow C^{\frac{1}{2}} \left\{ \min_{D_{eni} \in \left[0, \widehat{D}_{eni}\right]} \left[\frac{S(D_{eni})}{\left[S^a(\alpha_{eni})\right]^{\frac{1}{2}}}\right] \right\} < \overline{S}\left(\overline{D}_{eni}\right)$$

$$\Leftrightarrow C < \left\{ \frac{\overline{S}\left(\overline{D}_{eni}\right)}{\min_{D_{eni} \in \left[0, \widehat{D}_{eni}\right]} \left[\dfrac{S(D_{eni})}{\left[S^a(\alpha_{eni})\right]^{\frac{1}{2}}}\right]} \right\}^2$$

Si on note $\widehat{C} = \left\{ \dfrac{\overline{S}\left(\overline{D}_{eni}\right)}{\min\limits_{D_{eni} \in \left[0, \widehat{D}_{eni}\right]} \left[ \dfrac{S\left(D_{eni}\right)}{\left[S^{a}\left(\alpha_{eni}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \right]} \right\}^{2}$, on obtient :

$\forall C < \widehat{C}$, le minimum global de $\overline{S}\left(D_{eni}\right)$ correspond au minimum local intérieur $(D_{eni} \neq 0, \alpha_{eni} \neq 0)$ sur $\left[0, \widehat{D}_{eni}\right]$. La structure financière optimale est une structure financière qui concilie émission de dette et émission d'actions (l'unicité n'est pas démontrée). On a donc $d^{*} \in ]0,1[$. Cette structure financière est identique pour toute valeur de $C$ inférieure ou égale à $\widehat{C}$ (c'est le minimum de $\overline{S}\left(D_{eni}\right)$ sur $\left[0, \widehat{D}_{eni}\right]$).

Si $C = \widehat{C}$, la structure financière optimale peut concilier actions et dette $\left(d^{*} \in ]0,1[\right)$ ou n'être qu'un financement par dette $(d^{*} = 1)$.

$\forall C > \widehat{C}$, le minimum global de $\overline{S}(D_{eni})$ est atteint en $\overline{D}_{eni}$. La structure financière optimale correspond à un financement par dette. On a donc $d^{*} = 1$.