ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 54 – 1999

Négociations et espérance d'utilité dépendante du rang

Jean-Max KOSKIEVIC *

RÉSUMÉ. – L'approche axiomatique des négociations (NASH [1950]) a été développée dans le paradigme de l'Espérance d'Utilité (EU). Cependant dans ce dernier, deux négociateurs ayant la même utilité marginale, auront nécessairement la même aversion pour le risque, et donc le même pouvoir de négociation. Nous montrons que, si les préférences sont non-EU, le pouvoir de négociation dépendra de l'intensité de l'effet de certitude de l'agent (mesuré par la dérivée au point un de sa fonction de perception des probabilités).

Bargaining Theory with Rank Dependent Expected Utility

ABSTRACT. – The Axiomatic bargaining theory (NASH [1950]) has been developed in the Expected Utility (EU) Paradigm. Nevertheless in this latter, two bargainers with the same marginal utility must have the same risk aversion and therefore the same bargaining power. We show that, when the Risk Preferences are non-EU, the bargaining power depends on the intensity of the agent's certainty effect (measured by the derivative at the point one of his probability perception function).

* Jean-Max KOSKIEVIC : EUREQua, Université de Paris I. Je remercie ZVI SAFRA pour ses commentaires et suggestions sur une version antérieure de cet article, ainsi que les deux rapporteurs anonymes.

1 Introduction

La solution de négociation axiomatique de NASH [1950] est un concept bien connu et largement appliqué dans de nombreuses disciplines de la théorie économique (économie fiscale, économie du bien-être, inégalités, économie du travail,...). Elle est construite pour 2 négociateurs qui maximisent des relations de préférences sur les loteries respectant la théorie de l'Espérance d'Utilité (EU) modélisées par des fonctions d'utilité VON NEUMANN-MORGENSTERN. Récemment, RUBINSTEIN, SAFRA et THOMSON [1992] (RST [1992]) ont redéfini le problème de négociation de NASH en utilisant la notion plus « naturelle » de préordre de préférences. Ces relations sont définies sur des loteries dont les gains sont choisis dans un ensemble donné d'alternatives de répartitions possibles du bien négocié et d'un résultat de désaccord obtenu par les deux joueurs en cas d'échec de la négociation. La *solution ordinale de* NASH qu'ils définissent est caractérisée par des axiomes qui portent uniquement sur les seules relations de préférences. Plutôt que de spécifier la solution de NASH comme le résultat qui maximise un produit d'utilités, la solution ordinale de NASH se caractérise comme un résultat immunisé contre toute objection efficace possible d'un joueur, c'est-à-dire une répartition du bien pour laquelle aucun des joueurs ne voudra ni extorquer ni concéder quelque unité de bien, si minime soit-elle, à l'autre joueur. RST [1992] éxaminent la famille de préférences pour laquelle il existe une unique solution ordinale et étendent le domaine de la solution afin de prendre en compte les préférences Espérance d'Utilité non-additive (non-EU), des développements récents dans la théorie de la décision dans le risque ont en effet montré que les décideurs ne maximisent pas toujours leur espérance d'utilité. Plus particulièrement dans ces modèles généralisant l'espérance d'utilité, le comportement envers la richesse dans le certain est totalement déconnecté du comportement sur le risque. L'application récente de ces modèles aux problèmes d'assurance ou de choix de portefeuille (DOHERTY et EECKHOUDT [1995]) a déjà permit de mieux comprendre et de rationaliser certains comportements jusqu'alors généralement interprétés comme « paradoxaux » ou « déviants ». Ainsi pour les choix d'assurance, ces modèles ont pu expliquer en terme de « pessimisme » pourquoi certains agents pouvaient souscrire une assurance totale même lorsque la prime est chargée, alors que la théorie de l'espérance d'utilité ne prédisait qu'une assurance partielle dans ces conditions.

La nécessité d'une déconnection complète entre comportement envers la richesse dans le certain et comportement sur le risque est particulièrement pertinente dans le cas de la théorie axiomatique des négociations. En effet, les agents impliqués dans un processus de négociation, doivent effectuer un difficile arbitrage entre deux types de comportements : ce que l'on pourrait appeler « l'appât du gain » qui les conduirait à réclamer la plus grosse part du gâteau à se partager, et « la peur du désaccord » qui voudrait qu'ils n'en demandent pas trop, sinon les négociations seront rompues et ils obtiendront le pire des gains possibles. La littérature sur la théorie axiomatique des négociations a résumé l'issue de cet arbitrage à la notion de « pouvoir de négociation » ou d'« habileté à négocier » (NASH [1950]), sans examiner plus avant ce qui relève d'un comportement envers la richesse dans le certain (« l'appât du gain ») ou d'un comportement sur le risque (« la peur du désaccord ») dans ce concept puisque les deux comportements y sont enchevêtrés. BINMORE, RUBINSTEIN et WOLINSKY [1986] ont relié le pouvoir de négociation de la théorie axiomatique de NASH [1950] à l'impatience ou à l'aversion pour le risque dans l'approche stratégique du jeu de propositions successives de RUBINSTEIN [1982]. Ainsi, ils retrouvent le théorème bien connu et parfaitement intuitif de KIHLSTROM, ROTH et SCHMEIDLER [1981] selon lequel dans un problème de négociation de NASH, si l'un des deux négociateurs est plus adversaire du risque que l'autre dans le sens qu'il possède une fonction d'utilité von NEUMANN-MORGENSTERN plus concave que celle de l'autre joueur, son pouvoir de négociation sera plus faible que celui de son adversaire. Enoncé différemment, cela signifie que si les deux négociateurs ont la même fonction d'utilité, ils auront le même pouvoir de négociation et donc se partageront à part égale le bien négocié. Le problème est que l'on ne voit pas pourquoi la concavité de la fonction d'utilité, c'est-à-dire la décroissance de l'utilité marginale de la richesse traduirait de l'aversion pour le risque et donc agirait sur le pouvoir de négociation d'un agent. C'est donc dans les modèles non-EU que l'on pourra trouver une réponse dans la mesure où l'aversion pour le risque d'un agent n'est plus définie uniquement par une propriété de concavité de la fonction d'utilité de von NEUMANN-MORGENSTERN mais aussi par certaines propriétés de la fonction de perception des probabilités, fonction traduisant spécifiquement l'attitude vis-à-vis du risque des agents.

Cependant, les préférences définies par RST [1992] sont restreintes par un ensemble de conditions qui limitent leur applicabilité et excluent certains des modèles généralisant l'Espérance d'Utilité qui lèvent pourtant les principaux « paradoxes » ayant stimulé le développement de la théorie non-EU (en particulier, le modèle d'Espérance d'Utilité pondérée selon le rang – Rank Dependent Expected Utility –). Partant de ce constat, GRANT et KAJII [1995] ont étendu la famille des préférences pour lesquelles la solution ordinale de NASH est bien définie. Leur extension de l'ensemble des problèmes de négociations utilise une caractérisation *cardinale* d'un groupe spécifique de préférence non-EU qui ont comme particularité de pouvoir être représentées par une fonction EU sur l'ensemble des loteries élémentaires seulement (loteries dont le support consiste en au plus un résultat possible et le résultat de désaccord). Le grand avantage de leur article est de fournir une méthode opérationnelle simple pour calculer cette solution, puisque leur caractérisation cardinale permet de réduire l'analyse de RST [1992] à un corollaire du théorème de NASH [1950].

D'autres travaux traitent de la solution ordinale de NASH. VALENCIANO et ZARZUELO [1994] étendent l'analyse de RST [1992] à la famille des solutions *asymétriques* caractérisées par KALAÏ [1977], qui apparaît quand on supprime l'axiome de symétrie. Leur extension s'applique à la même famille de préférences que RST [1992], elle souffre donc des mêmes insuffisances. HANANY et SAFRA [1998] étendent l'ensemble des préférences pour lesquelles la solution ordinale existe, en considérant la notion de « mesure d'utilité induite ». Cette mesure représente la volonté de chaque joueur de passer d'une situation de négociation de référence à une situation pire (ou meilleure), tout en considérant le risque d'échec inhérent à toute négociation. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un résultat soit une solution ordinale est qu'il maximise le produit des utilités induites des deux joueurs. Néanmoins, comme il existe autant d'utilités induites que de points de référence, l'applicabilité de leur méthode est assez complexe.

Ainsi, en dépit de l'attrait théorique que représente la solution ordinale de NASH, elle possède une certain nombre de sérieux inconvénients qui sont la cause des difficultés de son application et de son utilisation dans les modèles économiques de négociation. Le plus important pour les économistes est que les préférence générales pour lesquelles la solution ordinale existe ne sont pas toujours, contrairement aux préférences EU, représentées par une fonctionnelle d'utilité simple et naturelle. Ainsi, l'avantage d'avoir un plus grand ensemble de préférences potentielles peut être largement contrebalancé par l'incapacité à utiliser les fonctions d'utilités les représentant. De plus, il existe une compréhension incomplète de la nature des problèmes de négociation pour lesquels la solution ordinale de NASH est bien définie.

L'objet de cet article est double. Tout d'abord, il s'agit d'utiliser la caractérisation cardinale proposée par GRANT et KAJII [1995] ainsi qu'un analogue en terme d'utilité généralisée de la mesure d'audace (ou l'inverse, la peur de désaccord), introduite par AUMANN et KURZ [1977], afin de trouver un concept de solution équivalente à la solution ordinale de NASH et de l'utiliser dans le cadre d'une famille de préférences sur le risque généralisant la théorie de l'Espérance d'Utilité, les préférences RDEU, pour laquelle cette solution est bien définie. Ensuite, cela nous permettra de déterminer la genèse de la notion de « pouvoir de négociation » et du changement de l'issue des négociations lorsque l'un des agents est plus adversaire du risque que l'autre tout en ayant le même comportement dans le certain, comportement impossible à prendre en compte dans la théorie de l'Espérance d'Utilité où aversion pour le risque et décroissance de l'utilité marginale de la richesse dans le certain sont une seule et même notion. Ainsi, dans le cas simple d'un problème de négociation à deux joueurs ayant des préférences non-EU, nous comprendrons comment l'arbitrage « appât du gain »/« peur du désaccord » se déroule lors des négociations.

L'article est organisé de la façon suivante : Dans la section 2, nous allons présenter le modèle que nous allons utiliser et décrire les hypothèses nous permettant de déterminer une fonctionnelle d'utilité représentative des préférences. Puis, dans les sections 3 et 4, nous introduirons successivement le concept de solution ordinale de NASH et celui d'audace marginale, initialement introduit dans le cadre EU et que nous généraliserons au cadre non-EU, où l'audace marginale d'un négociateur mesure sa volonté à risquer un désaccord, en échange d'une amélioration marginale de son gain (en réclamant une concession de la part de l'autre joueur). Ce dernier concept, dont le mérite principal est d'être facilement interprétable en terme de préférences sur des loteries risquées et d'être indépendant du modèle de décision dans lequel on se trouve, nous permettra de définir une *solution d'audaces marginales égales (AME)*. Formellement, si les préférences sur le risque sont supposées convexes et que la fonctionnelle de représentation est différentiable, alors une solution ordinale de NASH (SON) est aussi une solution d'audaces marginales égales (AME). Enfin, dans la dernière section, nous étudierons la solution AME dans le cadre d'une famille de préférences non-EU, les préférences RDEU. Nous montrons que lorsque les préférences sur le risque satisfont au modèle RDEU, le problème *symétrique* de négociation de NASH devient un problème *asymétrique* de négociation, avec des pouvoirs de négociation endogènes dépendant de *l'intensité de l'effet de certitude de l'agent* (mesuré par la dérivée au point 1 de la fonction de perception des probabilités $g_p(1)$) pour un gain donné (meilleur que celui de la solution de désaccord), un concept bien connu dans les théories sur l'Espérance d'Utilité Généralisée. Nous montrerons en particulier que dans un problème de négociation de NASH, il ne suffit plus que les deux négociateurs aient la même fonction d'utilité et le même résultat de désaccord obtenu lors de l'échec des négociations pour qu'ils se répartissent à part égale le gâteau, comme l'avait indiqué NASH, il faut aussi qu'ils aient la même perception des probabilités au voisinage de la certitude.

2 La description du modèle

On considère le problème de négociation à 2 agents suivant :

Les agents négocient sur la répartition d'un bien parfaitement divisible de taille 1.

On note $x_i \geqslant 0$, la part que l'agent $i = 1,2$ reçoit.

Soit $X = \left\{x = (x_1,x_2) \in \Re^2_+ \;|\forall i = 1,2\;, x_i \geqslant 0 \text{ et } x_1 + x_2 = 1\right\}$, l'ensemble des divisionspossibles ou des alternatives que les joueurs 1 et 2 peuvent atteindre à l'issue de la négociation. X est un ensemble non vide compact.

Soit $D = (d,d)$, le résultat de désaccord, c'est-à-dire le vecteur de gain obtenu en situation de *statu quo* (ou de menace dans le cadre d'un jeu non-coopératif (NASH [1950])), si la négociation échoue.

Les deux agents étant à tout point de vue symétriques, ils auront donc en particulier le même gain lors de l'échec de la négociation [1].

On suppose ici que D est donné, les agents ne négocieront donc pas sur leur point de désaccord.

L'ensemble $X \cup \{D\}$ est doté de la σ-algèbre des Boreliens.

Soit $\ell(X \cup \{D\})$, l'ensemble des Loteries (mesures de probabilité) de support fini sur $X \cup \{D\}$. Soit P une famille de préférences sur $\ell(X \cup \{D\})$. Enfin, soit $\Phi_y = (1,y)$, la loterie (dégénérée) dont le support consiste en un résultat simple $y \in X \cup \{D\}$.

Dans ce cadre, une *loterie élémentaire* est une loterie dont le support consiste au plus en un résultat $x \in X$ et le résultat de désaccord D. On notera $(1-q,x;q,D)$, la loterie donnant x avec probabilité $1-q$ et D avec probabilité q.

1. C'est ce que dit l'axiome de symétrie de NASH [1950]. En revanche, dans le cadre des négociations salariale entre un syndicat (agent 1) et une firme (agent 2) par exemple, les agents en présence ne sont plus symétriques (l'un ayant éventuellement un pouvoir de négociation supérieur à l'autre), on comprend pourquoi les gains obtenus lors de l'échec de la négociation (la grève) sont différents. Le résultat de désaccord sera $D = (d_1,d_2)$ où d_1 est le montant des allocations-chômage ou du fond de grève, et d_2 est la recette de la firme en cas de grève (généralement nulle dans la littérature dans la mesure où ses employés ne produisent plus).

Ainsi dans ce cadre, un **problème ordinal de NASH** consiste en un couple de préordre $\left\langle \underset{1}{\succeq}, \underset{2}{\succeq} \right\rangle$ 2 où $\underset{i}{\succeq} \in P$, $\forall i = 1{,}2$ est la relation de préférence pour l'agent i sur $\ell(X \cup \{D\})$ satisfaisant aux hypothèses suivantes sur la relation de préférences :

• (H1) Chaque $\underset{i}{\succeq}$, $\forall i = 1{,}2$, est un préordre complet (réflexif, transitif) et continu.

• (H2) Les préférences de l'agent i sont en accord avec la *Dominance Stochastique d'ordre 1 (DS1)*, i.e. $\forall x,y \in X \cup \{D\}, \forall i = 1{,}2, \forall p,q \in [0{,}1]$, $p \geqslant q, \quad \Phi_x \underset{i}{\succeq} \Phi_y \Rightarrow (p,x; r,y; 1-p-r, D) \underset{i}{\succeq} (q,x; r,y; 1-q-r, D)$, où $(p,x; r,y; 1-p-r, D)$ est la loterie donnant x avec probabilité p, y avec probabilité r et D avec probabilité $(1-p-r)$.

• (H3) $\underset{i}{\succeq}$ exhibe de la *Forte aversion pour le risque* (ROTHSCHILD-STIGLITZ [1970]) définie de la façon suivante : $\forall L_1, L_2 \in \ell(X \cup \{D\})$, $L_1 \underset{i}{\succeq} L_2 \Leftrightarrow L_2$ est un étalement préservant la moyenne de L_1, i.e. $E(L_1) = E(L_2)$ et $L_1\ DS2\ L_2$ 3.

• (H4) $\forall i$, le résultat D est le moins désirable, *i.e.* $L \underset{i}{\succeq} D$, $\forall L \in \ell(X \cup \{D\}$.

• (H5) On suppose que l'on peut représenter les préférences ($\underset{i}{\succeq}$) de l'agent i sur les loteries élémentaires par la fonctionnelle d'utilité continue $V_D^i : [0{,}1] \times [0{,}1]$ définie par la relation suivante :

$$\forall x,y \in X, (1-q,x; q,D) \underset{i}{\succeq} (1-r,y; r,D) \Leftrightarrow V_D^i(1-q,x_i) \geqslant V_D^i(1-r,y_i)$$

V_D^i est unique à une transformation monotone croissante près, (C^2)dans ses deux arguments.

REMARQUE 1 : En toute rigueur, la fonctionnelle $V_D^i(.,.)$ dépend du résultat de désaccord D. En revanche, nous allons supposer dans un premier temps, que l'individu i identifiera le gain de désaccord d qu'il obtiendra en cas d'échec de la négociation avec le gain nul $x_i = 0, \forall i$. Cette hypothèse nous permettra de considérer dans la suite de l'article que les préférences de l'agent i dépendent uniquement de sa part du bien x_i. Nous écrirons alors $V^i(.,.)$ au lieu de $V_D^i(.,.)$ 4.

---

2. En réalité le problème est $\left\langle X, D, \underset{1}{\succeq}, \underset{2}{\succeq} \right\rangle$. Mais comme D et X sont fixés et que ce sont les préférences qui varient, le problème se réduit à $\left\langle \underset{1}{\succeq}, \underset{2}{\succeq} \right\rangle$. Voir RST 92 pour une discussion sur cette hypothèse et sur le cas où X n'est pas fixé et ce sont les préférences qui le sont.

3. $L_1\ DS2\ L_2 \Leftrightarrow \forall T \in \Re, \int_{-\infty}^{T} F_{L_1}(t)\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{T} F_{L_2}(t)\, dt.$

4. Cette hypothèse n'aura aucune conséquence sur la portée générale de nos résultats. Tous les résultats peuvent être énoncés pour un point de désaccord D quelconque,c'est d'ailleurs ce que nous fairons, dans la section 5, pour le théorème central de cet article. En particulier, dans la section 4, les hypothèses de convexité des ensembles $A_i(x)$ et $B_j(x)$ seront satisfaites pour n'importe quel point de désaccord D, dès qu'il représente le résultat le moins désirable.

On normalise V_D^i tel que $\forall p = (1-q) \in [0,1]$, $V_D^i(p,0) = 0$ (car $D \underset{i}{\sim} 0$) et $V_D^i(1,1) = 1$ et on suppose que $V_p^i(p,D) = 0$ (par construction), $V_p^i(p,x_i) > 0$, $\forall p \in [0,1], \forall x_i \neq 0$, $V_x^i(p,x_i) > 0$, $\forall x_i \in [0,1], \forall p \neq 0$ (par la DS1), et $V^i(1,px_i) \geqslant V^i(p,x_i)$ [5].

3 La solution ordinale de NASH

Plutôt que de spécifier les propriétés des utilités (traditionnellement, celles de la fonction d'utilité von NEUMANN-MORGENSTERN dans la théorie de l'espérance d'utilité) et définir la solution de NASH comme étant celle qui maximise un produit des utilités comme cela est fait dans les travaux suivant l'article fondateur de NASH [1950], RST [1992] s'affranchissent de la notion d'utilité en retournant à la notion plus générale de préordre de préférences sur des loteries et définissent la solution ordinale de NASH comme étant un résultat contre lequel aucun agent ne pourra objecter efficacement. Cela nous conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 1 : (RST [1992]) Soit $x \in X$, $\forall i, j = 1, 2, \ i \neq j$, on dit que l'agent *i* peut objecter efficacement contre un résultat $x = (x_1, x_2)$ proposé par *j*, si il existe un résultat $y \in X$ et $q \in [0,1]$ tel que $(1-q, y; q, D) \underset{i}{\succeq} \Phi_x$ et $(1-q, x; q, D) \underset{j}{\preceq} \Phi_y$.

L'intuition de cette définition est que, si les deux joueurs perçoivent que la probabilité de rupture de la négociation est (q), le joueur *i* voudra, malgré le risque d'une éventuelle rupture de la négociation, offrir une proposition (*y*) de répartition du gâteau mais le joueur *j* ne souhaitera pas en faire autant pour sa proposition *x*. L'objection est efficace ou réussie, en cela que le joueur *i* sera parvenu à imposer son offre *y* d'autant plus facilement que, du fait du risque éventuel de rupture de la négociation, il est dans l'intérêt du joueur *j* de l'accepter. On voit bien alors en quoi une proposition de répartition résultant de ce type de procédure d'objection ne peuvent être considérée comme une solution de NASH, qui doit être une répartition équitable du gâteau à se partager lorsque les 2 agents en présence sont parfaitement symétriques et ont plus particulièrement la «même habileté à négocier», c'est-à-dire le même pouvoir de négociation, ce qui est le cas ici puisqu'ils ont le même résultat de désaccord *d* (voir la note 1 pour plus de détail).

Il faut donc trouver une répartition $x^* \in X$ contre laquelle aucun agent ne pourra objecter efficacement, c'est exactement la définition de la *solution ordinale de NASH* introduite par RUBINSTEIN, SAFRA et THOMSON [1992].

La solution ordinale de NASH a comme grand avantage d'être définie en terme de relation de préférences, donc en dehors de toute théorie de quantification de l'utilité. En revanche, pour les applications économiques il nous

5. C'est une conséquence de l'hypothèse H3 de Forte aversion pour le risque. En effet, l'hypothèse de Forte aversion pour le risque implique, quelque soit le modèle, l'hypothèse de faible aversion pour le risque. Or, un agent *i* présente de la faible aversion pour le risque si et seulement si $\Phi_{E(L)} \underset{i}{\succeq} L$, où $\forall L \in \ell(X \cup \{D\})$, $E(L) = px_i + (1-p)D$ est l'Espérance Mathématique de la loterie L. Cette condition s'exprime en terme d'utilité par $V^i(1,px_i) \geqslant V^i(p,x_i)$.

paraît plus opportun de chercher à représenter cette solution ordinale, ainsi la notion d'utilité reprend tout son sens dans ce contexte. En suivant la démarche de GRANT et KAJII [1995], nous allons passer de l'ensemble des *résultats* à l'ensemble des *utilités* en utilisant leur caractérisation cardinale de la solution ordinale de NASH.

Intuitivement, $x = (x_1,x_2)$ est une solution ordinale de NASH au sens de RST [1992], si aucun joueur ne peut extorquer une somme de taille t à l'autre joueur lorsqu'il existe une probabilité de rupture (désaccord) q. Plus formellement :

> DÉFINITION 2 : L'agent i peut objecter efficacement contre un résultat $x = (x_1,x_2)$ proposé par j, si il existe $j \neq i,\ q \in [0,1]$ et $t > 0$ tel que
> $$\forall\, y = (\, x_i + t,\, x_j - t\,)\ \in X,\ \ V^i(1-q,x_i+t) > V^i(1,x_i)$$
> et $V^j(1-q,x_j) < V^j(1,x_j-t)$. Ainsi, $x^* \in X$ est une solution de NASH si aucun agent ne peut objecter face à x^*.

On remarque que bien qu'ici la solution de NASH soit un concept *ordinal* (donc invariant à une transformation monotone de V^i) et non pas un concept *cardinal* comme dans NASH [1950], l'éxistence d'une solution de NASH reste encore assurée par la continuité de la fonction objectif et par la compacité de X.

4 Solution ordinale de NASH et solution d'audaces marginales égales

4.1. Une réinterprétation géométrique de la solution ordinale de NASH

$\forall x \in X$ et $\forall i$, on pose $A_i(x) = \big\{(q,t) \in [0,1] \times [0,x_j] \,\big|\, V^i(1-q,x_i+t) \geqslant V^i(1,x_i)\big\}$, l'ensemble des extorsions potentielles que le joueur i peut vouloir obtenir. Par construction, (0,0) appartient à la frontière de $A_i(x)$.

De même, l'ensemble des concessions potentielles que le joueur j peut accepter est défini de la façon suivante :

$$\forall x \in X \text{ et } \big\{\forall j,\ B_j(x) = (q,t) \in [0,1] \times [0,x_j] \,\big|\, V^j(1-q,x_j) \leqslant V^j(1,x_j-t)\big\}$$

(0,0) appartient aussi à la frontière de $B_j(x)$.

Ainsi, on va pouvoir réécrire la solution ordinale de NASH sous la forme du lemme suivant :

> LEMME 0.1 : $\forall i,\ j = 1, 2,\ j \neq i$, x est une solution (ordinale) de NASH si et seulement si $A_i(x) \cap B_j(x) = (0,0)$.

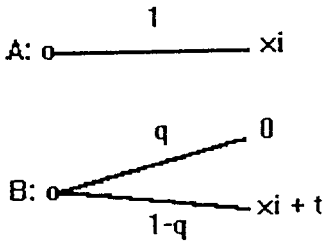
Il est évident que pour que x soit une solution de NASH, il est nécessaire que la pente de la tangente à $A_i(x)$ et celle de la tangente à $B_j(x)$ en (0,0) soient égales. Il faut donc étudier une mesure de la pente de la tangente de ces ensembles au voisinage de (0,0).

4.2. **L'audace marginale (Boldness) et sa généralisation au cadre non-EU**

Historiquement, ce concept a été introduit à propos de la théorie des négociations dans l'article de AUMANN et KURZ [1977], dans lequel les politiques fiscales sont décidées par un vote à la majorité et chaque agent-citoyen, doté d'un revenu disponible brut, s'engage dans un marchandage avec un membre de la coalition majoritaire pour empêcher que cette dernière ne décide un taux d'imposition rognant arbitrairement son revenu. Ce marchandage peut prendre la forme d'un jeu de négociation de NASH dans lequel chaque joueur, doté d'une fonction d'utilité de von NEUMANN et MORGENSTERN, possède un pouvoir de négociation propre représenté par son *audace à risquer tout son revenu si la négociation se rompt, en échange d'un gain marginal supplémentaire*. Ainsi, on peut définir l'audace marginale de la façon suivante :

DÉFINITION 3 : L'audace marginale $b_i(x)$ est la probabilité maximale de ruine que l'agent i acceptera en échange d'un gain supplémentaire d'une unité, *i.e.* $b_i(x) = \operatorname*{Lim}_{t \to 0} \frac{\overline{q}}{t}$.

GRAPHIQUE 1



4.2.1. **Le concept d'audace marginale dans le cadre EU**

Soit un agent possédant une richesse x_i et considérant une loterie dans laquelle il risque toute sa richesse (avec une probabilité q) en échange de la possibilité d'obtenir un « petit » gain additionnel t (avec une probabilité $1 - q$).

Dans le cadre de la théorie de l'Espérance d'Utilité, AUMANN et KURZ définissent « *l'audace marginale de l'agent i associée à une répartition* $x = (x_1, x_2)$ » de la façon suivante :

$$b_i(x) = \frac{u_i'(x_i)}{u_i(x_i)}$$

où u_i est une fonction d'utilité de VON NEUMANN et MORGENSTERN, concave et dérivable.

La probabilité maximale $\overline{q}$ de ruine pour laquelle l'agent acceptera la loterie B (*cf.* graphique 1) peut être considérée comme une mesure directe de son audace et une mesure inverse de sa peur de faillite. En effet, plus on a peur d'être ruiné, plus $\overline{q}$ sera petite car cette probabilité devra être suffisamment petite pour que l'agent soit indifférent entre A et B. Cette interprétation va nous permettre de généraliser le concept d'audace marginale au cadre non-EU.

4.2.2. La généralisation de l'audace marginale au cadre des préférences non-EU

PROPOSITION 1: Pour des préférences non-EU représentées par la fonctionnelle $V^i(p,x_i)$, l'audace marginale du joueur i face au résultat x aura la forme plus générale suivante :

$$b_i(x) = \frac{V_x^i(1,x_i)}{V_p^i(1,x_i)}$$

Ce rapport signifie que pour une « petite » extorsion t, l'agent i souhaitera risquer une probabilité de désaccord au maximum égale à

$$t \cdot \frac{V_x^i(1,x_i)}{V_p^i(1,x_i)}.$$

Preuve : $\overline{q}$ est la probabilité assurant $A \sim B$. On a donc :

$$V^i(1,x_i) = \underbrace{V^i(\overline{q},D)}_{=0} + V^i(1-\overline{q},x_i+t) \underset{\substack{\overline{q}\longrightarrow 0\\ t\longrightarrow 0}}{\longrightarrow} V^i(1,x_i) - \overline{q}\cdot V_p^i(1,x_i) + t\cdot V_x^i(1,x_i)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\overline{q}}{t} \underset{\substack{\overline{q}\longrightarrow 0\\ t\longrightarrow 0}}{\longrightarrow} \frac{V_x^i(1,x_i)}{V_p^i(1,x_i)}. \qquad \blacksquare$$

4.3. La solution d'audaces marginales égales (AME)

AUMANN et KURZ, dans le cadre EU, montrent que la solution de la négociation de NASH sera le partage assurant une audace identique pour les 2 joueurs.

Cette solution d'audaces égales fût donc définie uniquement dans le cadre de décideurs ayant des préférences de type EU, nous allons la généraliser aux décideurs ayant une fonctionnelle d'utilité non plus séparable linéairement entre les probabilités et les gains comme c'est le cas dans le théorie EU, mais multiplicativement séparable comme c'est le cas des préférences de type Espérance d'Utilité pondérée selon le rang (Rank Dependent Expected Utility).

4.3.1. Définition d'une solution d'audaces marginales égales

DÉFINITION 4 : La solution x est une solution AME si $b^i(x) = b^j(x)$, $j \neq i$.

4.3.2. Existence d'une solution d'audaces marginales égales

PROPOSITION 2 : (Existence) $\forall\left\langle \underset{1}{\succeq}, \underset{2}{\succeq} \right\rangle$, un problème ordinal de NASH satisfaisant aux hypothèses H1 à H5, Il existe toujours une solution AME x tel que $b^1(x) = b^2(x)$.

Preuve : Soit $\Gamma(x) = b^i(x) - b^j(x),\ j \neq i$, une fonction continûment dérivable de X dans $\Re$. Par construction, $\Gamma(x) = 0$ si et seulement si $\exists x^* \in X$ tel que $b^i(x^*) = b^j(x^*), \forall i, j$. On cherche donc un tel x^*.

Or on remarque que $\Gamma(1) = -1 < 0$ et $\Gamma(0) = 1 > 0$. En outre, $\Gamma'(x) < 0,\ \forall x > 0$.

Le théorème de la valeur intermédiaire implique qu'il existe une valeur unique de $x = x^* \in [0,1]$ telle que $\Gamma(x^*) = 0$. ■

AUMANN et KURZ [1977] ont montré dans le cadre EU que l'éxistence d'une solution d'audaces marginales égales est une condition nécessaire à l'éxistence d'une solution de NASH, nous allons montrer que si la fonctionnelle d'utilité V respecte certaines conditions traduisant des propriétés parfaitement intuitives des préférences [6], alors nous obtenons la *condition nécessaire et suffisante* suivante :

PROPOSITION 3 : Si $\forall p = 1 - q,\ V^i(p, x_i + t)$ est quasi-concave en $(p, x_i) \in [0,1] \times [0,1],\ V^j(1, x_j - t)$ est concave en x_j et $V^j(p, x_j)$ est convexe en p alors quel que soit un problème ordinal de NASH $\left\langle \underset{1}{\succeq}, \underset{2}{\succeq} \right\rangle$, x est une solution ordinale de NASH $\Leftrightarrow$ x est une solution AME.

Preuve : Voir annexes 1 et 2. ■

L'interprétation des deux premières conditions que doit vérifier la fonctionnelle d'utilité V est habituelle en microéconomie. La quasi-concavité de $V^i(p, x_i + t)$ traduit simplement la convexité des préférences, c'est-à-dire que si un agent i est indifférent entre deux loteries, il préférera toujours une combinaison convexe de ces deux loteries à chacune des loteries seule. D'autre part, la concavité en x_j de $V^j(1, x_j - t)$ signifie que lorsqu'il y a accord entre i et j, l'utilité marginale de sa « richesse » dans le certain $(p = 1)$ de l'agent j (sa part du bien) doit être décroissante.

En revanche, la convexité en p de $V^j(p, x_j)$ est moins évidente mais parfaitement intuitive. Elle traduit une sorte d'aversion « probabiliste » pour le risque, non plus en terme d'utilité marginale de la richesse décroissante, mais en terme d'*évaluation marginale du risque croissante*. En effet, cette condition indique qu'en présence d'une probabilité objective q qu'une rupture éventuelle de la négociation se produise, l'agent j va sous-évaluer marginalement les faibles valeurs de q (c'est-à-dire les fortes valeurs de p) et au fur et a mesure que q va augmenter, il va surévaluer cette probabilité. Ce comportement est bien connu dans la littérature des modèles non-espérance d'utilité, et s'interprète comme une forme de « pessimisme ». Nous reviendrons sur ce concept dans la section 5 et nous présenterons une classe de fonctionnelles d'utilité, représentant les préférences, qui satisfont à ces hypothèses et dont l'interprétation est parfaitement intuitive.

Nous venons de voir que la solution d'audaces marginales égales existe toujours avec les hypothèses faites sur la fonctionnelle de représentation des préférences, voyons maintenant sous quelles conditions cette solution est unique.

---

6. Ces conditions sont équivalentes à la convexité des ensembles $A_i(x)$ et $B_j(x)$ (*cf.* Annexe 1).

4.3.3. Unicité de la solution d'audaces marginales égales

NASH [1950] a prouvé que la solution axiomatique du jeu de négociation qu'il propose est unique, et RST [1992] ont montré qu'elle est une solution ordinale de NASH pour le cas de préférences EU exhibant de l'aversion pour le risque. En effet, quand les préférences sont EU alors $V^i(p,x_i) = pV^i(1,x_i) \quad = pu^i(x_i)$, où $u^i(.)$ est la fonction d'utilité de von NEUMANN-MORGENSTERN, et donc la concavité de $V^i(.,.)$ est équivalente à la concavité de $u^i(.)$ qui est elle-même équivalente à l'aversion pour le risque.

AUMANN et KURZ [1977] ont montré, toujours dans le cadre EU, qu'une condition suffisante à l'unicité de la solution AME est que l'audace marginale de chaque joueur soit décroissante dans sa part du gâteau[7]. Nous montrons ici que ce résultat se généralise à la fonctionnelle non-EU d'utilité V^i.

Par la proposition 3, si on peut montrer que la solution AME est unique, alors il en sera de même pour la solution de NASH. On a la proposition suivante :

PROPOSITION 4 : (Unicité) Si $V^i_{xx}(1,x_i) \leqslant 0$ et $V^i_{px}(1,x_i) > 0, \forall i = 1,2, \forall x_i \in]0,1[$ alors la solution AME est unique.

Preuve :

$$\frac{\partial b^i(x)}{\partial x_i} < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{V^i_{xx}(1,x_i) \cdot V^i_p(1,x_i) - V^i_{px}(1,x_i).V^i_x(1,x_i)}{\left(V^i_p(1,x_i)\right)^2} \right) < 0.$$

Or, par la DS1, $V^i_p(1,x_i) > 0$ et $V^i_x(1,x_i) > 0$, d'où il vient:

$$\frac{\partial b^i(x)}{\partial x_i} < 0 \Leftrightarrow V^i_{xx}(1,x_i) \leqslant 0 \text{ et } V^i_{px}(1,x_i) > 0$$

Interprétation : $V^i_{xx}(1,x_i) \leqslant 0$ signifie que $V^i(1,x_i)$ est concave en x_i, c'est-à-dire que l'utilité marginale du joueur *i* est décroissante avec sa part du gâteau. Nous avons vu dans l'annexe 1 que la concavité de V^i en x_i est une hypothèse qu'il faut faire sur les préférences pour avoir $B_i(x)$ convexe. De même, $V^i_{px}(1,x_i) > 0$ s'interprète assez bien puisque cela signifie que s'il y a accord, l'utilité marginale retirée par le joueur *i*, d'une unité supplémentaire de sa part du gâteau, augmente avec la probabilité d'accord.

5 Solution ordinale de NASH et modèle d'Espérance d'Utilité pondérée selon le rang (RDEU)

Dans le modèle RDEU, les préférences sont représentées par la fonctionnelle suivante :

$\forall L = (p_1,x_1;\, p_2,x_2;\, ...;\, p_n,x_n) \in \ell(X \cup \{D\})$ et supposons que les résul-

7. Il est facile de montrer que l'unicité de la solution AME équivaut à $\left[b^i(x) - b^j(y)\right] . \left(x_i - y_j\right) < 0$. En effet, soit x et y, deux résultats AME, $x \neq y$. Si on suppose $x_1 > y_1$ et $x_2 < y_2$, il vient que $b^1(x) < b^1(y)$ et $b^2(x) > b^2(y)$, ce qui est en contradiction avec la proposition selon laquelle x et y sont des solutions AME.

tats sont ordonnés de sorte que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$,

$$V^i(L) = u^i(x_1).g^i(1) + \sum_{j=2}^{n} \left[u^i(x_j) - u^i(x_{j-1})\right].g^i\left(\sum_{k=j}^{n} p_k\right)$$

avec $g^i(.)$ la fonction de perception des probabilités, $g^i(0) = 0$, $g^i(1) = 1$, $g^i_p(p) > 0$ et $u^i(.)$ est la fonction d'utilité traditionnelle de von NEUMANN-MORGENSTERN, $u^i(0) = 0$, $u^i(1) = 1$, $u^i_x > 0$. Ainsi, en général, la fonctionnelle d'utilité n'est plus linéaire dans les probabilités.

L'expression ci-dessus peut être interprétée de la manière suivante : Le décideur mesure d'abord la satisfaction associé au résultat minimum $u^i(x_1)$ obtenu avec certitude (ce qui explique la pondération unitaire), puis les surcroîts successifs de satisfaction – engendrés par les éventuels gains supplémentaires – pondérés par les probabilités transformées correspondantes. Ainsi, par exemple, l'incrément d'utilité $\left[u^i(x_2) - u^i(x_1)\right]$ ne sera obtenu qu'avec une probabilité égale à $p_2 + p_3 + \cdots + p_n$, et ainsi de suite. Cette représentation illustre l'idée que les pondérations peuvent dépendre du « rang » correspondant au gain.

Ici, comme la loterie L ne comporte que deux résultats (loterie élémentaire), l'expression (1) s'écrit plus simplement :

$$V^i_D(p,x_i) = u^i(d) + g^i(p) \cdot \left[u^i(x_i) - u^i(d)\right]$$

Alors que dans la théorie de l'Espérance d'Utilité, le comportement envers la richesse dans le certain et le comportement sur le risque sont traduit par la même fonction $u(.)$, la fonction d'utilité de von NEUMANN-MORGENSTERN, dans la théorie RDEU, la fonction d'utilité du modèle EU est remplacée par 2 fonctions distinctes, une fonction d'utilité, $u^i(x_i)$, jouant le rôle de l'utilité de la richesse dans le *certain* et une fonction de perception des probabilités, $g^i(p)$, traduisant l'attitude envers le *risque*, ce qui permet une plus grande flexibilité dans la description des comportements des agents. En particulier, dans le cadre du modèle RDEU, les caractérisations de la faible aversion pour le risque (préférer à toute loterie, le gain de son espérance mathématique avec certitude) et de la Forte aversion pour le risque (aversion à un accroissement de risque) sont distinctes – alors qu'elles sont équivalentes à $u(.)$concave dans le cadre EU – et mettent en œuvre non seulement la fonction d'utilité, mais encore la fonction de perception des probabilités. CHEW, KARNI et SAFRA [1987] démontrent qu'un décideur est *Fortement adversaire du risque* si et seulement si sa fonction d'utilité est concave et sa fonction de perception des probabilités est convexe. Ainsi, la concavité de la fonction d'utilité reste une condition nécessaire à la Forte aversion pour le risque, mais elle n'est plus une condition nécessaire à la faible aversion pour le risque. En effet, CHATEAUNEUF et COHEN [1994] ont montré qu'un décideur peut être *faiblement adversaire du risque* en dépit d'une convexité de la fonction d'utilité, il suffit pour cela que sa fonction de perception des probabilités révèle un très fort « pessimisme », c'est-à-dire que $\forall p \in [0,1]$, $g(p) \leqslant p$.

Ainsi, conformément à l'interprétation de l'expression (1), le pessimisme signifie que la pondération apportée à chacun des surcroîts de satisfaction engendrés par les éventuels gains supplémentaires sera inférieure à la « vraie » probabilité d'obtenir ces surcroîts de satisfaction. L'aversion faible pour le risque dépend donc de manière décisive de la fonction de perception des probabilités.

5.1. **La solution AME dans le modèle d'Espérance d'Utilité pondérée selon le rang (RDEU)**

On suppose que $g^i(p)$ est convexe en p (c'est-à-dire que l'agent est Fortement adversaire du risque) et u^i concave en x_i (utilité marginale décroissante dans la part obtenue du gâteau). Ainsi, $V^i(p,x_i+t)$ et $\beta^i_x = V^i(1,x_i-t) - V^i(p,x_i)$ seront quasi-concaves en x_i et p (cf annexe 1), ce qui nous permet de se placer dans les conditions de la proposition 3.

Si les préférences non-EU sont de type RDEU, l'audace marginale s'écrit :

$$b^i(x) = \frac{u^i_x(x_i)}{g^i_p(1)\cdot u^i(x_i)}$$

On remarque que la concavité de $u^i(.)$ est suffisante à assurer que $b^i(.)$ soit décroissante en x_i. Si cela est vrai pour les deux agents, alors la solution AME est unique (Proposition 3).

THÉORÈME 1: Soit 2 agents RDEU tels que $u^i(.)$ soit concave, la solution ordinale de NASH x est unique et peut être caractérisée par l'une des assertions équivalentes suivantes :

(i) $x = \underset{y\in X}{\text{Arg Max}}\left(u^1(y_1)-u^1(d)\right)^{\frac{1}{g^1_p(1)}}\cdot\left(u^2(y_2)-u^2(d)\right)^{\frac{1}{g^2_p(1)}}$

(ii) $x=(x_1,x_2)$ est tel que $\dfrac{u^1_x(x_1)}{g^1_p(1)\cdot u^1(x_1)} = \dfrac{u^2_x(x_2)}{g^2_p(1)\cdot u^2(x_2)}$

Preuve : [x est solution ordinale de NASH $\Leftrightarrow$ x est solution AME], par la proposition 3.

[x est solution AME $\Leftrightarrow ii$], par définition d'une solution AME.

[$ii \Leftrightarrow i$], ce qui découle de la condition du premier ordre du programme de maximisation.

donc [x solution ordinale de NASH $\Leftrightarrow i \Leftrightarrow ii$] ■

Interprétation : On note la similitude avec la solution *asymétrique* de NASH.

En effet, on peut interpréter $\gamma_i = \dfrac{\frac{1}{g^i_p(1)}}{\frac{1}{g^i_p(1)}+\frac{1}{g^j_p(1)}} = \dfrac{g^j_p(1)}{g^i_p(1)+g^j_p(1)}$,

$\forall i \neq j$ comme le pouvoir de négociation de l'agent *i*.

Ainsi, de façon totalement intuitive, $g^i_p(1)$ peut être interprété comme l'évaluation marginale de la certitude pour un gain certain (meilleur que le désaccord) de l'agent *i*.

Plus $g^i_p(1)$ est grand, plus grande sera la prime placée sur la certitude par l'agent *i*, c'est-à-dire plus l'intensité de l'effet de certitude sera forte et moins, toute chose égale par ailleurs, son audace pour réclamer une meilleure répartition sera forte.

En outre, comme $g^i(p)$ est convexe en p et $g^i(1)=1$, il vient que $g^i_p(1)\geqslant 1$. Ainsi, la relative « surpondération » de la certitude par l'agent (*i.e.* son degré de pessimisme) en plus de son utilité marginale décroissante dans la part du gâteau détermine la Solution de NASH.

REMARQUE 2 : Nous voyons que même si les agents ont la même fonction d'utilité dans le certains $u^1 = u^2$, leur pouvoir de négociation n'a aucune raison d'être le même comme c'est le cas dans la théorie EU lorsque la probabilité de rupture des négociations est la même pour les deux agents (ce qui est le cas ici), il dépendra de leur évaluation marginale de la certitude. Ainsi, nous allons voir dans le paragraphe suivant que les pouvoirs de négociations seront les mêmes uniquement si les évaluations marginales de la certitude sont identiques pour les 2 agents.

REMARQUE 3: **Lien entre la solution AME et la solution stratégique du jeu de propositions alternatives de RUBINSTEIN [1982]** : Dans le jeu stratégique de négociations à horizon infini d'offres alternatives de RUBINSTEIN [1982], il existe à chaque période une probabilité $q = 1 - p$ de rompre les négociations. Pour le cas EU, le modèle a un unique équilibre parfait en sous-jeu caractérisé par les deux alternatives $x^*(p)$ et $y^*(p)$ satisfaisant $(x^*(p),1q; D,q) \underset{i}{\sim} \Phi_{y^*(p)}$ et $(y^*(p),1-q; D,q) \underset{j}{\sim} \Phi_{x^*(p)}$. Le joueur i offre toujours $x^*(p)$ et accepte toute alternative y telle que $y \underset{i}{\succeq} y^*(p)$, alors que le joueur j offre toujours $y^*(p)$ et accepte toute alternative x telle que $x \underset{j}{\succeq} x^*(p)$. RST [1992] (proposition 4) montre que les offres alternées $x^*(p)$ et $y^*(p)$ convergent vers la solution ordinale de NASH quand $q \to 0$. Nous avons montré pour notre part que sous des conditions de convexité des préférences et de différentiabilité de la fonctionnelle d'utilité, une solution AME est aussi une solution ordinale de NASH, donc la solution AME est aussi équivalente à la solution statégique de RUBINSTEIN [1982].

5.2. **Un cas particulier de préférences RDEU : Les préférences AD (GUL [1991])**

Afin de pouvoir comparer notre solution dans le cadre RDEU à la solution traditionnelle de NASH (définie dans le modèle EU) et faire de la statique comparative, nous allons utiliser un cas particulier très maniable analytiquement introduit et analysé par GUL [1991] dans le cadre du « paradoxe » du ratio commun, les préférences décrivant « L'Aversion à la Déception » (AD) de certains agents.

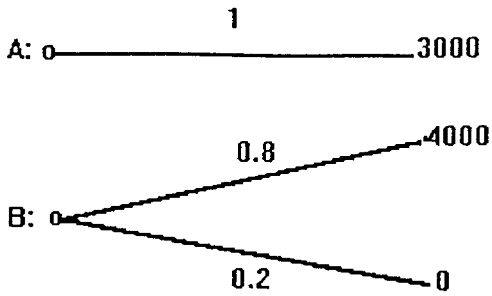
Un décideur doit donner ses préférences sur le couple de loteries suivant (graphique 2 et graphique 3).

Beaucoup d'études ont montré la tendance systématique des sujets à choisir [A] et [D], ce qui constitue une violation de l'axiome d'indépendance qui est une implication de la théorie de l'EU. Ce « paradoxe » est appelé l'effet du ratio commun, dans la mesure où $[C] = 0.25.[A] + 0.75.[\Phi_0]$ et $[D] = 0.25[B] + 0.75[\Phi_0]$, et bien que $[A] \succeq [B]$, $[D] \succeq [C]$.

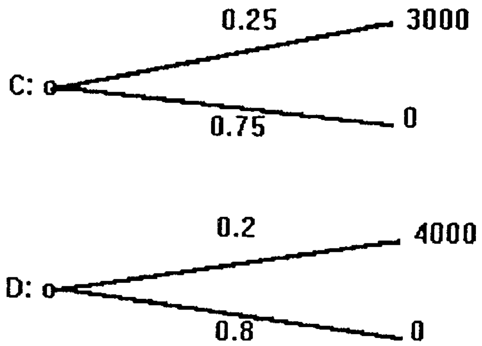
La « déception » dans une loterie est un concept qui se comprend de lui-même. Si un décideur est indifférent entre recevoir un gain x avec certitude ou participer à une loterie X, alors un gain « décevant » pour la loterie X est un gain pire que l'équivalent certain x.

Ainsi, GUL offre une explication de l'effet de ratio commun, en indiquant que [A] offre une probabilité plus faible de « déception » que [B] (zéro au lieu de 0.2) et mélanger ces deux loteries avec $[\Phi_0]$ augmente plus la probabilité de « déception » pour la loterie [C] que pour la loterie [D].

GRAPHIQUE 2



GRAPHIQUE 3



Ce type de préférences a comme mérite principal d'être plus riche que l'Espérance d'Utilité d'un paramètre β_i, qui, selon les valeurs prises permettra de décrire les comportements expérimentaux violant cette théorie et donc prendra en compte tous les prétendus « paradoxes ».

La forme fonctionnelle décrivant les préférences présentant de l'AD est la suivante:

$$g^i(p) = \frac{p}{1 + (1 - p) \cdot \beta_i}, \beta_i \geqslant 0$$

Bien sûr, $\beta_i = 0$ correspond au cas EU.

Dans ce cadre, on peut vérifier facilement que si les deux agents RDEU ont la même fonction d'utilité dans le certain et la même aversion probabiliste pour le risque, alors on retrouve la solution symétrique de NASH, où les agents se partagent équitablement le gâteau. En revanche, si l'un des agents est plus «pessimiste» que l'autre, tout en ayant la même fonction d'utilité dans le certain, son pouvoir de négociation sera plus faible.

Ainsi, si $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$ et $u^1(x) = u^2(x) = \sqrt{x_i}, \forall i = 1,2$. La solution d'AME nous donne $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, on retrouve donc bien la solution de NASH *symétrique*. En revanche, si $\beta_1 = \frac{2}{3} > \beta_2 = \frac{1}{2}$, la Solution AME donne $x_1 = \frac{9}{19}$ et $x_2 = \frac{10}{19}$, ce qui n'est rien d'autre que la solution de NASH *asymétrique*. En effet, l'agent 1 est « plus adversaire du risque » que l'agent 2 ($\beta_1 > \beta_2$) et donc son pouvoir de négociation sera plus faible ($\gamma_1 = \frac{9}{19} < \gamma_2 = \frac{10}{19}$).

6 Conclusion

Dans la théorie de L'Espérance d'Utilité, comme la décroissance de l'utilité marginale et l'aversion pour le risque se traduisent par la concavité de la fonction d'utilité représentant les préférences, si deux agents ont la même utilité marginale, ils auront obligatoirement la même audace marginale et le même pouvoir de négociation. On ne peut donc pas expliquer dans la théorie EU, que deux agents ayant pourtant la même utilité marginale puissent avoir des pouvoirs de négociation différents.

Dans la théorie RDEU, le comportement envers la richesse dans le certain est déconnecté du comportement sur le risque, et deux agents peuvent avoir une même utilité marginale dans le certain mais des perceptions des probabilités différentes, car ce qui va compter c'est la dérivée de la fonction de perception au point 1, le point de certitude.

Cet effet de certitude, bien connu dans la théorie non-EU, s'interprète très bien ici car il indique que plus un agent aura peur du risque au voisinage de la certitude, moins il sera audacieux et donc plus son pouvoir de négociation sera faible.

Ainsi, comme l'aversion pour le risque se traduit par les propriétés des deux fonctions, on peut décrire le comportement d'individus Fortement adversaires du risque ($u^i(\cdot)$ concave et $g(p)$ convexe en p) sans être faiblement adversaires du risque ($g(p) \leqslant p$), c'est-à-dire des individus adversaires vis-à-vis d'un accroissement de risque, mais pas vis-à-vis du risque, ce qui était impossible dans le cadre Espérance d'Utilité.

En revanche, notre solution repose sur l'hypothèse de convexité de la fonction de perception des probabilités, ce qui exclu bien sûr les préférences traduisant de l'amour (faible) du risque ($u^i(\cdot)$ concave et $g(p) \geqslant p$ (Chateauneuf et Cohen [1994])). Il faudra donc trouver un concept de solution encore plus englobant.

Démonstration de la convexité des ensembles $A_i(x)$ et $B_j(x)$

Voyons les conditions que $V^i(p,x_i)$, avec $p = 1 - q$, doit vérifier pour que $A_i(x)$ et $B_j(x)$ soient des ensembles convexes.

On peut réécrire $A_i(x)$ et $B_j(x)$ de la façon suivante :

$$A_i(x) = \left\{(q,t) \in [0,1] \times [0,x_j] \middle| V^i(1-q,x_i+t) \geqslant V^i(1,x_i)\right\}$$
$$= \left\{(q,t) \in [0,1] \times [0,x_j] \middle| \alpha_x^i = V^i(1-q,x_i+t) - V^i(1,x_i) \geqslant 0\right\}$$

$$\text{et } B_j(x) = \left\{(q,t) \in [0,1] \times [0,x_j] \middle| V^j(1-q,x_j) \leqslant V^j(1,x_j-t)\right\}$$
$$= \left\{(q,t) \in [0,1] \times [0,x_j] \middle| \beta_x^j = V^j(1,x_j-t) - V^j(1-q,x_j) \geqslant 0\right\}$$

Ainsi $A_i(x)$ est le contour supérieur de la fonction $\alpha_x^i : [0,1] \times [0,x_j] \to \Re_+^*$ et $B_j(x)$ est le contour supérieur de la fonction $\beta_x^j : [0,1] \times [0,x_j] \to \Re_+^*$.

On a le lemme suivant :

Lemme 4.1. (i) $A_i(x)$ est un ensemble convexe $\Leftrightarrow$ $V^i(1-q,x_i+t)$ est une fonction quasi-concave en $(q,t) \in [0,1] \times [0,x_j]$.
(ii) $B_j(x)$ est un ensemble convexe $\Leftrightarrow$ $V^j(1,x_j-t)$ est une fonction concave en *t* et $V^j(1-q,x_j)$ est convexe en *q*.

Preuve : (i) Il est trivial que $A_i(x)$ est un ensemble convexe si et seulement si α_x^i est une fonction quasi-concave en (q,t).

Or, la quasi-concavité de α_x^i est impliquée par la quasi-concavité de $V^i(1-q,x_i+t)$ en $(q,t) \in [0,1] \times [0,x_j]$ (ou de *façon équivalente* en $(p,x_i) \in [0,1] \times [0,1]$), puisque $V^i(1,x_i)$ est indépendant de (q,t).

(ii) De même, dire que $B_j(x)$ est un ensemble convexe équivaut à dire que β_x^j est une fonction quasi-concave en (q,t).

Or β_x^j est une fonction concave (donc quasi-concave) en

$$(q,t) \Leftrightarrow \begin{cases} V^j(1,x_j-t) & \text{est } \textit{concave} \text{ en } t \\ & \text{et} \\ V^j(1-q,x_j) & \text{est } \textit{convexe} \text{ en } q \end{cases}$$

En effet :

[$\Leftarrow$] si $V^j(1,x_j-t)$ est *concave* en *t* et $V^j(1-q,x_j)$ est convexe en *q*, alors β_x^j est une fonction concave en (q,t) de part sa structure additive.

[$\Rightarrow$] si β_x^j est une *fonction concave* en (q,t) alors la matrice Hessienne de β_x^j est semi-définie négative.

La matrice Hessienne s'écrit :

$$\mathrm{Hess}(\beta_x^j) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \beta_x^j}{\partial q^2} & \dfrac{\partial^2 \beta_x^j}{\partial q\, \partial t} \\ \dfrac{\partial^2 \beta_x^j}{\partial t\, \partial q} & \dfrac{\partial^2 \beta_x^j}{\partial t^2} \end{bmatrix}$$

avec $\dfrac{\partial^2 \beta_x^j}{\partial q^2} = \left[-\dfrac{\partial^2 V^j(1-q,x_j)}{\partial q^2} \right], \dfrac{\partial^2 \beta_x^j}{\partial t^2} = \left[\dfrac{\partial^2 V^j(1,x_j-t)}{\partial t^2} \right]$

et $$\frac{\partial^2 \beta_x^j}{\partial q\, \partial t} = \frac{\partial^2 \beta_x^j}{\partial t\, \partial q} = 0.$$

En dimension 2, une matrice diagonale est semi-définie négative si le déterminant est $\geqslant 0$ et que la trace est < 0 , ou encore le produit des valeurs propres est positif ou nul, *i.e.* les valeurs propres sont de même signe, et la somme des valeurs propres est strictement négative, *i.e.* les valeurs propres sont négatives.

Il faut donc $\dfrac{\partial^2 \beta_x^j}{\partial q^2} < 0$, *i.e.* $V^j(1-q,x_j)$ convexe en q (ou de façon équivalente en $p = 1-q$) et $\dfrac{\partial^2 \beta_x^j}{\partial t^2} < 0$, *i.e.* $V^j(1,x_j-t)$ concave en t (ou de *façon équivalente* en $x_j \in [0,1]$). ■

Démonstration de la Proposition 3

Soit $b^i(x) \equiv \dfrac{V_x^i(1,x_i)}{V_p^i(1,x_i)}$ et $b^j(x) \equiv \dfrac{V_x^j(1,x_j)}{V_p^j(1,x_j)}$

[$\Rightarrow$] Par l'absurde :

Supposons que la proposition est fausse, *i.e.* x est tel que $b^i(x) > b^j(x)$.

On peut alors choisir t et q satisfaisant $t.b^i(x) - q > 0 > t.b^j(x) - q$.

Ainsi, $(q,t) \in A_i(x)$ (par la première inégalité) et $(q,t) \in B_j(x)$ (par la deuxième inégalité).

En effet, si on fait un développement de TAYLOR au premier ordre de $V^i(1-q,x_i+t)$ et de $V^j(1,x_j-t) - V^j(1-q,x_j)$ au voisinage de $(q,t) = (0,0)$, il vient :

$$\alpha_x^i = V^i(1-q,x_i+t) - V^i(1,x_i) = -V_p^i(1,x_i).q + V_x^i(1,x_i).t$$

$$\beta_x^j = V^j(1,x_j-t) - V^j(1-q,x_j) = -V_x^j(1,x_j).t + V_p^j(1,x_j).q$$

Ainsi, comme $\alpha_x^i > 0$ et $\beta_x^j > 0$, on peut réécrire les ensembles $A_i(x)$ et $B_j(x)$ de la façon suivante :

$$A_i(x) = \left\{(q,t) \in [0,1] \times [0,x_j] \,\middle|\, t.b^i(x) - q > 0\right\}$$

et $$B_j(x) = \left\{(q,t) \in [0,1] \times [0,x_j] \,\middle|\, t.b^j(x) - q < 0\right\}$$

On a donc $(q,t) \in A_i(x) \cap B_j(x)$, ce qui est une contradiction avec la proposition que x est une solution ordinale de NASH, donc [$\Rightarrow$] est démontré. Voyons l'autre sens.

[$\Leftarrow$] (GRANT et KAJII [1994]):

Supposons que x est une solution d'audaces marginales égales, on pose $b = b^i(x)\ \forall i$. Alors, comme la frontière de $A_i(x)$ au point $(q,t) = (0,0)$ a comme vecteur directeur $\binom{-1}{b}$ et que celle de $B_j(x)$ a comme vecteur directeur $\binom{1}{-b}$, l'intersection des ensembles $A_i(x)$ et $B_j(x)$ est réduite à $(0,0)$, donc x est aussi une solution ordinale de NASH.

• Références bibliographiques

AUMANN, R.J., KURZ, M. (1977). – “Power and Taxes”, *Econometrica,* volume 45, pp. 1137-1161.

BINMORE, K., RUBINSTEIN, A., WOLINSKY, A. (1986). – “The Nash bargaining solution in economic modelling”, *Rand Journal of Economics,* volume 17, pp. 176-188.

CHATEAUNEUF, A., COHEN, M. (1994). – “Risk-seeking with diminishing marginal Utility in a Non-Expected Utility Model”, *Journal of Risk and Uncertainty,* volume 9, pp. 77-91.

CHEW, H., KARNI, E., SAFRA, Z. (1987). – “Risk Aversion in the Theory of Expected Utility with Rank Dependent Probabilities”, *Journal of Economic Theory,* volume 42, pp. 370-380.

DOHERTY, N., EECKHOUDT, L. (1995). – “Optimal Insurance without Expected Utility: The Dual Theory and the Linearity of Insurance Contracts”, *Journal of Risk and Uncertainty,* volume 10, pp. 157-179.

GRANT, S., KAJII, A. (1994). – “Bargaining, Boldness and Nash Outcomes with Non-Expected Utility”, *ANU paper # 264*.

GRANT, S., KAJII, A. (1995). – “A Cardinal Characterization of the RUBINSTEIN-SAFRA-THOMSON Axiomatic Bargaining Theory”, *Econometrica,* volume 63, pp. 1241-1249.

GUL, F. (1991). – “A theory of Disappointment Aversion’’, *Econometrica,* volume 59, pp. 667-686.

HANANY, E., SAFRA, Z. (1998). – “Existence and Uniqueness of ordinal Nash outcome”, *Working Paper # 4/98,* Tel Aviv University.

KALAÏ, E. (1977). – “NonSymmetric Nash Solutions and replications of 2-Person Bargaining”, *International Journal of Game Theory,* volume 6, pp. 129-133.

KIHLSTROM, R.E., ROTH, A.E., SCHMEIDLER, D. (1981). – “Risk Aversion and Solutions to NASH’S Bargaining Problem”, in O. MOESCHLEIN et D. PALLASCHKE, ed., Game Theory and Mathematical Economics, Amsterdam: North Holland, pp. 65-71.

NASH, J. (1950). – “The Bargaining Problem”, *Econometrica,* volume 18, pp. 155-162.

QUIGGIN, J. (1982). – “A Theory of Anticipated Utility”, *Journal of Economic Behavior and Organization,* volume 3, pp. 323-343.

RUBINSTEIN, A. (1982). – “Perfect Equilibrium in a Bargaining Model”, *Econometrica,* volume 50, pp. 97-109.

RUBINSTEIN, A., SAFRA, Z., THOMSON, W. (1992). – “On the Interpretation of the NASH Bargaining Solution and its Extension to Non-Expected Utility preferences”, *Econometrica,* volume 60, pp. 1171-1186.

VALENCIANO, F., ZARZUELO, J.M., “On the Interpretation of Nonsymmetric Bargaining Solution and their Extension to Non-Expected Utility preferences”, *Games and Economic Behavior,* volume 7, pp. 461-472.