ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 57 – 2000

Orientation du progrès technique et développement durable

Claude HENRY *

RÉSUMÉ. – On considère un modèle de croissance dans lequel une suite infinie de générations consomment deux types différents de services produits respectivement à partir de capital artificiel et de capital naturel. Le progrès technique permet d'accroître le capital artificiel disponible mais pas le capital naturel ; celui-ci est au contraire menacé de dégradation par le processus d'accumulation du capital artificiel. On montre qu'une croissance soutenable est néanmoins compatible avec le critère de justice distributive de RAWLS aussitôt qu'on se trouve au-delà d'un certain seuil minimum d'altruisme intergénérationnel ; on établit aussi une généralisation du principe d'équivalence de KOOPMANS avec une procédure d'actualisation.

Sustainable Development, Intergenerational Equity and Discouting

ABSTRACT. – We consider an economy where successive generations consume two different kinds of services, produced respectively from artificial and natural assets. Technical progress makes it possible to expand the artificial assets, but not the natural ones; on the contrary, the latter may be eroded by a careless implementation of the technical progress.

It is shown that, if every generation displays a sufficiently high degree of altruism, growth is both sustainable and compatible with the Rawlsian criterion of distributive justice: if then appears that the Rawlsian approach is not confined to the "*dull prospects*" that SOLOW has deplored. It is also shown that it is possible to derive the Rawlsian sequence from the maximization of a discounted sum of levels or welfare. It is always the case that the discount factors are strictly less then one – KOOPMAN's equivalence theorem is not contradicted in this respect – but are dependent on the intertemporal pattern of technical progress.

---

* C. HENRY : Laboratoire d'Économétrie de l'École polytechnique et Centre National de la Recherche Scientifique.
L'auteur a bénéficié des critiques et suggestions de G. LAROQUE, F. LECOCQ, P. PICARD et deux rapporteurs, auxquels il adresse ses vifs remerciements, tout en gardant bien entendu l'entière responsabilité du texte présenté ici.

1 Introduction

Nous considérons une société constituée de générations successives qui consomment deux types différents de services produits respectivement à partir de capital artificiel et de capital naturel. Le progrès technique permet d'accroître le capital artificiel disponible, mais pas le capital naturel ; celui-ci est, au contraire, menacé de dégradation.

Mais cette dégradation ne prend pas nécessairement des proportions catastrophiques. Elle dépend de la manière dont le progrès technique est mis en œuvre : il est possible d'orienter celui-ci vers une meilleure conservation du capital naturel, au prix toutefois d'une moindre accumulation de capital artificiel. Ainsi peut-on produire la même quantité d'énergie avec plus ou moins de pollution [1] ; mais réduire la pollution mobilise des ressources qui ne sont plus disponibles pour d'autres usages.

Dans le modèle développé ici, c'est l'intensité des conséquences, sur le capital naturel, de la mise en œuvre du progrès technique, qui constitue la variable de décision pour chaque génération. Celle-ci ne décide pas du rythme du progrès technique ni de l'effort global qu'elle fait pour le mettre en œuvre (ceux-ci lui sont imposés par la logique des interactions techniques et économiques) [2], mais de leur contenu au regard des conséquences sur le capital naturel, ce qui influence évidemment la disponibilité respective des deux services pour la consommation [3]. Le modèle de croissance que nous considérons n'a pas, dans ces conditions, toute la généralité qu'on pourrait souhaiter. Il ne prétend directement à aucun réalisme ; on peut, d'ailleurs, douter qu'il existe un seul modèle théorique de croissance qui puisse y prétendre, ce qui n'est pas fatalement un péché capital, du moment que, parmi *« les manières également appropriées d'être simple »*, pour reprendre l'expression de James MIRRLEES [4], on choisit en cohérence avec l'éclairage qu'on veut ainsi porter sur un problème pertinent. Le modèle considéré ici renvoie – même si c'est manifestement de manière simpliste, ce que des recherches ultérieures permettront peut-être d'améliorer dans une certaine mesure – à des situations où on se trouve obligé d'arbitrer entre disponibilité croissante de produits de l'ingéniosité humaine, et disponibilité maintenue d'éléments de patrimoine que la nature a façonnés, et dont l'homme ne peut pas ou ne peut que très difficilement réparer les dégradations.

---

1. Nous comptons bien entendu parmi les pollutions l'émission de gaz à effet de serre, en particulier le gaz carbonique CO_2.
2. Nous adoptons ainsi un point de vue similaire à celui adopté par R. LUCAS dans la première de ses *« Marshall lectures »* : *« Pour le moment, nous utilisons le vocable « technologie » – aussi bien quant à son niveau qu'au rythme de son changement — en référence à quelque chose […] dont les déterminants sont en dehors de l'investigation que nous conduisons ici »*.
3. Étudiant aussi les interactions entre croissance et capital naturel, A. JOHN and R. PECCHENINO [1994] mettent, en revanche, au centre de leur analyse les décisions d'épargne en capital artificiel et d'investissement pour la conservation et la régénération du capital naturel.
4. J. A. MIRRLEES [1997] p. 1327.

Dans la plupart des modèles de croissance, on admet comme règle de comportement que chaque génération se préoccupe exclusivement de son propre bien-être. Comment alors être équitable entre les générations sinon en recommandant la stagnation économique ? Car toute trajectoire de niveaux croissants de bien-être serait moins équitable qu'une autre qui demanderait moins de sacrifices aux premières générations, et toute trajectoire de niveaux décroissants serait moins équitable qu'une autre qui traiterait moins mal les générations plus éloignées dans le futur. Il s'agit là d'une conséquence du principe d'équité, ou de justice distributive, selon lequel il convient de traiter le moins mal possible l'individu, ou le groupe, qui de tous ceux qui sont impliqués est le plus mal loti. Ce principe (ou critère) est souvent appelé « *max min* », ou « *de RAWLS* », du nom du philosophe John RAWLS [5].

Certes « *le critère max min semble être un critère raisonnable de choix intertemporel* », écrit Robert SOLOW, l'économiste qui a jeté les bases de la théorie moderne de la croissance. Mais, continue SOLOW, il conduit à un « *conservatisme absurde* » vis-à-vis du progrès technique [6].

Cependant sommes-nous « *aussi rapaces que la littérature consacrée au développement économique le suggère souvent* » [7] ? Ne serait-il pas au contraire raisonnable d'admettre, avec Kenneth ARROW [8], que chaque génération ne se préoccupe pas seulement de son propre bien-être mais aussi, dans une certaine mesure de l'héritage qu'elle laisse aux suivantes, sous forme tant de capital naturel qu'artificiel ? C'est ce que nous faisons ici. Alors, si la mesure dans laquelle chaque génération se préoccupe de l'héritage qu'elle transmet dépasse un certain seuil, nous montrons que l'application du principe de justice distributive de RAWLS engendre une suite croissante de niveaux de bien-être. Les « *dull prospects* » déplorés par SOLOW sont ainsi écartés ; l'équité intergénérationnelle apparaît compatible avec une croissance du bien-être, croissance qui soit suffisamment attentive à la conservation du capital naturel.

Dans notre modèle, chaque génération décide de la manière dont elle met en œuvre le progrès technique en se préoccupant à la fois de son propre bien-être et de l'héritage qu'elle transmet. Cela n'a, à première vue, rien à voir avec la maximisation d'une somme actualisée des niveaux de bien-être des générations successives, qu'opèrerait un planificateur en position d'arbitre intertemporel, comme c'est le cas dans de nombreux modèles de croissance [9]. Et pourtant, nous montrons qu'il existe une somme actualisée des niveaux de bien-être

---

5. Dans *A Theory of Justice* (J. RAWLS [1971]). M. YAARI [1981] examine de manière rigoureuse les relations entre critère de RAWLS et maximisation d'une fonction d'utilité sociale.
6. R. SOLOW [1974] p. 41.
7. P. DASGUPTA *et al.* [1996] p. 5 ; « *souvent* », mais pas toujours, car il existe une littérature significative concernant les effets du désir de transmettre un héritage sur la dynamique de modèles de croissance ; voir en particulier R.J. BARRO [1974] et D.B. BERNHEIM [1987].
8. Dans K. ARROW [1973] ; à condition qu'un degré suffisant d'altruisme incite chaque génération à épargner suffisamment au bénéfice de la suivante, de telle sorte que l'économie soit, selon l'expression de ARROW, « *utility-productive* », le critère de RAWLS est compatible avec une trajectoire de niveaux croissants de bien-être ; le seuil à partir duquel l'économie est « *utility-productive* » joue le même rôle dans le modèle de ARROW (qui ne comporte qu'une seule forme de capital, le capital artificiel) que, dans notre modèle, le seuil dont il est question ci-dessous. E.S. PHELPS et J. G. RILEY [1978] obtiennent des résultats analogues, toujours dans une économie ne comportant qu'une seule forme de capital.
9. Voir par exemple P. DASGUPTA *et al.* [1996].

dont la maximisation a pour solution précisément la suite des décisions prises par les générations successives, chacune agissant indépendamment d'un quelconque arbitre intertemporel. Les facteurs d'actualisation qui pondèrent les termes successifs de la somme actualisée en question constituent une suite qui tend vers zéro au fur et à mesure de l'éloignement dans le temps. Ceci est vrai même si la mesure dans laquelle chaque génération se préoccupe de l'héritage qu'elle transmet dépasse le seuil au-delà duquel l'application du principe de RAWLS engendre une suite croissante de niveaux de bien-être. Actualiser, même avec des facteurs d'actualisation qui « *s'évanouissent* » dans le futur lointain, n'implique donc pas nécessairement négligence de ce futur. Cette propriété de l'actualisation est parfois méconnue, bien qu'elle ait été clairement établie par T. KOOPMANS [10] dans le cadre de modèles de croissance où le rythme d'accumulation du capital est la variable de décision essentielle.

Du moment que notre modèle peut être interprété en termes de maximisation d'une somme actualisée de niveaux de bien-être, on peut lui associer un taux d'actualisation défini en référence à chacun des biens disponibles pour la consommation, c'est-à-dire un taux d'actualisation relatif au service Y produit à partir du capital artificiel et un autre relatif au service Z produit à partir du capital naturel. Nous montrons que le taux d'actualisation relatif à Y est toujours positif, ce qui pourrait encore accréditer chez un analyste superficiel l'idée d'un effacement du futur lointain par l'opération d'actualisation. Mais nous montrons aussi que, si la mesure dans laquelle chaque génération se préoccupe de l'héritage qu'elle transmet dépasse le seuil au-delà duquel l'application du principe de RAWLS engendre une suite croissante de niveaux de bien-être, alors le taux d'actualisation relatif à Z est nécessairement négatif, ce qui signifie notamment que la conservation à long terme du capital naturel est encore plus valorisée que ne l'est sa conservation à moins long terme. Ainsi rejoignons-nous la conclusion à laquelle aboutissent Partha DASGUPTA, Scott BARRETT et Karl-Göran MÄLER dans le cadre d'un modèle de croissance avec capital naturel, mais où le rythme d'accumulation du capital est la variable de décision essentielle : « *Nous avons montré que le taux d'actualisation dépend du numéraire relativement auquel il est défini, et que son interprétation dépend du contexte institutionnel où on se trouve* » [11]. Le fonctionnement de l'actualisation est à la fois plus complexe et moins brutal que ne le suggèrent tant les partisans que les détracteurs de certains projets d'investissement quand ils affirment que l'actualisation efface les effets au-delà de vingt ans (ou de trente, ou de quarante, suivant le taux qu'ils ont en tête).

Tous ces résultats sont obtenus en supposant que le rythme du progrès technique est le même à toutes les périodes, jusqu'à l'infini. Nous terminons en montrant que, s'il y a rupture dans le rythme du progrès technique, il y a nécessité d'ajustement anticipé à cette rupture, et qu'un tel ajustement peut être déclenché par une évolution temporelle appropriée des facteurs (et donc des taux) d'actualisation. Ceci constitue une deuxième généralisation des résultats de KOOPMANS.

---

10. T. KOOPMANS [1972].
11. P. DASGUPTA *et al.* [1996] p. 23.

2 Orientation du progrès technique et conservation du capital naturel

Nous considérons une société où les générations se succèdent sans coexister. À la période de temps où nous nous plaçons (c'est la période présente, ou période 1), existe donc une et une seule génération (la génération présente, ou génération 1). Lui succèdent une génération 2, puis 3, et ainsi de suite jusqu'à l'infini ; ces générations futures existeront respectivement aux périodes 2, 3, …, qui sont les périodes futures.

Dans cette société, et à chaque période $m(= 1, 2, \ldots)$, deux, et seulement deux services sont disponibles pour la consommation des membres de la génération m ; nous les appelons respectivement service Y et service Z. Si la génération m consomme la quantité y_m de Y et la quantité z_m de Z, son [12] *bien-être* (qu'on appelle encore souvent utilité) est mesuré par la fonction de Cobb-Douglas

$$(1) \qquad U(y_m, z_m) = y_m^a z_m^b \quad \text{avec} \quad a + b = 1\ ,\ a \geqslant 0, b \geqslant 0.$$

De la génération $m - 1$, la génération m hérite un stock de capital productif ; ce capital est productif en ce sens qu'il va permettre à la génération m de disposer des quantités de services Y et Z qu'elle va consommer. Le stock hérité par m est constitué de deux types de capital, respectivement appelés capital K et capital N. On désigne par κ_m le stock de capital K et par ν_m le stock de capital N hérités par m, qui va les utiliser de la manière suivante.

En combinant la quantité κ_m de capital K avec les ressources humaines qu'elle possède (travail, connaissances techniques, capacités organisationnelles,…), la génération m est capable d'augmenter [13] la quantité de capital K disponible, en la portant à

$$(2) \qquad \kappa_{m+1} = (1 + \alpha\mu_m)\kappa_m$$

où

– α est un *paramètre* positif, dont la valeur est exogène, c'est-à-dire s'impose à chaque génération [14] ;

– μ_m est une *variable de décision*, que m peut librement choisir sur un intervalle $[0, \overline{\mu}]$.

L'équation (2) décrit le *processus d'accumulation du capital artificiel* dans la société considérée. L'hypothèse est donc faite qu'une génération ne maîtri-

12. Chaque génération sera toujours considérée dans son ensemble, sans aucune individualisation de ses membres, dont l'effectif est constant (nous n'étudions donc pas ici les effets d'une croissance de la population).

13. « *Augmenter* » ne signifie pas accroître à l'identique, mais rendre plus productif de manière générale ; les voies d'une « *augmentation* » dans ce sens général sont examinées en détail dans M.F. Scott [1989].

14. La valeur $\alpha = 1$ et le choix de $\mu_m = 1$ correspondraient approximativement au doublement du capital artificiel en une génération.

se pas le rythme sous-jacent α de la croissance, mais son *contenu* μ au sens qui sera précisé ci-dessous.

Alors disposant, grâce au capital κ_m dont elle a hérité et à la mobilisation de ses ressources techniques et humaines, du capital κ_{m+1}, la génération m l'utilise pour produire la quantité

(3) $$y_m = \kappa_{m+1}$$

de bien Y qu'elle consomme elle-même. Après quoi κ_{m+1} est transmis à la génération $m+1$ [15].

À ce stade, il semblerait qu'il soit d'un commun intérêt pour m et les générations suivantes que m choisisse $\mu_m = \overline{\mu}$. Cependant, on va voir que ce n'est généralement pas le cas, en raison des effets que le choix de μ_m a sur la quantité de capital N qui est transmise de la génération m à la génération $m+1$.

De la génération $m-1$, la génération m hérite la quantité ν_m de capital N. Cette quantité lui fournit, sans qu'elle ait aucun effort à faire pour cela, la quantité

(4) $$z_m = \nu_m$$

du service Z, qu'elle consomme elle-même. Le capital N est ensuite transmis à la génération $m+1$, mais en quantité ν_{m+1} qui dépend du choix fait par la génération m en ce qui concerne μ_m :

(5) $$\nu_{m+1} = (1 - \beta\mu_m)\nu_m \ ,$$

où β est un paramètre positif exogène, dont la valeur est inférieure à $(\overline{\mu})^{-1}$. L'équation (5) décrit le *processus de dégradation du capital naturel*.

En comparant (2) et (3) d'une part, (4) et (5) d'autre part, on constate que la génération m a part aux conséquences sur l'accumulation du capital artificiel de son choix de μ_m, mais pas aux conséquences sur la conservation du capital naturel. Cela revient à dire que, dans ce modèle, nous nous intéressons à la gestion d'effets sur le capital naturel qui ne se manifestent que « *longtemps* » après que leurs causes aient été provoquées.

Étudier le modèle de croissance qui vient d'être décrit, c'est évaluer les unes par rapport aux autres, sur la succession des générations, les suites réalisables de bien-être $U(y_m, z_m)$, avec

$$\begin{aligned} y_m &= \kappa_{m+1} = (1+\alpha\mu_m)\kappa_m = \ldots = \\ &= \Pi_{\ell=1}^{m}(1+\alpha\mu_\ell)\kappa_1 \\ z_m &= \nu_m = (1-\beta\mu_{m-1})\nu_{m-1} = \ldots = \\ &= \Pi_{j=1}^{m-1}(1-\beta\mu_j)\nu_1 \quad \text{(avec } 1-\beta\mu_0 = 1\text{)} \end{aligned}$$

15. Il s'agit d'un transfert net, la dépréciation du capital ayant été implicitement prise en compte dans (2).

Donc

$$U(y_m,z_m) = \kappa_1^a \nu_1^b \Pi_{\ell=1}^m (1+\alpha\mu_\ell)^a \Pi_{j=1}^{m-1}(1-\beta\mu_j)^b = \tag{6}$$
$$= \kappa_1^a \nu_1^b (1+\alpha\mu_m)^a \Pi_{j=1}^{m-1}\gamma(\mu_j)$$

où

$$\gamma(\mu_j) = (1+\alpha\mu_j)^a(1-\beta\mu_j)^b \text{ (avec } \Pi_{j=1}^0\gamma(\mu_j)=1) \ ,$$

est le *facteur de transmission* de la génération j à la génération $j+1$.

Si tous les $\mu_\ell(\ell = 1, \ldots, m)$ sont égaux à une valeur commune μ, (6) devient

$$U(y_m,z_m) = \kappa_1^a \nu_1^b (1+\alpha\mu)^{m.a}(1-\beta\mu)^{(m-1).b} \ . \tag{7}$$

Dans ces conditions, choisir pour μ une valeur plus proche de 0, de préférence à une valeur plus proche de $\overline{\mu}$, revient, en définitive, à consacrer davantage de ressources humaines à préserver le capital naturel plutôt qu'à faire croître le capital artificiel. Dans une recherche ultérieure, nous espérons corriger le caractère trop simpliste du présent modèle, notamment en considérant un facteur β croissant lorsque le capital naturel décroît.

En héritant de κ_m et ν_m, la génération m hérite d'une garantie minimum de bien-être

$$H_m = \kappa_1^a \nu_1^b \Pi_{j=1}^{m-1}\gamma(\mu_j) \ , \tag{8}$$

qui est effectivement son niveau de bien-être si elle choisit $\mu_m = 0$. Si elle choisit $\mu_m \geqslant 0$, elle dispose de

$$U_m = (1+\alpha\mu_m)^a H_m$$

et elle transmet

$$H_{m+1} = \gamma(\mu_m) H_m \ . \tag{9}$$

Avant d'examiner dans la section suivante sur la base de quel critère elle est susceptible de choisir μ_m, nous allons examiner comment le facteur de transmission $\gamma(\mu)$ varie avec μ. On a, en effet, besoin de savoir comment $\gamma(\mu)$ varie avec μ pour apprécier quel héritage une génération est en mesure de laisser à la suivante.

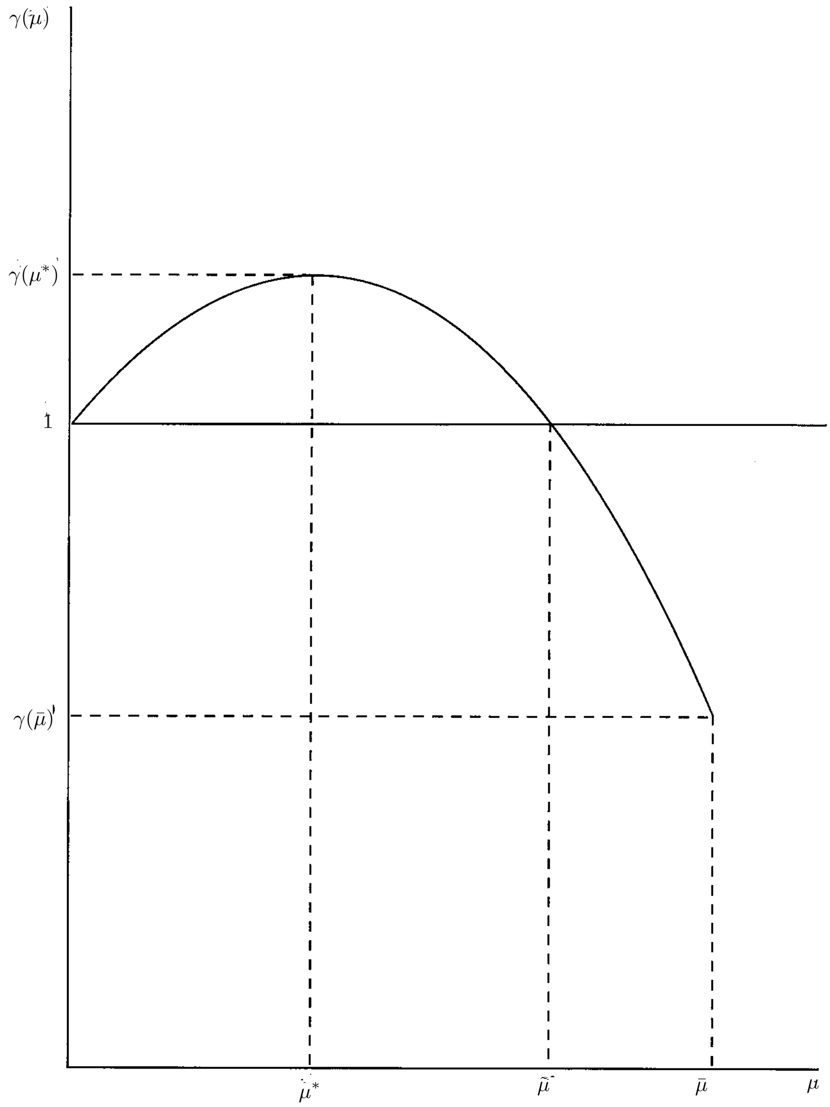
Si on fait varier μ sur toute la droite, et pas seulement sur $[0,\overline{\mu}]$, on constate que

$$\gamma'(\mu) = (1+\alpha\mu)^{a-1}(1-\beta\mu)^{b-1}(a\alpha - b\beta - a\beta\mu)$$

est positive pour $\mu < \mu^*$ et négative pour $\mu > \mu^*$, avec

$$\mu^* = \frac{a\alpha - b\beta}{\alpha\beta} \ . \tag{10}$$

FIGURE 1



Par conséquent :

(i) si $\mu^* \leqslant 0, \gamma(\mu)$ décroît de 1 (pour $\mu = 0$) à $(1 + \alpha\overline{\mu})^a(1 - \beta\overline{\mu})^b < 1$ (pour $\mu = \overline{\mu}$). Par conséquent, dès qu'une génération choisit $\mu > 0$, elle laisse à la suivante un héritage moins favorable que celui qu'elle a reçu, et d'autant moins favorable que μ est plus grand.

(ii) si $\mu^* \geqslant \overline{\mu}, \gamma(\mu)$ croît sur $[0, \overline{\mu}]$, et le choix de $\mu = \overline{\mu}$ maximise à la fois le bien-être de la génération qui le fait, et l'héritage qu'elle transmet.

(iii) si $0 < \mu^* < \overline{\mu}$ et si $(1+\alpha\overline{\mu})^a(1-\beta\overline{\mu})^b \geqslant 1, \gamma(\mu)$ croît de 1 à $\gamma(\mu^*)$, puis décroît de $\gamma(\mu^*)$ à $(1+\alpha\overline{\mu})^a(1-\beta\overline{\mu})^b > 1$. Par conséquent l'héritage laissé est toujours au moins aussi favorable que l'héritage reçu. Il n'est de l'intérêt de personne que μ soit inférieur à μ^* ; en revanche, sur $[\mu^*,\overline{\mu}]$, il y a arbitrage entre bien-être de la génération qui fait le choix, et héritage qu'elle transmet.

(iv) si $0 < \mu^* < \overline{\mu}$ et si $(1+\alpha\overline{\mu})^a(1-\beta\overline{\mu})^b < 1, \gamma(\mu)$ croît de 1 (pour $\mu = 0$) à $\gamma(\mu^*) = \dfrac{a^a b^b}{\alpha^b \beta^a}(\alpha+\beta)$ (pour $\mu = \mu^*$), puis décroît de $\gamma(\mu^*)$ à $(1+\alpha\overline{\mu})^a(1-\beta\overline{\mu})^b < 1$ (pour $\mu = \overline{\mu}$) ; $\gamma(\mu)$ vaut 1 pour $\mu = \tilde{\mu}$, avec $\mu^* < \tilde{\mu} < \overline{\mu}$. Par conséquent, si une génération choisit μ entre μ^* et $\tilde{\mu}$ (il n'est de l'intérêt de personne que μ soit inférieur à μ^*), elle laisse à la suivante un héritage au moins aussi favorable que celui qu'elle a reçu ; si, en revanche, elle choisit μ entre $\tilde{\mu}$ et $\overline{\mu}$, elle laisse à la suivante un héritage moins favorable que celui qu'elle a reçu. Au fur et à mesure que μ croît de μ^* à $\overline{\mu}$, l'arbitrage entre bien-être de la génération qui fait le choix, et héritage transmis, est de moins en moins favorable à la génération suivante.

On rencontre donc, dans le dernier cas, tous les types de situations, et en particulier d'arbitrages, possibles. On peut donc concentrer l'analyse sur ce cas (voir figure p. 90). C'est ce qu'on va faire dans la section suivante, où des réponses sont données à trois questions :

1) Quelle valeur μ_m, laquelle détermine le facteur de transmission $\gamma(\mu_m)$, la génération *m* souhaite-t-elle choisir ?

2) Quelle valeur μ_m la génération *m* devrait-elle choisir du point de vue de l'équité intergénérationnelle ?

3) Le choix souhaité et le choix souhaitable peuvent-ils coïncider ?

3 Critère de choix pour une génération et équité intergénérationnelle

Si la génération *m* se soucie exclusivement de son propre bien-être, elle choisit évidemment $\mu_m = \overline{\mu}$. Mais il est concevable – et c'est ce que nous voulons étudier ici – qu'elle se préoccupe aussi de l'héritage qu'elle laisse, par exemple en maximisant une somme pondérée V_m^λ de son propre bien-être et de l'héritage qu'elle transmet :

$$(11) \qquad \begin{aligned} V_m^\lambda &= (1-\lambda)U_m + \lambda H_{m+1} \quad (\text{avec } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1) \\ &= [(1-\lambda)(1+\alpha\mu_m)^a + \lambda\gamma(\mu_m)]H_m \end{aligned} .$$

Si $\lambda = 0$, on est ramené à la maximisation de U_m, donc au choix $\mu_m = \overline{\mu}$. En revanche, plus λ est proche de 1, plus petite est la valeur choisie pour μ_m.

Maximiser V_m^λ, que nous appellerons *satisfaction de la génération m*, revient (pour une valeur préalablement fixée de λ) à maximiser (en $\mu_m \equiv \mu$) :

$$G(\mu;\lambda) = (1-\lambda)(1+\alpha\mu)^a + \lambda\gamma(\mu) \quad .$$

Nous allons effectuer cette maximisation dans le cas le plus intéressant du point de vue des arbitrages intergénérationnels, c'est-à-dire le quatrième cas identifié à la section précédente.

Si on fait varier μ sur toute la droite, et pas seulement sur l'intervalle admissible $[0,\overline{\mu}]$, on constate que $G(\mu;\lambda)$ est croissante à gauche de $\mu = \mu(\lambda)$ et décroissante à droite de $\mu = \mu(\lambda)$, où $\mu(\lambda)$ est l'unique solution de la condition nécessaire au premier ordre de la maximisation de $G(\mu;\lambda)$:

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{a\alpha(1-\beta\mu)^a}{-a\alpha + b\beta + \alpha\beta\mu} \quad . \tag{12}$$

De ce que le premier membre de (12) est une fonction croissante de λ et le second membre une fonction décroissante de μ, il résulte que $\mu(\lambda)$ est une fonction décroissante de λ.

Cependant, $\mu(0) = \dfrac{1}{\beta} > \overline{\mu}$, qui n'est pas admissible. Dans ces conditions, la valeur de μ qui, sur $[0,\overline{\mu}]$, maximise $G(\mu;\lambda)$, est $\mu^*(\lambda)$ telle que

$$\mu^* = \overline{\mu} \qquad \text{sur } [0,\hat{\lambda}] \quad \text{avec } \frac{\hat{\lambda}}{1-\hat{\lambda}} = \frac{a\alpha(1-\beta\overline{\mu})^a}{-a\alpha + b\beta + \alpha\beta\overline{\mu}}$$

$$\mu^*(\lambda) = \mu(\lambda) \quad \text{sur } [\hat{\lambda},1].$$

On a

$$0 < \hat{\lambda} < \tilde{\lambda} < 1 \quad \text{et} \quad \mu^*(0) = \mu^*(\hat{\lambda}) = \overline{\mu} > \mu^*(\tilde{\lambda}) > \mu^*(1) = \mu^* \quad ,$$

sachant que μ^* est donné par (10) et que $\tilde{\lambda}$ est la valeur de λ pour laquelle la solution de (12) est $\tilde{\mu}$, avec $\gamma(\tilde{\mu}) = 1$.

Par conséquent :

• pour $\lambda < \tilde{\lambda}, \gamma(\mu^*(\lambda)) < 1$;

dans ce cas, comme on va le voir, il n'y a pas de *croissance soutenable* (ou durable) possible [16].

• pour $\lambda > \tilde{\lambda}, \gamma(\mu^*(\lambda)) > 1$;

16. Dans le cadre du modèle présenté ici, le concept de *croissance soutenable* est facile à définir ; dans des modèles plus généraux il y a, comme le montre J. PEZZEY [1995], plusieurs définitions possibles, entre lesquelles le choix n'est pas évident.

dans ce cas, une croissance soutenable est rendue possible par l'intensité de l'altruisme dont font preuve les générations successives, si du moins elles ont toutes le même comportement [17]. On va même montrer que la croissance soutenable engendrée par le choix de $\mu^*(\lambda)$, s'il est répété de génération en génération, est équitable pour toutes au sens du critère de RAWLS.

On déduit de (7), (9) et (11) que la suite des niveaux de satisfaction $V_m^\lambda(\mu^*(\lambda))$ est décroissante, stationnaire ou croissante suivant que λ est inférieur, égal ou supérieur à $\tilde{\lambda}$. Par conséquent, pour λ inférieur à $\tilde{\lambda}$, le critère de RAWLS, appliqué maintenant aux niveaux de satisfaction, n'est pas davantage satisfait que lorsqu'il est appliqué aux niveaux de bien-être. Pour λ égal à $\tilde{\lambda}$, il est satisfait, comme il l'est lorsqu'il est appliqué aux niveaux de bien-être, mais l'économie est stagnante. Pour λ supérieur à $\tilde{\lambda}$, il n'est pas satisfait lorsqu'il est appliqué aux niveaux de bien-être ; la nouveauté tient à ce qu'il est, en revanche, satisfait lorsqu'il est appliqué aux niveaux de satisfaction. On a, en effet, le

THÉORÈME 1

Lorsque l'altruisme est suffisamment fort pour que λ soit supérieur à $\tilde{\lambda}$, l'économie a un taux de croissance positif et le critère de RAWLS, appliqué aux niveaux de satisfaction, est satisfait.

Démonstration : Pour λ supérieur à $\tilde{\lambda}$, on sait que les niveaux de satisfaction $V_m^\lambda(\mu^*(\lambda))$, ainsi que les niveaux de bien-être et d'héritage correspondants, sont croissants. Donc, l'économie a un taux de croissance positif.

Du fait de cette croissance, la génération la moins favorisée est la première. Elle est néanmoins dans une situation aussi favorable qu'elle peut l'être, puisque $\mu^*(\lambda)$ est la valeur de μ_1 qui maximise sa satisfaction V_1^λ. Par conséquent, la suite des niveaux de satisfaction $V_m^\lambda(\mu^*(\lambda))$ satisfait le critère de RAWLS.

Q.E.D.

La conclusion générale de cette section est que, au-delà du seuil d'altruisme caractérisé par $\tilde{\lambda}$, la compatibilité est assurée entre croissance et équité intergénérationnelle, à un niveau suffisant de conservation du capital naturel (du moins avec l'hypothèse retenue dans ce modèle d'un facteur β constant ; de ce fait, il y a une tendance à sous-estimer la dégradation de l'environnement).

17. Le modèle considéré, ici, est très différent de celui étudié par R.J. BARRO [1974], mais il comporte aussi une articulation en cascades entre générations ; dans le cadre de son modèle, R.J. BARRO la caractérise de la manière suivante : « *Une génération se comporte comme si elle devait vivre éternellement du moment qu'elle est reliée aux générations futures par une chaîne de transferts intergénérationnels effectifs* » (page 1097).

4 Réinterprétation en termes d'actualisation

À première vue, la manière dont $\mu^*(\lambda)$ est choisi, est sans rapport avec la maximisation d'une somme actualisée, que ce soit une somme de niveaux de bien-être ou de niveaux de satisfaction. On a cependant le

THÉORÈME 2
À chaque valeur de $\lambda \in [0,1]$ correspond un facteur d'actualisation $\delta(\lambda) \in [0,\overline{\delta}]$, avec

$$\overline{\delta} = [\gamma(\mu^*)]^{-1} < 1 \ ,$$

tel que $\mu^*(\lambda)$ maximise en μ la somme actualisée des niveaux de bien-être

$$\text{(13)} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} (\delta(\lambda))^{j-1} U(y_j, z_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} (\delta(\lambda))^{j-1} \kappa_1^a \nu_1^b (1+\alpha\mu)^a (\gamma(\mu))^{j-1} \ .$$

On voit ainsi qu'actualiser avec un facteur d'actualisation inférieur à 1 ($\overline{\delta}$ est en effet inférieur à 1) n'est pas incompatible avec une trajectoire équitable de croissance engendrée par un comportement suffisamment altruiste ; les générations futures ne sont alors pas pénalisées par une pondération, dans la somme actualisée, pourtant d'autant plus faible que le futur est éloigné.

Démonstration : Elle est conduite en deux étapes successives.

1re étape : détermination de la valeur $\mu^*(\delta)$ qui maximise la somme actualisée des niveaux de bien-être, c'est-à-dire qui maximise

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \delta^{j-1} \kappa_1^a \nu_1^b (1+\alpha\mu)(1+\alpha\mu)^a [\gamma(\mu)]^{j-1} = \kappa_1^a \nu_1^b (1+\alpha\mu)^a \sum_{j=1}^{+\infty} x^{j-1} \quad ,$$

avec $x = \delta\gamma(\mu)$.

On sait que la série $\sum_{j=1}^{+\infty} x^{j-1}$ est convergente et égale à $\frac{1}{1-x}$ pour toute valeur de x comprise entre 0 et 1. Donc

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \delta^{j-1} \kappa_1^a \nu_1^b (1+\alpha\mu)^a [\gamma(\mu)]^{j-1} = \kappa_1^a \nu_1^b \varphi(\mu;\delta) \ ,$$

où

$$\varphi(\mu;\delta) = \frac{(1+\alpha\mu)^a}{1-\delta\gamma(\mu)} \ .$$

La condition sur x est, en effet, satisfaite par $\delta\gamma(\mu)$, puisque la valeur maximale que peut atteindre $\gamma(\mu)$ est $\gamma(\mu^*)$, c'est-à-dire l'inverse de la borne supérieure $\overline{\delta}$ de l'intervalle de variation de δ.

Si on fait varier μ sur toute la droite, et pas seulement sur l'intervalle admissible $[0,\overline{\mu}]$, on constate que $\varphi(\mu)$ est croissante ou décroissante suivant que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = \frac{(1+\alpha\mu)^{a-1}}{[1-\delta\gamma(\mu)]^2}[a\alpha(1-\delta\gamma(\mu)) - \delta\frac{\gamma(\mu)}{1-\beta\mu}(-a\alpha+b\beta+\alpha\beta\mu)]$$

est positive ou négative, c'est-à-dire suivant que

$$\frac{1}{\delta} \underset{>}{\overset{<}{\text{ou}}} \gamma(\mu)\left[1+\frac{-1+\dfrac{b\beta}{a\alpha}+\dfrac{\beta\mu}{a}}{1-\beta\mu}\right] ,$$

c'est-à-dire encore suivant que

$$\frac{1}{\delta} \underset{<}{\overset{>}{\text{ou}}} \frac{(1+\alpha\mu)^{a+1}}{(1-\beta\mu)^a}\frac{b\beta}{a\alpha} .$$

Comme le second membre de ces inégalités est une fonction croissante en $\mu,\varphi(\mu;\delta)$ est croissante à gauche de $\mu=\mu(\delta)$ et décroissante à droite de $\mu=\mu(\delta)$, où $\mu(\delta)$ est l'unique solution de l'équation

$$\frac{1}{\delta} = \frac{b\beta}{a\alpha}\frac{(1+\alpha\mu)^{a+1}}{(1-\beta\mu)^a} . \tag{14}$$

De ce que le premier membre de (14) est une fonction décroissante de δ et le second une fonction croissante de μ, il résulte que $\mu(\delta)$ est une fonction décroissante de δ.

Cependant, $\mu(0) = \dfrac{1}{\beta} > \overline{\mu}$, qui n'est pas admissible. Dans ces conditions, la valeur de μ qui, sur $[0,\overline{\mu}]$, maximise $\varphi(\mu;\delta]$, est $\mu^*(\delta)$ telle que

$$\mu^*(\delta) = \overline{\mu} \qquad \text{sur } [0,\hat{\delta}] , \quad \text{avec } \frac{1}{\hat{\delta}} = \frac{b\beta}{a\alpha}\frac{(1+\alpha\overline{\mu})^{a+1}}{(1-\beta\overline{\mu})^a}$$

$$\mu^*(\delta) = \mu(\delta) \quad \text{sur } [\hat{\delta},\overline{\delta}]$$

avec

$$\mu^*(\overline{\delta}) = \mu^* ,$$

du fait que, pour $\delta = \overline{\delta}$, (14) s'écrit

$$\gamma(\mu^*) = \frac{b\beta}{a\alpha}\gamma(\mu(\overline{\delta}))\frac{1+\alpha\mu(\overline{\delta})}{1-\beta\mu(\overline{\delta})} ,$$

et que le deuxième membre de cette inégalité est une fonction (strictement) croissante de μ, qui vaut $\gamma(\mu^*)$ pour $\mu=\mu^*$.

2e étape : identification de $\mu^*(\delta)$ avec $\mu^*(\lambda)$.

Il apparaît donc que, sur $\delta \in [\hat{\delta},\overline{\delta}],\mu^*(\delta)$ est une fonction décroissante de δ, avec $\mu^*(\hat{\delta}) = \overline{\mu}$ et $\mu^*(\overline{\delta}) = \mu^*$. D'autre part, on sait que, sur $\lambda \in [\hat{\lambda},1],\mu^*(\lambda)$ est une fonction décroissante de λ, avec $\mu^*(\hat{\lambda}) = \overline{\mu}$ et $\mu^*(1) = \mu^*$.

Donc, en identifiant $\mu^*(\delta)$ avec $\mu^*(\lambda)$, on obtient une fonction croissante $\delta(\lambda)$ de $\lambda \in [\hat{\lambda},1]$ sur $\delta \in [\hat{\delta},\overline{\delta}]$. En prolongeant linéairement $\delta(\lambda)$ de $\lambda \in [0,\hat{\lambda}]$ sur $\delta \in [0,\hat{\delta}]$, avec $\delta(0) = 0$, on obtient le résultat annoncé.

Q.E.D.

Remarque : pour $\lambda = \tilde{\lambda}, \tilde{\delta} = \delta(\tilde{\lambda})$ doit satisfaire

$$\frac{1}{\tilde{\delta}} = \frac{b\beta}{a\alpha}\gamma(\tilde{\mu})\frac{1+\alpha\tilde{\mu}}{1-\beta\tilde{\mu}}$$

donc

$$\tilde{\delta} = \frac{a\alpha}{b\beta}\frac{1-\beta\tilde{\mu}}{1+\alpha\tilde{\mu}} \ ;$$

c'est le facteur d'actualisation qui détermine une trajectoire stationnaire.

L'interprétation des choix faits par les générations successives comme résultat de la maximisation d'une somme actualisée des niveaux de bien-être permet de calculer des prix, qui sont des *prix d'ordre*, pour chacun des deux services à chacune des périodes. Ces prix peuvent être formulés à partir du *taux d'actualisation relatif à Y*, ou à partir du *taux d'actualisation relatif à Z*. Ils permettent d'évaluer l'opportunité de transférer des ressources d'une période à une autre, au cas où de nouvelles possibilités de transferts apparaîtraient (correspondant, par exemple, à de nouvelles technologies), distinctes des seules possibilités résultant du choix de μ.

Imaginons qu'une nouvelle technologie soit mise au point qui permette un transfert de ressource *Y* de la période 1 à la période *m* ; par exemple en utilisant dy_1 comme *input* à la période 1 (cela signifie retrancher $-dy_1$ de la consommation de la première génération, car dy_1 est négatif puisqu'il mesure un *input*), on peut produire dy_m comme *output* à la période *m* (c'est-à-dire qu'on augmente de la quantité positive dy_m la ressource en *Y* disponible à la période *m*). Les notations différentielles dy_1 et dy_m indiquent que la nouvelle technologie ne modifie qu'à la marge l'allocation intertemporelle précédemment optimisée ; si la modification était plus fondamentale, il faudrait procéder à une nouvelle optimisation d'ensemble.

Si le choix de $\mu^*(\lambda)$ est considéré uniquement comme résultat d'une suite de choix décentralisés, on ne dispose d'aucun moyen d'évaluer l'opportunité de réaliser la transformation $\{dy_1, dy_m\}$: dy_1 affecte la première génération, dy_m la génération *m*, et on n'a aucun moyen de comparaison entre le sort de la première génération et celui de la génération *m*. Il n'en va plus de même si le choix de $\mu^*(\lambda)$ est considéré comme le résultat de la maximisation en μ d'une fonction-objectif unique, en l'occurrence la somme (ou valeur) actualisée (13), calculée avec $\delta = \delta(\lambda)$.

Alors, en effet, s'il apparaît que le transfert $\{dy_1, dy_m\}$ vient contrarier cette maximisation, il sera rationnel de le juger indésirable, alors qu'au contraire, si $\{dy_1, dy_m\}$ vient renforcer la maximisation, il sera rationnel de vouloir le réaliser. Contrarier signifie que le transfert $\{dy_1, dy_m\}$, s'il est réalisé, a pour effet de diminuer la valeur actualisée par rapport à son niveau $\kappa_1^a \nu_1^b \varphi(\mu^*(\lambda); \delta(\lambda))$; renforcer signifie au contraire que $\{dy_1, dy_m\}$ augmente la valeur par rapport à ce niveau. Autrement dit, $\{dy_1, dy_m\}$ sera jugé indésirable si

$$\frac{\partial U}{\partial y_1} dy_1 + \delta^{m-1} \frac{\partial U}{\partial y_m} dy_m < 0 ,$$

tandis qu'il sera jugé désirable si

$$\frac{\partial U}{\partial y_1} dy_1 + \delta^{m-1} \frac{\partial U}{\partial y_m} dy_m > 0 ,$$

les utilités marginales étant calculées aux niveaux de consommation y_1 et y_m résultant de la maximisation de la valeur actualisée.

On peut encore écrire le premier membre de ces inégalités sous la forme

$$dy_1 + \frac{\delta^{m-1} \dfrac{\partial U}{\partial y_m}}{\dfrac{\partial U}{\partial y_1}} dy_m ,$$

ou encore

$$dy_1 + p_m dy_m .$$

Le facteur $p_m = \dfrac{\delta^{m-1} \dfrac{\partial U}{\partial y_m}}{\dfrac{\partial U}{\partial y_1}}$ est le taux marginal de substitution de la ressource *Y* disponible à la première période à la ressource *Y* disponible à la période *m*, calculé pour les niveaux de consommation résultant de la maximisation de la valeur actualisée. C'est donc le prix d'ordre de la ressource *Y* disponible à la période *m*, en normalisant le système de prix d'ordre avec $p_1 = 1$. Cette dénomination « *prix d'ordre* » est effectivement justifiée par le fait que le transfert $\{dy_1, dy_m\}$ est jugé désirable ou non suivant que

$$p_1 dy_1 + p_m dy_m > 0 \quad \text{ou} \quad < 0 .$$

Les prix d'ordre permettent de calculer les valeurs (exprimées en unités de *Y* disponible à la première période, du fait de la normalisation $p_1 = 1$) sur la base desquelles on peut décider s'il y a lieu ou non de réaliser un transfert que, par exemple, une technologie nouvelle rendrait possible.

De la même manière, un transfert $\{dy_1, dz_m\}$, permettant de disposer de la quantité supplémentaire dz_m de ressource *Z* à la période *m*, moyennant l'*input* dy_1, est désirable ou non suivant que

$$p_1 dy_1 + q_m dz_m > 0 \quad \text{ou} \quad < 0 ,$$

avec

$$q_m = \frac{\delta^{m-1}\dfrac{\partial U}{\partial z_m}}{\dfrac{\partial U}{\partial y_1}} \;;$$

q_m est le prix d'ordre de la ressource Z disponible à la période m (en faisant toujours $p_1 = 1$). Et si c'était un transfert $\{dy_j, dz_k\}$ qu'il fallait évaluer, on le ferait à l'examen de la valeur

$$p_j dy_j + q_k dz_k$$

calculée avec les prix d'ordre

$$p_j = \frac{\delta^{j-1}\dfrac{\partial U}{\partial y_j}}{\dfrac{\partial U}{\partial y_1}} \quad \text{et} \quad q_k = \frac{\delta^{k-1}\dfrac{\partial U}{\partial z_k}}{\dfrac{\partial U}{\partial y_1}} .$$

Tout transfert (à la marge), quelles que soient les ressources et les périodes qu'il implique, peut être évalué de la même manière.

On va, maintenant, étudier comment les prix d'ordre évoluent dans le temps ; cette évolution est importante, car elle indique comment des transferts sont différemment valorisés suivant les périodes, plus ou moins lointaines, qu'ils concernent.

On a

$$p_m = \frac{\delta^{m-1}\dfrac{\partial U}{\partial y_m}}{\dfrac{\partial U}{\partial y_1}} = \frac{\delta^{m-1} a \left(\dfrac{z_m}{y_m}\right)^{1-a}}{a\left(\dfrac{z_1}{y_1}\right)^{1-a}} =$$

$$= \delta^{m-1}\left[\frac{1-\beta\mu^*(\lambda)}{1+\alpha\mu^*(\lambda)}\right]^{(m-1)(1-a)}$$

$$q_m = \frac{\delta^{m-1}\dfrac{\partial U}{\partial z_m}}{\dfrac{\partial U}{\partial y_1}} = \frac{\delta^{m-1}(1-a)\left(\dfrac{y_m}{z_m}\right)^{a}}{a\left(\dfrac{z_1}{y_1}\right)^{1-a}} =$$

$$= \delta^{m-1}\frac{(1-a)\kappa_1[1+\alpha\mu^*(\lambda)]^{(m-1)a+1}}{a\nu_1[1-\beta\mu^*(\lambda)]^{(m-1)a}}$$

On voit donc que, quel que soit $\lambda \in [0,1]$, donc quels que soient les poids relatifs du présent et de l'avenir dans le choix de μ, le prix d'ordre de la ressource Y diminue au fur et à mesure que le temps passe : une unité de Y disponible plus tôt a toujours plus de valeur qu'une unité de Y disponible plus tard. Autrement dit, la croissance de la disponibilité de Y, qu'assure tout choix de μ, est déterminante sur l'évolution du prix d'ordre de *Y*, et il n'y a pas contradiction entre baisse de ce prix et trajectoire des niveaux de bien-être le cas échéant plus favorable aux générations éloignées qu'aux générations proches. Les prix d'ordre résultent, en effet, de l'interaction, multiforme, des arbitrages intertemporels et des capacités productives de l'économie.

Qu'en est-il pour la ressource *Z* ? q_m est croissant ou décroissant dans le temps suivant que

$$\frac{\delta(\lambda)(1+\alpha\mu^*(\lambda))}{1-\beta\mu^*(\lambda)} > 1 \quad \text{ou} \quad < 1$$

c'est-à-dire suivant que

$$\delta(\lambda) \underset{<}{\overset{>}{\text{ou}}} \frac{1-\beta\mu^*(\lambda)}{1+\alpha\mu^*(\lambda)} \ .$$

Par conséquent, comme sur $[\tilde{\lambda}, 1]$,

$$\delta(\lambda) \geqslant \tilde{\delta} = \frac{a\alpha}{b\beta} \frac{1-\beta\tilde{\mu}}{1+\alpha\tilde{\mu}} > \frac{1-\beta\tilde{\mu}}{1+\alpha\tilde{\mu}} \ ,$$

il apparaît que q_m est toujours croissant dans le temps lorsque la pondération de l'avenir par rapport au présent est assez forte pour entraîner la croissance de l'économie.

Pour *Z* aussi, l'évolution des prix d'ordre résulte de l'interaction entre l'arbitrage intertemporel et les capacités productives de l'économie, lesquelles sont essentiellement différentes de ce qu'elles sont pour *Y*.

Les prix p_m et q_m sont des prix actualisés : quel que soit *m*, ils sont intégrés au système de prix normalisés une fois pour toutes par $p_1 = 1$. Le prix

$$Q_m = \frac{q_m}{p_m} = \frac{(1-a)\kappa_1[1+\alpha\mu^*(\lambda)]^m}{a\nu_1[1-\beta\mu^*(\lambda)]^{m-1}}$$

est, en revanche, le prix non actualisé de *Z* à la période *m* : il est établi sur la base d'une normalisation spécifique à la période *m*, celle qui consiste à fixer le prix de *Y* disponible à la période *m* égal à 1 (*Y* est alors utilisé comme numéraire spécifique à la période *m*). Q_m mesure la rareté de *Z* disponible à la période *m* relative à celle de *Y* disponible à la même période ; il augmente donc toujours au fur et à mesure que le temps passe.

On peut reformuler les résultats précédents en termes de taux d'actualisation relatif soit à *Y* soit à *Z*.

Le taux d'actualisation relatif à *Y* et aux périodes $j-1$ et *j* est défini par

$$1 + r_j = \frac{p_{j-1}}{p_j} \ .$$

Il indique qu'il est équivalent de disposer d'une unité de *Y* à la période $j-1$ ou de $(1+r_j)$ unités de *Y* à la période *j*, puisque

$$p_{j-1}(-1) + p_j(1+r_j) = 0 \ .$$

Pour $\mu = \mu^*(\lambda)$, on a

$$1 + r_j = \delta^{-1} \left[\frac{1 + \alpha\mu^*(\lambda)}{1 - \beta\mu^*(\lambda)} \right]^{1-a} > 1 \ .$$

Le taux d'actualisation relatif à la ressource Y est donc constant et positif, quel que soit λ ; cela n'implique cependant pas nécessairement, comme on l'a déjà observé précédemment, une préférence pour le présent par rapport à l'avenir.

Le taux d'actualisation relatif à Z et aux périodes $j-1$ et j est défini par

$$1 + s_j = \frac{q_{j-1}}{q_j} = \delta^{-1} \left[\frac{1 - \beta\mu^*(\lambda)}{1 + \alpha\mu^*(\lambda)} \right]^{a} .$$

Il est constant sur l'ensemble des périodes, et négatif si $\lambda > \tilde{\lambda}$.

Donc, si $\lambda > \tilde{\lambda}$, il est toujours opportun de sacrifier une unité de Z disponible plus tôt au bénéfice d'une unité de Z disponible plus tard ; ou, de manière plus pertinente, s'il est opportun de sacrifier une certaine quantité de Y disponible, par exemple, à la première période, pour disposer d'une unité de Z à une période ultérieure, *a fortiori* est-il opportun de faire ce sacrifice pour disposer d'une unité de Z à une période encore plus éloignée.

Qu'il y ait deux taux d'actualisation, l'un relatif à Y, l'autre relatif à Z, ne signifie pas qu'on évalue certains transferts avec l'un, et d'autres avec l'autre. Tous les transferts imaginables peuvent être évalués avec l'un et l'autre, et l'évaluation avec l'un conduit pour chacun à la même conclusion que l'évaluation avec l'autre. En effet, évaluer avec le taux d'actualisation relatif à Y, c'est évaluer avec les prix d'ordre précédemment définis ; tandis qu'évaluer avec le taux d'actualisation relatif à Z, c'est évaluer avec des prix d'ordre définis de façon analogue, mais en les normalisant de telle manière que le prix de Z disponible à la première période soit égal à 1. Comme les deux systèmes de prix d'ordre sont proportionnels (le second est obtenu en divisant tous les prix du premier par q_1), évaluer avec l'un conduit toujours à la même conclusion qu'évaluer avec l'autre.

5 Effets d'une rupture dans le rythme du progrès technique

Dans tout ce qui précède, nous avons toujours admis l'invariance de α dans le temps : le rythme du progrès technique est constant, et engendre un rythme, lui aussi, constant d'accumulation du capital artificiel. Dans la présente section, nous voulons, au contraire, étudier les effets d'une rupture dans le rythme du progrès technique. Cette rupture se manifeste sous la forme suivante : pendant les deux premières périodes (la généralisation au cas des n premières périodes donne des résultats qui ne sont pas qualitativement différents, mais ne sont guère commodes à présenter *in extenso*), le progrès technique génère une certaine valeur $\check{\alpha}$ du paramètre α ; à partir de la troisième période (de la $(n+1)^{\text{ème}}$ dans le modèle général), il ne génère plus que $\hat{\alpha}$, avec $\hat{\alpha} < \check{\alpha}$, et ceci jusqu'à l'infini. Comment les générations successives réagissent-elles à cette rupture, et comment ces réactions peuvent-elles être réinterprétées en termes de maximisation d'une somme actualisée de niveaux de bien-être ?

Dans le cadre du modèle où la rupture a lieu à la troisième période, les réactions des deux premières générations peuvent s'inscrire, si se manifeste un degré suffisant d'altruisme :

• soit dans une suite stationnaire de valeurs du paramètre λ : λ est ainsi identique pour toutes les générations, y compris les deux premières, mais à un niveau supérieur à $\tilde{\lambda}(\hat{\alpha})$ (qui est lui-même, supérieur à $\tilde{\lambda}(\breve{\alpha})$), de telle manière que les niveaux de satisfaction, de bien-être, et d'héritage transmis, constituent des suites croissantes, en satisfaisant le critère de RAWLS appliqué aux niveaux de satisfaction ;

• soit dans une suite de valeurs du paramètre λ qui ne devient stationnaire qu'à partir de la troisième génération, la valeur λ_2 qui gouverne le comportement de la deuxième génération, ainsi que la valeur λ_1, au moins dans certaines configurations, étant supérieure à la valeur commune λ ultérieure. Ces différences sont introduites afin que les premières générations affectées par la rupture (c'est-à-dire la troisième et celles qui la suivent le plus immédiatement) ne supportent pas excessivement le poids de l'ajustement, ajustement nécessaire pour que la croissance reste soutenable en dépit de la rupture dans le rythme du progrès technique. Que signifie « *poids excessif* » ? il y aurait poids excessif si la suite des niveaux de satisfaction, sur l'ensemble de toutes les générations, ne satisfaisait plus le critère de RAWLS.

Nous allons considérer l'un après l'autre ces deux types de configurations de suites de valeurs de λ compatibles avec une croissance soutenable satisfaisant le critère de RAWLS ; et pour chacun d'eux, nous allons déterminer les facteurs d'actualisation qui, pour chaque période, engendrent précisément la valeur de μ choisie par la génération présente à cette période, à partir de la valeur λ qui gouverne son comportement. Contrastant avec le résultat du théorème 2, ainsi qu'avec les résultats de KOOPMANS, ces facteurs d'actualisation ne sont pas les puissances entières successives d'un nombre δ compris entre 0 et $\overline{\delta} < 1$. Ceci est une conséquence logique de la rupture qui, à la troisième période, substitue $\hat{\alpha}$ à $\breve{\alpha}$, rupture qui est incompatible avec l'hypothèse dite de « *stationnarité* » nécessaire pour obtenir les résultats de KOOPMANS [18].

La résolution de ce problème prend la forme des théorèmes 3 et 4, qui sont énoncés et démontrés dans la suite de la présente section ; les démonstrations font usage des lemmes rassemblés dans l'annexe.

THÉORÈME 3

Si chaque génération décide de la valeur de μ, qu'elle entend mettre en œuvre, à partir d'une valeur de λ qui est la même pour toutes les générations, alors la suite des valeurs de μ fixées de cette manière maximise la somme actualisée des niveaux de bien-être

18. Voir T. KOOPMANS [1972], ainsi que P. DASGUPTA and G. HEAL [1979], pages 275-281.

$$
(15)\qquad \begin{aligned}
&U(y_1,z_1)+\delta_1 U(y_2,z_2)+\delta_1\delta_2\sum_{j=1}^{+\infty}\delta^{j-1}U(y_j,z_j)=\\
&=\kappa_1^a\nu_1^b(1+\check{\alpha}\mu_1)^a+\delta_1\kappa_1^a\nu_1^b\gamma(\mu_1;\check{\alpha})(1+\check{\alpha}\mu_2)^a+\\
&+\delta_1\delta_2\kappa_1^a\nu_1^b\gamma(\mu_1;\check{\alpha})\gamma(\mu_2;\check{\alpha})\sum_{j=1}^{+\infty}[\gamma(\mu;\hat{\alpha})]^{j-1}(1+\hat{\alpha}\mu)^a
\end{aligned}\quad ,
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= \delta(\lambda;\check{\alpha})\\
\delta_2 &= \delta(\lambda;\hat{\alpha}) > \delta(\lambda;\check{\alpha})\ ,\\
\delta &= \delta(\lambda;\hat{\alpha})
\end{aligned}
$$

la notation $\delta(\lambda;\check{\alpha})$ désignant la fonction $\delta(\lambda)$, telle qu'elle apparaît dans le théorème 2, pour $\alpha=\check{\alpha}$, et $\delta(\lambda;\hat{\alpha})$ la même fonction, mais pour $\alpha=\hat{\alpha}$.

Que δ soit $\delta(\lambda;\hat{\alpha})$ est un résultat immédiat puisque, pour la troisième période et toutes les suivantes, il s'agit de maximiser la même somme actualisée que dans le théorème 2, ici pour $\alpha=\hat{\alpha}$. Le résultat intéressant concerne δ_2 : le bien-être de la deuxième génération est pondéré par un facteur $\delta(\lambda;\hat{\alpha}) > \delta(\lambda;\check{\alpha})$, lequel, dans la somme actualisée, amorce dès la période 2 la transition vers la situation résultant de la rupture du rythme du progrès technique à la période 3 ; l'interprétation précise de cette « *amorce* » sera donnée après la démonstration du théorème, sur la deuxième étape de laquelle cette interprétation s'appuie.

Démonstration : Il s'agit de montrer que, si δ_1,δ_2 et δ ont les valeurs indiquées dans l'énoncé du théorème, le maximum en μ_1,μ_2 et μ de la somme actualisée (15) est obtenu en

$$
\begin{aligned}
&\mu_1^*(\delta_1,\delta_2,\delta)=\mu_2^*(\delta_1,\delta_2,\delta)=\mu^*(\lambda;\check{\alpha})\\
&\mu^*(\delta_1,\delta_2,\delta)=\mu^*(\lambda;\hat{\alpha})
\end{aligned}\quad .
$$

Maximiser en μ_1,μ_2 et μ la somme actualisée (15) implique de maximiser en μ la somme

$$
(16)\qquad \varphi(\mu;\delta;\hat{\alpha})=\sum_{j=1}^{+\infty}\delta^{j-1}[\gamma(\mu;\hat{\alpha})]^{j-1}(1+\hat{\alpha}\mu)^a
$$

Avec $\delta=\delta(\lambda;\hat{\alpha})$, la valeur de μ qui maximise (16) est effectivement $\mu^*(\lambda;\hat{\alpha})$.

Dans ces conditions, maximiser (15) en μ_1,μ_2 et μ revient à maximiser en μ_1 et μ_2 la somme

$$
\begin{aligned}
&(1+\check{\alpha}\mu_1)^a+\delta_1\gamma(\mu_1;\check{\alpha})(1+\check{\alpha}\mu_2)^a+\\
&\qquad +\delta_1\delta_2\gamma(\mu_1;\check{\alpha})\gamma(\mu_2;\check{\alpha})\varphi(\mu^*(\lambda;\hat{\alpha});\delta(\lambda;\hat{\alpha});\hat{\alpha})\ .
\end{aligned}
$$

Ceci implique de maximiser en μ_2 la somme

(17) $$(1+\breve{\alpha}\mu_2)^a + \delta_2\gamma(\mu_2;\breve{\alpha})\varphi(\mu^*(\lambda;\hat{\alpha});\delta(\lambda;\hat{\alpha});\hat{\alpha}) \ ,$$

c'est-à-dire, avec $\delta_2 = \delta(\lambda;\hat{\alpha})$, et en invoquant le lemme 2, de maximiser

$$(1+\breve{\alpha}\mu_2)^a + \frac{\lambda}{1-\lambda}\gamma(\mu_2;\breve{\alpha}) \ ,$$

ce qui est effectivement obtenu en $\mu_2 = \mu^*(\lambda;\breve{\alpha})$.

Il reste alors à maximiser en μ_1 la somme

$$(1+\breve{\alpha}\mu_1)^a + \delta_1\gamma(\mu_1;\breve{\alpha})\left[(1+\breve{\alpha}\mu^*(\lambda;\breve{\alpha}))^a + \frac{\lambda}{1-\lambda}\gamma(\mu^*(\lambda;\breve{\alpha});\breve{\alpha})\right] =$$

$$= (1+\breve{\alpha}\mu_1)^a + \delta_1\gamma(\mu_1;\breve{\alpha})[(1+\breve{\alpha}\mu^*(\lambda;\breve{\alpha}))^a +$$

$$+ \delta(\lambda;\breve{\alpha})\varphi(\mu^*(\lambda,\breve{\alpha});\delta(\lambda;\breve{\alpha});\breve{\alpha})\gamma(\mu^*(\lambda;\breve{\alpha});\breve{\alpha})] =$$

$$= (1+\breve{\alpha}\mu_1)^a + \delta_1\gamma(\mu_1;\breve{\alpha})\varphi(\mu^*(\lambda;\breve{\alpha});\delta(\lambda;\breve{\alpha});\breve{\alpha})$$

c'est-à-dire, avec $\delta_1 = \delta(\lambda;\breve{\alpha})$, de maximiser

$$(1+\breve{\alpha}\mu_1)^a + \frac{\lambda}{1-\lambda}\gamma(\mu_1;\breve{\alpha}) \ ,$$

ce qui est effectivement obtenu en $\mu_1 = \mu^*(\lambda;\breve{\alpha})$.

Q.E.D.

N'y-a-t-il pas un paradoxe entre, d'une part, le fait que les deux premières générations choisissent $\mu^*(\lambda;\breve{\alpha})$, comme s'il n'y avait pas de rupture à la troisième période (à ceci près néanmoins qu'il ne suffit pas que $\lambda > \tilde{\lambda}(\breve{\alpha})$ pour avoir « *un degré suffisant d'altruisme* »), et, d'autre part, le fait que le facteur d'actualisation δ_2 soit égal à $\delta(\lambda;\hat{\alpha})$, et non à la valeur plus petite $\delta(\lambda;\breve{\alpha})$? Pour comprendre qu'il n'y a pas de paradoxe, il faut se reporter à la deuxième étape de la démonstration, celle qui traite de la maximisation en μ_2 de (17). Avec $\delta_2 = \delta(\lambda;\breve{\alpha})$, on aurait

$$\delta_2\varphi(\mu^*(\lambda;\hat{\alpha});\delta(\lambda;\hat{\alpha});\hat{\alpha}) < \frac{\lambda}{1-\lambda} \ .$$

Pour corriger l'effet de l'inégalité

$$\varphi(\mu^*(\lambda;\hat{\alpha});\delta(\lambda;\hat{\alpha});\hat{\alpha}) < \varphi(\mu^*(\lambda;\breve{\alpha});\delta(\lambda;\breve{\alpha});\hat{\alpha}) \ ,$$

qui résulte du lemme 3, il faut faire $\delta_2 = \delta(\lambda;\hat{\alpha})$, et non $\delta_2 = \delta(\lambda;\breve{\alpha})$.

THÉORÈME 4

Si la première génération décide de la valeur de μ, qu'elle entend mettre en œuvre, à partir d'une valeur λ_1 de λ, la deuxième à partir d'une valeur λ_2, et les suivantes à partir d'une valeur commune λ, avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ et $\lambda_2 > \lambda$, alors la suite des valeurs de μ fixées de cette manière maximise la somme actualisée (15) des niveaux de bien-être avec

$$\delta_1 = \frac{\dfrac{\lambda_1}{1-\lambda_1}}{\dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_2}} \delta(\lambda_2; \breve{\alpha})$$

$$\delta_2 = \frac{\dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_2}}{\dfrac{\lambda}{1-\lambda}} \delta(\lambda; \hat{\alpha}) > \delta(\lambda; \hat{\alpha}) \quad .$$

$$\delta = \delta(\lambda; \hat{\alpha})$$

Démonstration : Avec $\delta_2 = \dfrac{\dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_2}}{\dfrac{\lambda}{1-\lambda}} \delta(\lambda; \hat{\alpha})$, on se trouve, à l'étape de la présente démonstration correspondant à la deuxième étape de la démonstration du théorème 3, avoir à maximiser

$$(1 + \breve{\alpha}\mu_2)^a + \delta_2 \gamma(\mu_2; \breve{\alpha}) \varphi(\mu^*(\lambda; \hat{\alpha}); \delta(\lambda; \hat{\alpha}); \hat{\alpha}) =$$

$$= (1 + \breve{\alpha}\mu_2)^a + \frac{\dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_2}}{\dfrac{\lambda}{1-\lambda}} \frac{\lambda}{1-\lambda} \gamma(\mu_2; \breve{\alpha})$$

ce qui est effectivement obtenu en $\mu_2 = \mu^*(\lambda_2; \breve{\alpha})$.

Il reste alors à maximiser en μ_1

$$(1 + \breve{\alpha}\mu_1)^a + \delta_1 \gamma(\mu_1; \breve{\alpha}) \left[(1 + \breve{\alpha}\mu^*(\lambda_2; \breve{\alpha}))^a + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2} \gamma(\mu^*(\lambda_2; \breve{\alpha}); \breve{\alpha}) \right] =$$

$$= (1 + \breve{\alpha}\mu_1)^a + \delta_1 \gamma(\mu_1; \breve{\alpha}) \left[(1 + \breve{\alpha}\mu^*(\lambda_2; \breve{\alpha}))^a + \right. \quad ,$$

$$\left. + \delta(\lambda_2; \breve{\alpha}) \varphi(\mu^*(\lambda_2; \breve{\alpha}); \delta(\lambda_2; \breve{\alpha}); \breve{\alpha}) \gamma(\mu^*(\lambda_2; \breve{\alpha}); \breve{\alpha}) \right]$$

c'est-à-dire, avec $\delta_1 = \dfrac{\dfrac{\lambda_1}{1-\lambda_1}}{\dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_2}} \delta(\lambda_2 ; \breve{\alpha})$, de maximiser

$$(1 + \breve{\alpha}\mu_1)^a + \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}\gamma(\mu_1 ; \breve{\alpha}) \ ,$$

ce qui est effectivement obtenu en $\mu_1 = \mu^*(\lambda_1 ; \breve{\alpha})$.

Q.E.D.

On voit qu'ici la deuxième génération doit réellement – pas seulement formellement dans la structure de la somme actualisée – apporter une contribution spécifique à l'ajustement requis par la rupture dans le rythme du progrès technique ; on a en effet $\mu^*(\lambda_2 ; \breve{\alpha}) < \mu^*(\lambda ; \breve{\alpha})$. Il en est de même de la première si $\lambda_1 > \lambda$.

• Références bibliographiques

ARROW K. (1973). – « Rawls's Principle of Just Saving », *The Swedish Journal of Economics*, 75, pp. 323-335.

BARRO R.J. (1974). – « Are Government Bonds Net Wealth? », *Journal of Political Economy*, 82, pp. 1095-1117.

BERNHEIM D.B. (1987). – « Ricardian Equivalence: An Evaluation of Theory and Evidence », *NBER Macroeconomics Annual*, 2, pp. 263-304.

DASGUPTA P., BARRETT S., MÄLER K.G. (1996). – « Intergenerational Equity, Social Discount Rates and Global Warming, *Beijer Discussion Paper Series* n° 91, The Royal Swedish Academy of Sciences, Stockholm.

DASGUPTA P., HEAL G., (1979). – *Economic Theory and Exhaustible Resources*, Cambridge University Press.

JOHN A., PECCHENINO R. (1994). – « An Overlapping Generation Model of Growth and the Environment », *The Economic Journal*, 104, pp. 1393-1410.

KOOPMANS T. (1972). – *Representations of Preference Orderings Over Time*, *in* C.B. MCGUIRE and R. RADNER eds., *Decision and Organization*, North-Holland, Amsterdam.

LUCAS R.E. Jr (1988). – « On the Mechanics of Economic Development », *Journal of Monetary Economics*, 22, pp. 3-42.

MIRRLEES J.A. (1997). – « Information and Incentives: the Economics of Carrots and Sticks », *The Economic Journal*, 107, pp. 1311-1329.

PEZZEY J. (1995). – « Sustainable Development, Intergenerational Equity and Environmental Policy », *Discussion Paper* 95-01, Department of Economics, University College London.

PHELPS E.S., RILEY J.G. (1978). – « Rawlsian Growth: Dynamic Programming of Capital and Wealth for Intergeneration "Maximin" Justice », *The Review of Economic Studies*, 45, pp. 101-120.

RAWLS J. (1971). – *A Theory of Justice*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.).

SCOTT M.F. (1989). – *A New View of Economic Growth*, Clarendon Press, Oxford.

SOLOW R. (1974). – « Intergenerational Equity and Exhaustible Resources », *The Review of Economic Studies*, Symposium 1974, 64, pp. 29-45.

YAARI M. (1981). « Rawls, Edgeworth, Shapley, Nash: Theories of Distributive Justice Reexamined », *Journal of Economic Theory*, 24, pp. 1-39.

ANNEXE

LEMME 1. $\mu^*(\lambda;\alpha)$ est, à λ fixé, une fonction croissante de α.

Démonstration : En vertu de (12) et (10), on a

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{a(1-\beta\mu^*(\lambda;\alpha))^a}{\beta(\mu^*(\lambda;\alpha)-\mu^*(\alpha))}$$

où $\mu^*(\alpha) = \dfrac{a\alpha - b\beta}{\alpha\beta} = \dfrac{a}{\beta} - \dfrac{b}{\alpha}$ est une fonction croissante de α.

Cette relation peut encore s'écrire

$$\beta\frac{\lambda}{1-\lambda}\mu^*(\lambda;\alpha) - a(1-\beta\mu^*(\lambda;\alpha))^a = \beta\frac{\lambda}{1-\lambda}\mu^*(\alpha) \ ;$$

elle définit $\mu^*(\lambda;\alpha)$ comme une fonction croissante de $\mu^*(\alpha)$, donc de α.

Q.E.D.

LEMME 2. Quels que soient α et λ (dans leurs intervalles admissibles respectifs), on a

$$\delta(\lambda;\alpha)\varphi(\mu^*(\lambda;\alpha);\delta(\lambda;\alpha);\alpha) = \frac{\lambda}{1-\lambda}\ .$$

Démonstration :

1re étape : Pour toute valeur de λ dans l'intervalle $[\hat{\lambda},1]$, on a, en vertu de (12) et (10) :

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{a(1-\beta\mu^*(\lambda;\alpha))^a}{\beta(\mu^*(\lambda;\alpha)-\mu^*(\alpha))}$$

En prolongeant $\delta(\lambda;\alpha)$ à $[0,\hat{\lambda}]$ de telle manière que

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} = \delta(\lambda;\alpha)\frac{(1+\alpha\overline{\mu})^a}{1-\delta(\lambda;\alpha)(1+\alpha\overline{\mu})^a(1-\beta\overline{\mu})^b} \ ,$$

on a la même expression pour $\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$ sur $[0,\hat{\lambda}]$.

2e étape : En vertu de (14), et compte tenu de la définition de φ, on a, pour toute valeur de λ dans l'intervalle $[\hat{\lambda},1]$:

$$\delta(\lambda;\alpha)\varphi(\mu^*(\lambda;\alpha);\delta(\lambda;\alpha);\alpha) = \frac{(1+\alpha\mu^*(\lambda;\alpha))^a}{\gamma(\mu^*(\lambda;\alpha);\alpha)\left[\dfrac{b\beta}{a\alpha}\dfrac{1+\alpha\mu^*(\lambda;\alpha)}{1-\beta\mu^*(\lambda;\alpha)}-1\right]}$$

$$= \frac{a\alpha(1-\beta\mu^*(\lambda;\alpha))^a}{b\beta(1+\alpha\mu^*(\lambda;\alpha))-a\alpha(1-\beta\mu^*(\lambda;\alpha))} = \frac{a(1-\beta\mu^*(\lambda;\alpha))^a}{\beta(\mu^*(\lambda;\alpha)-\mu^*(\alpha))} \ .$$

En prolongeant à $[0,\hat{\lambda}]$ comme à la première étape, on a le résultat annoncé.

Q.E.D.

LEMME 3. La fonction $\varphi(\mu^*(\lambda;\alpha);\delta(\lambda;\alpha);\alpha)$ est, à λ fixé, une fonction croissante de α.

Démonstration : Quels que soient μ et δ, la définition de φ implique :

$$\varphi(\mu;\delta;\alpha) = (1+\alpha\mu)^a + \delta\gamma(\mu;\alpha)\varphi(\mu;\delta;\alpha) \ .$$

Donc, on a cette relation en particulier pour $\mu = \mu^*(\lambda;\alpha)$ et $\delta = \delta(\lambda;\alpha)$; on peut alors y introduire le résultat du lemme 2.

Ce faisant, on obtient

$$\varphi(\mu^*(\lambda;\alpha);\delta(\lambda;\alpha);\alpha) = (1+\alpha\mu^*(\lambda;\alpha))^a + \frac{\lambda}{1-\lambda}\gamma(\mu^*(\lambda;\alpha);\alpha) \ .$$

Or, le second membre de cette dernière égalité est le maximum en μ de

$$F(\mu;\alpha) = (1+\alpha\mu)^a + \frac{\lambda}{1-\lambda}\gamma(\mu;\alpha) \ .$$

En vertu du théorème de l'enveloppe, on a

$$\frac{d}{d\alpha} F(\mu^*(\lambda;\alpha);\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha} F(\mu;\alpha)\Big|_{\mu=\mu^*(\lambda;\alpha)}$$

Or,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} F(\mu;\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}(1+\alpha\mu)^a \left[1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}(1-\beta\mu)^b\right] =$$

$$= a\alpha(1+\alpha\mu)^{a-1}\left[1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}(1-\beta\mu)^b\right] > 0 \quad .$$

On a, par conséquent,

$$\frac{d}{d\alpha} F(\mu^*(\lambda;\alpha);\alpha) > 0 \quad . \qquad \text{Q.E.D.}$$

LEMME 4. La fonction $\delta(\lambda;\alpha)$ est, à λ fixé, une fonction décroissante de α. C'est une conséquence immédiate des lemmes 2 et 3.