ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 57 – 2000

Croissance endogène et pollution : une approche fondée sur le comportement du consommateur

Sylviane GASTALDO, Lionel RAGOT *

RÉSUMÉ. – Dans cet article, nous développons un modèle de croissance endogène en temps continu fondé sur les innovations de biens de consommation. La particularité de ce modèle est de distinguer deux familles de biens : les biens « standards » dont la production et la consommation sont à l'origine de pollution, et les biens « verts » qui n'ont aucun impact sur l'environnement. De plus, un paramètre de préférence pour les produits verts est proposé, en plus du goût des consommateurs pour la diversité.

Nous étudions l'influence de ce paramètre sur la réalisation des équilibres concurrentiels. Si la préférence pour les produits verts est forte, l'activité de recherche se concentre sur les seuls produits verts, mais les produits standards existants continuent à être consommés. Si la préférence pour les produits verts est faible, c'est la situation inverse qui se produit : les biens verts existants continuent à être produits, mais les nouveaux produits appartiennent tous à la catégorie des biens standards. Enfin, dans le cas où la préférence pour les produits verts est intermédiaire, il y a innovation dans les deux secteurs.

Nous décrivons ensuite la dynamique du modèle lorsque la préférence des consommateurs pour les produits verts est endogène, et se renforce en fonction de la dégradation de l'environnement. Le paramètre clé est alors la valeur de la sensibilité écologique, autrement dit l'influence de l'état de l'environnement sur le paramètre de préférence du consommateur. La dynamique menant à la situation de long terme est examinée en détails. Si la sensibilité est forte, la croissance de long terme sera caractérisée par une innovation dans le seul secteur des produits verts. Pour une valeur plus réduite, la croissance de long terme verra de l'innovation dans les deux secteurs.

Endogenous Growth and Pollution: An Approach based on Consumers'Behavior

ABSTRACT. – This paper develops a continuous time model of endogenous growth based on innovations in consumption goods. The model considers two types of goods, standard goods (whose production and consumption lead to pollution), and green goods (which have no effect on the environment). In addition to consumers' taste for diversity, a parameter indicating consumers' preference for green goods is introduced. The paper examines how this preference parameter affects competitive equilibria. It then describes the dynamics of the model when the preference parameter is endogenous and proportional to an environmental quality indicator.

We examine how this parameter influences the attainment of competitive equilibria. If consumers' preference for green goods is sufficiently high, research (*i.e.*, innovation) will occur only in the green-goods sector, but standard goods will continue to be produced and sold. If preference for green goods is low, the opposite will occur, with extant green goods continuing to be produced and sold, but new products will be introduced only in the standard-goods sector. Finally, if preference for green goods is intermediate, innovation will occur in both sectors.

We then describe the dynamics of the model when consumers' preference for green goods is endogenous, and assumed to be an increasing function of environmental degradation. The key parameter will then be the value of consumers' environmental concern, that is, the influence of the state of the environment on the consumer preference parameter. The dynamic evolution to the long-run situation is examined in detail. If environmental concern is high, long run growth will be characterized by innovation in the green-goods sector alone. For a lower environmental-concern value, long-run growth will see innovation in both sectors.

---

* S. GASTALDO : Direction de la Prévision ; L. RAGOT : Université de Lille I, Medee et Eurequa-Erasme.
Les auteurs remercient les deux rapporteurs anonymes pour leurs précieuses remarques et suggestions. Toutes les erreurs et omissions restent leurs.

1 Introduction

À une enquête du Bipe [1992], plus de 92 % des ménages français interrogés sur leur comportement face à la dégradation de la qualité de l'environnement ont répondu qu'ils étaient prêts à consommer des produits plus écologiques. De nombreuses autres études ont confirmé que les ménages, lorsqu'ils sont sensibilisés aux dommages environnementaux, sont prêts à modifier leur comportement dans un sens plus respectueux de l'environnement. Quelles sont les implications de ce comportement « *actif* » des consommateurs sur les relations entre la sphère économique et la sphère environnementale et sur la dynamique de l'économie ?

Les travaux sur la croissance des économies confrontées au problème de pollution ont connu un renouveau important ces dernières années, suite aux avancées théoriques concernant les processus économiques à l'origine de la croissance, et qui sont regroupés sous l'appellation générique de « *modèles de croissance endogène* ». Smulders [1995] et, plus spécifiquement sur les problèmes de pollution, Gastaldo et Ragot [1995] et Chevé et Ragot [1998] ont synthétisé et mis en perspective ces travaux. Il ressort de ces revues de la littérature, que la durabilité de la croissance endogène est, comme pour le cas de la croissance exogène, le résultat de formalisations technologiques *ad-hoc*. Ainsi, Van Marrewijk *et alii* [1993], Michel [1993], Bovenberg et De Mooij [1997], Ligthart et Van der Ploeg [1994] et Michel et Rotillon [1996] s'assurent de la durabilité de la croissance en formalisant une fonction de dépollution reprenant la nécessaire homogénéité de degré zéro mise en avant par Gradus et Smulders [1993]. En revanche, lorsqu'il existe un lien entre le cœur de croissance et la qualité de l'environnement, Bovenberg et Smulders [1996] ainsi que Musu [1994] précisent les conditions nécessaires assurant la durabilité de la croissance économique. Dans ces deux derniers modèles, un accroissement continu des « *connaissances en technologies propres* », parfaits substituts des flux de pollution dans la fonction de production, suffit à la préservation de la qualité de l'environnement le long du sentier de croissance. Enfin, dans une troisième et dernière catégorie de modèles de croissance endogène avec pollution, Verdier [1993] reprend la structure proposée par Grossman et Helpman [1991] avec différenciation des biens de consommation. La durabilité de la croissance est toujours vérifiée, puisque dans ces modèles la croissance est qualitative et non physique.

Deux caractéristiques principales sont communes à l'ensemble de cette littérature : la nécessité de poser des conditions *ad-hoc* pour s'assurer de la préservation de la qualité de l'environnement au cours du développement économique et un comportement des ménages quelque peu « *passif* », au sens où la qualité de l'environnement intervient uniquement comme une externalité négative dans la fonction d'utilité des ménages.

Le modèle développé dans la suite de ce papier n'échappe pas à la première critique mais répond en partie à la seconde. La croissance économique repose sur les innovations de biens de consommation et le goût pour la diversité des consommateurs. Le modèle a une structure semblable à celle des modèles d'innovation de Grossman et Helpman [1991], mais nous distinguons, à la différence de VERDIER [1993], deux types de biens de consommation : les biens « *verts* » (non polluants) et les biens « *standards* » (polluants). La durabilité à long terme de la croissance (qualitative) est donc inscrite dans la structure même du modèle. Cette dichotomie sur les propriétés environnementales des produits est présente dans le modèle de HUNG, CHANG et BLACKBURN [1993], mais porte sur les biens de production et non sur les biens de consommation. Dans notre modèle, les ménages guident la qualité du sentier de croissance équilibré *via* leur paramètre de préférence pour les produits non polluants, qui détermine la demande relative entre les deux types de biens.

Il reprend l'influence des décisions des consommateurs sur la croissance économique et sur la qualité de l'environnement. Mais il introduit une nouveauté, en examinant inversement l'effet de la dégradation de l'environnement sur les préférences des consommateurs et donc sur leur comportement. Les ménages, constatant une dégradation de la qualité de l'environnement, accroissent leur préférence pour les biens plus respectueux de la qualité de l'environnement. Or, chaque agent rationnel sait que s'il est seul à modifier sa consommation cela n'aura aucun effet sur le stock de pollution macroéconomique. Le cadre formel de cet article pose donc évidemment le problème des fondements microéconomiques du comportement décrit par l'enquête du BIPE [1992]. Notre propos n'est pas de donner des éléments de réponse formelle à ce problème, on peut cependant renvoyer à la problématique initiée par LAFFONT [1975] reposant sur le concept de comportement moral individuel fondé sur « *l'impératif catégorique* » de KANT. Chaque agent suppose, selon la morale kantienne, que les autres agents agiront comme lui. Nous postulons cette moralité individuelle en endogénéisant la préférence pour les biens non polluants, qui devient fonction croissante du stock de pollution.

La première partie est consacrée à une présentation du modèle et établit quelques résultats préliminaires au niveau du comportement des agents. La deuxième partie présente les équilibres concurrentiels lorsque le paramètre de préférence pour les biens verts est exogène : « *l'équilibre mixte* » dans lequel les deux secteurs innovent, « *l'équilibre standard* » où seul le secteur standard innove, et par symétrie « *l'équilibre vert* » où la recherche est active uniquement dans le secteur vert. Enfin, dans la dernière partie, le paramètre de préférence pour les produits verts est endogénéisé. On présente, alors, les équilibres du système dynamique qui résulte de cette endogénéisation.

2 Le modèle

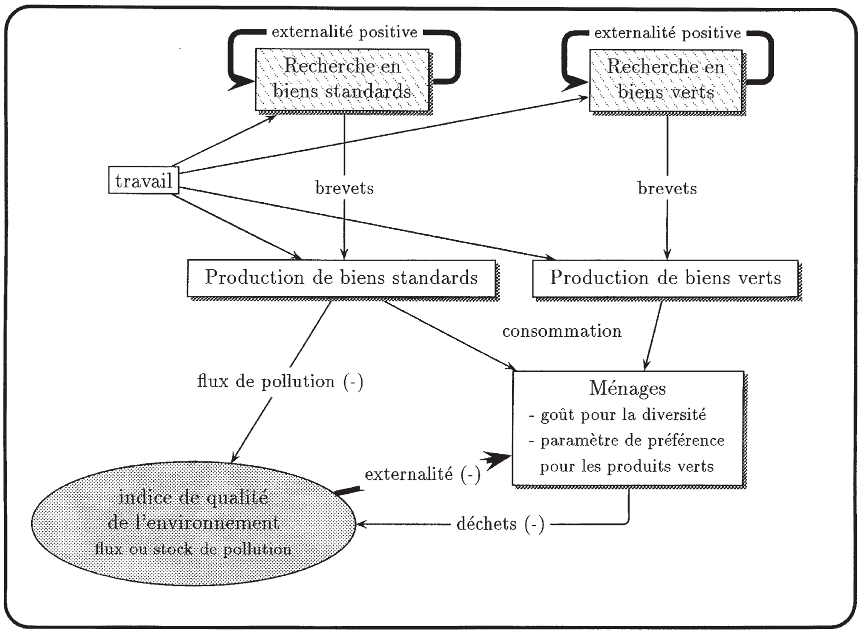
Nous considérons une économie dans laquelle deux types de biens sont produits et consommés. Des « *biens verts* » dont la production et la consommation ne sont à l'origine d'aucune forme de pollution et tous les autres biens, que nous dénommerons par la suite « *biens standards* », qui, par opposition aux biens verts, sont sources de pollution.

Le consommateur représentatif est doté d'une fonction d'utilité présentant un goût pour la diversité sur chacun des deux types de biens, et un paramètre de préférence pour les biens verts. Les biens étant différenciés horizontalement, les consommateurs continuent à demander toutes les variétés de biens existantes lorsque apparaissent de nouvelles variétés. Il n'existe pas de phénomène d'éviction des anciens biens par les nouveaux biens. De plus, un indicateur de qualité de l'environnement, le stock de pollution, intervient comme une externalité négative dans la fonction d'utilité. Concernant la production, deux catégories d'activités sont distinguées : une activité de recherche permettant la découverte de nouvelles variétés de biens de consommation et une activité de production de ces biens.

La figure 1 propose une représentation synthétique des flux de biens, de brevets, et des externalités (flèches en gras).

De manière usuelle dans ce genre de modèle, nous supposons qu'il n'existe pas de limitation au développement des innovations. La nature de la découverte est double : elle apparaît comme un bien exclusif au sens où elle donne lieu à un brevet qui confère une situation de monopole au producteur potentiel de ce nouveau bien, mais elle conserve également des propriétés de bien non-rival, puisqu'elle augmente le « *stock de connaissances* » accessible à tous.

FIGURE 1
Présentation du modèle



2.1 Le comportement du consommateur

Le ménage représentatif a une durée de vie infinie et maximise sa fonction d'utilité sur un horizon infini. La fonction d'utilité intertemporelle prend la forme suivante :

(1) $$U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \, (\log C_t - \epsilon S_t) \, dt$$

avec ρ le taux de préférence pour le présent, C_t un indice de la consommation à la période t et S_t le stock de pollution qui intervient sous la forme d'une externalité négative. Nous limitant à l'équilibre concurrentiel, la prise en compte de cette externalité négative de la pollution dans l'utilité n'intervient pas dans la résolution du modèle.

L'indice de la consommation instantanée est représenté par une CES – COBB-DOUGLAS emboîtée :

$$(2) \qquad C_t = \left[\int_0^{n_s} c_s(i)^{\alpha_s} di\right]^{\frac{1-\theta}{\alpha_s}} \left[\int_0^{n_v} c_v(j)^{\alpha_v} dj\right]^{\frac{\theta}{\alpha_v}}$$

avec $c_s(i)$ la consommation de la $i^{\text{ème}}$ variété de biens standards, $c_v(j)$ la consommation de la $j^{\text{ème}}$ variété de biens verts, n_s le nombre de variétés de biens standards disponibles à la période t et n_v le nombre de variétés de biens verts disponibles à la même période.

Cette forme particulière de la fonction d'utilité impose une part constante $(1-\theta)$ de la consommation de biens standards dans la consommation totale et par symétrie, une part constante θ de la consommation de biens verts dans la consommation totale. De même, l'élasticité de substitution entre deux variétés de biens ($l = s, v$) est constante et égale à $\dfrac{1}{1-\alpha_l}$.

Cet indice de consommation s'inspire de la formulation de DIXIT-STIGLITZ à deux catégories de biens. Pour la résolution du modèle, il y a parfaite symétrie des consommations en quantité à l'intérieur de chacune des catégories de biens. Une telle fonction met en évidence un goût des ménages pour la diversité dans chacune des catégories de biens si l'élasticité de C par rapport à n_l est supérieure à l'élasticité par rapport à c_l avec $l = s, v$, ce qui impose les conditions nécessaires $\alpha_l < 1$. Par ailleurs, si $\theta = 0$ ou 1, la fonction C se comporte comme une fonction *à la DIXIT-STIGLITZ* avec une seule catégorie de biens. Le paramètre θ peut donc prendre n'importe quelle valeur sur l'intervalle $[0,1]$. θ apparaît comme un paramètre individuel. Une extension du modèle pourrait prendre en compte une distribution de θ au sein de la population.

Le programme intertemporel du ménage est résolu, de manière conventionnelle, en deux étapes. Dans un premier temps, on maximise la fonction d'utilité instantanée sous la contrainte de revenu instantanée :

$$(3) \begin{cases} \max\limits_{c_s, c_v} \log\left[\left[\int_0^{n_s} c_s(i)^{\alpha_s} di\right]^{\frac{1-\theta}{\alpha_s}} \left[\int_0^{n_v} c_v(j)^{\alpha_v} dj\right]^{\frac{\theta}{\alpha_v}}\right] - \epsilon\, S_t \\ \text{sous la contrainte } E = \int_0^{n_s} p_s(i) c_s(i) di + \int_0^{n_v} p_v(j) c_v(j) dj \end{cases}$$

Les fonctions de consommation instantanée pour chaque variété de bien sont :

$$(4) \quad c_l(i) = \frac{\theta_l E (p_l(i))^{-\frac{1}{1-\alpha_l}}}{(p_l)^{1-\frac{1}{1-\alpha_l}}}, \text{ avec } (P_l)^{1-\frac{1}{1-\alpha_l}} = \int_0^{n_l} (p_l(i))^{1-\frac{1}{1-\alpha_l}} di$$

où $\quad l = s, v,\ \theta_s = 1-\theta$ et $\theta_v = \theta$.

Dans un second temps, la maximisation de la fonction d'utilité intertemporelle sous la contrainte de budget intertemporelle implique :

$$\frac{\dot{E}}{E} = r - \rho \tag{5}$$

2.2 Le comportement des entrepreneurs

Les entrepreneurs ont un double rôle dans l'économie considérée. Ils effectuent une activité de recherche dans le but de faire apparaître de nouvelles variétés de biens de consommation, ce qui leur permet ensuite d'engager la production de ces nouveaux produits. Une hypothèse forte du modèle réside dans l'existence d'un système de brevet qui autorise un seul entrepreneur, détenteur du brevet correspondant, à produire une nouvelle variété. Ainsi, chaque variété de bien est produite par une seule entreprise qui se trouve en situation de monopole pour une période infinie.

2.2.1 L'activité de production des biens

La technologie de production est commune à chacune des firmes et est caractérisée par des rendements d'échelle constants. Seul le facteur travail intervient dans le processus de production, avec un rapport production sur travail égal à a_s dans le secteur standard et a_v dans le secteur vert. Pour un taux de rémunération du travail donné, identique dans les deux secteurs, le coût variable unitaire de production dans le secteur standard est donc égal à $w.a_l$ dans le secteur l.

Chaque entreprise étant en situation de monopole, le programme du producteur va consister à maximiser son profit en prenant comme données les fonctions de demande ($c_s(i)$ et $c_v(j)$) émanant des ménages et le niveau total des dépenses E :

$$\pi = \max_p (p - aw)x(p) \tag{6}$$

avec x la quantité de bien vendue.

La résolution de ce programme donne :

$$\begin{cases} p_l(i) = & \dfrac{wa_l}{\alpha_l} \\ P_l = & (n_l)^{-\frac{1-\alpha_l}{\alpha_l}} \dfrac{w\, a_l}{\alpha_l} \\ x_l(i) = & \dfrac{\theta_l}{n_l} \dfrac{\alpha_l}{w\, a_l} E \\ \pi_l(i) = & \dfrac{\theta_l}{n_l}(1-\alpha_l)E \end{cases} \quad \text{avec } l = s, v$$

Nous prenons dorénavant le taux de rémunération du travail comme numéraire, ainsi $w(t) = 1 \forall t$.

En substituant les quantités produites à l'équilibre dans l'expression (2), et en dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient le taux de croissance de l'indice de consommation :

$$(7) \qquad g_C = \frac{\dot{C}}{C} = (1-\theta)\frac{(1-\alpha_s)}{\alpha_s}\gamma_s + \theta\frac{(1-\alpha_v)}{\alpha_v}\gamma_v + \frac{\dot{E}}{E}$$

avec $\gamma_l = \frac{\dot{n}_l}{n_l}$, le taux de croissance du nombre de variétés de biens disponibles de la catégorie *l*.

2.2.2 L'activité de recherche

Avant de s'engager dans la production d'une nouvelle variété de biens, un effort de recherche doit être entrepris. Cet effort est réalisé suivant une technologie de découverte à rendements dynamiques croissants, de la forme $\dot{n}_l = \frac{L_l n_l}{b_l}$, avec L_l la quantité de facteur travail consacrée à la recherche de biens *l*.

Ainsi, pour découvrir une nouvelle variété de bien, il est nécessaire d'allouer une quantité de travail $\frac{b_l}{n_l}$ à l'effort de recherche. Plus le nombre de variétés disponibles existantes, n_l, est élevé, moins il faut de travail pour découvrir une nouvelle variété. La variable *n* peut donc être assimilée à un « *stock de connaissances* » disponible pour la recherche du secteur *l*. Même si cette découverte donne naissance à un bien exclusif dans l'activité de production, elle conserve une propriété de bien non-rival dans l'activité de recherche du secteur *l*, puisqu'elle peut être utilisée par tous les autres chercheurs pour leurs propres travaux. L'étanchéité entre les secteurs de recherche en biens standards et en biens verts fait l'hypothèse implicite que ces recherches sont radicalement différentes, et que les découvertes pour une catégorie de biens ne bénéficient pas à l'autre.

L'effort de recherche ayant un coût unitaire $\frac{b_l}{n_l}$ pour $w = 1$, la règle d'arbitrage pour décider de réaliser ou non une innovation peut être formulée ainsi : un entrepreneur se lancera dans un programme de recherche en biens *l* si la vente de son brevet couvre au moins le coût de la recherche. L'hypothèse de libre entrée assure l'égalité entre le coût unitaire de recherche (égal à $\frac{b_l}{n_l}$) et $v_l(t)$ la valeur actualisée des flux de profits futurs égale à

$$\int_{\tau=t}^{\infty} e^{-R(\tau,t)}\pi_l(\tau)d\tau \text{ avec } R(\tau,t) = \int_t^{\tau} r(s)ds.$$

La règle d'arbitrage implique :

$$(8) \qquad \frac{\pi_l}{v_l} + \frac{\dot{v}_l}{v_l} = r$$

que l'on peut réécrire :

$$(9) \qquad \begin{cases} \dot{n}_l > 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\pi_l + \dot{c}_l}{c_l} = \dot{R} & \text{si} \quad v_l = c_l \\ \dot{n}_l = 0 & \text{si} \quad v_l < c_l \end{cases}$$

avec c_l, le coût d'une découverte dans le secteur l. En remplaçant c_l par sa valeur et en reprenant l'équation (5), si la recherche est active dans le secteur l, on a :

$$(10) \qquad \frac{\dot{E}}{E} = (1-\alpha_l)\frac{\theta_l E}{b_l} - \rho - \gamma_l$$

2.3 Le marché du travail

Nous bouclons le modèle par l'équilibre sur le marché du travail. L'offre totale de travail, L, est constante, il n'y a donc pas de croissance de la population. La demande de travail provenant de l'activité de recherche dans le secteur l est égale à $b_l \frac{\dot{n}_l}{n_l}$; la demande de travail émanant de l'activité de production du secteur l est, quant à elle, égale à $\theta_l E \alpha_l$.

L'équilibre sur le marché du travail s'écrit donc :

$$(11) \qquad L = \alpha_s(1-\theta)E + \alpha_v \theta E + b_s \gamma_s + b_v \gamma_v$$

2.4 L'intégration de la dimension environnementale

Seul le phénomène de pollution est pris en compte dans le modèle. La pollution résulte d'émissions de polluants dans l'activité de production des biens standards et du rejet de déchets provenant de la consommation de ces mêmes biens. À l'inverse, ce qui distingue les biens verts des autres biens, c'est leur propriété de n'être à l'origine d'aucune émission et déchet.

On suppose, pour simplifier, que l'émission de polluants qui résulte de la production des biens standards peut être calculée en proportion constante du niveau de production. Les émissions en volume sont ainsi égales à $h \int_0^{n_s} x_s(i)di$. De même, la quantité de déchets en volume s'écrit comme une proportion fixe du niveau de consommation des biens standards, la somme des déchets en volume est égale à $m \int_0^{n_s} c_s(i)di$. A l'équilibre, $\int_0^{n_s} x_s(i)di$ est égal à $\int_0^{n_s} c_s(i)di$, on peut donc écrire l'ensemble du flux de pollution, F, en volume :

$$(12) \qquad F = \beta \int_0^{n_s} (c_s(i))di = \beta \int_0^{n_s} (x_s(i))di = \beta(1-\theta)E\frac{\alpha_s}{a_s}$$

avec $\beta = h + m$.

La prise en compte du phénomène de pollution par les agents ne se réduit pas uniquement à l'indicateur de flux de pollution. En effet, pour de nombreux problèmes environnementaux tels que la couche d'ozone ou les décharges, l'indicateur approprié est un stock de polluants, même si pour d'autres problèmes, tel que le bruit, le flux reste la bonne mesure. Nous construisons donc un stock de pollution en prenant comme règle d'accumulation, $\dot{S} = F - \delta S$ avec $0 < \delta \leqslant 1$, où δ représente le taux d'assimilation du milieu naturel [1].

1. $\delta = 1$ correspond à une assimilation naturelle complète et totale. Si l'on considère, par exemple, qu'il n'y a pas de mémoire du bruit passé, les nuisances sonores peuvent être considérées comme une pollution purement instantanée qui ne s'accumule pas et se dissipe aussitôt.

Ce qui implique, en reprenant (12) :

$$S(t) = \frac{\beta}{\delta}(1-\theta)\frac{\alpha_s}{a_s}E + \left(S(0) - \frac{\beta}{\delta}(1-\theta)\frac{\alpha_s}{a_s}E\right)e^{-\delta t} \tag{13}$$

et $\lim_{t\to\infty} S(t) = S^\star = \frac{\beta}{\delta}(1-\theta)\frac{\alpha_s}{a_s}E$

3 Régimes de croissance concurrentiels

Les équations différentielles caractérisant l'activité de recherche dans les deux secteurs et la condition d'équilibre sur le marché du travail décrivent l'évolution dynamique de l'économie. La spécificité du modèle est alors de faire apparaître cinq régimes de croissance en fonction de la valeur du paramètre θ de préférence des consommateurs pour les biens verts.

Ainsi, si θ est inférieur ou égal à $\theta_{\min} = \frac{\rho b_v}{(1-\alpha_v)\,[L+\rho(b_s+b_v)]}$, les consommateurs ont une préférence tellement faible pour les produits verts qu'il n'est plus rentable pour un entrepreneur d'effectuer des recherches visant à faire apparaître une nouvelle variété de bien vert. À l'inverse, la préférence pour les biens standards va accroître la rentabilité dans l'activité de recherche de ce secteur. On a donc $\dot{n}_s > 0$ et $\dot{n}_v = 0$, les ménages continuent à consommer les variétés existantes de biens verts, le secteur de production de ces biens ne disparaît pas. L'économie est dans un « *régime de croissance standard* ». Dans le cas extrême, $\theta = 0$, la production des anciennes variétés de biens verts est nulle ; on parlera alors de « *régime de croissance standard dégénéré* ».

Si θ est supérieur ou égal à $\theta_{\max} = 1 - \frac{\rho b_s}{(1-\alpha_s)\,[L+\rho(b_s+b_v)]}$, la préférence des consommateurs pour les produits verts est très élevée, entraînant alors le phénomène inverse du cas précédent. L'activité de recherche dans les biens standards s'arrête tandis que celle du secteur vert se développe. On a $\dot{n}_v > 0$ et $\dot{n}_s = 0$, l'économie se situe dans un « *régime de croissance vert* ». Si $\theta = 1$, les ménages ne demanderont plus de biens standards, même anciens, la dynamique de l'économie sera qualifiée de « *régime de croissance vert dégénéré* ».

Pour θ strictement supérieur à $\theta_{\min}$ et strictement inférieur à $\theta_{\max}$, les deux secteurs de recherche continuent à innover dans les deux catégories de biens de consommation. Les innovations dans chaque secteur sont plus ou moins soutenues suivant que la préférence des agents pour les produits verts se rapproche de $\theta_{\min}$ ou de $\theta_{\max}$. Lorsque l'économie est dans un tel cas de figure, elle est en « *régime de croissance mixte* ». Dans le modèle de HUNG, CHANG et BLACKBURN [1993] un sentier de croissance équilibré le long duquel les deux secteurs innovent n'est réalisable que pour des valeurs particulières des paramètres. En leur absence, le sentier de croissance bascule obligatoirement dans une situation où le secteur le plus compétitif est seul à innover. La croissance mixte dans leur modèle évolue donc sur le « *fil du rasoir* ». L'introduction d'une préférence des ménages pour les biens verts dans la fonction d'utilité transforme ce fil du rasoir en une plage de stabilité beaucoup plus grande dans notre modèle.

3.1 La solution concurrentielle en régime de croissance standard

Lorsque les ménages ont une préférence pour les biens verts faible, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_{\text{min}}$, seule l'activité de recherche dans le secteur standard reste active.

La dynamique de l'économie s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{E}}{E} = (1-\alpha_s)\dfrac{(1-\theta)E}{b_s} - \rho - \gamma_s \\ L = \alpha_s(1-\theta)E + \alpha_v\theta E + b_s\gamma_s \end{cases}$$

En remplaçant γ_s par sa valeur tirée de la contrainte de ressource, ce système se résume à une équation différentielle déterminant la trajectoire des dépenses de consommation :

$$\dot{E} = E\left(\frac{(1-(1-\alpha_v)\theta)E - L}{b_s} - \rho\right)$$

Cette équation différentielle admet deux valeurs d'équilibre. La première est tout simplement égale à $E_1^* = 0$, mais elle correspond à un niveau de consommation nul, qui n'est pas une solution optimale. La deuxième vaut $E_s^* = \dfrac{L+\rho b_s}{1-(1-\alpha_v)\theta}$. La dérivée première de cette équation différentielle, évaluée à l'équilibre E_s^*, est égale à $\dfrac{L}{b_s} + \rho > 0$. Cet équilibre est donc instable. Cette propriété n'est pas sans conséquence sur la dynamique transitionnelle de l'économie. En reprenant la démonstration de GROSSMAN et HELPMAN [1991], les trajectoires divergentes, qui correspondent à un choix initial pour les consommateurs de E_0 supérieur à E_s^* (trajectoires explosives) ou encore E_0 inférieur à E_s^* (E tend vers zéro), sont incompatibles avec l'hypothèse de prévisions parfaites des agents. Par conséquent, le niveau de dépenses de consommation est fixé immédiatement à sa valeur d'équilibre E_2^*. Une des caractéristiques de ce type de modèle est l'absence de dynamique transitionnelle [2], l'économie se situant instantanément à son niveau d'équilibre. Ce raisonnement se répétera pour les équilibres du régime vert et mixte.

2. Le choix d'une fonction d'utilité CES-CES ne modifierait pas le résultat en ce qui concerne le sentier de croissance de long terme, mais introduirait une dynamique transitionnelle (CERISIER [1998]).

L'équilibre stationnaire est défini par :

$$\begin{cases} E_S^\star = \dfrac{L+\rho b_S}{1-(1-\alpha_v)\theta} \\ \gamma_S^\star = \dfrac{(1-\alpha_S)(1-\theta)}{1-(1-\alpha_v)\theta}\dfrac{L}{b_S} - \dfrac{\alpha_S(1-\theta)+\alpha_v\theta}{1-(1-\alpha_v)\theta}\rho \end{cases}$$

Plus la préférence des ménages pour les biens verts s'accroît, plus le taux d'innovation de biens standards, $\gamma_S^\star$, et plus le taux de croissance de l'utilité, $g_C = (1-\theta)\dfrac{(1-\alpha_S)}{\alpha_S}\gamma_s^*$, diminuent.

L'indicateur de détérioration de la qualité de l'environnement s'écrit à cet équilibre :

$$S_S^\star = \frac{\beta}{\delta}(1-\theta)\frac{\alpha_S}{a_S}\frac{L+\rho b_S}{1-(1-\alpha_v)\theta}$$

Le stock de pollution est décroissant en θ. Dans ce régime de croissance concurrentiel, un dilemme entre croissance et environnement subsiste, au sens où un accroissement de la préférence des ménages pour les biens verts (jusqu'à la limite $\theta \leqslant \theta_{\min}$) augmente la qualité de l'environnement, mais a également pour effet de réduire le taux de croissance.

3.2 La solution concurrentielle en régime de croissance vert

Si la préférence des ménages pour les biens verts est très élevée ($\theta_{\max} \leqslant \theta \leqslant 1$), la recherche dans le secteur des biens standards n'est plus rentable et seul le secteur vert voit la variété de ses biens croître.

La dynamique du régime vert s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{E}}{E} = (1-\alpha_v)\dfrac{\theta E}{b_v} - \rho - \gamma_v \\ L = \alpha_S(1-\theta)E + \alpha_v\theta E + b_v\gamma_v \end{cases}$$

Ce qui implique :

$$\dot{E} = E\left(\frac{(\theta(1-\alpha_S)+\alpha_S)E - L}{b_v} - \rho\right)$$

L'équilibre stationnaire de ce régime est :

$$\begin{cases} E_v^\star = \dfrac{L+\rho b_v}{1-(1-\alpha_S)(1-\theta)} \\ \gamma_v^\star = \dfrac{(1-\alpha_v)\theta}{1-(1-\alpha_S)(1-\theta)}\dfrac{L}{b_v} - \dfrac{\alpha_S(1-\theta)+\alpha_v\theta}{1-(1-\alpha_S)(1-\theta)}\rho \end{cases}$$

À l'inverse du régime précédent, le taux de croissance d'équilibre $g_C = \theta\dfrac{(1-\alpha_v)}{\alpha_v}\gamma_v^\star$ et le taux d'innovation des biens verts γ_v^* sont des fonctions croissantes de la préférence des agents pour les biens verts.

Quant au stock de pollution, il s'écrit à l'équilibre vert :

$$S_v^\star = \frac{\beta}{\delta}(1-\theta)\frac{\alpha_s}{a_s}\frac{L+\rho b_v}{1-(1-\alpha_s)(1-\theta)}$$

Par conséquent, dans le cadre d'un régime de croissance équilibré vert, il n'existe aucun dilemme entre croissance et environnement. Une préférence plus élevée des ménages pour les biens verts aura pour effet d'accroître le taux de croissance de l'économie et de diminuer l'indicateur de détérioration de l'environnement.

3.3 La solution concurrentielle en régime de croissance mixte

Un troisième type de régime dynamique peut intervenir dans l'économie, dès lors que θ n'est ni trop élevé ni trop faible, au sens où $\theta_{\min} < \theta < \theta_{\max}$, de telle manière que les deux secteurs de recherche restent actifs.

La dynamique de l'économie dans un régime mixte est caractérisée par le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{E}}{E} = (1-\alpha_s)\dfrac{(1-\theta)E}{b_s} - \rho - \gamma_s \\ \dfrac{\dot{E}}{E} = (1-\alpha_v)\dfrac{\theta E}{b_v} - \rho - \gamma_v \\ L = \alpha_s(1-\theta)E + \alpha_v\theta E + b_s\gamma_s + b_v\gamma_v \end{cases}$$

Ce qui implique :

$$\dot{E} = E\left(\frac{E-L}{b_s+b_v} - \rho\right)$$

L'équilibre stationnaire mixte est alors défini par :

$$\begin{cases} E_m^\star = L + \rho(b_s+b_v) \\ \gamma_{sm}^\star = \dfrac{(1-\alpha_s)(1-\theta)}{b_s}(L+\rho(b_s+b_v)) - \rho \\ \gamma_{vm}^\star = \dfrac{(1-\alpha_v)\theta}{b_v}(L+\rho(b_s+b_v)) - \rho \end{cases}$$

Le taux d'innovation en biens standards, $\gamma_{sm}^\star$, est une fonction décroissante de la préférence des consommateurs. Le taux d'innovation en produits verts, $\gamma_{vm}^\star$, est croissant en θ. L'égalité entre ces deux taux de croissance n'est pas imposée *a priori* ; seul un cas de figure bien particulier sur les paramètres tel que $\dfrac{(1-\alpha_s)(1-\theta)}{b_s} = \dfrac{(1-\alpha_v)\theta}{b_v}$ vérifierait une telle possibilité. En dehors de ce cas, la proportion des produits verts ne reste pas constante.

Lorsque les deux secteurs innovent,

$$g_C = (1-\theta)\frac{(1-\alpha_s)}{\alpha_s}\gamma^\star_{sm} + \theta\frac{(1-\alpha_v)}{\alpha_v}\gamma^\star_{vm}.$$

Un accroissement de θ entraîne une évolution positive de g_C si, et seulement si :

$$\theta > \theta_m = \frac{\dfrac{\rho}{2\left[L+\rho\left(b_s+b_v\right)\right]}\left(\dfrac{1}{\alpha_v}-\dfrac{1}{\alpha_s}\right)+\dfrac{(1-\alpha_s)^2}{\alpha_s b_s}}{\dfrac{(1-\alpha_s)^2}{\alpha_s b_s}+\dfrac{(1-\alpha_v)^2}{\alpha_v b_v}},$$

car alors la diminution d'utilité due à la moindre innovation en produits standards est compensée par l'augmentation d'utilité imputable à la plus grande innovation en produits propres.

Dans ce régime mixte, l'indicateur de détérioration de la qualité de l'environnement est une fonction décroissante de θ :

$$S^\star_m = \frac{\beta}{\delta}(1-\theta)\frac{\alpha_s}{a_s}\left[L+\rho(b_s+b_v)\right]$$

Suivant la valeur de θ relativement à θ_m, il y a ou non un dilemme croissance-environnement.

En conclusion de cette section, il ressort que le paramètre de préférence des ménages pour les biens verts joue un rôle crucial dans la détermination du sentier de croissance. Quel que soit le régime dans lequel se situe l'économie, tout accroissement de θ provoque une amélioration de la qualité de l'environnement. Il n'en est pas de même pour les autres variables. Dans un régime de croissance vert, les situations « *win-win* » sont toujours vérifiées (g_C et $\gamma^\star_v$ sont croissants en θ, alors que S^*_v est décroissant en θ). À l'inverse dans un régime de croissance standard, le dilemme est permanent puisque toute amélioration de la qualité de l'environnement *via* l'augmentation de θ, passe par une diminution du taux de croissance des variétés de biens et de l'utilité instantanée C. Les deux cas coexistent dans un régime de croissance mixte.

4 Quelques enseignements du modèle lorsque la préférence pour les biens verts est endogène

L'activité économique, du fait de ses émissions et rejets divers, dégrade la qualité de l'environnement ; en retour la pollution intervient comme une externalité négative dans le bien-être des agents. Mais, l'utilité, comme le stock de pollution, sont des variables qui constituent l'épilogue du modèle. Cette interaction entre la sphère économique et l'environnement n'a aucune influence sur le comportement donc les choix des agents. À ce niveau de l'analyse le consommateur apparaît donc être tout aussi passif que dans les modèles présentés en introduction. Nous retenons un comportement moral individuel kantien en postulant que le paramètre de préférence pour les biens verts est fonction de la qualité de l'environnement. Suite à une augmentation du stock de pollution, les agents modifient leur choix de consommation en augmentant la part des biens verts dans leur panier de consommation.

Sous cette nouvelle hypothèse, il nous faut introduire dans le modèle une nouvelle relation entre θ et S, qui peut s'écrire sous une forme simplifiée :

(14) $$\theta_t = \min\{k\ S_t, 1\}$$

avec :

• k un paramètre représentant le degré de sensibilité des ménages à l'état de l'environnement (on suppose $k > 0$) [3].

• S, le stock de pollution, représente l'indicateur de détérioration de la qualité de l'environnement. Sa dimension d'indicateur macroéconomique légitime sa nature d'externalité pour les ménages.

Cette relation suppose que les ménages déterminent leur préférence pour les biens verts en fonction de leur sensibilité écologique mais également selon les informations (supposées parfaites) fournies par l'État sur la qualité de l'environnement.

Lorsque θ est exogène, l'économie se situe immédiatement à son état d'équilibre tandis que le stock de pollution, variable prédéterminée, s'ajuste progressivement selon son équation d'accumulation. Son évolution n'a aucun effet sur le reste des variables économiques.

Mais θ est dorénavant déterminé par le niveau du stock de pollution qui intervient donc maintenant directement dans le cœur du modèle. L'économie est alors caractérisée par une dynamique transitionnelle provenant de l'équation d'accumulation des polluants. La forme réduite de la dynamique des dépenses des ménages, dans laquelle θ est remplacé par sa valeur associée à l'équation d'évolution du stock de pollution, détermine la dynamique de l'économie sous la forme d'un système dynamique à régimes (phases) multiples. Le domaine de définition de chaque régime de croissance dépend de la variable d'état S et du paramètre de sensibilité écologique k.

Il s'agit plus précisément d'un système dynamique à régimes multiples non linéaires et continus (y compris en ces seuils), avec D_{vd} la dynamique du régime de croissance vert dégénéré, D_v celle du régime vert, D_m celle du régime mixte, D_s celle du régime standard et D_{sd} celle du régime standard dégénéré :

3. Lorsque les ménages sont indifférent à la qualité de l'environnement ($k = 0$), le modèle est très proche de celui présenté par VERDIER [1993].

$$\left\{\begin{array}{lll}
\left\{\begin{array}{l}\dot{E} = E\left(\dfrac{E-L}{b_v} - \rho\right)\\ \dot{S} = -\delta S\end{array}\right. & \text{si } \dfrac{1}{k} \leqslant S_t & (D_{vd})\\[2em]
\left\{\begin{array}{l}\dot{E} = E\left(\dfrac{E\left((1-\alpha_s)kS+\alpha_s\right)-L}{b_v} - \rho\right)\\ \dot{S} = -\delta S + \beta(1-kS)E\dfrac{\alpha_s}{a_s}\end{array}\right. & \text{si } \dfrac{\theta_{\max}}{k} \leqslant S_t < \dfrac{1}{k} & (D_v)\\[2em]
\left\{\begin{array}{l}\dot{E} = E\left(\dfrac{E-L}{b_s+b_v} - \rho\right)\\ \dot{S} = -\delta S + \beta(1-kS)E\dfrac{\alpha_s}{a_s}\end{array}\right. & \text{si } \dfrac{\theta_{\min}}{k} < S_t < \dfrac{\theta_{\max}}{k} & (D_m)\\[2em]
\left\{\begin{array}{l}\dot{E} = E\left(\dfrac{E\left(1-(1-\alpha_v)kS\right)-L}{b_s} - \rho\right)\\ \dot{S} = -\delta S + \beta(1-kS)E\dfrac{\alpha_s}{a_s}\end{array}\right. & \text{si } 0 < S_t \leqslant \dfrac{\theta_{\min}}{k} & (D_s)\\[2em]
\left\{\begin{array}{l}\dot{E} = E\left(\dfrac{E-L}{b_s} - \rho\right)\\ \dot{S} = -\delta S + \beta E\dfrac{\alpha_s}{a_s}\end{array}\right. & \text{si } kS_t = 0 & (D_{sd})
\end{array}\right.$$

Pour analyser la dynamique globale de l'économie, il est nécessaire, au préalable, de caractériser les dynamiques propres à chacun des régimes de croissance. Les valeurs analytiques des équilibres ainsi que les différentes démonstrations relatives à leur stabilité ou à leur condition d'apparition sont développées en annexe. Les différents attracteurs (équilibres) du système dynamique global, en fonction du niveau de sensibilité des ménages à la qualité de l'environnement et quelle que soit la valeur initiale du stock de pollution, sont présentés dans le tableau 1.

TABLEAU 1
Attracteurs du modèle

Niveau de k	**Régime d'équilibre**	**E^* et S^* d'équilibre**
$k \in \left]0, k_{\min}\right]$	Standard	$(E^{\star}_{s1}, S^{\star}_{s1})$
$k \in \left]k_{\min}, k_{\max}\right[$	Mixte	$(E^{\star}_{m}, S^{\star}_{m})$
$k \in \left[k_{\max}, +\infty\right[$	Vert	$(E^{\star}_{v2}, S^{\star}_{v2})$

Pour illustrer la dynamique de l'économie lorsque le paramètre de préférence pour les biens verts est endogène, nous présentons les diagrammes des phases (figures 2 et 3) qui se distinguent uniquement par la valeur de la sensi-

FIGURE 2

Diagramme des phases pour $k = k_1$

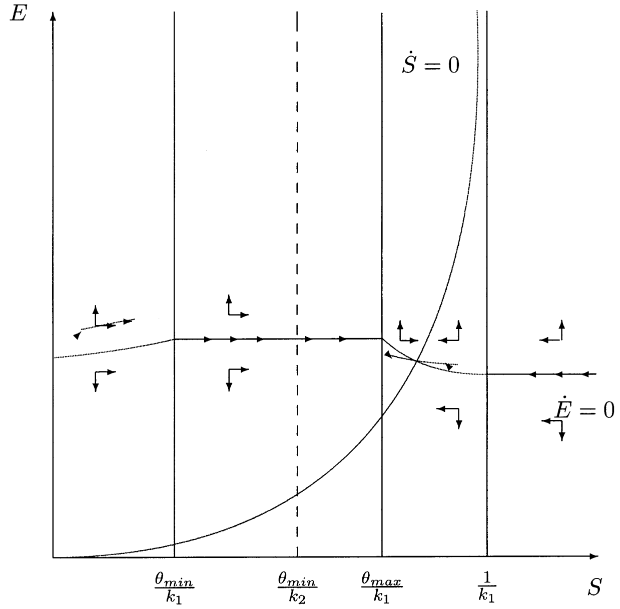
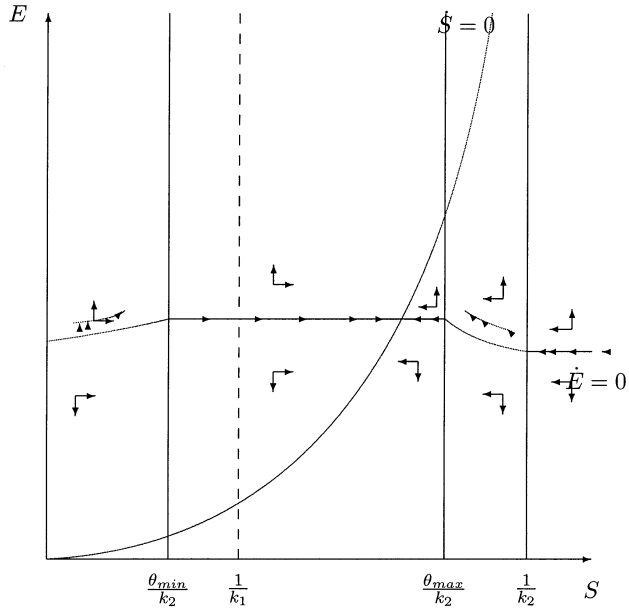


FIGURE 3

Diagramme des phases pour $k = k_2$



bilité écologique (k) des consommateurs. Nous retenons deux valeurs élevées de cette sensibilité, l'une k_1 (avec $k_1 > k_{\max}$) situe le sentier de croissance régulière de long terme dans le régime vert ; l'autre k_2 (avec $k_{\min} < k_2 < k_{\max}$) conduit l'économie vers un sentier de croissance de long terme mixte.

Avant d'analyser les trajectoires transitionnelles, il faut noter que les deux diagrammes des phases ne peuvent pas être directement superposés, l'échelle de l'axe des abscisses dépend de la valeur de k. Pour visualiser cette différence, nous avons représenté le seuil $\frac{1}{k_1}$ dans le diagramme des phases relatif à k_2 (figure 3) et le seuil $\frac{\theta_{\min}}{k_2}$ dans celui relatif à k_1(figure 2).

Quel que soit l'état initial de l'indice de qualité de l'environnement, S_0, l'équilibre stable atteint reste toujours le même pour une valeur de k donnée. En revanche, la trajectoire qui permet d'atteindre l'attracteur est différente puisque le régime initial est fonction de S_0 ($\theta_0 = kS_0$).

Pour un stock de pollution initialement très faible et tel que $0 < S_0 < \frac{\theta_{\min}}{k}$, la dynamique est la suivante : l'économie se situe initialement sur la trajectoire selle du régime de croissance standard, et seul le secteur standard innove. Le long de cette trajectoire selle, le stock de pollution, comme les dépenses, croissent, mais le taux de croissance décroît. Avant de parvenir à l'équilibre de ce régime, le stock de pollution atteint un niveau tel que la préférence des ménages pour les biens verts est égal à $\theta_{\min}$, il devient rentable pour le secteur vert d'innover, l'économie rentre dans un régime de croissance mixte (il est évident que ce saut de régime ne se fait pas à la même date pour les deux valeurs de k). Dans ce régime, le stock de pollution continue à croître tandis que les dépenses restent constantes (la trajectoire selle se confond avec la droite représentant les lieux de stationnarité des dépenses). Dans un premier temps ($kS_t < \theta_m$) le taux de croissance se réduit au fur et à mesure que le stock de pollution s'accroît, puis dans un deuxième temps ($kS_t > \theta_m$) le taux de croissance croît avec la préférence pour les biens verts donc avec S_t. Dans le cas où $k = k_2$, l'économie se stabilise dans ce régime mixte (figure 3), les deux secteurs innovent. Mais pour $k = k_1$, l'économie change de régime avant d'atteindre l'équilibre mixte, pour basculer dans le régime de croissance vert (figure 2). L'économie va alors se situer sur la trajectoire selle qui caractérise ce régime : les dépenses diminuent et le stock de pollution continue à croître jusqu'à ce que ces deux variables se stabilisent à leurs valeurs d'équilibre. Pour ce niveau de sensibilité écologique, seul le secteur vert innove.

Partant d'une même situation initiale en terme de dégradation de la qualité de l'environnement, la dynamique transitionnelle et l'équilibre concurrentiel de long terme de l'économie sont entièrement conditionnés par le niveau de sensibilité écologique.

5 Conclusion

Dans ce modèle, le comportement des consommateurs est au centre de la dynamique économique. Leur goût pour la diversité est à l'origine du processus de « *croissance qualitative* » et, de plus, leur préférence pour l'une des deux catégories de biens produits dans l'économie conditionne le niveau et la qualité environnementale du sentier de croissance stationnaire.

Suivant le régime dynamique dans lequel se trouve l'économie, l'augmentation du paramètre de préférence pour les produits verts influence positivement ou négativement le taux de croissance, tandis que son impact sur la qualité de l'environnement est toujours bénéfique. Lorsque l'on introduit une moralité individuelle kantienne, qui se traduit par l'endogénéité de cette préférence en fonction du niveau de pollution, l'économie converge toujours vers un sentier de croissance stationnaire qui peut se situer dans tous les régimes, à l'exception du régime vert dégénéré, suivant le degré de sensibilité des ménages à la qualité de l'environnement. Plus les ménages sont attachés à la qualité de leur environnement, plus le niveau de pollution sera faible, sans forcément réduire le taux de croissance (des situations *win-win* sont possibles).

LAFFONT [1975] évoque des exemples de politique économique qui se fondent sur des comportements qui ne soient pas purement « *égoïstes* » mais qui révèlent également une certaine moralité individuelle. Parmi ceux-ci, la politique américaine d'économies d'énergie, fondée non pas sur la fiscalité ou la régulation, mais sur une campagne de presse invitant les américains à réduire volontairement leur consommation d'énergie. Dans le même cadre de raisonnement, postulant une moralité individuelle kantienne, à la taxation des émissions de polluants et à la mise en œuvre de standards technologiques peuvent s'ajouter de nouveaux instruments à la politique environnementale tels que des campagnes de sensibilisation sur les méfaits de la pollution et sur l'état de l'environnement.

• Références bibliographiques

BIPE (1992). – *Enviroscope. Les éco-produits dans la consommation des ménages français*, Octobre.

BOVENBERG A.L., SMULDERS S. (1996). – « Environmental Quality and Pollution-Augmenting Technological Change in a Two-sector Endogenous Growth Model », *Journal of Public Economics*, Vol. 57, pp. 369-391.

BOVENBERG A.L., DE MOOIJ R.A. (1997). – « Environmental Tax Reform and Endogenous Growth », *Journal of Public Economics*, Vol. 63, pp. 207-237.

CERISIER F. (1998). – « Complémentarité, croissance, rythmes et niveaux de progrès technique », *Cahiers Eco&Maths*, n° 98.35, Université de Paris I.

CHEVÉ M., RAGOT L. (1998). – « La croissance endogène durable » dans K. Schubert et P. Zagamé (eds), *L'environnement, une nouvelle dimension de l'analyse économique*, Vuibert, Paris.

GASTALDO S., RAGOT L. (1995). – « Sustainable Developments through Endogenous Growth Models » dans S. Faucheux, D. Pearce et J. Proops (eds), *Models of Sustainable Development*, Edward Elgar, London, pp. 73-86.

GRADUS R., SMULDERS S. (1993). – « The Trade-Off Between Environmental Care and Long-Term Growth ; Pollution in Three Proto-type Growth Models », *Journal of Economics*, vol. 58, pp. 25-51.

GROSSMAN G.M., HELPMAN E. (1991). – *Innovation and Growth in the Global Economy*, The M.I.T Press, Cambridge MA.

HUNG V., CHANG P., BLACKBURN K. (1993). – « Endogenous Growth, Environment and R&D » dans C. Carraro (eds), *Trade, Innovation and Environment*, Kluwer Academic Publishers.

LAFFONT J.J. (1975). – « Macroeconomic Constraints, Economic Efficiency and Ethics : An Introduction to Kantian Economics », *Economica*, 42, pp. 430-437.

LIGTHART J.E., VAN DER PLOEG F. (1994). – « Pollution, the Cost of Public Funds and Endogenous Growth », *Economics Letters*, vol. 46, pp. 351-361.

VAN MARREWIJK C., VAN DER PLOEG F., VERBEEK J. (1993). – « Is Growth Bad for the Environment? », Banque Mondiale, *document de travail* n° 1151, juillet.

MICHEL P. (1993). – « Pollution and Growth towards the Ecological Paradise », *Miméo*, Université de Paris I.

MICHEL P., ROTILLON G. (1996). – « Disutility of Pollution and Endogenous Growth », *Environmental and Resource Economics*, vol. 6, pp. 279-300.

MUSU I. (1994). – « On Sustainable Endogenous Growth », *document de travail* E.E.E, Fondatione Eni Enrico Mattei.

SMULDERS S. (1995). – « Entropy, Environment and Endogenous Economic Growth », *International Tax and Public Finance*, 2, pp. 319-340.

VERDIER T. (1993). – « Environmental Pollution and Endogenous Growth: A Comparison between Emission Taxes and Technological Standards », *document de travail* E.E.E, Fondatione Eni Enrico Mattei.

Quel que soit le régime de croissance, la dynamique est caractérisée par une variable pré-déterminée S et une variable non-prédéterminée E. Pour s'assurer de la stabilité de chaque régime de croissance, il suffit que le déterminant de la matrice jacobienne évaluée à l'état stationnaire soit négatif. Ce qui correspond effectivement dans ce cas précis, à une valeur propre négative (égale au nombre de variables pré-déterminées) et une valeur propre positive (égale au nombre de variables non-prédéterminées).

Propriétés dynamiques du régime mixte

Le système d'équations différentielles D_m, caractérise la dynamique du régime mixte. Son domaine de définition, relatif à la variable S, est

$$\mathcal{D}_m = \left]\frac{\theta_{\min}}{k}, \frac{\theta_{\max}}{k}\right[.$$

Ce système dynamique admet une unique solution d'équilibre rationnelle [4] : $(E_m^*, S_m^\star)$ avec $E_m^\star = L + \rho(b_s + b_v)$ et

$$S_m^\star = \frac{\beta\dfrac{\alpha_s}{a_s}\left(L + \rho(b_s + b_v)\right)}{\delta + k\beta\dfrac{\alpha_s}{a_s}\left(L + \rho(b_s + b_v)\right)}.$$

Les conditions sur k pour que $S_m^\star$ appartienne au domaine de définition du régime mixte sont :

$$\frac{\theta_{\min}}{k} < S_m^\star < \frac{\theta_{\max}}{k}$$

avec $\dfrac{\theta_{\min}}{k} = S_m^\star$ pour

$$k = k_{\min} = \frac{\delta}{\beta}\frac{a_s}{\alpha_s}\frac{\rho b_v}{(1-\alpha_v)\left(L + \rho(b_s + b_v)\right)\left(L + \rho(b_s + b_v) - \dfrac{\rho b_v}{1-\alpha_v}\right)}$$

et $\dfrac{\theta_{\max}}{k} = S_m^\star$ pour $k = k_{\max} = \dfrac{\delta}{\beta}\dfrac{a_s}{\alpha_s}\left[\dfrac{(1-\alpha_s)}{\rho b_s} - \dfrac{1}{L + \rho(b_s + b_v)}\right]$. Donc, $S_m^\star \in \left]\dfrac{\theta_{\min}}{k}, \dfrac{\theta_{\max}}{k}\right[$ pour tout $k \in]k_{\min}, k_{\max}[$. Une condition suffisante pour que $k_{\min}$ et $k_{\max}$ soient positifs est que les taux de croissance du secteur vert et du secteur standard soient positifs.

4. C'est-à-dire autre que la solution $E^* = 0$.

Il nous reste enfin à déterminer la stabilité de la solution concurrentielle. La matrice jacobienne évaluée à cet état stationnaire s'écrit :

$$J_m^* = \begin{bmatrix} \dfrac{E_m^*}{b_s + b_v} & 0 \\ \beta(1 - kS_m^*)\dfrac{\alpha_s}{a_s} & -\beta k E_m^* \dfrac{\alpha_s}{a_s} - \delta \end{bmatrix}$$

Son déterminant est négatif sur le domaine de définition de ce régime, en effet :

$$Det(J_m^*) = -\left(\beta k E_m^* \frac{\alpha_s}{a_s} + \delta\right) \frac{E_m^*}{b_s + b_v} < 0$$

ce qui implique que $(E_m^\star, S_m^\star)$ est stable dans $\mathcal{D}_m$ $\forall k \in \,]k_{\min}, k_{\max}[$.

Propriétés dynamiques du régime vert

La dynamique du régime vert est caractérisée par le système d'équations différentielles D_v. Le domaine de définition de ce régime est tel que

$$S_t \in \mathcal{D}_v = \left[\frac{\theta_{\max}}{k}, \frac{1}{k}\right[.$$

Il est à noter que l'équation différentielle qui caractérise la dynamique du stock de pollution a un point singulier,

$$S_{vs} = \frac{-\alpha_s}{k(1 - \alpha_s)} < 0\,;$$

étant négatif il n'appartient pas au domaine de définition de ce régime.

Le niveau de dépenses d'équilibre s'écrit, en fonction du stock de pollution, $E_v^* = \dfrac{L + \rho b_v}{1 - (1 - \alpha_s)(1 - kS_v^*)}$; S_v^* est donc solution de l'équation du second degré :

$$-k\delta(1 - \alpha_s)\, S_v^{*2} - \left(\alpha_s \delta + \beta k \frac{\alpha_s}{a_s}(L + \rho b_v)\right) S_v^* + \beta \frac{\alpha_s}{a_s}(L + \rho b_v) = 0$$

qui admet deux racines :

$$S_v^\star = \frac{\alpha_s \delta + \beta k \dfrac{\alpha_s}{a_s}(L + \rho b_v)}{2k\delta(\alpha_s - 1)} \pm \frac{\sqrt{\left(-\alpha_s \delta - \beta k \dfrac{\alpha_s}{a_s}(L + \rho b_v)\right)^2 + 4k\delta(1 - \alpha_s)\beta \dfrac{\alpha_s}{a_s}(L + \rho b_v)}}{2k\delta(\alpha_s - 1)}$$

dont l'une est positive et l'autre est négative, puisque le produit des racines est égale à $\dfrac{-\beta(L+\rho b_v)}{\delta\dfrac{a_s}{\alpha_s}(1-\alpha_s)\,k} < 0$. Seul le couple (E^*_{v2}, S^*_{v2}) est donc susceptible d'appartenir au domaine de définition de ce régime, avec $E^*_{v2} = \dfrac{L+\rho b_v}{1-(1-\alpha_s)(1-kS^*_{v2})}$ et

$$S^\star_v = \frac{\alpha_s\delta + \beta k\dfrac{\alpha_s}{a_s}(L+\rho b_v)}{2k\delta(\alpha_s-1)} - \frac{\sqrt{\left(-\alpha_s\delta - \beta k\dfrac{\alpha_s}{a_s}(L+\rho b_v)\right)^2 + 4k\delta(1-\alpha_s)\beta\dfrac{\alpha_s}{a_s}(L+\rho b_v)}}{2k\delta(\alpha_s-1)}$$

Conditions sur k pour que $S^\star_{v2} \in \mathcal{D}_v$:

$$\frac{\theta_{\max}}{k} \leqslant S^\star_{v2} < \frac{1}{k}$$

Pour tout $k \geqslant 0$, $\dfrac{1}{k} > S^\star_{v2}$ est toujours vérifié, et $S^\star_{v2} = \dfrac{\theta_{\max}}{k}$ pour $k = k_{\max}$. Il s'agit de la même valeur que celle définie pour le régime mixte. Donc, $S^\star_{v2} \in \mathcal{D}_v$ si $k \geqslant k_{\max}$.

Le déterminant de la matrice jacobienne du système dynamique vert, évalué à cet état stationnaire, est négatif :

$$Det(J^*_v) = \begin{vmatrix} \dfrac{E^*_{v2}}{b_v}\left(kS^*_{v2}(1-\alpha_s)+\alpha_s\right) & \dfrac{E^{*2}_{v2}k(1-\alpha_s)}{b_v} \\ \beta(1-kS^*_{v2})\dfrac{\alpha_s}{a_s} & -\beta kE^*_{v2}\dfrac{\alpha_s}{a_s} - \delta \end{vmatrix}$$

$$= -\left(\beta kE^*_{v2}\frac{\alpha_s}{a_s}+\delta\right)\frac{E^*_{v2}}{b_v}\left(kS^*_{v2}(1-\alpha_s)+\alpha_s\right) - \frac{E^{*2}_{v2}k(1-\alpha_s)}{b_v}\beta(1-kS^*_{v2})\frac{\alpha_s}{a_s} < 0$$

ce qui implique que $(E^\star_{v2}, S^\star_{v2})$ est stable dans $\mathcal{D}_v$.

Propriétés dynamiques du régime standard

La dynamique du régime standard est représentée par le système d'équations différentielles D_S. Le domaine de définition de ce régime est $\mathcal{D}_S = \left]0, \dfrac{\theta_{\min}}{k}\right]$.

D_s n'est pas définie pour le point singulier $S_{ss} = \dfrac{1}{k(1-\alpha_v)}$ qui, de toute façon, n'appartient pas au domaine de définition du régime standard puisque $S_{ss} > \dfrac{\theta_{\min}}{k}$ pour $L + \rho b_v > 0$, ce qui est toujours vérifié.

À l'équilibre $E_s^* = \dfrac{L + \rho b_s}{1 - (1-\alpha_v) k S_s^*}$ et S_s^* est solution de l'équation du second degré :

$$(15) \quad \delta(1-\alpha_v)\, k\, S_s^{*2} - \left(\delta + \beta k \frac{\alpha_s}{a_s}(L + \rho b_s)\right) S_s^* + \beta \frac{\alpha_s}{a_s}(L + \rho b_s) = 0$$

qui admet deux racines (S_{s1}^*, S_{s2}^*) positives :

$$S_s^\star = \frac{\delta + \beta k \frac{\alpha_s}{a_s}(L + \rho b_s)}{2k\delta(1-\alpha_v)} \pm \frac{\sqrt{\left(\delta + \beta k \frac{\alpha_s}{a_s}(L + \rho b_s)\right)^2 - 4k\delta(1-\alpha_v)\beta \frac{\alpha_s}{a_s}(L + \rho b_s)}}{2k\delta(1-\alpha_v)}$$

Pour

$$S_{s2}^\star = \frac{\delta + \beta k \frac{\alpha_s}{a_s}(L + \rho b_s)}{2k\delta(1-\alpha_v)} + \frac{\sqrt{\left(\delta + \beta k \frac{\alpha_s}{a_s}(L + \rho b_s)\right)^2 - 4k\delta(1-\alpha_v)\beta \frac{\alpha_s}{a_s}(L + \rho b_s)}}{2k\delta(1-\alpha_v)},$$

on montre que $S_{s2}^\star \geqslant \dfrac{\theta_{\min}}{k}$, $\forall k > 0$, donc cette solution n'appartient pas au domaine de définition du régime standard $\mathcal{D}_s$. Les conditions sur k pour que $S_{s1}^\star$ appartienne à $\mathcal{D}_s$ sont $0 < k \leqslant k_{\min}$.

La seule solution d'équilibre rationnelle réalisable est donc (E_{s1}^*, S_{s1}^*).

Le déterminant de la matrice jacobienne évaluée à cet état stationnaire est :

$$Det(J_s^*) = \begin{vmatrix} \dfrac{E_{s1}^*}{b_s}\big(1 - (1-\alpha_v) k S_{s1}^*\big) & -\dfrac{E_{s1}^{*2} k (1-\alpha_v)}{b_s} \\ \beta(1 - k S_{s1}^*)\dfrac{\alpha_s}{a_s} & -\beta k E_{s1}^* \dfrac{\alpha_s}{a_s} - \delta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{E_{s1}^*}{b_s a_s}\left[-\alpha_v \alpha_s k \beta E_{s1}^* + a_s \delta \left(\underbrace{(1-\alpha_v) k S_{s1}^*}_{<1} - 1\right)\right] < 0$$

L'équilibre (E_{s1}^*, S_{s1}^*) est donc stable dans $\mathcal{D}_s$.

Propriétés dynamiques du régime vert dégénéré

La dynamique du régime vert dégénéré représentée par le système d'équations différentielles D_{vd}, admet une seule solution d'équilibre rationnelle (E_{vd}^*, S_{vd}^*) avec $E_{vd}^* = L + \rho b_v$ et $S_{vd}^* = 0$. Le domaine de définition de ce régime est $S \in \mathcal{D}_{vd} = [\frac{1}{k}, +\infty]$, il est immédiat que $S_{vd}^* \notin \mathcal{D}_{vd}$. Le déterminant de la matrice jacobienne du système dynamique en régime vert dégénéré, évalué à l'état stationnaire, est égale à :

$$Det(J_{vd}^*) = \begin{vmatrix} \frac{E}{b_v} & 0 \\ 0 & -\delta \end{vmatrix} = -\delta \frac{E}{b_v} < 0$$

Bien qu'il soit stable, cet équilibre n'appartient pas au domaine de définition de ce régime. Par conséquent, $\forall k \geqslant 0$, la trajectoire selle convergente saute de régime (elle rentre dans le régime vert) avant d'atteindre l'équilibre stationnaire du régime vert dégénéré.

Propriétés dynamiques du régime standard dégénéré

Le régime standard dégénéré est caractérisé par le système d'équations différentielles D_{sd}. Le domaine de définition de ce régime est $\mathcal{D}_{sd} = kS_t = \{0\}$. La solution d'équilibre rationnelle est $(E_{sd}^*, S_{sd}^\star)$, avec $E_{sd}^* = L + \rho b_s$ et $S_{sd}^\star = \frac{\beta}{\delta} \frac{\alpha_s}{a_s}(L + \rho b_s)$. Cette solution ne fait évidemment pas partie de l'ensemble de définition de ce régime (sauf pour $k = 0$).

On vérifie que le déterminant de la matrice jacobienne de ce système évaluée à cet état stationnaire est négatif avec $Det(J_{sd}^*) = -\delta \frac{E_{sd}^*}{b_s} < 0$.