ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 57 – 2000

# Le modèle de préservation de l'environnement de ARROW et FISHER : une approche en terme d'options réelles

**Marc BAUDRY ***

**RÉSUMÉ.** – Le modèle de préservation de l'environnement avec irréversibilité et incertitude de ARROW et FISHER [1974] est repris en s'appuyant sur la récente théorie des options réelles. Cette approche permet une généralisation du modèle en temps continu avec exploitation partielle de la ressource non renouvelable ainsi qu'une détermination directe du seuil de préservation optimal. Initialement utilisées pour comparer cas certain et cas incertain, les notions d'effet d'irréversibilité et de quasi-valeur d'option sont reprises et étendues à la comparaison de niveaux d'incertitude différents.

---

## The ARROW FISHER Model of Environmental Protection: An Option Approach

**ABSTRACT**. – The ARROW and FISHER [1974] model of environmental preservation with irreversibility and uncertainty is reconsidered in the perspective of the real option theory. Thanks to this approach, an extension of the model to the continuous time case with a partial exploitation of non renewable resources and a direct computation of the optimal preservation threshold are possible. The concepts of quasi-option value and irreversibility effect, initially aimed at comparing the certainty case with the uncertainty case, are restated and extended to the comparison of situations characterised by different degrees of uncertainty.

---

* M. BAUDRY : CREREG, Université de Rennes 1.

# 1 Introduction

En matière de gestion de l'environnement, la question se pose souvent de savoir s'il est opportun ou non de préserver certaines ressources naturelles. Les premiers travaux à apporter une réponse sont ceux de ARROW et FISHER [1974] ainsi que HENRY [1974] : l'accent y est mis sur le rôle de l'irréversibilité et de l'incertitude. Ces auteurs considèrent une ressource naturelle, par exemple un parc naturel, pour laquelle il existe deux utilisations alternatives et incompatibles : soit la ressource est protégée afin d'y développer des activités récréatives ou d'y maintenir la bio-diversité, soit la ressource est exploitée suite, par exemple, à la construction de barrages hydrauliques ou d'axes de transports. Dans le premier cas, une mise en exploitation ultérieure de la ressource reste possible, tandis que dans le second, le retour à l'état initial est impossible, il a irréversibilité de la destruction de la ressource. L'irréversibilité implique l'existence d'un niveau seuil des bénéfices nets d'exploitation de la ressource en deçà duquel il est optimal de protéger celle-ci. En ignorant l'incertitude, le seuil est surévalué et la ressource est surexploitée : c'est l'effet d'irréversibilité. Le supplément de valeur qu'il faut donner aux unités de ressource préservées pour corriger ce biais est appelé quasi-valeur d'option, il est positif. Bien que souvent considérés comme une approche pionnière de la récente théorie des options réelles présentée entre autres par PINDYCK [1991], DIXIT [1992], DIXIT et PINDYCK [1994], ou encore BOURDIEU COEURÉ et SÉDILLOT [1997] ainsi que GALIÈGUE [1996] pour un exposé en français, ces modèles n'ont toutefois pas été réexaminés sous l'angle de cette dernière. Le modèle présenté vise à combler ce manque. Son objectif est, non seulement, de retrouver les résultats fondamentaux de ARROW et FISHER dans un cadre plus général, mais aussi de développer une méthode de calcul du niveau d'exploitation optimal de la ressource.

Dans un premier temps, le problème est reformulé en temps continu et horizon temporel infini. Afin d'expliquer une exploitation partielle et progressive de la ressource (le modèle d'ARROW et FISHER conduit à une exploitation soit nulle, soit totale), des hypothèses standard de croissance ou décroissance des bénéfices ou dommages marginaux d'exploitation ainsi que du coût de mise en exploitation sont introduites. Elles conduisent à un modèle proche des modèles d'accumulation irréversible de capital étudiés par PINDYCK [1988] puis BERTOLA et CABALLERO [1994] ou de demande de travail de BENTOLILA et BERTOLA [1990]. La spécification retenue est centrée sur la principale source d'incertitude aux yeux des économistes de l'environnement, la valeur de la ressource dans son état protégé. La valeur d'option est définie comme la valeur de l'opportunité d'une mise en exploitation immédiate ou ultérieure de la ressource. Le seuil de la valeur de préservation de la ressource en deçà duquel un accroissement de l'exploitation est optimal ainsi que son évolution en fonction du niveau de ressource exploité sont déterminés.

Dans un deuxième temps, l'effet de l'incertitude sur la valeur du seuil est examiné. Les notions d'effet d'irréversibilité et de quasi-valeur d'option, distincte de la valeur d'option, sont introduites et généralisées à la comparaison de situations caractérisées par un degré d'incertitude différent. Une interprétation de la quasi-valeur d'option en tant que valeur de l'information est présentée. Un lien est ainsi établi avec l'approche standard de l'effet de l'irréversibilité notamment développée par FREIXAS et LAFFONT [1984]. Parallèlement, la valeur d'option est assimilée à la valeur de la flexibilité. Une dernière section est consacrée à l'étude d'un cas de non-convexité conduisant à une règle de décision intermédiaire entre développement indivisible « *à la ARROW et FISHER* » et développement partiel de la ressource.

# 2 Le modèle

## 2.1 Présentation

Le modèle de ARROW et FISHER [1974], succinctement rappelé en annexe A, est, ici, adapté en temps continu avec horizon infini. $\bar{q}$ désigne la quantité totale, avant toute exploitation, d'une ressource naturelle non renouvelable. La quantité exploitée à une date $t$ est notée $q_t$. L'approche proposée s'appuie sur une analyse coût-bénéfice de l'exploitation de la ressource. La mise en exploitation d'une quantité $q$ fournit un flux de bénéfice d'exploitation $B(q_t, p, r)$ pour toutes les dates postérieures à la mise en exploitation et jusqu'à un nouvel accroissement de $q$. Le prix du bien ou service produit à partir de la ressource est noté $p$. $r$ est le vecteur de prix des autres facteurs de production que la ressource. La ressource protégée est source d'aménités pour $N$ individus ayant le même revenu $R$ et la même fonction d'utilité $U(x, a)$ avec $a$ le niveau de ressource préservée et $x$ la quantité consommée d'un bien agrégat de prix $w$. La fonction d'utilité indirecte associée est notée $V(R, w, a)$. Le prix dual de la ressource dans son état protégé (voir CORNES [1980]) est donné par $-\, dR/da|_{dV=0} = (\partial V/\partial a)\,/\,(\partial V/\partial R)$. Il indique la baisse de revenu permettant de maintenir le niveau d'utilité constant quand la quantité de ressource préservée augmente d'une unité à la marge. Le consentement à payer de l'ensemble des individus pour un niveau $\bar{q} - q_t$ de ressource préservée est alors :

$$(1) \qquad CAP\,(\bar{q} - q_t, R, N, w) = N \int_0^{\bar{q} - q_t} \frac{\partial V/\partial a}{\partial V/\partial R} da$$

Dans ce qui suit, $U(x, a)$ est restreinte à une forme additive $A(a) + W(x)$. $CAP$ prend alors la forme multiplicative $A(\bar{q} - q_t)\,\theta(z)$ où $A$ est le niveau d'aménité ou de service rendu par la ressource protégée et $\theta$ sa valeur unitaire ne dépendant que des variables exogènes $z = \{N, R, w\}$. Pour $U(x, a) = x^\eta + a^\delta$, par exemple, on obtient $CAP = (\bar{q} - q_t)^\delta \; N \dfrac{R^{1-\eta} w^\eta}{\eta}$. Le coût d'un accroissement $\Delta q$ du niveau d'exploitation de la ressource (coût de construction de barrages supplémentaires ou de nouvelles autoroutes par exemple) est noté $C(\Delta q)$. Compte tenu de l'irréversibilité de l'exploitation une réduction de $q$ est impossible.

Dans leur modèle, ARROW et FISHER supposent que le bénéfice net retiré de la ressource et le coût d'accroissement du niveau d'exploitation sont linéaires. De même, il est possible de procéder à un accroissement de $q$ sous un coût d'ajustement linéaire. HENRY [1974] part, quant à lui, d'une hypothèse d'indivisibilité du développement de la ressource. La linéarité conduit à une solution de coin où l'exploitation est soit nulle, soit totale ; elle implique donc, de fait, une indivisibilité. Pour expliquer un développement partiel il apparaît nécessaire de lever ces hypothèses. Dans la mesure où les unités de ressources les plus rentables sont exploitées en priorité, la solution la plus réaliste semble d'introduire des bénéfices marginaux d'exploitation décroissants. $B\,(q_t, p, r)$ est alors croissant et concave en $q$. Un argument similaire conduit à supposer $C\,(\Delta q)$ croissant et convexe [1] en $\Delta q \in [0,\infty[$. L'utilité marginale de la ressource dans son état préservé est supposée non croissante. $A\,(a)$ est alors croissante et concave en $a$ donc $A\,(\bar{q} - q_t)$ est décroissante et concave en $q$.

L'incertitude peut provenir de variations des variables ou paramètres de $B\,(q_t, p, r)$ et donc affecter le bénéfice d'exploitation ou bien provenir de variations des variables ou paramètres de $CAP\,(\bar{q} - q_t, R, N, w)$ et donc affecter le bénéfice de protection. Le cas le plus général consisterait à prendre en compte les deux sources d'incertitude, ce qui introduirait des complications et empêcherait toute résolution analytique du modèle. Nous nous restreignons donc, ici, à une incertitude portant sur la valorisation de la ressource dans son état protégé. Celle-ci est la plus importante pour l'économie de l'environnement selon FISHER et HANEMANN [1987]. C'est, en outre, cette source d'incertitude qui différencie le modèle présenté de ceux d'investissement incrémental. Une hypothèse réaliste consiste, par exemple, à introduire un mouvement Brownien géométrique $dN = \alpha\ N\ dt + \sigma\ N\ d\omega$ avec $\omega$ un processus de Wiener [2] pour décrire l'évolution de la population $N$ comme dans le modèle de croissance stochastique de MERTON [1975]. Dans le cas de la fonction d'utilité directe $U\,(x,a) = x^{\eta} + a^{\delta}$ présentée plus haut, le lemme d'Ito permet alors de déduire le processus suivi par $\theta\,(z)$ :

$$d\theta = \alpha\ \theta\ dt + \sigma\ \theta\ d\omega \tag{2}$$

Nous supposons que la valeur unitaire $\theta$ de l'aménité suit effectivement ce processus. Sur un intervalle de temps $\Delta t$ l'espérance mathématique du taux de croissance $d\theta/\theta$ de $\theta$ est $\alpha\ \Delta t$ et sa variance vaut $\sigma^2\ \Delta t$.

Partant de valeurs initiales $q_0$ et $\theta_0$, on cherche à maximiser la valeur actualisée nette de la ressource. Le taux d'actualisation est noté $\rho$. Soit $\{\tau\}$ la suite des dates, où le niveau d'exploitation de la ressource est augmenté. $\{\Delta q\}$ est la suite des changements du niveau d'exploitation de la ressource. Le programme correspond à celui d'un monopole public exploitant la ressource ou d'un exploitant privé devant verser une indemnité de destruction :

$$F\,(q_0,\theta_0) = \tag{3.a}$$

$$\underset{\{\tau\}\ \{\Delta q\}}{\mathrm{Max}}\ E_0\left[\int_0^{\infty}\ (B\,(q_t) + A\,(\overline{q} - q_t)\ \theta_t)\,e^{-\rho\ t}dt - \sum_{\tau} e^{-\rho\ \tau}C\,(\Delta q)\right]$$

---

1. Cette propriété de convexité exclut la possibilité de coûts fixes d'ajustement pour lesquels $\lim C(\Delta q) < 0$ quand $\Delta q \to 0$ alors que $C\,(0) = 0$.
2. Pour une présentation des processus de diffusion et plus particulièrement du processus de Wiener, des règles de calcul qui y sont associées ainsi que des méthodes de régulation de ces processus, voir HARRISON [1985].

sous les contraintes :

$$d\theta = \alpha\ \theta\ dt + \sigma\ \theta\ d\omega \tag{3.b}$$

$$\Delta q \geqslant 0 \tag{3.c}$$

$$q \leqslant \bar{q} \tag{3.d}$$

$E_0$ désigne l'espérance mathématique conditionnelle à $q_0$ et $\theta_0$. Le flux de bénéfice net d'exploitation à une date *t* est la somme du bénéfice d'exploitation $B\ (q_t)$ et du consentement à payer $A\ (\bar{q} - q_t)\ \ \theta_t$. En suivant LUND [1991], la possibilité d'accroître le niveau d'exploitation au moment voulu et sans date d'échéance finie peut s'interpréter comme une option, plus précisément un *Call* (option d'achat) ou *Put* (option de vente) perpétuel de type américain. Si l'incertitude portait sur les bénéfices d'exploitation, l'option consisterait à accroître le nombre d'unités de ressource exploitées lorsque la valeur de ces dernières est suffisamment forte : l'option serait alors à rapprocher d'un *Call* perpétuel de type américain (et de plus répété). Ici, dans la mesure où l'incertitude affecte la valeur de préservation et où l'option consiste à détruire des unités de ressource préservées lorsque leur valeur est considérée comme suffisamment faible, l'analogie conduit plutôt à interpréter l'option comme un *Put* perpétuel de type américain (également répété). Partant d'une date $t = 0$, la ressource est préservée jusqu'au premier instant $\tau_0$ où l'option est exercée. En notant $\theta_{\tau_0}$ la valeur de $\theta$ alors atteinte, exercer l'option revient à passer de $F\left(q_0,\theta_{\tau_0}\right)$ à $F\left(q_0 + \Delta q,\theta_{\tau_0}\right) - C\ (\Delta q)$ avec $\Delta q \geqslant 0$ l'accroissement optimal et à acquérir une nouvelle option sur un nouvel accroissement. Le programme (3.a) s'écrit alors :

$$F\ (q_0,\theta_0) = \underset{\tau_0\ q\prime}{\mathrm{Max}}\ E_0 \left[\int_0^{\tau_0} (B\ (q_0) + A\ (\overline{q} - q_0)\ \ \theta_t)\ e^{-\rho\ t} dt \right. \\ \left. + e^{-\rho\ \tau_0} \left(F\left(q\prime,\theta_{\tau_0}\right) - C\ (q\prime - q_0)\right)\right] \tag{4.a}$$

sous la contrainte (3.b) et avec $q\prime \geqslant q_0$ ainsi que $q\prime \leqslant \bar{q}$. (4.a) peut encore s'écrire :

$$F\ (q_0,\theta_0) = \underset{\tau_0}{\mathrm{Max}}\ E_0 \left[\int_0^{\tau_0} (B\ (q_0) + A\ (\overline{q} - q_0)\ \ \theta_t)\ e^{-\rho t} dt \right. \\ \left. + e^{-\rho\tau_0} \underset{q\prime}{\mathrm{Max}} \left(F\left(q\prime,\theta_{\tau_0}\right) - C\ (q\prime - q_0) - \lambda\ \ (q_0 - q\prime) - \mu\ \ (q\prime - \bar{q})\right)\right] \tag{4.b}$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux deux contraintes sur $q\prime$.

## 2.2 Irréversibilité et attente

L'attention est tout d'abord portée sur la détermination de $q\prime$. On suppose pour l'instant que la contrainte $q\prime \leqslant \bar{q}$ n'agit pas ($\mu = 0$). Lors de l'exercice de l'option, la fonction $F$ est définie par :

(5) $$F\ (q,\theta) = \underset{q'}{\text{Max}}\ (F\ (q',\theta) - C\ (q' - q) - \lambda\ \ (q - q'))$$

À ce niveau il est utile d'établir le résultat suivant :

PROPOSITION 1 : Si $B\ (q)$ et $A\ (\bar{q} - q)$ sont concaves en $q$ et $C\left(q' - q\right)$ convexe en $\Delta q = q' - q$ alors $F\ (q,\theta)$ est concave en $q$.

*Preuve* : voir Annexe B. ■

Pour que $q'$ soit optimal, il suffit donc qu'il vérifie la condition usuelle d'optimalité du premier ordre :

(6.a) $$F_q\ (q',\theta) = C_{\Delta q}\ (q' - q) - \lambda$$

avec $F_q$ la dérivée de $F\ (q,\theta)$ en $q$ et $C_\Delta q$ celle de $C\ (q' - q)$ en $\Delta q = q' - q$. En appliquant le théorème de l'enveloppe à (5) on vérifie de plus que :

(6.b) $$F_q\ (q,\theta) = C_{\Delta q}\ (q' - q) - \lambda$$

FIGURE 1
***Irréversibilité et attente***

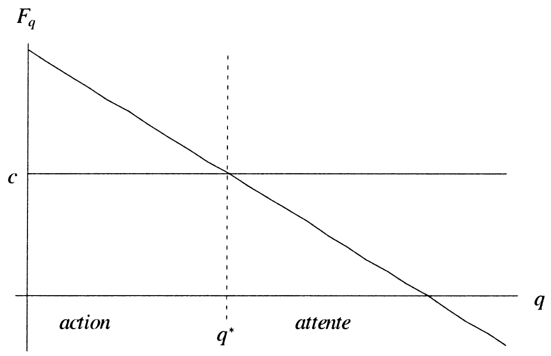
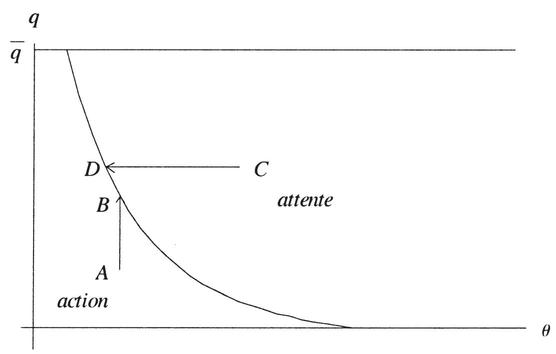



FIGURE 2
***Forme de la zone d'attente***



Compte tenu de la concavité de $F(q,\theta)$, à $\theta$ donné $F_q$ ne peut prendre une même valeur qu'en un seul niveau de $q$. Par conséquent $q\prime = q$ : le multiplicateur de Lagrange λ est nul, la condition (6.a) devient identique à (6.b) tandis que la relation (5) n'a plus de sens. En notant $c = C_{\Delta q}(0)$ les trois relations (5) (6.a) et (6.b) se ramènent ainsi à une unique condition :

$$F_q(q,\theta) = c \tag{7}$$

Celle-ci indique qu'il faut ajuster en permanence la quantité $q$ exploitée de sorte à maintenir la valeur marginale du bénéfice net actualisé tiré de la ressource, $F_q(q,\theta)$, juste égale au coût de mise en exploitation d'une unité marginale de ressource en plus, $c$. La figure 1 montre alors clairement les conséquences de l'irréversibilité.

$F(q,\theta)$ étant concave en $q$ sa dérivée est décroissante en $q$. Pour $q < q^*$ il est optimal d'accroître l'exploitation jusqu'à $q^*$. À l'inverse, pour $q > q^*$, l'irréversibilité rend impossible toute réduction de $q$ : la ressource est maintenue en l'état jusqu'à ce que $\theta$ prenne une valeur telle que $F_q(q,\theta)$ dépasse juste $c$. On procède, alors, à un accroissement d'une unité à la marge de $q$ de sorte à satisfaire la condition (7). Le caractère marginal de cet accroissement implique que la contrainte $q\prime \leqslant \bar{q}$ est toujours satisfaite, et n'intervient effectivement pas, sauf lorsque le niveau d'exploitation $q$ atteint lui-même la valeur $\bar{q}$. Dans ce dernier cas, toute la ressource est exploitée et il n'y a plus d'option à exercer. On peut, ainsi, définir dans l'espace $\{\theta,q\}$ une frontière entre une zone d'attente et une zone d'action comme l'illustre la figure 2.

Partant d'un point A en dessous ou à gauche de la frontière il est optimal d'accroître immédiatement $q$ jusqu'au niveau $q^*$ correspondant au point B de la frontière. À l'inverse, partant d'un point C au-dessus ou à droite de la frontière il est optimal de ne pas mettre en exploitation de nouvelles unités de la ressource : $q$ reste inchangé tandis que la valeur unitaire $\theta$ de l'aménité fluctue. Lorsque $\theta$ atteint la frontière au point D, la quantité de ressource exploitée est augmentée d'une unité à la marge de sorte à rester à l'intérieur de la zone d'attente et à maintenir $F_q(q,\theta)$ inférieur ou égal à $c$ [3]. Une fois la quantité totale $\bar{q}$ de ressource exploitée, il ne peut plus y avoir qu'attente. La forme de la frontière est déterminée de manière plus formelle dans la section qui suit.

# 3 Valeur d'option et quasi-valeur d'option

## 3.1 Valeur d'option et seuil d'action

Après avoir défini la valeur d'option totale et la valeur d'option marginale associées à l'exploitation de la ressource, la règle de mise en exploitation opti-

3. On parle alors de contrôle instantané. Pour un traitement complet, voir HARRISON et TAKSAR [1983]. Afin de faciliter la présentation du modèle, la formulation initiale utilisée ici (notamment le groupe d'expressions (3.a) à (3.d)) présente des similitudes avec celles des modèles de contrôle impulsionnel (HARRISON, SELLKE et TAYLOR [1983]). Cette similitude ne pose pas de problème majeur dans la mesure où le contrôle instantané peut être vu comme un cas limite (coût fixe nul) du contrôle impulsionnel (DIXIT [1991]).

male est décrite. Le calcul du seuil de préservation de la ressource caractérisant cette règle est présenté. Selon les valeurs respectives du taux de croissance déterministe de la valeur de préservation et du taux d'actualisation, trois principaux cas doivent être envisagés.

### 3.1.1 Définitions

La fonction de valeur $F\ (q_0, \theta_0)$ tient compte de l'opportunité d'une mise en exploitation immédiate ou ultérieure des unités de ressource non encore exploitées. En l'absence d'une telle opportunité, le niveau d'exploitation resterait inchangé et la valeur de la ressource serait donnée par :

$$\text{(8.a)} \qquad G\ (q_0, \theta_0) = E_0 \left[ \int_0^{\infty} (B\ (q_0) + A\ (\overline{q} - q_0)\ \theta_t)\ e^{-\rho t} dt \right]$$

Sachant que seul $\theta_t$ est aléatoire et que $E_0\ [\theta_t] = \theta_0\ e^{\alpha\ t}$ la définition (8.a) est équivalente à :

$$\text{(8.b)} \qquad G\ (q_0, \theta_0) = \int_0^{\infty} B\ (q_0)\ \ e^{-\rho t} dt + \int_0^{\infty} A\ (\bar{q} - q_0)\ \ \theta_0\ e^{(\alpha - \rho) t} dt$$

La valeur d'option $VO\ (a, \theta_0)$ de la ressource est le supplément de valeur retiré de l'opportunité d'une mise en exploitation future des $a = \bar{q} - q_0$ unités de ressource non encore exploitées :

$$\text{(9)} \qquad VO\ (\bar{q} - q_0, \theta_0) = F\ (q_0, \theta_0) - G\ (q_0, \theta_0)$$

Le maintien du niveau d'exploitation de la ressource à son niveau courant $q_0$ n'étant pas « *a priori* » la solution optimale de (4) nous avons toujours $VO\ (\bar{q} - q_0, \theta_0) \geqslant 0$. Il s'agit de la valeur d'option totale au sens de DIXIT et PINDYCK [1994] d'une mise en exploitation future des unités de ressource non

TABLEAU 1
***Expressions du seuil***

| | $\alpha < 0$ | $0 \leqslant \alpha < \rho$ | $\alpha \geqslant \rho$ |
|---|---|---|---|
| Pour $\sigma \neq 0$ : | $\theta_\tau\ (q) = \dfrac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \left( \dfrac{B_q\ (q)\ /\ \rho\ \ - c}{-A_q\ (\bar{q} - q)\ /\ (\rho - \alpha)} \right)$<br>avec $\beta_1$ la racine négative de l'équation quadratique :<br>$Q(\beta) = \dfrac{\sigma^2}{2} \beta^2 + \left( a - \dfrac{\sigma^2}{2} \right) \beta - \rho$ | $\theta_\tau\ (q) = \dfrac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \left( \dfrac{B_q\ (q)\ /\ \rho\ \ - c}{-A_q\ (\bar{q} - q)\ /\ (\rho - \alpha)} \right)$<br>avec $\beta_1$ la racine négative de l'équation quadratique :<br>$Q(\beta) = \dfrac{\sigma^2}{2} \beta^2 + \left( a - \dfrac{\sigma^2}{2} \right) \beta - \rho$ | Attente $\forall \theta \geqslant 0$ |
| Pour $\sigma = 0$ : | $\theta_\tau\ (q) = \dfrac{\beta_3}{\beta_3 - 1} \left( \dfrac{B_q\ (q)\ /\ \rho\ \ - c}{-A_q\ (\bar{q} - q)\ /\ (\rho - \alpha)} \right)$<br>avec $\beta_3 = \rho / \alpha$ | $\theta_\tau\ (q) = \dfrac{B_q\ (q)\ /\ \rho\ \ - c}{-A_q\ (\bar{q} - q)\ /\ (\rho - \alpha)}$ | Attente $\forall \theta \geqslant 0$ |

encore exploitées. La valeur d'option marginale $VO_a\ (a,\theta) = -VO_q\ (\bar{q} - q,\theta)$ est notée $V\ (q,\theta)$. Elle correspond au supplément de valeur retiré de l'opportunité d'une mise en exploitation future d'une unité supplémentaire de ressource. Or, il a été démontré à la section précédente que l'attente est optimale tant que $F_q\ (q,\theta) \leqslant c$. Ceci équivaut à $V\ (q,\theta) \geqslant G_q\ (q,\theta) - c$ : il y a attente tant que le coût d'opportunité $V\ (q,\theta)$ de la destruction d'une unité marginale supplémentaire de ressource est supérieur au bénéfice net retiré de sa destruction immédiate. Formellement, la zone d'attente $\Omega$ se définit donc de la manière suivante :

(10.a) $$\Omega = \left\{\theta;\ V\ (q,\theta) \geqslant G_q\ (q,\theta) - c\right\}$$

L'option est exercée en $\tau_0 = Inf\ \{t \geqslant 0\,;\theta_t \notin \Omega\}$. Pour que la destruction immédiate d'une unité supplémentaire de ressource soit optimale, il est nécessaire mais, non suffisant, que son bénéfice net $G_q\ (q,\theta) - c$ soit strictement positif. La zone d'attente $\Omega$ inclut donc au minimum la zone d'attente $\Omega_{VAN}$ associée au critère de la valeur actualisée nette :

(10.b) $$\Omega_{VAN} \subset \Omega \text{ avec } \Omega_{VAN} = \left\{\theta;\ G_q\ (q,\theta) - c \leqslant 0\right\}$$

Or, en dérivant en $q$ l'expression (8.b) on obtient :

(11) $$G_q\ (q_0,\theta_0) = \int_0^{\infty} B_q\ (q_0)\ e^{-\rho\ t} dt + \theta_0 \int_0^{\infty} A_q\ (\bar{q} - q_0)\ e^{(\alpha-\rho)\ t} dt$$

Sachant que $A\ (\bar{q} - q)$ est décroissant en $q$, le coefficient de $\theta_0$ est négatif ou nul. Par conséquent, $\Omega_{VAN}$ est de la forme $[\theta_{VAN}, +\infty[$. D'après (10.b) on en déduit que $\Omega$ est également de la forme $[\theta_\tau, +\infty[$ où $\theta_\tau \leqslant \theta_{VAN}$ est le seuil de $\theta$ en deçà duquel le niveau d'exploitation de la ressource est augmenté. Le niveau de ce seuil, et par suite la règle d'exercice de l'option, dépend des valeurs respectives de $\alpha$ et $\rho$ ainsi que de la différence entre $B_q\ (q)\ /\rho$ et $c$. Le *tableau 1* donne une synthèse des résultats pour des valeurs initiales de $q$ telles que le bénéfice actualisé $B_q\ (q)\ /\rho$ résultant de la mise en exploitation d'une unité marginale de ressource est strictement supérieur à son coût $c$ de mise en exploitation. Dans le cas où $B_q\ (q)\ /\rho$ est inférieur ou égal à $c$ il y attente pour toute valeur positive de $\theta$[4]. Ces résultats sont détaillés dans le tableau 1.

### 3.1.2 **Cas** $\alpha < 0$

On suppose pour l'instant $\sigma \neq 0$. La solution de (11) est $B_q\ (q)\ /\rho + \theta\ A_q\ (\bar{q} - q)\ /\ (\rho - \alpha)$. Afin de déterminer le seuil optimal $\theta_\tau$ en fonction de $q$ il faut déterminer $V\ (q,\theta)$. Or, pour tout $\theta$ appartenant à l'intérieur de la zone d'attente, $V\ (q,\theta)$ fluctue librement et la programmation dynamique [5] permet d'écrire :

(12) $$V\ (q_0,\theta_0) = e^{-\rho\ \Delta t}\ E_0\left[V\ (q_0,\theta_{\Delta t})\right]$$

---

4. Partant d'une valeur initiale positive de $\theta$ la continuité du processus implique que $\theta$ restera toujours positif ou nul. En effet, quand le processus s'annule il reste nul pour toujours et ne peut donc pas devenir négatif. Le cas où la valeur initiale de $\theta$ est négatif ne présente pas d'intérêt dans la mesure où la ressource dans son état préservé est alors perçue négativement.

5. Pour une introduction à la programmation dynamique et au contrôle optimal stochastique, voir KAMIEN et SCHWARTZ [1991].

En faisant tendre $\Delta t$ vers une valeur $dt$ infiniment petite on obtient l'équation de Bellman suivante :

$$\text{(13.a)} \qquad \frac{1}{2}\sigma^2\,\theta^2\,V_{\theta\theta} + \alpha\,\theta\,V_\theta - \rho\,V = 0 \quad \forall\theta \in \Omega$$

$V_\theta$ et $V_{\theta\theta}$ désignent les dérivées premières et secondes de $V$ en $\theta$. Les conditions terminales associées à (13.a) sont obtenues à partir des caractéristiques de $V\,(q,\theta)$ aux bornes de la zone d'attente $\Omega$ :

$$\text{(13.b)} \qquad \lim_{\theta\to\infty} V\,(q,\theta) = 0$$

$$\text{(13.c)} \qquad V\,(q,\theta_\tau) = B_q\,(q)\,/\,\rho + \theta_\tau\,A_q\,(\bar{q} - q)\,/\,(\rho - \alpha) - c$$

$$\text{(13.d)} \qquad V_\theta\,(q,\theta_\tau) = A_q\,(\bar{q} - q)\,/\,(\rho - \alpha)$$

Quand elle tend vers l'infini, la valeur unitaire $\theta$ de l'aménité reste infinie [6], il n'est donc plus optimal d'accroître $q$ et il y a attente pour toujours. La condition (13.b) impose, par conséquent, que la valeur d'option marginale s'annule. Dans la terminologie proposée par DUMAS [1991], la condition (13.c) est une condition de croisement (*value matching*) valable pour tout seuil donné *a priori*. (13.d) est en revanche une condition d'optimalité du seuil $\theta_\tau$ appelée condition de lissage [7] *(smooth pasting)*. La solution de l'équation (13.a) est de la forme $V\,(q,\theta) = C_1\,(q)\,\theta^{\beta_1} + C_2\,(q)\,\theta^{\beta_2}$. Les paramètres $\beta_1$ et $\beta_2$ sont les racines de la fonction quadratique :

$$\text{(14)} \qquad Q(\beta) = \frac{\sigma^2}{2}\beta^2 + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\beta - \rho$$

Comme $Q\,(0)$ est strictement négatif ces racines sont de signe opposé : $\beta_1 < 0$ et $\beta_2 > 0$. Les termes $C_1\,(q)$, $C_2\,(q)$ ainsi que $\theta_\tau$ sont déterminés à partir de (13.b) (13.c) et (13.d). D'après (13.b) le terme $C_2\,(q)$ est nul. (13.d) et (13.c) permettent après arrangement d'obtenir $\theta_\tau$ en fonction de $q$ et par suite $C_1\,(q)$ :

$$\text{(15.a)} \qquad \theta_\tau\,(q) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}\left(\frac{B_q\,(q)\,/\,\rho \;- c}{-A_q\,(\bar{q} - q)\,/\,(\rho - \alpha)}\right)$$

$$\text{(15.b)} \qquad C_1\,(q) = \frac{A_q\,(\bar{q} - q)}{\rho - \alpha}\,\frac{1}{\beta_1}\,(\theta_\tau\,(q))^{1-\beta_1}$$

Sachant $\alpha < 0$, $\beta_1 < 0$ et $A_q\,(\bar{q} - q) < 0$, pour que $\theta_\tau\,(q)$ soit positif, il faut, et il suffit de vérifier l'inégalité $B_q\,(q)\,/\,\rho > c$. Trois possibilités appa-

6. Ce résultat peut être justifié en étudiant le processus $\vartheta = 1/\theta$. En effet, après application du lemme d'Ito, on montre que ce processus est défini par $d\vartheta = (2\sigma - \alpha)\;\vartheta\;dt - \sigma\;\vartheta\;d\omega$ et vérifie $d\vartheta = 0$ en $\vartheta = 0$ : dans le cas limite où $\theta$ tend vers l'infini, il reste infini.

7. Pour une présentation approfondie de ces conditions terminales et une étude de leur caractère suffisant, voir BREKKE et OKSENDAL [1991].

raissent :

– L'inégalité est vérifiée sur $[0, \bar{q}]$ : la concavité de $B(q)$ et $A(\bar{q} - q)$ en $q$ permet de vérifier que $\theta_\tau(q)$ est décroissant en $q$ comme à la figure 2 et non pas constant comme dans le modèle de ARROW et FISHER.

– À partir d'un niveau $q_{max} \in ]0, \bar{q}[$ l'inégalité n'est pas vérifiée : il n'est jamais optimal d'exploiter plus que $q_{max}$ unités de la ressource et la frontière représentée à la figure 2 coupe l'axe des ordonnées en $q = q_{max}$.

– L'inégalité n'est jamais vérifiée pour $q \in ]0,\bar{q}[$ : il y a attente pour toute valeur positive de $\theta$.

Le coût de mise en exploitation n'est pas à l'origine de l'attente puisqu'on a toujours $B_q(q)/\rho > c$ pour $c = 0$. En outre, Il est toujours optimal d'exploiter immédiatement la première unité de ressource lorsque le dommage marginal lié à sa destruction est nul ($\lim_{q \to 0} A_q(\bar{q} - q) = 0$) ou lorsque son bénéfice marginal d'exploitation est infini ($\lim_{q \to 0} B_q(q) = \infty$). La frontière admet alors l'axe des abscisses comme asymptote. Dans les autres cas, il n'est optimal d'exploiter cette première unité que pour $\theta \leqslant \theta_\tau(0)$. Enfin, d'après (15.b), $C_1(q) \geqslant 0$. La valeur d'option totale des $\bar{q} - q_0$ unités non encore exploitées est donc bien positive :

$$VO(q_0,\theta_0) = \int_{q_0}^{\bar{q}} C_1(q)\ (\theta_0)^{\beta_1}\ dq \geqslant 0 \tag{16}$$

Pour $\sigma = 0$, (13.a) devient $\alpha\, V_\theta - \rho\, V = 0$ et $V(q,\theta)$ est de la forme $C_3(q)\ \theta^{\beta_3}$ avec $\beta_3 = \rho/\alpha$. Comme $\alpha < 0$, on a $\beta_3 < 0$ et $\theta$ ne peut que décroître. Les conditions (13.c) et (13.d) sont alors utilisées et donnent le même seuil $\theta_\tau(q)$ qu'en (15.a) avec toutefois $\beta_3$ au lieu de $\beta_1$. D'après (14), pour $\alpha < 0$, $Q(\rho/\alpha)$ tend vers zéro quand $\sigma$ tend vers zéro. La racine négative de $Q(\beta)$ tend donc vers $\beta_3$ et par conséquent le cas déterministe correspond à la limite du cas stochastique pour $\sigma$ tendant vers zéro.

### 3.1.3 **Cas** $0 \leqslant \alpha < \rho$

Lorsque $\sigma \neq 0$, la solution reste inchangée par rapport au cas précédent. En revanche, pour $\sigma = 0$ la valeur de $\theta$ ne peut que croître ou rester constante. La condition terminale (13.b) doit donc être utilisée. Comme $\beta_3$ est positif, elle implique que $C_3(q)$ (et par suite la valeur d'option) est nul. La zone d'attente $\Omega$ se réduit alors à celle du critère de la valeur actualisée nette définie en (10.b) et le seuil $\theta_\tau$ est confondu avec le seuil $\theta_{VAN}$ :

$$\theta_\tau(q) = \frac{B_q(q)/\rho\ - c}{-A_q(\bar{q} - q)/(\rho - \alpha)} \tag{17}$$

Si les valeurs initiales de $\theta$ et $q$ sont telles que $\theta < \theta_\tau(q)$, le niveau d'exploitation est augmenté de $\Delta q$ de sorte que $G_q(q + \Delta q,\theta) = c$ et $\theta = \theta_\tau(q + \Delta q)$ puis n'est plus jamais modifié. Sinon, il y a attente pour toujours.

### 3.1.4 Cas $\rho \leqslant \alpha$

Le premier terme du membre de droite de (11) est égal à $B_q(q)/\rho$. En remplaçant l'horizon temporel infini par une date $T$ finie, puis, en étudiant le cas limite où $T$ tend vers l'infini, on vérifie que le second terme tend vers $-\infty$ pour $A_q(\bar{q}-q) < 0$. Ce résultat tient à ce que le taux d'actualisation est trop faible pour contrebalancer le taux de croissance moyen des bénéfices de préservation. La relation $F_q(q,\theta) \leqslant c$ devient $V(q,\theta) \geqslant -\infty - c$, elle est vérifiée pour toute valeur de $q$ et $\theta$ et il y a donc toujours attente.

## 3.2 Effet d'irréversibilité et quasi-valeur d'option

En ignorant l'incertitude on introduit un biais dans la valeur du seuil de préservation de la ressource : c'est l'effet d'irréversibilité. L'irréversibilité de l'exploitation empêche tout retour en arrière. À l'inverse du cas certain, en présence d'incertitude la décision d'exploiter peut donc *ex post* se révéler non optimale. La prise en compte de l'effet d'irréversibilité revient à exiger par rapport au cas certain une marge supplémentaire pour la valorisation de la ressource dans son état protégé en présence d'incertitude : c'est la quasi-valeur d'option. Ces deux notions sont présentées et généralisées à la comparaison de niveaux d'incertitude différents.

### 3.2.1 Effet d'irréversibilité

Selon l'effet d'irréversibilité tel qu'il est défini par HENRY [1974] et discuté sous une forme voisine par ARROW et FISHER [1974], le seuil de préservation d'une ressource obtenu en prenant en compte l'incertitude est plus restrictif que celui obtenu sans prendre en compte l'incertitude. En d'autres termes, l'incertitude favorise la préservation de la ressource. Ce résultat est repris sous la forme de la proposition suivante :

PROPOSITION 2 : Pour une même valeur de $q$ le seuil $\theta_\tau(q)$ dans le cas incertain est inférieur au seuil dans le cas certain. C'est l'effet d'irréversibilité.

*Preuve* : Pour $\alpha \geqslant \rho$ il y a attente à perpétuité dans les deux cas. Pour $\rho > \alpha \geqslant 0$ il faut comparer (17) et (15.a). Or, $\beta_1 < 0$ implique $\beta_1/(\beta_1 - 1) \in ]0;1[$ : le seuil dans le cas certain est supérieur au seuil dans le cas incertain. Pour $\alpha < 0$ il suffit de comparer $\beta_3$ et $\beta_1$. On a $\beta_3 < 0$ et $Q(\beta_3) > 0$. Sachant que $Q(\beta)$ admet deux racines de signes opposés et que le coefficient du terme au carré est positif on a donc $\beta_3 < \beta_1 < 0$. Comme $\beta/(\beta - 1)$ est décroissant en $\beta$, pour une même valeur de $q$ le seuil du cas incertain est donc inférieur au seuil du cas certain. ■

Ce résultat peut être généralisé à la comparaison de différents degrés d'incertitude :

PROPOSITION 3 : Plus l'incertitude est élevée plus le seuil $\theta_\tau$ de la valeur de l'aménité retirée de la ressource en deçà duquel il est optimal d'accroître le niveau d'exploitation $q$ est faible.

*Preuve* : L'expression (15.a) du seuil optimal fait apparaître que l'incertitude influence la décision de préserver la ressource par un unique canal : le paramètre $\beta_1$ qui dépend lui-même de $\sigma$, seul paramètre lié à l'incertitude. Il est aisé de vérifier que $\partial\theta_\tau/\partial\beta_1 \leqslant 0$. En évaluant la fonction quadratique (14) en $\beta_1$ on a $Q(\beta_1(\sigma),\sigma) = 0$. Cette équation étant vraie quelque soit $\sigma$ elle reste vraie une fois différenciée. Sachant que $\partial Q/\partial\beta$ est négatif en $\beta_1$ et que $\partial Q/\partial\sigma = \sigma\ \beta_1\ (\beta_1 - 1)$ est positif on en déduit le signe de $\partial\beta_1/\partial\sigma$ puis celui de $\partial\theta_\tau/\partial\sigma$ :

(18.a) $$\frac{\partial\beta_1}{\partial\sigma} = -\frac{\partial Q/\partial\sigma}{\partial Q/\partial\beta} = -\frac{\sigma\beta_1\ (\beta_1 - 1)}{\partial Q/\partial\beta} \geqslant 0$$

(18.b) $$\frac{\partial\theta_\tau}{\partial\sigma} = \frac{\partial\theta_\tau}{\partial\beta_1}\frac{\partial\beta_1}{\partial\sigma} \leqslant 0$$

En considérant que le degré d'incertitude est mesuré par $\sigma$, on obtient le résultat énoncé. ■

Ceci ne veut toutefois pas dire qu'à un instant donné le niveau d'exploitation sera plus faible quand l'incertitude est forte. En effet, une forte incertitude implique de plus fortes fluctuations de $\theta$ de sorte que le seuil, même plus faible, peut être atteint plus vite [8]. Les Propositions 2 et 3 sont cohérentes avec les résultats obtenus dans les modèles de décisions d'investissement irréversibles en présence de rendements décroissants (voir notamment CABALLERO [1991]).

### 3.2.2 Quasi-valeur d'option

De la statique comparative de $\beta_1$ donnée en (18.a), il est possible de déduire la statique comparative de la valeur d'option marginale $V(q,\theta) = C_1(q)\ \theta^{\beta_1}$ par rapport à $\sigma$. En effet, après arrangements, on a :

(19) $$\frac{\partial V}{\partial\sigma} = \frac{\partial\beta_1}{\partial\sigma} C_1(q)\,\theta^{\beta_1}\left[-\frac{1}{\beta_1} + \ln(\theta) - \ln(\theta_\tau\ (q))\right] \geqslant 0$$

Le signe de cette dérivée se déduit de (18.a), de $\beta_1 < 0$ et du fait qu'à l'intérieur de la zone d'attente $\theta$ est supérieur au seuil $\theta_\tau\ (q)$. La valeur d'option marginale augmente donc avec l'incertitude. Toutefois, l'étude du cas déterministe met en évidence que, même si elle varie en fonction du degré d'incertitude, la valeur d'option existe aussi (pour $\alpha < 0$) en l'absence d'aléas. La valeur d'option ne trouve donc pas son origine dans l'incertitude mais dans l'irréversibilité et l'actualisation (elle disparaît pour $\rho = 0$). Partant de ce constat, il est légitime de chercher à introduire une notion plus particulièrement destinée à mesurer l'effet de l'incertitude. C'est la notion de quasi-valeur d'option présentée par

8. Pour déterminer lequel des deux effets l'emporte, il faudrait, par exemple, calculer le temps d'attente moyen avant franchissement du seuil. Ce calcul, trop long pour être présenté ici, est notamment détaillé par KARLIN et TAYLOR [1981], page 192.

ARROW et FISHER [1974]. Généralisée à la comparaison de situation caractérisées par des degrés d'incertitude différents elle se définit comme suit :

DÉFINITION : Soit deux situations caractérisées par un degré d'incertitude différent : $\sigma' < \sigma''$. La quasi-valeur d'option est le supplément de valeur qu'il faut donner à la ressource en son état préservé dans la situation où $\sigma = \sigma'$ pour obtenir un seuil égal à celui de la situation où $\sigma = \sigma''$. ■

ARROW et FISHER [1974] limitent leur définition au cas où $\sigma' = 0$. Les valeurs de $\beta_1$ respectivement associées à $\sigma'$ et $\sigma''$ vérifient $\beta' < \beta''$. La quasi-valeur d'option est nulle quand les valeurs des seuils ne diffèrent pas, donc quand $\alpha \geqslant \rho$. Seul le cas $\alpha < \rho$ nécessite d'être détaillé. Pour $\sigma = \sigma'$ on ajoute à la valeur de la ressource dans son état protégé un terme $s\ (\bar{q} - q)$ où $s$ est la quasi-valeur d'option [9]. La fonction $G\,(q_0,\theta_0)$ devient :

$$(20)\quad G\,(q_0,\theta_0) = E_0\left[\int_0^{\infty} (B\,(q_0) + A\,(\overline{q} - q_0)\ \theta_t + s\ (\overline{q} - q_0))\, e^{-\rho\, t} dt\right]$$

Il faut donc ajouter $s\ (\bar{q} - q_0)\,/\rho$ à la solution de (11). Le seuil optimal pour $\sigma = \sigma'$ s'écrit désormais :

$$(21)\qquad \theta'\,(q) = \frac{\beta'}{\beta' - 1}\left(\frac{B_q\,(q)\,/\rho\ - c\ - s/\rho}{-A_q\,(\bar{q} - q)\,/\,(\rho - \alpha)}\right)$$

Pour que ce seuil soit égal au seuil $\theta''\,(q)$ obtenu avec $\sigma = \sigma''$ et dont l'expression est inchangée par rapport à $\theta_\tau\,(q)$ il faut :

$$(22)\qquad s = \rho\frac{\beta'}{\beta' - 1}\left(\frac{\beta'}{\beta' - 1} - \frac{\beta''}{\beta'' - 1}\right)\left(\frac{B_q\,(q)}{\rho} - c\right)$$

le dernier terme entre parenthèses est supposé positif, c'est-à-dire que l'on se place dans le cas où l'attente perpétuelle n'est pas optimale et donc $\theta''\,(q) > 0$. Sachant que l'expression $\beta/\,(\beta - 1)$ est décroissante en $\beta$ et que $\beta' < \beta'' < 0$ on conclut que $s > 0$. On vérifie également qu'à $\sigma'$ donné $s$ est croissante en $\beta''$ donc en $\sigma''$. La comparaison entre une situation sans incertitude et une situation avec incertitude se fait de manière identique si $\alpha < 0$. Pour $\rho > \alpha \geqslant 0$ le seuil donné en (17) pour le cas certain devient avec la quasi-valeur d'option :

$$(23)\qquad \theta'\,(q) = \frac{B_q\,(q)\,/\rho\ - c - s/\rho}{-A_q\,(\bar{q} - q)\,/\,(\rho - \alpha)}$$

9. HANEMANN [1989] discute de l'opportunité d'utiliser une quasi-valeur d'option par unité de ressource ou forfaitaire. Dans la mesure où la détermination se fait à partir de $F_q$ et non $F$, une quasi-valeur d'option de type forfaitaire n'aurait ici aucune utilité.

Pour que ce seuil soit égal au seuil $\theta''(q)$ du cas incertain qui est inchangé par rapport à $\theta_\tau(q)$ il faut :

$$s = -\rho \left(\frac{1}{\beta'' - 1}\right)\left(\frac{B_q(q)}{\rho} - c\right) \tag{24}$$

Comme $\beta'' < 0$ la quasi-valeur d'option est là aussi positive. (22) et (24) permettent de formuler la proposition 4.

> PROPOSITION 4 : La quasi-valeur d'option, c'est-à-dire la valeur qu'il faut ajouter par unité de ressource préservée pour maintenir le seuil constant lorsque le degré d'incertitude est abaissé, est toujours positive.

Une façon symétrique de déterminer la quasi-valeur d'option dans le modèle présenté consisterait à rechercher le supplément de bénéfice par unité de ressource exploitée nécessaire pour que le seuil en présence d'incertitude soit identique à celui du cas certain. Comme le notent CAPOZZA et HESLEY [1990], la quasi-valeur d'option peut alors se définir comme une « *prime d'irréversibilité* » par unité exploitée exigée en présence d'incertitude. Cette définition permet de faire un certain parallèle avec la prime de risque résultant de l'aversion pour le risque (non introduite ici). La quasi-valeur d'option est une mesure monétaire de l'effet d'irréversibilité. Or, dans la littérature cet effet a été plus particulièrement étudié en parallèle avec la notion d'information. Par exemple, FREIXAS et LAFFONT [1984] proposent une analyse en terme de complémentarité entre information et flexibilité. Dans notre contexte, la notion de flexibilité (ou non flexibilité) est équivalente à celle d'irréversibilité : préserver la ressource est un choix flexible au sens où il ne restreint pas l'éventail des choix futurs (continuer à préserver ou exploiter), à l'inverse, exploiter la ressource n'est pas un choix flexible puisqu'il exclut toute préservation future. En outre, le cas certain peut être interprété comme un cas où la décision est prise au vu de la seule information dont on dispose aujourd'hui. Les valeurs futures de $\theta$ sont ainsi remplacées par leur prévision $E_0[\theta_t]$ conditionnelle à l'information $\theta_0$ disponible à la date courante $t = 0$. Comme les variations du processus de Wiener sont nulles en espérance mathématique, ceci revient à poser $\sigma = 0$. En revanche, dans le cas incertain l'accroissement de l'information au cours du temps est prise en compte : on intègre le fait qu'en *t* la valeur de $\theta_t$ peut être différente de sa prévision $E_0[\theta_t]$ faite en $t = 0$ et que cette valeur sera d'autant mieux connue qu'on se rapproche de la date *t*. Ainsi que le souligne HANEMANN [1989], la quasi-valeur d'option s'interprète alors comme la valeur de l'information acquise au cours du temps, elle correspond à la notion de valeur d'option employée dans la littérature traitant de la flexibilité et de l'information (WILLINGER [1989]). La valeur d'option telle qu'elle est définie dans le modèle présenté (et dans les modèles d'option réelle d'une manière générale) est, quant à elle, assimilable à la valeur de la flexibilité. En effet, la condition $F_q(q,\theta) \leqslant c$ définissant la zone d'attente s'écrit aussi $G_q(q,\theta) - c \leqslant V(q,\theta)$ : il est optimal d'attendre tant que le bénéfice net d'exploitation d'une unité supplémentaire de ressource est inférieur à son coût d'opportunité (sa valeur d'option). La valeur d'option est associée au report de la mise en exploitation, c'est-à-dire à une décision flexible par rapport à la destruction. La perte de la valeur d'option correspond donc bien à la perte de flexibilité engendrée par la destruction de l'unité de ressource en question.

# 4 Décision optimale en présence de rendements variables

Un cas intermédiaire entre le développement progressif obtenu à la section précédente et le développement indivisible de ARROW et FISHER consisterait à mettre en exploitation, dans un premier temps, une quantité non marginale de ressource en une seule fois, puis, à procéder, dans un deuxième temps, à des accroissements à la marge. DIXIT [1995] montre que de telles règles peuvent apparaître en matière d'investissement irréversible lorsque le flux de bénéfice exhibe des rendements croissants puis décroissants. Afin de mettre en évidence l'influence de cette hypothèse, nous nous limitons, ici, à des spécifications linéaires $A(\bar{q}-q)=\bar{q}-q$ et $C\left(q'-q\right)=c\times\left(q'-q\right)$ des fonctions d'aménité et de coût d'ajustement du niveau d'exploitation. Le bénéfice d'exploitation de la ressource $B(q)$ représenté à la figure 3 est, quant à lui, supposé convexe sur un intervalle $\left[0,\,\hat{q}\right[$ et concave sur $\left[\hat{q},\,\infty\right[$. Cette spécification

FIGURE 3
***Bénéfice d'exploitation avec rendements croissants puis décroissants***

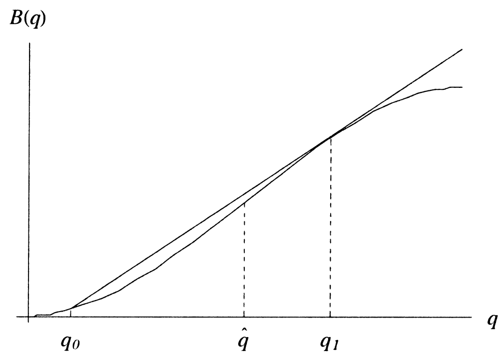
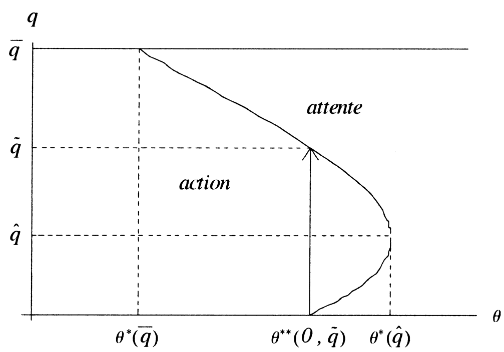



FIGURE 4
***Forme de la frontière avec rendements croissants puis décroissants***



correspond plus particulièrement au cas des voies de communication (autoroutes, voies ferrées, canaux) pour lesquelles existent des externalités de réseau importantes en deçà d'une certaine taille du réseau.

Sur l'intervalle $\left[\hat{q},\bar{q}\right]$ la proposition 1 reste vraie et la frontière est identique à celle des sections précédentes. Compte tenu des spécifications linéaires de $A\,(\bar{q}-q)$ et $C\,(q\prime-q)$ le seuil donné en (15.a) devient :

(25) $$\theta_\tau\,(q) = \frac{\beta_1}{\beta_1-1}\frac{1}{\rho-\alpha}\left(B_q\,(q)\,/\rho\ -c\right)$$

En revanche, sur $\left[0,\,\hat{q}\right[$ la fonction $F\,(q_0,\,\theta_0)$ n'est pas concave et l'accroissement optimal de $q$ n'est pas « *a priori* » infinitésimal. Afin de déterminer la règle de décision, le niveau d'exploitation $q'$ auquel il est optimal de passer une fois la frontière atteinte est pour l'instant supposé exogène. La valeur d'option $VO\,(q,\theta)$ est à nouveau définie comme étant la différence $F\,(q,\theta)-G\,(q,\theta)$. La zone d'attente est constituée de l'ensemble des points $\{\theta,\,q\}$ tels que $F\,(q,\theta)\geqslant F\left(q',\theta\right)-c\ \left(q'-q\right)$ soit avec la valeur d'option :

(26) $$VO\,(q,\theta)-VO\left(q',\theta\right)\geqslant G\left(q',\theta\right)-G\,(q,\theta)-c\ \left(q'-q\right)$$

Pour $\alpha\geqslant\rho$ le terme de droite de cette inégalité tend vers $-\infty$ et l'attente est toujours optimale. Quand $\alpha<\rho$ la valeur d'option satisfait sur l'intérieur de la zone d'attente une équation de Bellman similaire à (13.a) :

(27.a) $$\frac{1}{2}\sigma^2\,\theta^2\,VO_{\theta\theta}+\alpha\,\theta\,VO_\theta-\rho\,VO=0\quad\forall\theta\in\Omega$$

La forme générale de la solution de (27.a) est également $VO\,(q,\theta)=K_1\,(q)\ \theta^{\beta_1}+K_2\,(q)\ \theta^{\beta_2}$ avec $\beta_1<0$ et $\beta_2>0$. Les conditions terminales associées à (27.a) sont cette fois :

(27.b) $$\lim_{\theta\to\infty}VO\,(q,\theta)=0$$

(27.c) $$VO\,(q,\theta_\tau)+B\,(q)\,/\rho+\theta_\tau\ \ (\bar{q}-q)\,/\,(\rho-\alpha)=$$
$$VO\left(q',\theta_\tau\right)+B\left(q'\right)/\rho\ +\theta_\tau\ \ (\bar{q}-q\prime)\,/\,(\rho-\alpha)-c\ \ (q\prime-q)$$

(27.d)
$$VO_\theta\,(q,\theta_\tau)+(\bar{q}-q)\,/\,(\rho-\alpha)=VO_\theta\left(q',\theta_\tau\right)+(\bar{q}-q\prime)\,/\,(\rho-\alpha)$$

La condition (27.b) est similaire à (13.b) tandis que (27.c) et (27.d) sont les conditions de « *value matching* » et « *smooth pasting* » du problème. Le seuil optimal a pour expression :

(28) $$\bar{\theta}_\tau\left(q,q'\right)=\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\frac{1}{\rho-\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\frac{B\left(q'\right)-B\,(q)}{q\prime-q}-c\right)$$

seule l'utilisation de la variation en niveau de la fonction de bénéfice d'exploitation au lieu de sa variation marginale distingue (28) de (25). Il reste à déterminer la valeur optimale de $q'$. Cette valeur est solution de la maximisation en $q'$

de $F\left(q',\theta\right) - c\ \left(q' - q\right)$ sous les contraintes $q' \geqslant q$ et $q' \leqslant \bar{q}$. En supposant ces contraintes satisfaites, $q'$ doit vérifier la condition d'optimalité du premier ordre $F_q\left(q',\theta\right) = c$. La condition du second ordre requiert de plus que $F\left(q',\theta\right)$ soit localement concave en $q'$. Or, on sait que sur l'intervalle $\left[\hat{q},\, \bar{q}\right]$ les points appartenant à la frontière peuvent répondre à ces conditions. Considérons l'un d'entre eux caractérisé par un niveau d'exploitation $q_1$ et le seuil associé $\theta_\tau\ (q_1)$ donné par (25). Lors d'un accroissement du niveau d'exploitation, il est optimal de passer à ce point pour le niveau d'exploitation initial $q_0 < \hat{q}$ tel que $\bar{\theta}_\tau\ (q_0,q_1) = \theta_\tau\ (q_1)$, c'est-à-dire tel que le seuil associé coïncide avec $\theta_\tau\ (q_1)$. L'égalisation des deux seuils revient en fait à résoudre en $q_0$ l'équation :

$$\frac{B\ (q_1) - B\ (q_0)}{q_1 - q_0} = B_q\ (q_1) \tag{29}$$

Le taux de variation de $q_0$ à $q_1$ du bénéfice d'exploitation doit être égal au bénéfice marginal d'exploitation en $q_1$. À partir de la figure 3 on vérifie que, pour $q_0$ donné, cela équivaut à chercher le point $q_1$ dont la tangente à $B\,(q)$ coupe la courbe en $q = q_0$. Ce principe revient à convexifier $B\ (q)$ pour $q \geqslant q_0$, les valeurs inférieures n'ayant pas d'intérêt compte tenu de l'irréversibilité. Il est important de noter que, d'après cette construction, on a $B_q\ (q_0) < B_q\ (q_1)$ et bien sûr $B_{q\ q}\ (q_1) \leqslant 0$. En effet, différencions (29) en $q_0$ et $q_1$ afin d'obtenir :

$$\frac{dq_0}{dq_1} = B_{qq}\ (q_1)\ \frac{q_1 - q_0}{B_q\ (q_1) - B_q\ (q_0)} \leqslant 0 \tag{30}$$

Or, sur $\left[\hat{q},\, \bar{q}\right]$ la frontière est décroissante donc $dq_1/d\theta \leqslant 0$. Avec (30) on obtient alors $dq_0/d\theta \geqslant 0$ : la branche inférieure de la frontière est croissante comme le montre la figure 4. Le niveau $\tilde{q}$ qu'il est optimal de mettre en exploitation en une seule fois partant de $q_0 = 0$ correspond d'après (29) au niveau de $q$ pour lequel bénéfices moyen et marginal d'exploitation de la ressource sont égaux. Si $\bar{\theta}_\tau\ (0,\tilde{q}) > \theta_\tau\ (\bar{q})$ il est optimal de passer en $\tilde{q}$ dès que $\theta$ devient inférieur à $\bar{\theta}_\tau\ (0,\tilde{q})$ puis de procéder à des accroissements infinitésimaux. Par conséquent, quand la règle de décision optimale est appliquée, seule la partie de la frontière au-dessus de $q = \tilde{q}$ et associée à des rendements d'exploitation décroissants est pertinente. Sur cette partie de frontière les résultats énoncés à la section précédente restent vrais. Si, en revanche, $\bar{\theta}_\tau\ (0,\tilde{q}) \leqslant \theta_\tau\ (\bar{q})$ il est optimal d'exploiter la totalité de la ressource en une seule fois dès que $\theta$ passe en dessous du seuil $\theta_\tau$ (0). On retrouve alors un cas de développement indivisible, proche de celui de ARROW, FISHER et HENRY mais dû à des rendements d'exploitation croissants plutôt que constants.

# 5 Conclusion

Parce qu'elle offre un cadre d'analyse complet de l'effet d'irréversibilité en présence d'incertitude, la théorie des options réelles s'avère être un outil utile et efficace pour la modélisation des choix en dynamique et incertain. Cette théorie a permis, ici, de reprendre l'analyse du modèle de préservation de l'environnement de ARROW et FISHER, elle présente deux intérêts majeurs. Dans un premier temps, elle permet de retrouver dans un cadre général les résultats établis par ces auteurs : la non prise en compte de l'incertitude résulte bien en une surévaluation de la valeur seuil des bénéfices de préservation en deçà de laquelle il est optimal d'accroître le niveau d'exploitation de la ressource ; cette surévaluation peut être corrigée par l'introduction d'une quasi-valeur d'option qui est toujours positive. L'ensemble de ces résultats est de plus étendu à la comparaison de situations ayant des degrés d'incertitude différents. Dans un deuxième temps, elle fournit une méthode pour le calcul des seuils dans la pratique. En effet, la valeur seuil des bénéfices de préservation est exprimée comme une fonction décroissante du niveau de ressource exploitée, la forme générale de la frontière entre zone d'attente et zone d'action a ainsi pu être clairement établie. L'exposé a été limité au cas d'une incertitude affectant la valeur de préservation de la ressource. L'incertitude portant sur les bénéfices d'exploitation de la ressource peut être étudiée d'une manière exactement symétrique. Plus généralement, l'exemple présenté dans ce travail semble inciter à la poursuite ou au développement de multiples applications des modèles d'options réelles en matière d'économie des ressources et de l'environnement.

## • Références bibliographiques

ARROW K.J., FISHER A.C. (1974). – « Environmental Preservation, Uncertainty, and Irreversibility », *Quarterly Journal of Economics*, 88, pp. 312-319.

BENTOLILA S., BERTOLA G. (1990). – « Firing Costs and Labour Demand: How Bad is Eurosclerosis », *Review of Economic Studies*, 61, pp. 223-246.

BERTOLA G., CABALLERO R.J. (1994). – « Irreversibility and Aggregate Investment », *Review of Economic Studies*, 57, pp. 381-402.

BOURDIEU J., COEURÉ B., SÉDILLOT B. (1997). – « Investissement, incertitude et irréversibilité : quelques développements récents de la théorie de l'investissement », *Revue Économique*, 48, pp. 23-53.

BREKKE K. A., OKSENDAL B. (1991). – « The High Contact Principle as a Sufficiency Condition for Optimal Stopping », in *Stochastic Models and Option Values*, D. Lund and B. Oksendal (eds), North Holland, New York.

CABALLERO R.J. (1991). – « On the Sign of the Investment-Uncertainty Relationship », *American Economic Review*, 81(1), pp. 279-288.

CAPOZZA D. R., HELSLEY R. W. (1990). – « The Stochastic City », *Journal of Urban Economics*, 28, pp. 187-203.

CORNES R. (1980). – « External Effects: an Alternative Formulation », *European Economic Review*, 14, pp. 307-321.

DIXIT A. (1991). – « A Simplified Treatment of the Theory of Optimal Regulation of Brownian Motion », *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15, pp. 657-673.

DIXIT-A. (1992). – « Investment and Hysteresis », *Journal of Economic Perspectives*, 6, pp. 107-132.

DIXIT A. (1995). – « Irreversible Investment with Uncertainty and Scale Economies », *Journal of Economic Dynamics and Control*, 19, pp. 327-350.

DIXIT A., PINDYCK R.S. (1994). – *Investment under Uncertainty*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

DUMAS B. (1991). – « Super Contact and Related Optimality Conditions », *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15, pp. 675-685.

FISHER A.C., HANEMANN W.M. (1987). – « Quasi-Option Value: Some Misconceptions Dispelled », *Journal of Environmental Economics and Management*, 14, pp. 181-190.

FREIXAS X., LAFFONT J.-J. (1984). – « On the Irreversibility Effect », in *Bayesian Models in Economics*, M. Boyer and R. E. Kihlstrom (eds), North Holland, Amsterdam.

GALIÈGUE X. (1996). – « Irréversibilité de l'investissement et valeur d'option », *Revue d'Économie Politique*, 106(5), pp. 843-863.

HANEMANN W.M. (1989). – « Information and the Concept of Option Value », *Journal of Environmental Economics and Management*, 16, pp. 23-37.

HARRISON J. M. (1985). – *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*, Wiley, New York.

HARISSON J.M., SELLKE T.M., TAYLOR A.J. (1983). – « Impulse Control of Brownian Motion », *Mathematics of Operations Research*, 8(3), pp. 454-466.

HARISSON J.M., TAKSAR M.I. (1983). – « Instantaneous Control of Brownian Motion », *Mathematics of Operations Research*, 8(3), pp. 439-453.

HENRY C. (1974). – « Investment Decisions under Uncertainty: The Irreversibility Effect », *American Economic Review*, 64(6), pp. 1006-1012.

KAMIEN M.I., SCHWARTZ N.L. (1991). – *Dynamic Optimization. The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Second Edition, North Holland, New York.

KARLIN S., TAYLOR K. (1981). – *A second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York.

LUND D. (1991). – « Financial and Non Financial Option Valuation », in *Stochastic Models and Option Values*, D. Lund and B. Oksendal (eds), North Holland, New York.

MERTON R.C. (1975). – « An Asymptotic Theory of Growth under Uncertainty », *Review of Economic Studies*, 42, pp. 375-393.

PINDYCK R.S. (1988). – « Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm », *American Economic Review*, 78(5), pp. 969-985.

PINDYCK R.S. (1991). – « Irreversibility, Uncertainty, and Investment », *Journal of Economic Literature*, 29, pp. 1110-1152.

WILLINGER M. (1989). – « Flexibilité et valeur de l'information », in *Flexibilité information et décision*, P. Cohendet and P. LLerena (eds), Economica, Paris.

## ANNEXE A

## Le modèle de ARROW et FISHER

Les variables et paramètres suivants sont définis :

$R$ : quantité totale de ressource disponible (normalisée à 1 dans la suite)

$d_1$ : quantité de ressource mise en exploitation à la première période ($0 \leqslant d_1 \leqslant R$).

$d_2$ : quantité de ressource mise en exploitation à la deuxième période ($0 \leqslant d_2 \leqslant R - d_1$).

$b_p$ : bénéfice, aléatoire, par unité de ressource préservée à la première période.

$b_e$ : bénéfice, aléatoire, par unité de ressource exploitée à la première période.

$\beta_p$ : bénéfice, aléatoire et conditionnel à $b_p$ et $b_e$, par unité de ressource préservée à la deuxième période.

$\beta_e$ : bénéfice, aléatoire et conditionnel à $b_p$ et $b_e$, par unité de ressource exploitée à la deuxième période.

$c_1$ : coût unitaire d'investissement associé à la mise en exploitation de la ressource à la première période.

$c_2$ : coût unitaire d'investissement associé à la mise en exploitation de la ressource à la deuxième période.

L'irréversibilité de l'exploitation implique que si la ressource est exploitée à la première période elle le sera également à la deuxième, soit en notant $D_t$ la quantité totale exploitée à la date $t$ : $D_1 = d_1$ et $D_2 = d_1 + d_2$. L'attention est portée sur la décision au début de la seconde période pour une quantité $d_1$ donnée *a priori*. Si $\beta_e - \beta_p > c_2$ alors il est optimal que la ressource soit entièrement exploitée : $d_2 = 1 - d_1$. Si $\beta_e - \beta_p < c_2$ alors il est optimal de conserver la ressource en l'état : $d_2 = 0$. On définit $z = \beta_e - \beta_p$ et $w = b_e - b_p - c_1$. L'événement $A$ est définit par $z > c_2$. Si $A$ se réalise le bénéfice total tiré d'une unité de la ressource est :

$$(31) \qquad b_p\ (1 - d_1) + b_e\ d_1 - c_1\ d_1 + \beta_e - c_2\ (1 - d_1) = w\ d_1 + c_2\ d_1 + b_p + \beta_e - c_2$$

Si $A$ ne se réalise pas le bénéfice total tiré d'une unité de la ressource est en revanche :

$$(32) \qquad b_p\ (1 - d_1) + b_e\ d_1 - c_1\ d_1 + \beta_p\ (1 - d_1) + \beta_e\ d_1 = w\ d_1 + z\ d_1 + b_p + \beta_p$$

En tenant compte de la définition de $A$, l'espérance mathématique (conditionnelle à $b_p$ et $b_e$) du bénéfice tiré de l'exploitation d'une quantité $d_1$ de ressource à la première période est donc :

$$(33) \qquad E\left[(w + \min\{c_2, z\})\, d_1 + b_p + \max\left\{\beta_e - c_2, \beta_p\right\}\right]$$

Dans le cas où le choix à la première période est $d_1 = 0$ (33) devient :

(34) $$E\left[b_p + \max\left\{\beta_e - c_2, \beta_p\right\}\right]$$

En espérance mathématique, la différence de bénéfice entre exploiter une quantité de ressource $d_1 > 0$ à la première période et ne pas exploiter la ressource à la première période ($d_1 = 0$) est :

(35) $$E\left[(w + \min\{c_2, z\})\ d_1\right]$$

Par conséquent, il est optimal d'exploiter toute la ressource dès la première période si le coefficient de $d_1$ est positif et de ne pas l'exploiter à cette période sinon. Soit en notant $d_1^*$ la décision optimale :

(36) $$\begin{aligned} d_1^* = 1 &\Leftrightarrow E\left[w + \min\{c_2, z\}\right] \geqslant 0 \\ d_1^* = 0 &\Leftrightarrow E\left[w + \min\{c_2, z\}\right] < 0 \end{aligned}$$

Afin d'étudier les effets conjoints de l'irréversibilité et de l'incertitude, le modèle est résolu dans un deuxième temps en ignorant l'incertitude, c'est-à-dire en remplaçant les variables aléatoires $w$ et $z$ par leur espérance mathématique. En notant alors $\tilde{d}_1$ la décision optimale, (36) devient :

(37) $$\begin{aligned} \tilde{d}_1 = 1 &\Leftrightarrow E[w] + \min\{c_2, E[z]\} \geqslant 0 \\ \tilde{d}_1 = 0 &\Leftrightarrow E[w] + \min\{c_2, E[z]\} < 0 \end{aligned}$$

Dans le cas où $c_2 < E[z]$ la décision repose sur le signe de $E[w] + c_2$, or en notant $P[.]$ la probabilité d'occurrence d'un événement :

(38) $$\min\{c_2, z\} \leqslant c_2 \text{ avec } P\left[\min\{c_2, z\} < c_2\right] > 0$$

d'où :

(39) $$E\left[\min\{c_2, z\}\right] < c_2 \text{ et donc } E\left[w + \min\{c_2, z\}\right] < E[w] + c_2$$

Parallèlement, dans le cas où $c_2 > E[z]$ la décision repose sur le signe de $E[w] + E[z]$, or :

(40) $$\min\{c_2, z\} \leqslant z \text{ avec } P\left[\min\{c_2, z\} < z\right] > 0$$

d'où :

(41) $$E\left[\min\{c_2, z\}\right] < E[z] \text{ et donc } E\left[w + \min\{c_2, z\}\right] < E[w] + z$$

De (39) et (41) on déduit :

(42) $$E\left[w + \min\{c_2, z\}\right] < E[w] + \min\{c_2, E[z]\}$$

donc :

(43) $$\tilde{d}_1 \geqslant d_1^*$$

Dans la mesure où il existe des valeurs *w* et *z* pour lesquelles le terme de droite de (42) sera négatif alors que le terme de gauche sera positif mais jamais l'inverse, le fait d'ignorer l'incertitude conduit à un critère moins restrictif que dans le cas avec incertitude et donc à exploiter davantage la ressource. La différence entre le terme de droite de (42) et le terme de gauche correspond au biais du critère résultant de la non prise en compte de l'incertitude. Lorsque cette différence, appelée quasi-valeur d'option, est soustraite au critère utilisé dans le cas où l'incertitude est ignorée la décision coïncide avec celle prise dans le cas où l'incertitude n'est pas ignorée. L'explication de la valeur d'option est que, en présence d'incertitude sur les effets de l'exploitation de la ressource, une fois les paramètres de coût et de bénéfice de la première période connus il sera toujours possible de mettre en exploitation la ressource si celle-ci a été protégée tandis qu'il ne sera pas possible, compte tenu de l'irréversibilité, de revenir à un état protégé pour les unités de ressource qui sont déjà en exploitation.

## Concavité de $F(q, \theta)$ en $q$ :

Soit trois situations caractérisées par une même valeur initiale de $\theta$ en $t = 0$ et par les valeurs initiales du niveau d'exploitation $q_1$, $q_2$ et $\tilde{q} = \lambda\, q_1 + (1-\lambda)\ q_2$ avec $\lambda \in [0,1]$. La suite des changements optimaux de $q$ dans les deux premières situations est respectivement notée $\Delta q_1^*$ et $\Delta q_2^*$. Dans la troisième situation les changements de $q$ sont imposés et donnés par $\Delta\tilde{q}_t = \lambda\ \Delta q_{1\,t}^* + (1-\lambda)\ \Delta q_{2\,t}^*\forall t$. Par construction le niveau de $q$ dans la troisième cas est donc donné par $\tilde{q}_t = \lambda\, q_{1\,t} + (1-\lambda)\ q_{2\,t}$ pour toute date $t \geqslant 0$. À partir du moment où on a $\Delta q_1^* \geqslant 0$, $\Delta q_2^* \geqslant 0$, $q_{1\,t} \leqslant \bar{q}$ et $q_{2\,t} \leqslant \bar{q}$ pour toute date $t \geqslant 0$, on a aussi $\Delta\tilde{q}_t \geqslant 0$ et $\tilde{q}_t \leqslant \bar{q}\forall t \geqslant 0$.

PROPOSITION B1 : Si $B\,(q)$ et $A\,(\bar{q}-q)$ sont concaves en $q$ et $C\,(\Delta q)$ convexe en $\Delta q$ alors $F\,(q,\theta)$ est concave en $q$.

*Preuve* : Compte tenu de la concavité de $B\,(q)$ et $A\,(\bar{q}-q)$ en $q$ et du fait que $\tilde{q}_t = \lambda\, q_{1\,t} + (1-\lambda)\ q_{2\,t}$, à toute date $t$ on a $B\,(\tilde{q}_t)$ supérieur ou égal à $\lambda\ B\,(q_{1\,t}) + (1-\lambda)\ B\,(q_{2\,t})$ et $A\,(\bar{q}-\tilde{q}_t)\ \theta_t$ supérieur ou égal à $\lambda\ A\ (\bar{q}-q_{1\,t})\ \theta_t + (1-\lambda)\ A\,(\bar{q}-q_{2\,t})\ \theta_t$ où $\theta_t$ est la valeur (indépendante du niveau d'exploitation de la ressource) du processus $\theta$ à la date $t$. De plus, d'après la construction de $\Delta\tilde{q}_t$ et la convexité de $C\,(\Delta q)$ (donc la concavité de $-C\,(\Delta q)$) on a $-C\,(\Delta\tilde{q}_t)$ supérieur ou égal à $-\lambda\ C\left(\Delta q_{1\,t}^*\right) - (1-\lambda)\ C\left(\Delta q_{2\,t}^*\right)$. On en déduit :

$$(44)\qquad E_0\left[\int_0^\infty (B(\tilde{q}_t) + A(\bar{q}-\tilde{q}_t)\theta_t)\, e^{-\rho\, t}\, dt - \sum_\tau e^{-\rho\tau}\, C(\Delta\tilde{q}_\tau)\right]$$

$$\geqslant \lambda\ E_0\left[\int_0^\infty (B(q_{1\,t} + A(\bar{q}-q_{1\,t})\theta_t)\, c^{-\rho\, t}\, dt - \sum_\tau e^{-\rho\tau}\, C(\Delta q_{1\,\tau}^*)\right]$$

$$+\,(1-\lambda)\ E_0\left[\int_0^\infty (B(q_{2\,t}) + A(\bar{q}-q_{2\,t})\theta_t)\, e^{-\rho\, t}\, dt - \sum_\tau e^{-\rho\tau}\, C(\Delta q_{2\tau}^*)\right]$$

Le premier terme à droite de l'inégalité est $\lambda\ F(q_1,\theta)$ et le second $(1-\lambda)\ F(q_2,\theta)$. De plus, $\Delta\tilde{q}$ n'étant pas *a priori* la suite des changements optimaux pour les conditions initiales $\tilde{q}$ et $\theta$ on a :

(45)

$$E_0\left[\int_0^\infty (B\,(\tilde{q}_t) + A\,(\bar{q}-\tilde{q}_t)\ \theta_t)\, e^{-\rho\ t} dt - \sum_\tau e^{-\rho\ \tau} C\,(\Delta\tilde{q}_\tau)\right] \leqslant F\,(\tilde{q},\theta)$$

On déduit des deux inégalités (44) et (45) la propriété de concavité de $F\,(q,\theta)$ en $q$ :

$$(46)\qquad F\,(\lambda\, q_1 + (1-\lambda)\ q_2,\theta) \geqslant \lambda\ F\,(q_1,\theta) + (1-\lambda)\ F\,(q_2,\theta)$$