

Prix virtuels en analyse de la production

Bertrand KOEBEL*

RÉSUMÉ. – Cet article dresse une revue de la littérature des contributions récentes en analyse de la production. L'originalité de la présentation est d'adopter une approche par les prix virtuels. Appliquée à des problèmes d'optimisation non-linéaires et intertemporels, le cadre d'analyse des prix virtuels permet de retrouver de nombreuses propriétés du modèle de base en analyse de la production.

Virtual Prices in Production Analysis

ABSTRACT. – This article provides a review of the recent literature in production analysis. The original contribution of this synthesis is to adopt the concept of virtual prices. Applied to nonlinear and intertemporal optimization problems, the framework of virtual prices is useful to retrieve properties of the “*standard*” model.

* B. KOEBEL : Otto-von-Guericke-Universität, Magdeburg.
Je tiens à remercier F. LAISNEY, H. STAHN, G. UMBHAUER, C. HELM ainsi que les rapporteurs des *Annales* pour leurs commentaires aux versions préliminaires de cet article. Je remercie également l'Université Louis Pasteur, Strasbourg, et le Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung, Mannheim, où j'ai pu rédiger les premières versions de ce travail.

1 Introduction

Dans cet article, l'approche par les prix virtuels est adoptée pour présenter une synthèse de la littérature récente en analyse de la production. Cette approche jette un éclairage original sur la controverse relative à la spécification des objectifs et des contraintes d'une unité de production. Il est montré, en effet, que de nombreux modèles non-linéaires et dynamiques peuvent être exprimés sous la forme linéaire et statique, grâce à une spécification basée sur le concept de prix virtuel. Ces prix virtuels ont non seulement une interprétation économique, mais leur utilisation permet également de dériver la solution d'un problème d'optimisation non-linéaire et intertemporel ainsi que certaines propriétés de régularité.

Étant donné le nombre important de contributions théoriques et empiriques ayant pour objet la description d'un processus de production, procéder à une revue de la littérature peut apparaître comme un projet ambitieux. Une première raison de la multitude des contributions en analyse de la production est liée à la variété des objets d'étude possibles (régions, industries, périodes, etc.). Une seconde raison est la variété des cadres théoriques envisageables pour modéliser le comportement de production. Cette diversité pourrait laisser penser qu'il n'existe pas de « *modèle unifié* » en analyse de la production. En fait, un dénominateur commun des développements récents semble être le principe d'optimisation sous contraintes. Basées sur ce principe, de nombreuses contributions se distinguent par la spécification des fonctions objectives et des contraintes. Ces changements – souvent mineurs – constituent une cause essentielle de la multiplicité des contributions en analyse de la production. Aussi, une large partie de la littérature peut-elle être présentée à partir de ce seul principe d'optimisation sous contraintes. Le principal but de cet article consiste à généraliser suffisamment les objectifs des unités de production pour retrouver différents modèles de comportement de production comme cas particulier. L'originalité, par rapport aux synthèses de DIEWERT [1982] et de CHAMBERS [1988] est de mettre l'accent sur les prix virtuels.

De manière générale, les prix virtuels sont définis comme *les prix qui induisent une unité de production à adopter le comportement observé* ; ce sont les prix qui supportent les quantités utilisées et produites lors du processus de production. Si les théories du comportement de production sont nombreuses, l'utilisation des prix virtuels permet leur synthèse dans un cadre unifié. Si, par exemple, l'unité de production est caractérisée par un comportement rationnel dans un contexte concurrentiel, les prix virtuels seront confondus avec les prix de marché. Si, en revanche, l'unité de production est contrainte par sa capacité, les prix virtuels sont les prix qui induisent une unité de production *non contrainte* pour ces prix, à se comporter de manière identique à une unité de production contrainte. Dans ce papier, cette définition va être déclinée dans différentes situations qui, loin d'être exhaustives, sont néanmoins représentatives des contributions récentes en analyse de la production. Parmi les thèmes évoqués se trouvent la concurrence imparfaite, les coûts non-linéaires, les rationnements, les solutions en coin, les inefficacités techniques et allocatives, la définition du coût d'usage du capital, les coûts d'ajustement.

Enfin, le concept des prix virtuels est au cœur de la théorie de la dualité et ainsi utile pour comprendre les relations entre les propriétés vérifiées par les contraintes et celles vérifiées par la fonction objectif au point optimal. Concernant la théorie de la dualité, il apparaît embarrassant, néanmoins, que ces résultats dépendent de la spécification de l'objectif et des contraintes retenue. EPSTEIN [1981] a bien étendu l'analyse de la dualité à un cadre non-linéaire ; toutefois, la dérivation des fonctions d'offre et de demande n'est alors souvent plus possible, ou du moins n'est plus un résultat direct de l'application du lemme de Hotelling. Cet inconvénient est également connu lorsque des éléments de dynamique sont présents (voir par exemple, EPSTEIN et YATCHEW [1985]). Aussi, dans les contributions empiriques, les conditions d'optimalité de premier ordre sont-elles souvent considérées plutôt que la solution du modèle sous sa forme réduite (tels PINDYCK et ROTEMBERG [1983]). L'inconvénient de cette dernière approche est de ne pas se prêter facilement aux analyses de statique et de dynamique comparatives hors des situations artificielles que sont la courte période – où les ajustements dynamiques sont inexistant – et la longue période – où tous les ajustements sont réalisés. L'originalité de cet article est de présenter une méthode basée sur la notion de prix virtuel, qui est utile pour obtenir les solutions d'un problème d'optimisation et également appropriée pour les calculs de statique et de dynamique comparatives.

Les méthodes utilisées dans cet article sont classiques dans la littérature économique, elles sont toutefois, souvent appliquées à des situations particulières sans souci de généralité. BLOMQUIST [1989] montre, dans un contexte statique et non-linéaire de l'analyse de la consommation, comment une simple redéfinition des prix permet la dérivation des résultats de statique comparative. Dans le contexte de l'analyse de la production, l'approche par les prix virtuels permet d'adapter le lemme de Hotelling pour trouver une expression des fonctions de meilleure réponse grâce à une spécification nouvelle, mais équivalente, de l'objectif et des contraintes initiales. Par ailleurs, nous montrons que cette approche reste utile lorsque des éléments de dynamique sont présents dans l'analyse.

L'idée directrice de l'approche consiste à remplacer le problème d'optimisation initial par un problème plus simple à résoudre, mais ayant les mêmes solutions que le problème initial. Dans ce but, la linéarisation de la fonction objectif au voisinage de la solution est la technique utilisée principalement. Cette reparamétrisation définit les prix virtuels comme les valeurs marginales associées aux variables et aux contraintes. Ce sont ces prix virtuels, à l'instar des prix de marché dans le modèle usuel, qui soutiennent les choix en quantités des unités de production. Pour ces prix virtuels, certaines conditions de régularité des fonctions de meilleure réponse sont retrouvées. Bien que non directement observables, ces prix virtuels peuvent être spécifiés à partir de la théorie économique. Ainsi, le débat initial portant sur la spécification des objectifs et des contraintes est transformé en un débat sur les prix associés aux décisions prises par les unités de production : telle est l'essence de la théorie de la dualité. Dès lors, la difficulté de spécifier l'objectif et les contraintes des unités de production traduit de manière équivalente la difficulté d'évaluer les prix effectivement associés aux variables de choix et aux contraintes.

Dans la section suivante, trois modèles usuels du comportement de production sont brièvement exposés, afin de rendre la comparaison avec le modèle à prix virtuels plus aisée. La troisième section est consacrée à la présentation de la méthode de linéarisation à la base du modèle à prix virtuels. Diverses contributions basées sur cette approche sont décrites dans une quatrième étape. La cinquième section est consacrée à la présentation de résultats de statique comparative ; des résultats analogues à ceux du modèle classique, mais impliquant des prix virtuels, sont obtenus.

2 Présentation de trois modèles usuels en analyse de la production

Les contraintes technologiques d'une unité de production donnée sont décrites par l'ensemble des possibilités de production $s(z_t)$. Cet ensemble est paramétré par le vecteur $z_t \in \mathbb{R}^{S_z}$ reflétant les contraintes techniques et institutionnelles dans lesquelles s'inscrit le processus de transformation. L'ensemble de tous les biens utilisés et produits est décomposé en deux vecteurs $x_t \in \mathbb{R}^{S_x}$ et $y_t \in \mathbb{R}^{S_y}$, où S_w dénote la dimension du vecteur w . Cette partition sera utile pour distinguer les particularités de différentes approches. Un point commun à tous les modèles considérés est que les biens x_{ht} sont déterminés dans un contexte statique, les biens y_{jt} dans un contexte intertemporel, alors que les biens z_{kt} sont fixes et n'appartiennent pas à l'ensemble des variables de choix de l'unité de production. Des exemples pour chaque type de bien sont donnés ci-dessous. Par convention, toute composante x_{ht} de x_t positive (et y_{jt} de y_t), correspond à une production nette et une composante négative à un *input*. Ces conventions sont également utilisées par McFADDEN [1978] et CHAMBERS [1988, p.277].

2.1 Modèles d'équilibre statique et partiel

Dans cette section toutes les fonctions objectif considérées sont des sommes de produits entre prix et quantités et sont donc linéaires dans les prix et linéaires dans les quantités, propriété appelée bilinéarité.

2.1.1 Équilibre statique

Le premier modèle considéré est dit d'Équilibre Statique (ES) dans la mesure où le problème d'optimisation de l'unité de production revient à résoudre un problème statique à chaque période t . Dans ce cas, tous les biens peuvent être regroupés dans les catégories x_t et z_t et aucun bien de type y_{jt} n'apparaît. La fonction de profit ES est définie par :

$$(1) \quad \pi^{es}(p_t, z_t) = \max_{x_t} \{ p_t' x_t : x_t \in s(z_t) \},$$

où $p_t \in \mathbb{R}_+^{S_x}$ est le vecteur des prix unitaires correspondant à x_t . Il est supposé qu'une solution finie et deux fois continûment différentiable existe au problème de maximisation (1).

PROPRIÉTÉS : Pour tout p_t de $\mathbb{R}_+^{S_x}$, la fonction de profit d'équilibre statique π^{es} vérifie les propriétés suivantes :

- (i) π^{es} est une fonction à valeurs réelles, continue et homogène de degré un en prix,
- (ii) π^{es} est non croissante dans les prix des facteurs et non décroissante dans le prix des produits,
- (iii) π^{es} est convexe en prix.

Par ailleurs, le lemme de Hotelling livre les fonctions de meilleure réponse x^{es} par simple différentiation de π^{es} par rapport à p_t .

PROPOSITION 1. (HOTELLING [1932]) : Si la fonction π^{es} est différentiable, $\partial \pi^{es} / \partial p_t = x_t^{es}$, où x_t^{es} représente la fonction de meilleure réponse (demandes et offres optimales).

Cette proposition est connue sous le terme de lemme de Hotelling ou de Shephard¹. Considérons maintenant l'impact des biens fixes z_t sur π^{es} et montrons la relation suivante (voir annexe).

- PROPOSITION 2 : (i) Si $s(z_t)$ est non croissant (non décroissant) dans les biens z_{kt} alors π^{es} est également non croissante (non décroissante) dans ces mêmes z_{kt} .
- (ii) Si $s(z_t)$ est convexe (concave) dans les biens z_{kt} alors π^{es} est concave (convexe) dans ces mêmes z_{kt} .

Un exemple typique pour un bien fixe z_{kt} est le progrès technologique, couramment introduit dans les modèles ES sous la forme d'une tendance temporelle. Lorsque l'impact du progrès technologique est d'élargir l'ensemble $s(z_t)$ des choix possibles, les profits ne peuvent décroître. D'autres exemples courants de variables du type de z_{kt} sont le capital fixe, la localisation géographique, la qualification des entrepreneurs, le niveau des infrastructures publiques, etc.

Une autre manière de caractériser l'ensemble $s(z_t)$ est d'utiliser la fonction de transformation

$$(2) \quad f(x_t, z_t) \geq u \Leftrightarrow x_t \in s(z_t),$$

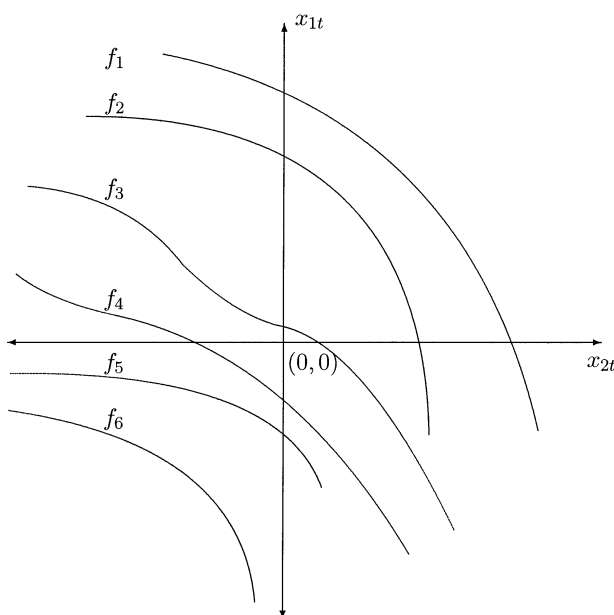
ou u est fixé et sera souvent, sans perte de généralité, normalisé à 0. Lorsque x_t est situé sur la frontière de $s(z_t)$ l'égalité $f(x_t, z_t) = u$ est vérifiée. La résolution de $f(x_t, z_t) = 0$ en $x_{ht} \in \mathbb{R}$, permet l'obtention de la fonction de production lorsque x_{ht} est positif, et de la fonction de facteurs de production

1. VARIAN [1992] appelle cette propriété lemme d'Hotelling lorsqu'elle est appliquée aux fonctions de profit (au moins une composante de x_t est positive). L'appellation lemme de Shephard est réservée aux fonctions de coût (toutes les composantes de x_t sont négatives).

requis (*input requirement function*) lorsque x_{1t} est négatif. Supposons que le vecteur x_t possède deux composantes dénotées $x_{1t} \in \mathbb{R}$ et $x_{2t} \in \mathbb{R}$. Une représentation graphique de la technologie est donnée ci-dessous dans l'espace à deux dimensions (figure 1), où les courbes de niveau f_1 à f_6 caractérisent la fonction de transformation pour six niveaux différents de u et de z_t . Lorsque les deux composantes de x_t sont positives (cadran nord-est de la figure), la frontière des possibilités de production est obtenue. Lorsque le vecteur des biens ajustables x_t est constitué d'un facteur de production et d'un produit, la fonction de production est obtenue (cadran nord-ouest) ou la fonction d'*input* requis (cadran sud-est). Ces fonctions sont décroissantes car par convention les facteurs de production sont négatifs. Enfin, lorsque x_{1t} et x_{2t} sont des facteurs de production, l'isoquante est obtenue dans le cadran sud-ouest de la figure 1².

Dans cette sous-section, les propriétés de π^{es} ont été dérivées conditionnellement à la fonction objectif $p_t'x_t$ et à la contrainte $s(z_t)$ retenues³. Dès que des changements sont introduits, ces résultats doivent être adaptés. Ceci se produit quand au lieu de considérer un modèle ES, faisant la distinction entre biens instantanément ajustables et entièrement fixes, des situations d'équilibre partiel se présentent.

FIGURE 1
La technologie de production



2. Ce cadre d'analyse est également compatible avec la théorie du consommateur : en considérant que u est variable, f peut être vue comme une fonction d'utilité décroissante en x (puisque les biens de consommations sont négatifs), la partie sud-ouest de la Figure 1 représente la situation où les deux biens sont demandés. La situation où un bien est offert (le travail par exemple) correspond aux cadrans des régions nord-ouest et sud-est de la Figure 1.
3. L'étude des relations de dualité entre f , π^{es} et s n'étant pas au centre de cet article, nous renvoyons le lecteur à DIEWERT [1973, 1982] et LAU [1976] pour une revue de cette théorie.

2.1.2 Équilibre partiel

Le modèle d'Équilibre Partiel (EP) considère, *en sus* des biens ajustables et fixes, des biens quasi-fixes, c'est-à-dire fixes en courte période, où l'optimisation ne peut se faire que dans les biens variables, et s'ajustant en longue période⁴. Pour représenter ces biens, décomposons le vecteur x_t en deux sous-vecteurs : $x_t = (x'_{1t}, x'_{2t})'$ et le vecteur des prix en $p_t = (p'_{1t}, p'_{2t})'$. Le premier sous-vecteur contient les biens ajustables, tandis que les biens x_{2jt} sont quasi-fixes, et ne peuvent être ajustés à leur niveau optimal qu'en longue période. La fonction de profit EP se définit par :

$$(3) \quad \pi^{ep}(p_{1t}, x_{2t}, z_t) = \max_{x_{1t}} \{ p'_{1t} x_{1t} : (x_{1t}, x_{2t}) \in s(z_t) \}$$

Les propriétés de π^{ep} sont discutées par LAU [1976], et ne diffèrent de celles d'une fonction de profit ES qu'en ce qui concerne les biens quasi-fixes x_{2jt} , qui sont à considérer en courte période, comme les biens totalement fixes z_{kt} . Un avantage des fonctions de profit EP est de permettre d'affaiblir certaines hypothèses nécessaires dans les modèles ES. En équilibre statique, les conditions de second ordre correspondant à (1) requièrent la convexité de $s(z_t)$ en x_t , tandis qu'en EP la convexité en x_{1t} suffit. Ainsi, des non-convexités dans les biens quasi-fixes sont autorisés en courte période.

Les résultats de la sous-section précédente peuvent être directement adaptés à π^{ep} . Par exemple, le lemme de Hotelling s'applique pour dériver les offres et demandes des biens x_{1t} . Par ailleurs, le cadre d'analyse EP permet de retrouver différents modèles selon la manière dont le vecteur x_{1t} est défini. Si toutes les composantes de x_{1t} sont négatives, l'unité de production minimise les coûts variables ; si elles sont toutes positives, les revenus variables sont maximisés. Si un unique bien peut être ajusté (soit x_{1ht} ce bien) π^{ep}/p_{1ht} est une fonction de production si $x_{1ht} > 0$, et décrit la quantité de facteur x_{1ht} requis si $x_{1ht} < 0$ (*input requirement function*).

Par ailleurs, le modèle EP englobe le modèle ES ; en effet,

$$(4) \quad \begin{aligned} \pi^{es}(p_{1t}, p_{2t}, z_t) &= \max_{x_{2t}} \{ \pi^{ep}(p_{1t}, x_{2t}, z_t) + p'_{2t} x_{2t} \} \\ &= \pi^{ep}(p_{1t}, x_2^{es}(p_{1t}, p_{2t}, z_t), z_t) + p'_{2t} x_2^{es}(p_{1t}, p_{2t}, z_t). \end{aligned}$$

Cette dernière relation caractérise aussi la longue période, où les biens quasi-fixes x_{2jt} peuvent être ajustés. Lorsque la fonction de profit est différentiable, la condition nécessaire pour un optimum est :

$$(5) \quad - \frac{\partial \pi^{ep}(p_{1t}, x_{2t}, z_t)}{\partial x_{2t}} = p_{2t},$$

énonçant l'égalité entre le prix de marché et le profit marginal de x_{2t} . Les conditions de second ordre requièrent la concavité de π^{ep} en x_{2t} ⁵. BROWNING [1983] discute les propriétés dont π^{es} , définie en (4), hérite en fonction des

4. Dans la littérature, les qualificatifs restreinte, contrainte, conditionnelle, hicksienne, de court terme, de courte période, variable ou encore brute sont utilisés pour caractériser la fonction de profit des modèles d'équilibre partiel.

5. En longue période, afin que π^{es} et π^{ep} correspondent, s doit être convexe en x_{1t} et x_{2t} au point (x_1^{es}, x_2^{es}) .

propriétés vérifiées par $\pi^{ep}(p_{1t}, x_{2t}, z_t)$. C'est aussi à partir de (4) que l'égalité $x_1^{es}(p_{1t}, p_{2t}, z_t) = x_1^{ep}(p_{1t}, x_2^{es}, z_t)$ est obtenue après différentiation par rapport à p_{1t} . Cette dernière relation est également utilisée pour comparer les résultats de statique comparative de courte et de longue période et pour en déduire le principe de LE CHATELIER-SAMUELSON, formulant qu'en longue période les réactions dans le prix propre du bien x_{1ht} sont plus importantes qu'en courte période :

$$\frac{\partial x_{1h}^{es}}{\partial p_{1ht}} = \frac{\partial x_{1h}^{ep'}}{\partial p_{1ht}} + \frac{\partial x_{1h}^{ep}}{\partial x_{2t}'} \frac{\partial^2 \pi^{es}}{\partial p_{2t} \partial p_{2t}'} \frac{\partial x_{1h}^{ep}}{\partial x_{2t}}.$$

Le second terme à droite de cette égalité est positif puisque la fonction de profit ES est convexe en prix. Cette relation est également vérifiée lorsque seuls certains biens x_{2jt} s'ajustent, les autres restant constants (voir LAU [1976]).

En bref, la seule distinction entre les deux modèles ES et EP réside dans le nombre de biens pouvant être instantanément ajustés. Aussi cette différence n'apparaît-elle pas fondamentale puisque la nature des modèles est similaire. Comme le modèle EP est plus général, il pourrait sembler plus avantageux. Toutefois, le pouvoir explicatif du modèle EP est diminué puisque les effets de statique comparative ne peuvent pas être calculés pour les biens x_{2jt} en courte période. Dans le cas extrême où tous les biens sont considérés comme quasi-fixes, aucune réaction par rapport aux prix ne peut être obtenue.

Dans les études empiriques, les facteurs travail, capital et le niveau de production sont des facteurs typiquement considérés comme quasi-fixes, bien que leur endogénéité soit souvent reconnue. Malgré cela, des modèles de type EP sont retenus car ils ont l'avantage de ne nécessiter aucune information sur le niveau des prix, ni sur la forme des profits liés à x_{2t} . Les prix des facteurs x_{2t} ne se résument pas toujours à un prix de marché exogène p_{2t} , les profits liés à x_{2t} ne sont pas nécessairement bilinéaires, contrairement à la spécification $p_{2t}'x_{2t}$ retenue dans les modèles ES : des non-linéarités (pour les coûts du travail), des coûts fixes (pour les facteurs travail et capital), des coûts d'ajustement, des taxes et règles de tarification non linéaires, etc., peuvent contredire cette relation.

Ainsi, de l'étude des relations entre modèles ES et EP ressort une ambiguïté sur la signification du terme « *quasi-fixité* ». En équilibre statique, les biens x_{2t} sont instantanément ajustés. À l'autre extrême, en équilibre partiel, les biens x_{2t} sont fixes à court terme. Il existe un troisième type d'approche en économie de la production qui considère la structure temporelle des ajustements vers l'optimalité ; ce modèle est succinctement décrit ci-dessous.

2.2 Modèles d'équilibre temporaire

Le modèle d'Équilibre Temporaire (ET) introduit explicitement des éléments de dynamique, en considérant que certains biens sont ajustés dans un contexte intertemporel⁶. Dans la suite, les biens ajustés de manière

6. Les dénominations : équilibre statique, partiel et temporaire ont le mot équilibre en commun, et sont retenues ici pour souligner que les différences entre les modèles touchent la nature des ajustements de certaines variables. Le terme « *équilibre* », bien que courant dans la littérature en question peut prêter à confusion; la dénomination « *optimalité* » semblerait plus adéquate.

statique sont regroupés en un vecteur x_t , les biens ajustés intertemporellement sont regroupés en un vecteur y_t et les biens fixes en z_t .

Les premières générations de modèles dynamiques sont présentées par BERNDT, MORRISON et WATKINS [1981]. Dans cette sous-section, seules les approches les plus récentes des modèles ET sont évoquées. Le plus souvent, c'est la présence de coûts d'ajustement qui constitue la principale justification à l'intertemporalité. L'objectif de l'unité de production s'exprime alors par

$$(6) \quad \pi^{et} = \max_{\{x_\tau, y_\tau\}} E_t \sum_{\tau=t-1}^{\infty} R_{t,\tau} [p'_\tau x_\tau + q'_\tau y_\tau + a(y_\tau, y_{\tau+1}) : (x_\tau, y_\tau) \in s(z_\tau)].$$

où E_t représente l'espérance conditionnelle à l'information disponible à la période t . $R_{t,\tau}$ est un facteur d'escompte entre les périodes t et τ , avec $R_{t,t-1} = 1 + \rho_t$, $R_{t,t} = 1$ et $R_{t,\tau} = \prod_{j=t}^{\tau-1} (1 + \rho_j)^{-1}$ pour $\tau \geq t + 1$, ρ_t étant le taux de préférence pour le présent. La fonction $a(y_\tau, y_{\tau+1})$ représente le coût d'ajustement, dépendant par hypothèse uniquement de y_τ et $y_{\tau+1}$. Il est souvent supposé que $a(y_\tau, y_{\tau+1}) \leq 0$. D'autres hypothèses communément admises sont discutées par HAMERMESH et PFANN [1996]. Cette approche peut aussi être adaptée pour inclure d'autres sources de dynamique ainsi que des retards échelonnés sur plusieurs périodes.

Le programme d'optimisation (6) est en boucle fermée : à chaque période, l'unité de production le résout étant donné les décisions passées et ses anticipations. Il existe plusieurs méthodes pour résoudre ce problème (voir LASSERRE et OUELLETTE [1999] pour une discussion). En général, quelle que soit la méthode adoptée, il n'est pas souvent possible d'obtenir la solution du système sous forme analytique, ni d'obtenir facilement les impacts de statique comparative.

La section suivante présente une approche permettant de dériver les fonctions de demande et d'offre sous une forme « *semi-analytique* » dans un contexte plus général avec intertemporalités et non-linéarités. L'intérêt de considérer une solution sous forme semi-analytique réside dans le fait qu'elle est paramétrée par des prix virtuels ayant une interprétation économique.

3 Linéarisation et dérivation des fonctions de meilleure réponse

Lorsque les fonctions objectifs et les contraintes sont non-linéaires et intertemporelles, la dérivation des fonctions de meilleure réponse s'avère délicate. EPSTEIN [1981] généralise la théorie de la dualité aux situations où objectifs et contraintes sont non-linéaires, mais ne s'intéresse pas à l'obtention des fonctions de meilleure réponse.

Plus récemment, BLOMQUIST [1989] se base sur la linéarisation pour procéder à l'analyse de statique comparative dans le contexte de la théorie du consommateur. La démarche de BLOMQUIST est, ici, adaptée au contexte de la production pour dériver des fonctions de meilleure réponse sous forme « *semi-analytique* ». Ces développements sont principalement motivés par le manque de généralité des modèles considérant les prix comme étant exogènes et les profits comme une simple somme de produits prix-quantités : $p'_t x_t$.

3.1 Un cadre d'analyse élargi

La fonction objectif intertemporelle considérée est supposée être additivement séparable en une fonction g ayant uniquement des variables contemporaines θ_t , x_t et y_t comme arguments et une fonction d dépendant de η_t , y_t et y_{t-1} . Cette spécification est faite pour retrouver certains modèles typiques en analyse de la production, mais peut être élargie sans affecter l'essence des résultats développés ci-dessous. En période t l'unité de production résout le problème suivant (en boucle fermée) :

(7)

$$\max_{\{x_\tau, y_\tau\}} E_t \sum_{\tau=t-1}^{\infty} R_{t,\tau} [g(\theta_\tau, x_\tau, y_\tau) + d(\eta_{\tau+1}, y_\tau, y_{\tau+1}) : (x_\tau, y_\tau) \in s(z_\tau)].$$

Au lieu d'être une fonction des prix comme dans les modèles de la section 2, l'objectif dépend de *schémas de prix* reflétés par les vecteurs $\theta_t \in \mathbb{R}^{S_\theta}$ et $\eta_t \in \mathbb{R}^{S_\eta}$. Ces paramètres θ_t et η_t sont introduits pour généraliser la forme bilinéaire des profits retenus dans les modèles ES, EP et ET. Dans bien des cas en effet, les profits ou les coûts ne sont pas un simple produit entre prix et quantités. Les conditions d'existence d'une solution au problème (7) qui soit intérieure, unique, finie et deux fois différentiable dans ses arguments sont supposées vérifiées.

Les formes analytiques des solutions au problème (7) sont

$$(8) \quad x_\tau^* = x^*(y_{t-1}, \{\rho_\tau, \theta_\tau, \eta_\tau, z_\tau\}_{\tau=t}^{\infty}, \sigma_t)$$

et

$$(9) \quad y_\tau^* = y^*(y_{t-1}, \{\rho_\tau, \theta_\tau, \eta_\tau, z_\tau\}_{\tau=t}^{\infty}, \sigma_t),$$

où σ_t représente un vecteur comprenant toutes les variables nécessaires à la formation des anticipations en période t . Même lorsque les solutions au problème (7) sont assurées d'exister, il apparaît souvent difficile (et souvent non souhaitable) de les exprimer sous forme analytique comme suggéré dans (8) et (9). Il est toutefois possible de simplifier le problème (7), en remarquant qu'il est équivalent de résoudre à chaque période t le problème :

$$(10) \quad \pi^{n\ell} = \max_{x_t, y_t} \{\pi : (x_t, y_t) \in s(z_t)\},$$

avec pour fonction objectif :

$$(11) \quad \pi = (1 + \rho_t) d(\eta_t, y_{t-1}, y_t) + g(\theta_t, x_t, y_t) + E_t \{d(\eta_{t+1}, y_t, y_{t+1}^*)\},$$

correspondant aux conséquences anticipées d'un choix (x_t, y_t) en période t . Les conséquences (actualisées) des choix passés sont reflétées dans le premier terme à droite de l'égalité (11). Le dernier terme représente les conséquences anticipées des choix présents sur les profits futurs dépendant entre autre de y_{t+1}^* , la solution optimale en période $t + 1$. La relation (11) montre que l'impact des variables futures $\{\rho_\tau, \theta_\tau, \eta_\tau, z_\tau\}_{\tau=t+1}^\infty$ sur les choix présents s'exerce par le biais du choix optimal y_{t+1}^* uniquement.

Les modèles ES, EP et ET présentés ci-dessus correspondent à des spécifications particulières de π . En ES, θ_t correspond au vecteur des prix p_t et g à la fonction bilinéaire $p_t' x_t$; aucun bien de type y_{jt} n'apparaît et $d \equiv 0$. Aussi, dans les contextes simplifiés des modèles ES et EP, le problème d'optimisation (7) est-il séparable temporellement en une suite de problèmes d'optimisation atemporels. Dans le contexte non-linéaire, θ_t ne contient pas nécessairement autant de composantes que le vecteur x_t et par conséquent les prix unitaires des biens ne sont pas définis *a priori*. Une méthode permettant de dériver des prix virtuels, ainsi que les solutions sous forme « *semi-analytique* » en généralisant le lemme de Hotelling est exposée ci-dessous.

3.2 La méthode de résolution

Une manière de résoudre (10) consiste à linéariser la fonction objectif au voisinage de la solution, ce qui permet de retrouver un cadre bilinéaire⁷. L'hyperplan tangent à π au point optimal (x_t^*, y_t^*) est caractérisé par :

$$(12) \quad \pi^\ell = A + p_t^{v'} x_t + q_t^{v'} y_t,$$

avec

$$(13) \quad p_t^v \equiv \left. \frac{\partial \pi}{\partial x_t} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} \quad q_t^v \equiv \left. \frac{\partial \pi}{\partial y_t} \right|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}},$$

et

$$(14) \quad A = \pi^* - p_t^{v'} x_t^* - q_t^{v'} y_t^*,$$

$$\pi^* = \pi(y_{t-1}, \theta_t, x_t^*, y_t^*, \rho_t, \eta_t, \eta_{t+1}, y_{t+1}^*, \sigma_t).$$

Le terme A représente la différence entre la fonction de profit non-linéaire et la fonction linéarisée ; les astérisques caractérisent les valeurs solutions du problème d'optimisation non-linéaire. Si pour le problème non-linéaire initial, les prix unitaires ne sont pas nécessairement définis, les relations (13) permettent de les caractériser comme des valeurs marginales liées à l'utilisation d'une unité additionnelle des biens x_t et y_t . L'exposant v caractérise ces prix linéarisés, encore appelés prix virtuels (voir section 4.2).

7. La solution de notre problème peut être représentée de manière équivalente sur la base de la transformée de Legendre. LAU [1978] utilise la transformée de Legendre pour présenter les relations de dualité entre fonctions de production et de profit.

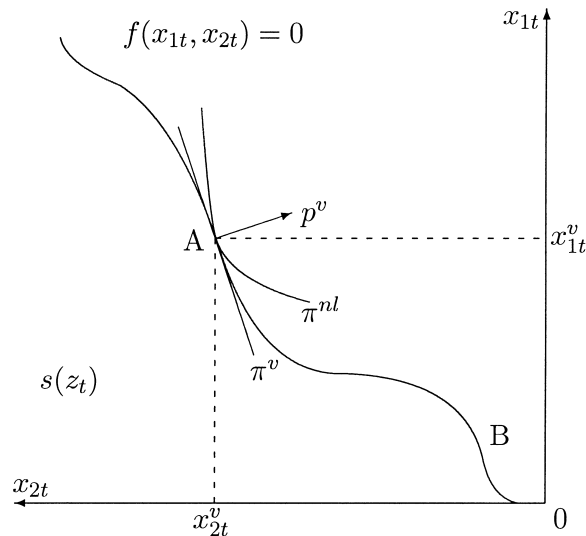
Par construction, le programme de maximisation initial (10) admet les mêmes solutions que l'optimisation du programme linéarisé :

$$\begin{aligned}
 & \text{opt}_{x_t, y_t} \{ A + p_t^{v'} x_t + q_t^{v'} y_t : (x_t, y_t) \in s(z_t) \} \\
 (15) \quad & = A + \text{opt}_{x_t, y_t} \{ p_t^{v'} x_t + q_t^{v'} y_t : (x_t, y_t) \in s(z_t) \} \\
 & = A + \pi^v(p_t^v, q_t^v, z_t),
 \end{aligned}$$

où π^v est une fonction de profit bilinéaire dans les quantités et les prix linéarisés. L'opérateur opt_{x_t, y_t} détermine les arguments x_t^v et y_t^v de π^v satisfaisant les conditions de premier ordre pour un optimum. Il convient de souligner qu'en général l'opérateur opt_{x_t, y_t} est différent de \min_{x_t, y_t} et \max_{x_t, y_t} . Les conditions de second ordre pour un maximum ne seront donc pas nécessairement vérifiées, et, bien que x_t^v et y_t^v soient solutions du problème de maximisation initial (10), x_t^v et y_t^v ne correspondent pas nécessairement à un maximum du problème linéarisé.

Ceci est illustré sur la figure 2 où le bien x_{1t} est un produit et x_{2t} un facteur de production (pour cet exemple $\{y_j\} = \emptyset$). Le point A représente la solution du problème initial (10) ; en ce point, la fonction π^v n'est ni minimisée ni maximisée. Bien que la solution du problème initial soit unique, le problème linéarisé $\text{opt}_{x_t, y_t} \{ p_t^{v'} x_t + q_t^{v'} y_t : (x_t, y_t) \in s(z_t) \}$ admettra souvent plusieurs solutions (en A et B). Afin que les solutions des deux problèmes coïncident faut-il encore imposer l'égalité entre la valeur π^{nl} obtenue en résolvant le problème initial et celle de $A + \pi^v$ obtenue dans le problème linéarisé : $\pi^{nl} = A + \pi^v$ ⁸.

FIGURE 2
Le problème initial et le problème linéarisé



8. Ceci ne permet pas d'exclure complètement la multiplicité des solutions ; mais comme ce point technique n'est pas pertinent dans la discussion qui suit, il est simplement ignoré.

La fonction de profit linéarisée π^v offre l'avantage de vérifier des propriétés similaires à celles des fonctions de profit de type ES. Sans perte de généralité, nous faisons l'hypothèse suivante.

| HYPOTHÈSE : Les prix virtuels p_t^v et q_t^v sont strictement positifs.

S'il s'avère que le prix virtuel d'une production est négatif, il convient simplement de considérer cette production comme un facteur de production et de la mesurer négativement afin d'obtenir un prix virtuel positif pour ce bien (et inversement pour le prix virtuel d'un facteur de production). Maintenant nous pouvons énoncer certaines propriétés intéressantes vérifiées par π^v .

PROPOSITION 3 : La fonction de profit linéarisée π^v vérifie les propriétés suivantes :

- (i) π^v est continue, homogène de degré un en prix p_t^v et q_t^v ,
- (ii) π^v est non croissante dans les prix linéarisés des facteurs et non décroissante dans les prix linéarisés des produits,
- (iii) π^v est différentiable et $\partial\pi^v/\partial p_t^v = x_t^v$ et $\partial\pi^v/\partial q_t^v = y_t^v$.

La démonstration des points (i) et (ii) est similaire à celle concernant les fonctions de profit de type ES. SLADE [1995, p. 377-378] démontre la partie (iii) dans un contexte statique.

Ainsi, la solution du problème de maximisation est supportée par les profits marginaux des facteurs et produits p_t^v et q_t^v . L'optimisation de la fonction de profit linéarisée conduit (par construction) aux mêmes choix que la résolution du problème original (10) :

$$x^v(p_t^v, q_t^v, z_t) = x^*(y_{t-1}, \{\rho_\tau, \theta_\tau, \eta_\tau, z_\tau\}_{\tau=t}^\infty, \sigma_t)$$

$$y^v(p_t^v, q_t^v, z_t) = y^*(y_{t-1}, \{\rho_\tau, \theta_\tau, \eta_\tau, z_\tau\}_{\tau=t}^\infty, \sigma_t).$$

Toutefois, et contrairement à une fonction de profit usuelle, la fonction de profit linéarisée π^v n'est pas nécessairement convexe en prix. Nous montrons en Annexe la relation de dualité suivante, entre f et π^v .

PROPOSITION 4 : Si à l'optimum, la frontière $f(x_t, y_t, z_t) = u$ de $s(z_t)$ est concave (convexe) en x_{ht} , y_{jt} alors π^v est convexe (concave) dans les prix linéarisés p_{ht}^v , q_{jt}^v correspondants.

Ce résultat permet d'étendre le cadre d'analyse proposé par DIEWERT [1982, p. 587-588] et SLADE [1995] à des contextes où la fonction de transformation n'est pas concave pour toutes valeurs de x_t , y_t (ni pour toutes les composantes de ces vecteurs). L'utilité de ces résultats est illustrée dans la section qui suit.

4 Prix virtuels et modélisation économique : quelques exemples

Plusieurs modèles en économie de la production peuvent être réinterprétés sur la base des résultats précédents. Remarquons, tout d'abord, que les modèles bilinéaires ES, EP et ET sont bien des cas particuliers obtenus pour une certaine spécification de la fonction objectif π . D'autres exemples sont donnés dans cette section.

4.1 Deux exemples dans un contexte statique

Dans le modèle non-linéaire statique, l'ensemble des biens ajustés intertemporellement est vide : $\{y_j\} = \emptyset$ et la fonction objectif π se confond avec $g(\theta_t, x_t)$ dans l'expression (11). Décomposons le vecteur des biens x_t en deux sous-vecteurs $x_t = (x'_{1t}, x'_{2t})'$, selon que les profits associés sont bilinéaires ou non.

DI EWERT [1982] présente un modèle où l'unité de production possède un pouvoir de marché sur les biens x_{2jt} . Le programme de l'unité de production est donné par :

$$\pi^{ne}(p_t, \beta_t, z_t) = \max_{x_{1t}, x_{2t}} \{ p'_{1t} x_{1t} + p_{2t}(x_{2t}, \beta_t)' x_{2t} : (x_{1t}, x_{2t}) \in s(z_t) \},$$

où $p_{2t}(x_{2t}, \beta_t)$ est un vecteur de demandes inverses paramétrées par β_t . Dans la situation présente, le vecteur θ_t des schémas de prix est à identifier avec $(p'_{1t}, \beta'_t)'$. Remarquons que le problème s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} & \max_{x_{2t}} \left\{ \max_{x_{1t}} \left\{ p'_{1t} x_{1t} : (x_{1t}, x_{2t}) \in s(z_t) \right\} + p_{2t}(x_{2t}, \beta_t)' x_{2t} \right\} \\ & = \max_{x_{2t}} \left\{ \pi^{ep}(p_{1t}, x_{2t}, z_t) + p_{2t}(x_{2t}, \beta_t)' x_{2t} \right\}. \end{aligned}$$

Les conditions de premier ordre correspondantes sont

$$\frac{\partial \pi^{ep}}{\partial x_{2t}} + p_{2t}(x_{2t}, \beta_t) + \frac{\partial p'_{2t}(x_{2t}, \beta_t)}{\partial x_{2t}} x_{2t} = 0.$$

Les conditions de second ordre requièrent que la matrice :

$$\frac{\partial^2 \pi^{ep}}{\partial x_{2t} \partial x'_{2t}} + 2 \frac{\partial p_{2t}(x_{2t}, \beta_t)}{\partial x'_{2t}} + \left[\frac{\partial^2 p'_{2t}(x_{2t}, \beta_t)}{\partial x_{2ht} \partial x_{2it}} x_{2t} \right]$$

soit semi-définie négative. Lorsque $p_{2t}(x_{2t}, \beta_t)$ est décroissante et éventuellement concave, la concavité de π^{ep} en x_{2t} n'est plus requise pour définir un *optimum* (intérieur). Ainsi, l'introduction de pouvoir de marché permet d'affaiblir certaines conditions relatives à π^{ep} qui étaient nécessaires en

concurrence parfaite⁹. Des conditions sur la demande inverse $p_{2t}(x_{2t}, \beta_t)$ sont toutefois requises.

Lorsque le problème non-linéaire admet une solution bien définie, alors celle-ci peut être supportée par un hyperplan tangent. Après avoir identifié π à $p'_{1t}x_{1t} + p_{2t}(x_{2t}, \beta_t)'x_{2t}$ et défini les prix linéarisés comme

$$p_{1t}^v = p_{1t} \quad \text{et} \quad p_{2t}^v = p_{2t}(x_{2t}^*, \beta_t) + \frac{\partial p_{2t}(x_{2t}^*, \beta_t)}{\partial x_{2t}'} x_{2t}^*,$$

les résultats de la section précédente s'appliquent. Les prix virtuels des biens imparfaitement concurrentiels correspondent au prix marginal de production (ou de consommation) d'une unité supplémentaire des biens x_{2t} . Ils diffèrent des prix de marché d'un terme $(\partial p_{2t}/\partial x_{2t}')x_{2t}^*$ reflétant le pouvoir de marché. La quantité A de l'équation (15) vaut ici $-x_{2t}^{*'}[\partial p_{2t}'/\partial x_{2t}]x_{2t}^*$ et mesure l'excès de profit par rapport à la situation parfaitement concurrentielle. Des études empiriques adoptant une telle démarche sont présentées par ROBERTS [1984] qui modélise le comportement d'oligopoles ; par BERNSTEIN [1992], qui étudie le comportement non-compétitif sur les marchés des facteurs et des produits. Une revue récente de cette littérature est présentée par SLADE [1995].

Dans ce cadre non-linéaire, les résultats de statique comparative peuvent différer de ceux du modèle bilinéaire usuel. La fonction de profit π^v peut, en effet, ne pas être convexe dans les prix virtuels p_{2t}^v ; en effet, nous avons vu dans la proposition 4 qu'une telle situation se réalise lorsque la frontière de f est convexe en x_2 . Comme d'après la proposition 3, $\partial \pi^v / \partial p_{2t}^v = x_{2t}^v$, il en résulte que $[\partial^2 \pi^v / \partial p_{2t}^v \partial p_{2t}^v] = \partial x_{2t}^v / \partial p_{2t}^v$. Aussi, les réactions des offres et des demandes optimales x_2^* à une variation des prix propres peuvent-elles être de signe opposé au résultat usuel. Supposons, par exemple, que le taux de marge $\mu_j \geq 0$ soit constant dans l'expression $p_{2jt}^v = p_{2jt}(1 + \mu_j)$, où p_{2jt} dénote le prix de marché du bien x_{2jt} . Dans ces conditions :

$$\frac{\partial x_{2jt}^v}{\partial p_{2jt}^v} = (1 + \mu_j) \frac{\partial x_{2jt}^v}{\partial p_{2jt}^v} = (1 + \mu_j) \frac{\partial^2 \pi^v}{\partial (p_{2jt}^v)^2}.$$

Aussi, lorsque π^v est concave en p_{2t} (f est convexe en x_{2t}), l'offre de produit x_{2jt} est-elle décroissante dans son prix p_{2jt} ?

Un second exemple illustrant l'utilité de la linéarisation est donné par KÖNIG et POHLMEIER [1987, 1989], étudiant l'effet sur l'emploi d'une réduction du temps de travail. Les auteurs définissent les coûts totaux liés à

9. En concurrence parfaite, la concavité de π^{ep} en x_{2t} est nécessaire pour caractériser un maximum (intérieur). En effet, les conditions de premier ordre sont dans ce cas $\partial \pi^{ep} / \partial x_{2t} = -p_{2t}$ et celles de second ordre requièrent que la matrice $\partial^2 \pi^{ep} / \partial x_{2t} \partial x_{2t}'$ soit semi-définie négative (voir section 2.1.2). En utilisant la dualité, on peut montrer que la concavité de π^{ep} en x_{2t} implique la convexité de π^{es} en p_{2t} .

l'emploi par

$$(16) \quad c_\ell = (b_t + p_{h_{st}}h_{st} + p_{ot}o_t)n_t \equiv \pi,$$

où b_t est un coût fixe à l'emploi, h_{st} est le nombre d'heures de travail réglementaires, o_t le nombre d'heures supplémentaires, $p_{h_{st}}$ et p_{ot} les prix correspondants, et n_t est le nombre de travailleurs. Les prix linéarisés de n_t et o_t sont

$$\begin{aligned} p_{1t}^v &= b_t + p_{h_{st}}h_{st} + p_{ot}o_t^*, \\ p_{2t}^v &= p_{ot}n_t^*. \end{aligned}$$

KÖNIG et POHLMEIER spécifient également les demandes de travail et d'heures supplémentaires en dérivant simplement $\pi^v \equiv p_{1t}^v n_t^* + p_{2t}^v o_t^*$ par rapport à p_{1t}^v et p_{2t}^v respectivement. Là encore, les coûts du travail c_ℓ diffèrent de π^v ; dans le cas présent $A = -p_{ot}o_t^* n_t^*$ dans (15). Par ailleurs, le vecteur des schémas de prix θ_t est identifié avec $(b_t, p_{h_{st}}h_{st}, p_{ot})$ et les variables de choix x_{1t} et x_{2t} avec les facteurs n_t et o_t (qui sont ici des scalaires pour simplifier). Les prix virtuels p_{1t}^v et p_{2t}^v indiquent le prix relatif à l'utilisation d'une unité supplémentaire des facteurs de production « *nombre d'employés* » et « *heures supplémentaires* » respectivement.

4.2 Prix linéarisés et prix virtuels

Jusqu'à présent, la linéarisation a été appliquée au point optimal, solution du problème d'optimisation. Certains biens peuvent cependant être contraints et ne pas être ajustables à leur niveau optimal. Il s'agit alors d'adapter l'analyse de la section 3 en convertissant le problème contraint en un problème non contraint. Soit x_{2t} le vecteur des biens contraints aux niveaux \bar{x}_{2t} et $g(\theta_t, x_{1t}, x_{2t})$ la fonction objectif. Le programme d'optimisation initial s'écrit alors

$$\pi^{n\ell}(\theta_t, \bar{x}_{2t}, z_t) = \max_{x_{1t}, x_{2t}} \{g(\theta_t, x_{1t}, x_{2t}) : (x_{1t}, x_{2t}) \in s(z_t) \wedge x_{2t} = \bar{x}_{2t}\}.$$

Le problème non contraint équivalent est donné par :

$$\pi^{n\ell} = \text{opt}_{\lambda_{x_2}} \max_{x_{1t}, x_{2t}} \{g(\theta_t, x_{1t}, x_{2t}) + \lambda'_{x_2}(x_{2t} - \bar{x}_{2t}) : (x_{1t}, x_{2t}) \in s(z_t)\},$$

où λ_{x_2} correspond au multiplicateur de Lagrange.

En identifiant la fonction objectif π à $g + \lambda'_{x_2}(x_{2t} - \bar{x}_{2t})$, la méthode de linéarisation peut s'appliquer, avec

$$(17) \quad p_{1t}^v \equiv \left. \frac{\partial g}{\partial x_{1t}} \right|_{\substack{x_1=x_1^* \\ x_2=\bar{x}_2}}, \quad p_{2t}^v \equiv \left. \frac{\partial g}{\partial x_{2t}} \right|_{\substack{x_1=x_1^* \\ x_2=\bar{x}_2}} + \lambda_{x_2}.$$

Comme pour le cas non restreint, la relation entre la fonction de profit non-linéaire et π^v est donnée par

$$\begin{aligned}\pi^{n\ell} &= \text{opt}_{\lambda_{x_2}} \left\{ \text{opt}_{x_{1t}, x_{2t}} \left\{ A + p_{1t}' x_{1t} + p_{2t}' \bar{x}_{2t} : x_t \in s(z_t) \right\} \right\} \\ &= \text{opt}_{\lambda_{x_2}} \left\{ A + \pi^v(p_{1t}^v, p_{2t}^v, z_t) \right\}.\end{aligned}$$

Par la proposition 3, $\bar{x}_{2t} = x_{2t}^v(p_{1t}^v, p_{2t}^v, z_t)$: les prix linéarisés sont support de la solution (x_{1t}^*, \bar{x}_{2t}) au problème originel. Pour ces prix linéarisés, les quantités contraintes sont considérées comme optimales et $x_{2t}^v = \partial \pi^v / \partial p_{2t}^v$. Ainsi, le concept de prix linéarisés correspond à celui de prix virtuels de NEARY et ROBERTS [1980, p.26] définis comme ‘prices which would induce an unrationed household to behave in the same manner as when faced with a given vector of ration constraints’.

En fait, NEARY et ROBERTS [1980] spécifient g comme étant une fonction de profit bilinéaire correspondant au cadre EP :

$$\begin{aligned}\pi^{n\ell} &= \max_{x_{1t}, x_{2t}} \left\{ p_{1t}' x_{1t} + p_{2t}' x_{2t} : (x_{1t}, x_{2t}) \in s(z_t) \wedge x_{2t} = \bar{x}_{2t} \right\} \\ &= \text{opt}_{\lambda_{x_2}} \left\{ \max_{x_{1t}, x_{2t}} \left\{ p_{1t}' x_{1t} + p_{2t}' x_{2t} + \lambda_{x_2}' (x_{2t} - \bar{x}_{2t}) : x_t \in s(z_t) \right\} \right\}.\end{aligned}$$

Après linéarisation, le programme ci-dessus devient

$$\pi^{n\ell} = \text{opt}_{\lambda_{x_2}} \left\{ A + \text{opt}_{x_{1t}, x_{2t}} \left\{ p_{1t}' x_{1t} + p_{2t}' x_{2t} : (x_{1t}, x_{2t}) \in s(z_t) \right\} \right\},$$

avec

$$p_{1t}^v = p_{1t} \quad \text{et} \quad p_{2t}^v = p_{2t} + \lambda_{x_2}.$$

Les valeurs des multiplicateurs de Lagrange sont intéressantes pour pouvoir interpréter les prix virtuels p_{2t}^v . Celles-ci sont obtenues après optimisation par rapport à λ_{x_2} :

$$\begin{aligned}\text{opt}_{\lambda_{x_2}} \left\{ \max_{x_{1t}, x_{2t}} \left\{ p_{1t}' x_{1t} + p_{2t}' x_{2t} + \lambda_{x_2} (x_{2t} - \bar{x}_{2t}) : x_t \in s(z_t) \right\} \right\} \\ = \text{opt}_{\lambda_{x_2}} \left\{ \pi^{ep}(p_{1t}, x_{2t}^v, z_t) + p_{2t}' x_{2t}^v + \lambda_{x_2} (x_{2t}^v - \bar{x}_{2t}) \right\}.\end{aligned}$$

Les conditions nécessaires d’optimalité sont ici

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi^{ep}(p_{1t}, x_{2t}^v, z_t)}{\partial x_{2t}'} \frac{\partial x_{2t}^v}{\partial \lambda_{x_2j}} + p_{2t}' \frac{\partial x_{2t}^v}{\partial \lambda_{x_2j}} + x_{2t}^v - \bar{x}_{2t} + \lambda_{x_2}' \frac{\partial x_{2t}^v}{\partial \lambda_{x_2j}} = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_{x_2} = - \frac{\partial \pi^{ep}(p_{1t}, x_{2t}^v, z_t)}{\partial x_{2t}'} - p_{2t}.\end{aligned}$$

Par conséquent, les prix virtuels (ou linéarisés) associés aux biens x_{2t} , sont donnés par

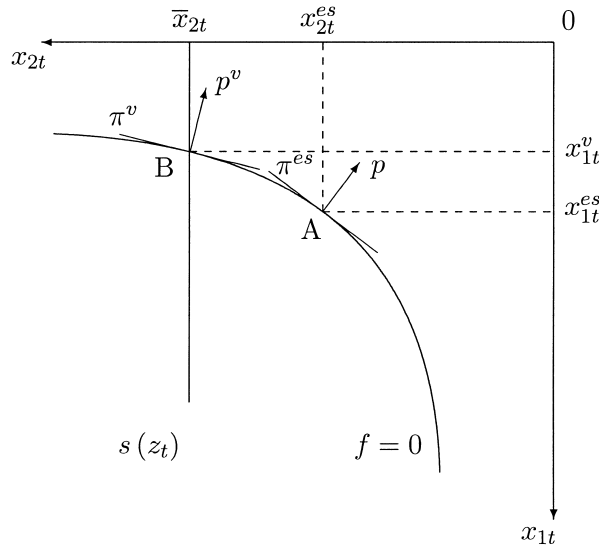
$$(18) \quad p_{2t}^v = p_{2t} + \lambda_{x_2} = - \frac{\partial \pi^{ep}(p_{1t}, x_{2t}^v, z_t)}{\partial x_{2t}'}.$$

Ce prix virtuel p_{2t}^v indique quel prix l’unité de production est prête à payer (à recevoir) pour l’utilisation (la production) d’une unité marginale des biens x_{2t} . Ce prix est supérieur ou inférieur au prix de marché p_{2t} selon les valeurs de λ_{x_2} . À partir de la relation (18), il apparaît que la positivité des prix virtuels (par hypothèse) est équivalente à la décroissance de la fonction de profit d’équilibre partiel en \bar{x}_{2t} . Les prix virtuels p_{2t}^v sont égaux aux prix de marché p_{2t} grevés des montants λ_{x_2} correspondants aux surcoûts liés à la sous-optimalité

des quantités \bar{x}_{2t} . Dans ce cas, la quantité $A = (p_{2t} - p_{2t}^v)' \bar{x}_{2t}$, différence entre les profits observés et les profits virtuels, est interprétable comme un profit (ou coût) fixe, lié à la fixité des biens x_{2t} . Lorsque les biens x_{2t} sont ajustables, $\lambda_{x_2} = 0$ et $A = 0$ et le modèle ES est obtenu.

La figure 3 représente une telle situation où x_{1t} et \bar{x}_{2t} sont des facteurs de production scalaires. Le point A représente la solution du problème non contraint ; les profits réalisés en A sont donnés par π^{es} et les fonctions de demande sont x_{1t}^{es} et x_{2t}^{es} . La fixité de \bar{x}_{2t} , cependant, empêche la réalisation de ce choix, et la situation effectivement réalisée correspond au point B. Comme en ce point la frontière de $s(z_t)$ est lisse, il existe des prix p_t^v supportant ces choix ; pour ces prix virtuels, x_{1t}^v et $x_{2t}^v = \bar{x}_{2t}$ peuvent être considérés comme optimaux.

FIGURE 3
La demande de facteur x_{2t} est restreinte au niveau \bar{x}_{2t}



Jusqu'à présent, les biens fixes z_t n'ont pas retenu notre intérêt. Bien que z_t paramétrant $s(z_t)$ n'apparaisse pas comme argument de la fonction objectif, z_t est argument de $\pi^{n\ell}$. Aussi, la méthode de linéarisation peut-elle également être appliquée à $\pi^{n\ell}(\theta_t, \bar{x}_{2t}, z_t)$. En définissant les prix virtuels associés à z par

$$r_t^v \equiv \frac{\partial \pi^{n\ell}(\theta_t, \bar{x}_{2t}, z_t)}{\partial z_t},$$

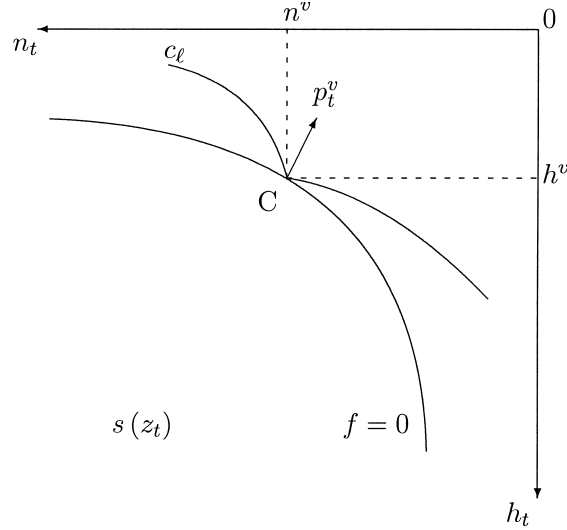
puis en résolvant ce système en z_t , l'on obtient (la non singularité du Hessien de $\pi^{n\ell}$ est admise) : $z_t = z^*(\theta_t, \bar{x}_{2t}, r_t^v)$, etc.

4.3 Non différentiabilité de l'objectif

Les fonctions objectif des unités de production ne sont pas forcément lisses. Les raisons pratiques pour lesquelles des points angulaires peuvent exister sont revues par PUDNEY [1989] et LEE et PITT [1987]. Des difficultés

FIGURE 4

La demande de facteur x_{2t} est restreinte au niveau \bar{x}_{2t}



résultent alors du fait que les conditions de premier ordre ne caractérisent plus nécessairement l'optimalité. La figure 4 schématise la situation en montrant également que lorsque f est différentiable, une tangente passant par la solution en coin en C existe et que la construction de prix linéarisés reste possible.

L'originalité de LEE et PITT [1987] est d'adapter la méthode des prix virtuels à ce contexte. Le cadre d'analyse de KÖNIG et POHLMEIER [1987, 1989] (voir notre équation (16)) peut également être élargi et admettre la présence d'un coin : l'introduction d'heures supplémentaires o_t , rémunérées au taux $p_{ot} \neq p_{h_{st}}$, va nous servir d'exemple.

Redéfinissons les coûts totaux du travail par

$$(19) \quad c_\ell = \begin{cases} (b_t + p_{h_{st}} h_t) n_t, & \text{pour } h_t \geq h_{st} \\ (b_t + p_{h_{st}} h_{st} + p_{ot} o_t) n_t & \text{pour } h_t \leq h_{st} \end{cases}$$

où $h_t = h_{st} + o_t \leq h_{st} \leq 0$ dénote le temps de travail total effectué (en moyenne par travailleur). La fonction objectif c_ℓ présente un coin en $h_t = h_{st}$ (qui correspond au point C sur la figure 4). Au point $h_t = h_{st}$, les coûts du travail sont donnés par $(b_t + p_{h_{st}} h_{st}) n_t$, mais la fonction c_ℓ n'est pas différentiable. Toutefois, l'introduction du multiplicateur de Lagrange $\lambda_h > 0$ associé à la contrainte $h_t = h_{st}$ permet de dériver les prix virtuels de n_t et h_t :

$$(20) \quad p_{1t}^v = b_t + p_{h_{st}} h_{st},$$

$$(21) \quad p_{2t}^v = p_{h_{st}} n_t + \lambda_h.$$

Cette méthode a été utilisée par LEE et PITT ainsi que dans la sous-section précédente. Dans le cas présent, le prix virtuel p_{2t}^v exprime le prix qu'une unité de production est prête à payer pour une variation marginale de l'heure

de travail ; p_{2t}^v est constitué de la masse salariale horaire $p_{h_{st}} n_t^*$ et du supplément $0 \leq \lambda_h \leq (p_{ot} - p_{h_{st}}) n_t^*$. La détermination de λ_h peut se faire comme dans la sous-section précédente.

4.4 Prix virtuels et inefficacités

Jusqu'à présent, l'unité de production était considérée être parfaitement rationnelle. Néanmoins, le cadre d'analyse des prix virtuels peut être adapté pour modéliser des unités de production faisant des erreurs d'optimisation. Dès lors, le vecteur x^o des biens *observés* n'appartient plus forcément à la frontière de s , mais risque de se trouver dans son intérieur. Il est alors justifié de se demander si x^o obéit toujours à des conditions de régularité (contrairement à x^*) ou si toute autre investigation est inutile.

L'idée sous-jacente à l'analyse est d'essayer de décrire les choix observés x^o à partir d'une fonction paramétrée qui, elle, satisfait certaines propriétés de régularité, et dont les paramètres s'interprètent comme une mesure de l'inefficacité. Ci-dessous, nous présentons, tout d'abord, comment les choix situés sur la frontière f de $s(z_t)$ peuvent être décrits de cette manière, puis ceux appartenant à l'intérieur de $s(z_t)$.

Dans la littérature, un choix est dit inefficace de manière *allocative*, lorsque le vecteur des schémas de prix $\tilde{\theta}_t$ soutenant les décisions de l'unité de production diffère de la valeur réelle de θ_t ¹⁰. Alors, la fonction objectif sur laquelle les décisions sont basées est $g(\tilde{\theta}_t, x_t)$, et la fonction de profit correspondante est donnée par :

$$(22) \quad \pi^{nl}(\tilde{\theta}_t, z_t) = \max_{x_t} \{ g(\tilde{\theta}_t, x_t) : x_t \in s(z_t) \}.$$

Une solution intérieure $x^*(\tilde{\theta}_t, z_t)$ à ce problème est supposée exister, être unique, continue et deux fois différentiable. Bien que $x^*(\tilde{\theta}_t, z_t)$ soit située sur la frontière de la fonction de transformation, cette solution ne correspond pas nécessairement au choix optimal $x^*(\theta_t, z_t)$. Par construction, $g(\theta_t, x^*(\tilde{\theta}_t, z_t)) \leq g(\theta_t, x^*(\theta_t, z_t))$, et la différence $g(\theta_t, x^*(\tilde{\theta}_t, z_t)) - \pi^{nl}(\theta_t, z_t)$ représente l'impact de l'inefficacité allocative sur les profits. En définissant les prix virtuels (ou linéarisés) comme $p_t^v = \partial g(\tilde{\theta}_t, x_t) / \partial x_t |_{x_t = x^*}$, et les profits linéarisés comme

$$(23) \quad \pi^v(p_t^v, z_t) = \text{opt}_{x_t} \{ p_t^{v'} x_t : x_t \in s(z_t) \},$$

les propriétés usuelles des fonctions de profits bilinéaires sont retrouvées pour π^v , en particulier $x_t^v = \partial \pi^v / \partial p_t^v = x_t^*$ (Proposition 3). Les prix virtuels p_t^v dénotent dans ce cas les vecteurs des prix subjectifs $\partial g(\tilde{\theta}_t, x_t) / \partial x_t$ à partir

10. Voir par exemple YOTOPOULOS et LAU [1974] ou LOVELL et SICKLES [1983]. CORNWELL and SCHMIDT [1996] présentent une revue récente de cette littérature. Dans ces contributions, le cadre d'analyse ES (ou parfois EP) est retenu avec $g \equiv p'x$ et $\theta \equiv p$.

desquels l'unité de production effectue des choix inefficaces. Les prix objectifs d'une unité marginale de x_t , soutenant des choix efficaces, sont, quant à eux, donnés par $\partial g(\theta_t, x_t) / \partial x_t$.

Si les choix observés $x_t^o = (x_{1t}^o, \dots, x_{S_x t}^o)$ sont effectivement situés sur la frontière de $s(z_t)$ alors ils peuvent être réécrits sous la forme de $x_t^v(p_t^v, z_t)$ comme montré ci-dessus ; toutefois, les choix observés x_t^o pourraient en fait être situés à l'intérieur de $s(z_t)$. Dans ce cas le choix x_{jt}^o peut être décrit à partir d'une transformation e_j de la frontière de $s(z_t)$ dans son intérieur, et x_{jt}^o peut être exprimé à partir de x_{jt}^v situé sur la frontière comme

$$(24) \quad x_j^o(p_t^v, z_t; \alpha_{jt}) = e_j(x^v(p_t^v, z_t); \alpha_{jt}),$$

avec $x_j^o \leq x_j^v$. Cette inégalité caractérise l'*inefficacité technique* : plus d'*inputs* sont nécessaires pour produire moins. L'inefficacité technique est reflétée par la valeur des paramètres α_{jt} de la fonction e_j . Cette fonction e_j est le plus souvent spécifiée comme une fonction bijective, continue, croissante et linéairement homogène en x_{jt} et décroissante en α_{jt} .

Le profit observé qui est associé aux choix x_t^o techniquement inefficaces est donné par

$$\pi^o = g(\tilde{\theta}_t, x_t^o).$$

Comme x_t^o n'est pas situé sur la frontière f , le profit π^o n'est pas maximal. Cependant, il est possible de définir une fonction de profit π^e , pour laquelle x^v est solution optimale :

$$(25) \quad \pi^e(p_t^v, z_t; \alpha_t) = \text{opt}_{x_1, \dots, x_{S_x}} \left\{ \sum_{j=1}^{S_x} p_{jt}^v e_j(x_{jt}, \alpha_{jt}) : x_t \in s(z_t) \right\}.$$

Étant donné les relations (24) entre x_{jt}^o et x_{jt}^v et les propriétés vérifiées par $x_t^v(p_t^v, z_t)$ (énoncées en Proposition 3), certaines propriétés de régularité seront également vérifiées pour $x_{jt}^o(p_t^v, z_t; \alpha_{jt})$, bien que ces quantités ne soient pas situées sur la frontière de $s(z_t)$. En effet, les choix techniquement inefficaces x_{jt}^o peuvent être obtenus par différentiation de π^e par rapport à p_t^v cette fonction de profit π^e vérifie, par ailleurs, les propriétés énoncées en Proposition 3.

4.5 Deux exemples dans un contexte dynamique

Deux exemples dans un contexte dynamique sont maintenant présentés. La seule différence par rapport aux développements précédents est que l'ensemble $\{y_j\}$ des variables reliant deux périodes successives n'est plus vide. L'intérêt d'utiliser l'approche par les prix virtuels dans un contexte dynamique est discuté par BLOMQUIST [1985] en théorie du consommateur. En théorie de la production, le recours à cette méthode est fréquent, mais n'est pas souvent présenté de manière explicite comme l'illustre l'exemple suivant.

La linéarisation est utilisée pour dériver les coûts d'usage d'un stock (le capital le plus souvent) acheté à une date donnée, mais utilisé pendant plusieurs périodes dans le processus de production. Ces coûts d'usage sont

l'équivalent des prix virtuels : ils permettent de considérer le stock de capital comme s'il s'agissait d'un bien fongible acheté à chaque période à ces prix virtuels (ou coûts d'usage). Par ailleurs, la demande de stock de capital peut alors être dérivée à la manière des demandes de flux : par l'intermédiaire du lemme de Hotelling. Considérons (7) avec la spécification suivante pour g_t et d_t :

$$(26) \quad g_t \equiv p'_t x_t$$

$$(27) \quad d_t \equiv p_{\Delta y_{t+1}} (y_{t+1} - (1 - \delta_t) y_t),$$

où y_t est un réel négatif, le stock de capital par exemple, $y_{t+1} - (1 - \delta_t) y_t \equiv \Delta y_t$ représente l'investissement net en période t et $p_{\Delta y_{t+1}}$ le prix unitaire correspondant. Après remplacement dans (11), π se réécrit

$$\begin{aligned} \pi = (1 + \rho_t) (p_{\Delta y_t} (y_t - (1 - \delta_{t-1}) y_{t-1})) \\ + p'_t x_t + E_t \{ p_{\Delta y_{t+1}} (y_{t+1} - (1 - \delta_t) y_t) \}. \end{aligned}$$

et le programme de maximisation devient

$$\begin{aligned} \max_{y_t} \{ \pi^{ep} (p_t, y_t, z_t) + (1 + \rho_t) (p_{\Delta y_t} (y_t - (1 - \delta_{t-1}) y_{t-1})) \\ + E_t \{ p_{\Delta y_{t+1}} (y_{t+1} - (1 - \delta_t) y_t) \} \}. \end{aligned}$$

La condition de premier ordre pour l'optimalité du stock de capital est donnée par

$$(28) \quad \frac{\partial \pi^{ep}}{\partial y_t} + (1 + \rho_t) p_{\Delta y_t} - E_t \{ p_{\Delta y_{t+1}} (1 - \delta_t) \} = 0.$$

L'application de la méthode de linéarisation nous conduit à définir

$$\begin{aligned} p_t^v &= p_t, \\ q_{1t}^v &= (1 + \rho_t) p_{\Delta y_t} - E_t \{ p_{\Delta y_{t+1}} (1 - \delta_t) \}, \\ A &= p_{\Delta y_t} \Delta y_t^* - q_{1t}^v y_t^*. \end{aligned}$$

q_{1t}^v exprime le prix d'usage du capital, défini sur la base du prix d'acquisition, des taux de dépréciation et de préférence pour le présent : $\eta_t \equiv (p_{\Delta y_t}, \delta_{t-1})$ dans l'expression de d . Pour ces prix p_t^v et q_{1t}^v le lemme de Hotelling est vérifié. Les hypothèses faites sur la formation des anticipations ont un impact sur la spécification des coûts d'usage. Lorsque les anticipations sont statiques, $q_{1t}^v = p_{\Delta y_t} (\rho_t + \delta_t)$, tandis que $q_{1t}^v = (1 + \rho_t) p_{\Delta y_t} - p_{\Delta y_{t+1}} (1 - \delta_t)$ si les anticipations sont parfaites.

Ces développements sont aisément étendus aux modèles de type équilibre temporaire présentés en section 2. Lorsque des coûts d'ajustement $a(y_t, y_{t+1})$ existent, il convient d'identifier dans l'expression (11),

$$d_t \equiv p_{\Delta y_{t+1}} (y_{t+1} - (1 - \delta_t) y_t) + a(y_t, y_{t+1}).$$

Après avoir défini les prix linéarisés comme

$$(29) \quad \begin{aligned} p_t^v &= p_t, \\ q_{2t}^v &= q_{1t}^v + (1 + \rho_t) \partial a_{t-1} / \partial y_t + E_t \{ \partial a_t / \partial y_t \}, \end{aligned}$$

les résultats de la section 3 peuvent être appliqués. Aucune étude empirique des coûts d'ajustement n'est, à ma connaissance, basée sur la linéarisation, peut être parce que l'estimation des conditions de premier ordre (28) est plus directe. D'autres extensions sont proposées dans la littérature pour tenir compte des différentes taxes sur le capital et de subventions à l'investissement (voir PINDYCK et ROTEMBERG [1983], par exemple) ainsi que pour tenir compte des irréversibilités dans l'investissement (ABEL et EBERLY [1996]).

5 Statique et dynamique comparative

Si les fonctions d'offres et de demandes de facteurs sous forme semi-analytique sont plus simples à spécifier après linéarisation, les impacts de statique comparative ne sont pas obtenus de manière directe : les fonctions x_t^v et y_t^v sont, en effet, des équations implicites (car $p_t^v = \partial\pi/\partial x_t$). Dans cette section nous présentons et discutons certains résultats en soulignant le rôle joué par les prix virtuels.

Le modèle original et le modèle linéarisé sont reliés par les équations :

$$(30) \quad \frac{\partial\pi^v}{\partial p_t^v} = x^v(p_t^v, q_t^v, z_t) = x^*(y_{t-1}, \{\rho_\tau, \theta_\tau, \eta_\tau, z_\tau\}_{\tau=t}^\infty, \sigma_t),$$

$$(31) \quad \frac{\partial\pi^v}{\partial q_t^v} = y^v(p_t^v, q_t^v, z_t) = y^*(y_{t-1}, \{\rho_\tau, \theta_\tau, \eta_\tau, z_\tau\}_{\tau=t}^\infty, \sigma_t),$$

qui constituent un système d'équations implicites puisque

$$(32) \quad p_t^v = \frac{\partial\pi}{\partial x_t}(\theta_t, x_t, y_t) \Big|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}},$$

$$(33) \quad q_t^v = \frac{\partial\pi}{\partial y_t}(y_{t-1}, \theta_t, x_t, y_t, \eta_t, \eta_{t+1}, \rho_t, y_{t+1}, \sigma_t) \Big|_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}}.$$

5.1 Le contexte statique

Dans le contexte statique et non-linéaire, l'ensemble des biens de type y_t est vide, et les relations ci-dessus se réécrivent :

$$(34) \quad \frac{\partial\pi^v}{\partial p_t^v} = x^v(p_t^v, z_t) = x^*(\theta_t, z_t),$$

et

$$(35) \quad p_t^v(\theta_t, z_t) = \frac{\partial\pi}{\partial x_t}(\theta_t, x_t^*).$$

Les résultats de statique comparative peuvent être déduits directement de $x^*(\theta_t, z_t)$. Toutefois, comme l'expression d'une telle forme analytique n'est pas toujours déduite aisément, il est utile de pouvoir retrouver les impacts désirés à partir des solutions sous forme « *semi-analytique* » x^v obtenues plus directement. Cette approche, développée par BLOMQUIST [1989] dans la théorie du consommateur, est ici appliquée au contexte de la production.

5.1.1 Impacts sur les demandes, les offres et les profits

L'effet d'une variation du vecteur des paramètres θ_t sur x^* est déduit de x^v en tenant compte du fait que les prix virtuels sont fonction implicite de θ_t :

$$\frac{\partial x^{*v}}{\partial \theta_t} = \frac{\partial p_t^{v'}}{\partial \theta_t} \frac{\partial x^{v'}}{\partial p_t^v}.$$

Après développements, on obtient

$$(36) \quad \frac{\partial x^{*v}}{\partial \theta_t} = \left[\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial x_t' \partial \theta_t} + \frac{\partial x^{*v}}{\partial \theta_t} \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial x_t' \partial x_t} \right] \frac{\partial x^{v'}}{\partial p_t^v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial x^{*v}}{\partial \theta_t} = \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial x_t' \partial \theta_t} \frac{\partial x^{v'}}{\partial p_t^v} \left[I - \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial x_t' \partial x_t} \frac{\partial x^{v'}}{\partial p_t^v} \right]^{-1},$$

sous les conditions de non singularité de la matrice à inverser. Celle-ci,

$$\left[I - \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial x_t \partial x_t'} \frac{\partial x^{v'}}{\partial p_t^v} \right]^{-1},$$

est appelée par BLOMQUIST [1989] la matrice fondamentale de non-linéarité, puisqu'elle se confond avec la matrice identité lorsque la fonction objectif est bilinéaire. Dans cette dernière situation, $\pi = p_t' x_t$ et θ_t est identifié à p_t , les prix linéarisés coïncident avec les prix de marché et $\partial x^{*v}/\partial \theta_t = \partial x^{v'}/\partial p_t$ est retrouvée.

L'effet d'une variation du vecteur des biens fixes z_t est donné par :

$$(37) \quad \frac{\partial x^{*v}}{\partial z_t} = \frac{\partial x^{v'}}{\partial z_t} + \frac{\partial p_t^{v'}}{\partial z_t} \frac{\partial x^{v'}}{\partial p_t^v}.$$

Aussi, l'effet total d'une variation des biens fixes se décompose-t-il en un impact direct et en impact indirect lié à la variation des prix virtuels $p_t^{v'}$ consécutive à une variation de z_t . La résolution du système conduit à

$$\frac{\partial x^{*v}}{\partial z_t} = \frac{\partial x^{v'}}{\partial z_t} + \left[\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial x_t' \partial z_t} + \frac{\partial x^{*v}}{\partial z_t} \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial x_t' \partial x_t} \right] \frac{\partial x^{v'}}{\partial p_t^v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial x^{*v}}{\partial z_t} = \left[\frac{\partial x^{v'}}{\partial z_t} + \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial x_t' \partial z_t} \frac{\partial x^{v'}}{\partial p_t^v} \right] \left[I - \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial x_t' \partial x_t} \frac{\partial x^{v'}}{\partial p_t^v} \right]^{-1}.$$

Les impacts sur les profits sont directement déduits des résultats précédents. L'effet marginal d'une variation des schémas de prix θ_t est

$$\frac{\partial \pi^{n\ell}}{\partial \theta_t} = \frac{\partial \pi^*}{\partial \theta_t} + \frac{\partial x^{*'}}{\partial \theta_t} \frac{\partial \pi^*}{\partial x_t}.$$

L'impact d'un changement de z_t est

$$(38) \quad \frac{\partial \pi^{n\ell}}{\partial z_t} = \frac{\partial x^{*'}}{\partial z_t} \frac{\partial \pi^*}{\partial x_t},$$

avec $\partial \pi^* / \partial x_t' = p_t^v$.

Le cadre théorique des prix linéarisés offre un autre résultat intéressant pour discuter des effets de statique comparative. La proposition suivante généralise au cadre non-linéaire et dynamique certaines propriétés bien connues lorsque les fonctions objectifs sont bilinéaires.

PROPOSITION 5 : Au point optimal, les relations suivantes sont vérifiées

$$(39) \quad \left. \frac{\partial x_{ht}}{\partial x_{kt}} \right|_{x=x^*} = -\frac{p_{kt}^v}{p_{ht}^v}, \quad \left. \frac{\partial x_{ht}}{\partial z_{kt}} \right|_{x=x^*} = \frac{r_{kt}^v}{p_{ht}^v}.$$

Une démonstration est jointe en Annexe. Cette proposition énonce l'égalité entre les taux de substitution (ou de transformation) et les prix virtuels relatifs. Lorsque l'objectif retenu est bilinéaire (comme pour les modèles de type ES) le résultat classique de l'égalité des taux de substitution et des prix relatifs est obtenu. Ce résultat est également intéressant pour deux autres raisons. D'une part de nombreuses relations de dualité développées dans la littérature peuvent se déduire directement de ces relations (38). D'autre part, cette proposition permet de comprendre l'enjeu de certaines controverses relatives à la mesure du taux de progrès technologique, des rendements d'échelle ou de la capacité d'utilisation des facteurs.

5.1.2 Mesure du changement technologique

Dans de nombreux modèles, les unités de production sont considérées produire un bien unique (soit x_{ht} le niveau de production) ; par ailleurs, le progrès technologique est souvent reflété par une variable de type z_{kt} (typiquement spécifiée comme une tendance temporelle) paramétrant la fonction de transformation $f(x_{ht}, x_{ht}^-, z_t)$. L'indicateur retenu pour mesurer l'impact du progrès technologique correspond souvent à l'effet marginal du progrès technologique, mesuré en pourcentage du niveau de production :

$$(40) \quad \epsilon_{x_h z_k} \equiv \frac{\partial x_h}{\partial z_{kt}} \frac{1}{x_h}.$$

En utilisant les résultats de la proposition 5, nous voyons que la définition de ce taux de croissance implique l'expression des prix virtuels relatifs :

$$(41) \quad \left. \frac{\partial x_{ht}}{\partial z_{kt}} \right|_{x=x^*} = \frac{r_{kt}^v}{p_{ht}^v} = \frac{\partial \pi^* / \partial z_{kt}}{\partial \pi^* / \partial x_{ht}}.$$

Une controverse touchant l'évaluation et l'évolution du taux de progrès technologique (voir par exemple FLAIG et STEINER [1993]), est en partie basée sur cette dernière équation. L'impact du progrès technologique z_{kt} sur la production x_{ht} va dépendre des prix virtuels associés à ces deux variables ou de manière équivalente de la spécification de la fonction objectif π que l'unité de production est supposée optimiser : celle-ci minimise-t-elle ses coûts ou maximise-t-elle ses profits ? Possède-t-elle un pouvoir de marché ? Combien de biens sont fixes ou quasi-fixes ? L'objectif est-il non-linéaire ou dynamique ? Comment l'unité de production forme-t-elle ses anticipations ? Y-a-t-il des coûts d'ajustement ?... Chaque spécification de la fonction objectif conduit à évaluer l'impact du progrès technologique différemment. En fait, de la relation (40), il ressort que tout le débat traduit, en fait, la difficulté d'évaluer les prix virtuels des variables x_{ht} et z_{kt} .

Considérons une unité de production produisant un bien unique, ayant une fonction objectif bilinéaire $p_{ht}^L x_{ht}$ où toutes les composantes de x_{ht} sont des facteurs de production et donc négatives. Afin de pouvoir comparer nos résultats directement avec ceux établis dans la littérature, nous définissons les coûts de production par $c^* = -p_{ht}^L x_{ht}^* \geq 0$. Sous l'hypothèse de concurrence parfaite, le coût marginal égale le prix de marché du produit, ou en d'autres termes, le prix virtuel de la production égale son prix de marché. Alors, $\epsilon_{x_h z_k}$ s'écrit :

$$(42) \quad \epsilon_{x_h z_k} \equiv \frac{\partial x_h}{\partial z_{kt}} \frac{1}{x_h} = -\frac{\partial c^* / \partial z_{kt}}{\partial c^* / \partial x_{ht} x_h} = -\epsilon_{c z_k} \frac{c^*}{p_{ht} x_h}.$$

Sous l'hypothèse additionnelle de rendements constants, les revenus $p_{ht} x_h^*$ sont égaux aux coûts de production et

$$(43) \quad \epsilon_{x_h z_k} = -\frac{\partial c^* / \partial z_{kt}}{c^*} \equiv -\epsilon_{c z_k},$$

formule l'égalité entre les mesures primale et duale de l'impact du taux de changement technologique. Si les hypothèses sous-jacentes ne sont pas vérifiées, les estimations de $\epsilon_{x_h z_k}$ risquent d'être biaisées ; aussi une partie importante de la littérature consacrée à la mesure du taux de changement technologique tente-t-elle d'affaiblir ces conditions. OHTA [1974] considère le cas où les rendements d'échelle sont non constants et la concurrence imparfaite. Le prix virtuel de la production retenu par OHTA, correspond à la valeur marginale de la production $\partial c^* / \partial x_{ht}$ au lieu du prix du marché. La mesure corrigée du taux de changement technologique proposée est :

$$(44) \quad \epsilon_{x_h z_k} = -\frac{\partial c^* / \partial z_{kt}}{\partial c^* / \partial x_{ht} x_h} = -\frac{\epsilon_{c z_k}}{\epsilon_{c x_h}},$$

où $\epsilon_{c x_h}$ est l'élasticité des coûts par rapport au niveau de production (égale à un lorsque les rendements sont constants). Afin de corriger ce taux de progrès technologique, d'autres auteurs ont proposé de considérer des objectifs intertemporels (MORRISON [1986a]), de multiplier le nombre de facteurs fixes (MORRISON [1986b], NADIRI et PRUCHA [1989]), d'incorporer le pouvoir de marché (MORRISON [1992])... Des développements similaires sont proposés pour mesurer les productivités marginales ainsi que les capacités d'utilisation (voir MORRISON [1985]).

5.1.3 Mesure des rendements d'échelle

De manière similaire, la mesure des rendements d'échelle va dépendre de la manière dont les prix virtuels sont spécifiés. La mesure du taux de rendement d'échelle (RTS), très couramment utilisée en économie de la production, est souvent restreinte au modèle bilinéaire avec un produit unique. La définition ci-dessous généralise cette mesure à des contextes non-linéaires, dynamiques et multi-produits ¹¹. Le principe de base pour mesurer les rendements d'échelle, consiste à réallouer certains biens de manière arbitraire et d'étudier l'impact sur les autres biens. Pour cela, la décomposition de x_t en $(x'_{1t}, x'_{2t})'$ est à nouveau utilisée, et le programme d'optimisation est écrit comme

$$\begin{aligned}\pi^{n\ell} &= \max_{x_t} \{ \pi(\theta_t, x_{1t}, x_{2t}) : x_t \in s(z_t) \} \\ &= \max_{x_{2t}} \{ \pi(\theta_t, x_1(\theta_t, x_{2t}, z_t), x_{2t}) \} \\ &= \pi(\theta_t, x_1(\theta_t, x_2^*, z_t), x_2^*) = \pi^*(\theta_t, x_1^*(\theta_t, z_t), x_2^*(\theta_t, z_t)),\end{aligned}$$

avec

$$x_1^*(\theta_t, z_t) = x_1(\theta_t, x_2^*, z_t).$$

Une définition courante du taux de rendement d'échelle est basée sur le principe suivant : étant donnée une situation initiale d'équilibre (comme celle caractérisée par l'équation ci-dessus) multiplions certains biens (soient x_{2jt} ces biens) par un scalaire μ et observons la manière dont les biens x_{1ht} s'ajustent. Dans cette opération, les biens x_{2jt} sont traités comme s'ils pouvaient être changés par multiplication par μ , même si, en fait, ils obéissent à des règles d'optimisation et dépendent donc des variables θ_t et z_t . Ceci met bien en évidence que les mesures des rendements d'échelle correspondent à des simulations.

DÉFINITION : Soit μ_{1h} le facteur par lequel le bien x_{1ht} est multiplié lorsque tous les biens x_{2jt} sont multipliés par le scalaire μ ; alors

$$(45) \quad \mu_{1h} x_{1h}^* = x_{1h}(\theta_t, \mu x_2^*, z_t)$$

Une mesure du taux de rendements d'échelle spécifique à chaque bien est donnée par

$$RTS_{x_{1h}} = \left. \frac{\partial \mu_{1h}}{\partial \mu} \right|_{\mu=1}.$$

Le taux de rendements d'échelle spécifique à x_{1h} est dit croissant, constant ou décroissant selon que $RTS_{x_{1h}}$ est supérieur, égal ou inférieur à un.

11. Voir par exemple BAUMOL, PANZAR et WILLIG [1982, p. 68] pour d'autres définitions dans le cadre multi-produits.

Il résulte directement de cette définition que

$$(46) \quad \text{RTS}_{x_{1h}} = \left. \frac{\partial \mu_{1h}}{\partial \mu} \right|_{\mu=1} = \frac{1}{x_{1h}^*} \left. \frac{\partial x_{1h}}{\partial x_2'} \frac{\partial \mu x_2^*}{\partial \mu} \right|_{x=x^*, \mu=1} = - \frac{\sum_j p_{2jt}^v x_{2j}^*}{p_{1ht}^v x_{1h}^*},$$

où la dernière égalité est obtenue en utilisant le résultat de la proposition 5. Cette dernière équation souligne le rôle important de la spécification des prix virtuels lors du calcul des taux de rendements à l'échelle. Lorsque l'objectif est bilinéaire et les biens x_2 parfaitement concurrentiels, les prix virtuels p_{2t}^v correspondent aux prix de marché p_{2t} , on obtient

$$(47) \quad \text{RTS}_{x_{1h}} = \left. \frac{x_2^*}{x_{1h}^*} \frac{\partial x_{1h}}{\partial x_2'} \right|_{x=x^*} = - \frac{\sum_j p_{2jt} x_{2j}^*}{p_{1ht}^v x_{1h}^*}.$$

Afin de retrouver certains résultats de la littérature, supposons que toutes les composantes de x_2 soient des facteurs de production (et donc négatives) alors que les biens x_{1h} soient des produits. Il résulte alors de (47), l'égalité suivante :

$$\text{RTS}_{x_{1h}} = \frac{c^*}{p_{1ht}^v x_{1h}^*} = (\epsilon_{cx_{1h}})^{-1},$$

(avec $c^* = -\sum_j p_{2jt} x_{2j}^*$) qui traduit l'égalité entre la mesure primale et duale du taux de rendement à l'échelle. Cette équivalence est traditionnellement obtenue en utilisant la théorie de la dualité, voir, par exemple, OHTA [1974] et NADIRI et PRUCHA [1989]. Ici l'utilisation des prix virtuels permet une dérivation directe de cette égalité.

Des restrictions supplémentaires sur la spécification des prix virtuels permettent même de quantifier directement la mesure des rendements d'échelle. Si le marché du produit x_{1h} est supposé parfaitement concurrentiel, son prix virtuel correspondra au prix de marché : $p_{1ht}^v = -\partial c^* / \partial x_{1h} = p_{1ht}$. À partir de l'équation (46), nous établissons alors que les rendements d'échelle sont croissants ou décroissants selon que les profits générés par x_{1h} sont inférieurs ou supérieurs aux coûts associés aux facteurs de production x_2 . D'autres définitions du taux de rendement d'échelle sont discutées par IDE et TAKAYAMA [1989].

5.2 Dynamique comparative

En analyse de la production, la dynamique comparative est rarement considérée, principalement parce que les modèles sont statiques. Dans les modèles de type EP et même ET, les résultats calculés font souvent référence à deux situations artificielles – la courte et la longue période – où les éléments de dynamique n'ont pas encore ou n'ont plus d'influence sur le système. Parmi les exceptions tenant compte de la dynamique, CARMICHAEL, MOHNEN et VIGEANT [1990] présentent une méthode de simulation tandis que MORRISON [1986a] établit ces résultats à partir de la forme analytique du modèle (avec un seul bien ajustable de type y_{jt}). À partir des équations (30) à (33), nous dérivons les effets de dynamique comparative après avoir défini les vecteurs $X_t = (x_t^*, y_t^{*'})'$, et $P_t^v = (p_t^{v'}, q_t^{v'})'$ pour simplifier. L'impact d'un change-

ment du schéma des prix est donné par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_t^{*'}}{\partial \theta_t} &= \frac{\partial P_t^{v'}}{\partial \theta_t} \frac{\partial X_t^{v'}}{\partial P_t^v} \\
&= \left[\frac{\partial X_t^{*'}}{\partial \theta_t} \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial X_t' \partial X_t} + \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial X_t' \partial \theta_t} + \frac{\partial y_{t+1}^{*'}}{\partial \theta_t} \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial X_t' \partial y_{t+1}} + \frac{\partial \sigma_t'}{\partial \theta_t} \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial X_t' \partial \sigma_t} \right] \frac{\partial X_t^{v'}}{\partial P_t^v} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial X_t^{*'}}{\partial \theta_t} &= \left[\frac{\partial^2 \pi^*}{\partial X_t' \partial \theta_t} + \frac{\partial y_{t+1}^{*'}}{\partial \theta_t} \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial X_t' \partial y_{t+1}} + \frac{\partial \sigma_t'}{\partial \theta_t} \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial X_t' \partial \sigma_t} \right] \\
&\quad \frac{\partial X_t^{v'}}{\partial P_t^v} \left[I - \frac{\partial^2 \pi^*}{\partial X_t' \partial X_t} \frac{\partial X_t^{v'}}{\partial P_t^v} \right]^{-1}.
\end{aligned}$$

Lorsque le modèle est bilinéaire, la dernière matrice est la matrice unité. Lorsque le modèle est statique, (36) est retrouvée. Enfin $\partial X_t^{*'} / \partial \theta_t = \partial X_t^{v'} / \partial \theta_t$ si le modèle est bilinéaire et statique. D'autres effets de dynamique comparative peuvent être calculés de cette manière, leur interprétation n'est, néanmoins, pas aisée.

6 Conclusion

En bref, un des objectifs principaux de cette contribution a été de donner un aperçu de différents modèles développés récemment en analyse de la production. Au lieu de présenter diverses contributions indépendamment, un cadre commun a été développé, admettant différents modèles comme cas particuliers après spécification des objectifs et des contraintes de l'unité de production. Cette spécification tient souvent un rôle clef dans la modélisation économique et se trouve, par conséquent, à l'origine de plusieurs controverses.

En passant en revue la littérature récente en économie de la production, nous avons souligné que cette controverse traduit la difficulté d'évaluer les prix virtuels supportant les choix observés des unités de production. En guise d'illustration, le débat sur la mesure du taux de progrès technologique et des rendements d'échelle est discuté.

Afin d'atténuer certaines restrictions présentes dans les modèles de base, les approches plus récentes retiennent parfois des objectifs non-linéaires et intertemporels. Dans de telles situations toutefois, les choix optimaux ne peuvent pas facilement être exprimés sous forme analytique. Par ailleurs, les calculs de statique comparative ne sont pas facilement dérivés. Dans cet article, un cadre d'analyse microéconomique très proche du cadre d'analyse usuel est présenté. Les formes « *semi-analytiques* » pour les fonctions d'offre et de demande optimales sont alors obtenues par simple adaptation des lemmes de Hotelling et de Shephard. Le concept de prix virtuel tient un rôle clef dans la dérivation de tous ces résultats et permet également un éclairage intéressant des développements récents en analyse de la production.

• Références bibliographiques

- ABEL A. B., EBERLY J. C. (1996). – « Optimal Investment with Costly Reversibility », *Review of Economic Studies*, 63, pp.581-593.
- BAUMOL W. J., PANZAR J. C., WILLIG R. D. (1982). – *Contestable Markets and the Theory of Industry Structure*, New York: Harcourt Brace Jovanovich Inc.
- BERNDT E. R., MORRISON C. J., WATKINS G. C. (1981). – « Dynamic Models of Energy Demand: An Assessment and Comparison », E. Berndt and B. Field (eds.), *Measuring and Modeling Natural Resource Substitution*, Cambridge: MIT Press.
- BERNSTEIN J. I. (1992). – « Price Margins and Capital Adjustment: Canadian Mill Products and Pulp and Paper Industries », *International Journal of Industrial Organization*, 10 pp. 491-510.
- BLOMQUIST N. S. (1985). – « Labour Supply in a Two-Period Model: The Effect of a Nonlinear Progressive Income Tax », *Review of Economic Studies*, 52, pp. 515-524.
- BLOMQUIST N. S. (1989). – « Comparative Statics for Utility Maximization Models with Nonlinear Budget Constraints », *International Economic Review*, 30, pp. 275-296.
- BROWNING M. J. (1983). – « Necessary and Sufficient Conditions for Conditional Cost Functions », *Econometrica*, 51, pp. 851-857.
- CARMICHAEL B., MOHNEN P., VIGEANT S., (1990). – « La Demande de Facteurs de Production dans le Secteur Manufacturier Québécois », *Annales d'Économie et de Statistique*, 19, pp. 43-68.
- CHAMBERS R. G. (1988). – *Applied Production Analysis: A Dual Approach*, Cambridge: Cambridge University Press.
- CORNWELL C., SCHMIDT P., (1996). – « Production Frontiers and Efficiency Measurement », in L. Matyas and P. Sevestre (eds.), *The Econometrics of Panel Data*, Second Edition, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- DI EWERT W. E. (1973). – « Functional Forms for Profit and Transformation Functions », *Journal of Economic Theory*, 6, pp. 284-316.
- DI EWERT W. E. (1982). – « Duality Approaches to Microeconomic Theory », in K. J. Arrow and M. D. Intriligator (eds), *Handbook of Mathematical Economics*, vol. 2, North-Holland.
- EPSTEIN L. G., (1981). – « Generalized Duality and Integrability », *Econometrica*, 49, pp. 655-678.
- EPSTEIN L. G., YATCHEW A. J. (1985). – « The Empirical Determinants of Technology and Expectations: A Simplified Procedure », *Journal of Econometrics*, 27, pp. 235-258.
- FLAIG G., STEINER V., (1993). – « Searching for the 'Productivity Slowdown': Some Surprising Findings from West-German Manufacturing », *Review of Economics and Statistics*, 75, pp. 57-65.
- HAMERMESH D. S., PFANN G. A. (1996). – « Adjustment Costs in Factor Demand », *Journal of Economic Literature*, 34, pp. 1264-1292.
- HOTELLING H. (1932). – « Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions », *Journal of Political Economy*, 40, pp. 577-616.
- IDE T., TAKAYAMA A., (1989). – « Returns to Scale Under Non-homotheticity and Homotheticity and the Shape of the Average Cost », *Journal of Institutional and Theoretical Economics*, 145, pp. 367-388.
- KÖNIG H., POHLMEIER W., (1987). – « Arbeitszeit und Beschäftigung: eine ökonometrische Studie », in Bombach G., Gahlen, B., Ott, A. (Hrsg.), *Arbeitsmärkte und Beschäftigung-Fakten, Analysen, Perspektiven*, Tübingen: Mohr.
- KÖNIG H., POHLMEIER W., (1989). – « Worksharing and Factor Prices: A Comparison of Three Flexible Functional Forms for Nonlinear Cost Schemes », *Journal of Institutional and Theoretical Economics*, 145, pp. 343-357.
- LASSERRE P., OUELLETTE P., (1999). – « Dynamic Factor Demands and Technology Measurement under Arbitrary Expectations », *Journal of Productivity Analysis*, 11, pp. 219-241.

- LAU L. J. (1976). – « A Characterization of the Normalized Restricted Profit Function », *Journal of Economic Theory*, 12, pp. 131-163.
- LAU L. J. (1978). – « Applications of Profit Functions », in M. Fuss and D. McFadden (eds.) *Production Economics: A dual Approach to Theory and Applications*, Amsterdam : North Holland, pp.133-215.
- LEE L. F., PITT M. M. (1987). – « Microeconomic Models of Rationing, Imperfect Markets and Non-Negativity Constraints », *Journal of Econometrics*, 36, pp. 89-110.
- LOVELL C. A. K., SICKLES R. C. (1983). – « Testing Efficiency Hypotheses in Joint Production: A Parametric Approach », *Review of Economics and Statistics*, 65, pp.51-58.
- McFADDEN D. (1978). – « Cost Revenue and Profit Functions », in M. Fuss and D. McFadden (eds.) *Production Economics: A dual Approach to Theory and Applications*, Amsterdam: North Holland, pp. 3-109.
- MORRISON C. J. (1985). – « On the Economic Interpretation and Measurement of Optimal Capacity Utilisation with Anticipatory Expectations », *Review of Economic Studies*, 52, pp. 295-310.
- MORRISON C. J. (1986a). – « Structural Models of Dynamic Factor Demand with Nonstatic Expectations: An Empirical Assessment of Alternative Expectations Specifications », *International Economic Review*, 27, pp. 141-158.
- MORRISON C.J. (1986b). – « Productivity Measurement with Non-Static Expectations and Varying Capacity Utilization: An Integrated Approach », *Journal of Econometrics*, 33, pp. 51-74.
- MORRISON C. J. (1992). – « Unraveling the Productivity Growth Slowdown in the United States, Canada and Japan: The Effect of Subequilibrium, Scale Economies and Markups », *Review of Economics and Statistics*, 74, pp. 381-393.
- NADIRI M. I., PRUCHA I. R. (1989). – « Dynamic Factor Demand, Productivity Measurement and Rates of Return: Theory and Empirical Application to the U.S. Bell System », National Bureau of Economic Research, *Working paper* n° 3041.
- NEARY J. S., ROBERTS K. W. S. (1980). – « The Theory of Household Behaviour under Rationing », *European Economic Review*, 13, pp. 25-42.
- OHTA M. (1974). – « A Note on Duality between Production and Cost Functions: Rate of Returns to Scale and Rate of Technological Progress », *Economic Studies Quarterly*, 25, pp. 63-65.
- PINDYCK R. S., ROTEMBERG J. J., (1983). – « Dynamic Factor Demand and the Effects of Energy Price Shocks », *American Economic Review*, 73, pp.1066-1079.
- PUDNEY S. (1989). – *Modelling Individual Choice: The Econometrics of Corners, Kinks and Holes*, Basil Blackwell: Oxford.
- ROBERTS M. J. (1984). – « Testing Oligopolistic Behavior », *International Journal of Industrial Organization*, 2, pp. 367-383.
- SLADE M. (1995). – « Empirical Games: The Oligopoly Case », *Canadian Journal of Economics*, 28, pp. 368-403.
- VARIAN H. R. (1992). – *Microeconomic Analysis*, third edition, Norton: New York.
- YOTOPOULOS P. A., LAU J. L., (1973). – « A Test for Relative Economic Efficiency: Some Further Results », *American Economic Review*, 63, pp. 214-223.

ANNEXE

Démonstration des propositions

Démonstration de la proposition 2

(i) π^{es} est non croissante (non décroissante) en z_{kt} découle du fait que $s(z_t)$ est non croissant (non décroissant) en z_{jt} . En effet, sous un espace de choix plus restreint (plus large), le profit maximum π^{es} ne peut croître (décroître).

(ii) Montrons que la convexité de $s(z_t)$ en z_t implique la concavité de π^{es} en z_t . Soient x_t^0 et x_t^1 tels que

$$x_t^h = \arg \max_{x_t} \{ p_t' x_t : x_t \in s(z_t^h) \}, \quad h = 0, 1.$$

Définissons, pour $0 < \kappa < 1$,

$$x_t^\kappa = \kappa x_t^0 + (1 - \kappa) x_t^1$$

$$z_t^\kappa = \kappa z_t^0 + (1 - \kappa) z_t^1.$$

Par convexité de $s(z_t)$ en z_t , $z_t^\kappa \in s$. Alors

$$\begin{aligned} \pi^{es}(p_t, z_t^\kappa) &= \max_{x_t} \{ p_t' x_t : x_t \in s(z_t^\kappa) \} \\ &\geq p_t' x_t^\kappa = p_t' (\kappa x_t^0 + (1 - \kappa) x_t^1) \\ &\geq \kappa \pi^{es}(p_t, z_t^0) + (1 - \kappa) \pi^{es}(p_t, z_t^1), \end{aligned}$$

formulant le résultat recherché.

Démonstration de la proposition 4

Cette proposition est démontrée sous l'hypothèse additionnelle que f est deux fois continûment différentiable. Le problème d'optimisation linéarisé (15) s'écrit

$$\text{opt}_{x_t, y_t} \{ p_t^{v'} x_t + q_t^{v'} y_t : (x_t, y_t) \in s(z_t) \}$$

et peut être exprimé comme

$$\text{opt}_{x_t, y_t, \lambda_f} \{ p_t^{v'} x_t + q_t^{v'} y_t + \lambda_f (f(x_t, y_t, z_t) - u) \}.$$

où le multiplicateur de Lagrange λ_f est strictement positif. Soit $x_t = (x_{1t}', x_{2t}')'$, les conditions de premier ordre pour un optimum livrent: $p_{ht}^v = -\lambda_f \partial f / \partial x_{ht}$, $h = 1, 2$. Après évaluation de ces conditions au point optimal, la différentiation par rapport à p_{ht}^v conduit à

$$I_{S_{x_h}} = -\lambda_f \frac{\partial x_h^{v'}}{\partial p_{ht}^v} \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_h'},$$

où $I_{S_{x_h}}$ est une matrice unité de dimension $S_{x_h} \times S_{x_h}$. Après multiplication à droite par $\partial x_h^v / \partial p_{ht}^{v'}$ on obtient

$$\frac{\partial^2 \pi^v}{\partial p_{ht}^v \partial p_{ht}^{v'}} = -\lambda_f \frac{\partial x_h^{v'}}{\partial p_{ht}^v} \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_h'} \frac{\partial x_h^v}{\partial p_{ht}^{v'}}.$$

Soient les vecteurs w_h et m_h tels que $w_h' = m_h' \partial x_h^{v'} / \partial p_{ht}^v$ pour $h = 1, 2$. Comme π^v est homogène de degré un en p^v , il en résulte que $w' p^v = 0$ pour tout m . L'équivalence suivante est ainsi obtenue :

$$m_h' \left(\nabla_{p_h p_h}^2 \pi^v \right) m_h \geq 0 \Leftrightarrow w_h' \left(\nabla_{x_h x_h}^2 f \right) w_h \geq 0 \\ \wedge w' \partial f / \partial x_t = 0, \quad h = 1, 2,$$

formulant le résultat recherché.

Démonstration de la proposition 5

Tout d'abord décomposons le vecteur x_t en $(x_{ht}, x_{ht}')'$, ou x_{ht} est un scalaire réel et $x_{ht}' \in \mathbb{R}^{S_x - 1}$. Alors, la fonction de profit non-linéaire s'écrit

$$(A1) \quad \begin{aligned} \pi^{n\ell}(\theta_t, z_t) &= \max_{x_{ht}'} \left\{ \max_{x_{ht}} \{ \pi : x_t \in s(z_t) \} \right\} \\ &= \max_{x_{ht}'} \left\{ \pi \left(\theta_t, x_h \left(\theta_t, x_{ht}', z_t \right), x_{ht}' \right) \right\} \\ &= \pi \left(\theta_t, x_h \left(\theta_t, x_{ht}^*, z_t \right), x_{ht}^* \left(\theta_t, z_t \right) \right). \end{aligned}$$

En différenciant (A1) par rapport à x_{ht}' , il résulte que

$$(A2) \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \pi^*}{\partial x_{ht}} \frac{\partial x_h}{\partial x_{ht}'} + \frac{\partial \pi^*}{\partial x_{ht}'} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial x_h}{\partial x_{ht}'} &= - \frac{\partial \pi^* / \partial x_{ht}'}{\partial \pi^* / \partial x_{ht}}. \end{aligned}$$

Pour les variables non optimisées z_{kt} , la différentiation de $\pi^{n\ell}$ conduit à

$$\frac{\partial \pi^{n\ell}}{\partial z_{kt}} = \frac{\partial \pi^*}{\partial x_{ht}} \left(\frac{\partial x_h}{\partial x_{ht}'} \frac{\partial x_h^*}{\partial z_{kt}} + \frac{\partial x_h^*}{\partial z_{kt}} \right) + \frac{\partial \pi^*}{\partial x_{ht}'} \frac{\partial x_h^*}{\partial z_{kt}}.$$

En utilisant (A2), cette dernière égalité se réécrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi^{n\ell}}{\partial z_{kt}} &= \frac{\partial \pi^*}{\partial x_{ht}} \frac{\partial x_h^*}{\partial z_{kt}} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial x_h^*}{\partial z_{kt}} &= \frac{\partial \pi^{n\ell} / \partial z_{kt}}{p_{ht}^v} = \frac{r_{kt}^v}{p_{ht}^v}. \end{aligned}$$

