ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 54 – 1999

Équilibres monétaires du jeu stratégique de marché dans le modèle à générations imbriquées

Francis de MOROGUES *

RÉSUMÉ. – Cet article présente un modèle d'équilibre général de concurrence imparfaite dans une économie d'échanges monétaires avec générations imbriquées. La concurrence imparfaite se traduit par la règle de fixation du prix des jeux stratégiques de marché à la SHAPLEY-SHUBIK. Nous donnons les conditions d'existence d'un équilibre stationnaire, symétrique et non autarcique dans le cas de plusieurs biens. La démonstration utilisée donne un cadre clair à l'équivalence asymptotique de l'ensemble de ces équilibres de concurrence imparfaite et de l'ensemble des équilibres concurrentiels.

Monetary Equilibria of the Strategic Market Game in the Overlapping Generations Model

ABSTRACT. – This paper develops a dynamic model of general imperfect competition by embedding the SHAPLEY-SHUBIK model of market games into an overlapping generations framework. We consider an economy with $j \geqslant 1$ goods and $N \geqslant 2$ agents. We show that the conditions for a non autarcic, symmetric and stationary equilibrium are equivalent to the conditions of a simple static optimization problem. We show that a non autarcic equilibrium exists if the market powers are not too high.

This model gives a very clear framework to study relations between imperfect competition equilibrium and competitive equilibrium in a dynamic context. For example, in a one-good economy, we show that one can apply the tools of the studies of the non stationary competitive equilibrium to analyse the imperfect competition equilibrium.

---

* Francis de MOROGUES, GREQAM/UMR CNRS 6579
Je remercie Philippe MICHEL pour ses indications attentionnées.

1 Introduction

Les jeux stratégiques de marchés sont issus des travaux de SHAPLEY-SHUBIK [1977] et sont destinés à l'étude théorique de la monnaie et des institutions financières, comme le montre SHUBIK [1990]. Un jeu stratégique de marché est un processus de réallocations qui se caractérise par une institution monétaire et une règle de formation des prix. Par institution monétaire il faut entendre l'ensemble des règles qui permettent les échanges et notamment la présence d'une monnaie, seule intermédiaire des échanges. Pour chaque bien, il existe un comptoir d'échange où les agents viennent déposer des offres de bien et de monnaie. La règle de fixation des prix est explicite : sur chaque comptoir, le prix est le rapport de l'offre totale en monnaie sur l'offre totale en bien. Les agents prennent en compte leur influence sur les prix et ont un comportement stratégique. Les jeux de marché constituent ainsi un outil d'analyse de la concurrence imparfaite.

Les ramifications de cette analyse sont nombreuses en statique avec notamment les contributions de DUBEY, MAS-COLELL et SHUBIK [1980] dans le cas d'un continuum d'agents, PECK et SHELL [1991] dans un univers incertain, PECK, SHELL et SPEAR [1992] pour une monnaie de crédit, AMIR, SAHI, SHUBIK et YAO [1990] pour le cas où tout bien est une monnaie.

L'objet de cette contribution est d'étudier les jeux stratégiques de marchés dans le modèle à générations imbriquées.

On peut noter deux contributions récentes. FORGES et PECK [1995] utilisent ce type de modèle pour étudier les relations entre équilibres de tâches solaires et équilibres corrélés. Ils évitent les problèmes stratégiques en considérant un continuum d'agents à chaque génération. GOENKA et SPEAR [1996] par contre s'attachent à démontrer l'existence d'un équilibre intérieur dans une économie avec un nombre fini d'agents à chaque date et plusieurs biens. Dans leur modèle les agents utilisent une monnaie-signal, c'est-à-dire que les recettes retirées des ventes financent dans le même temps les achats. C'est une monnaie de crédit. Les agents font face à une contrainte de budget intertemporelle, sauf pour les vieux de la première période. La démonstration se base sur celle de BALASKO et SHELL [1980]. Ils considèrent une économie tronquée à une date T. Ils disposent ainsi d'une économie finie et utilisent les résultats de PECK, SHELL et SPEAR [1992] pour obtenir l'existence d'un équilibre où tous les marchés sont actifs. En faisant tendre la date T vers l'infini ils démontrent l'existence d'un équilibre intérieur de l'économie dans son ensemble. Au travers d'exemples ils étudient différentes propriétés de l'équilibre comme la multiplicité des stratégies d'équilibre, la convergence vers un équilibre walrasien quand le nombre d'agents tend vers l'infini, et les effets de la « liquidité » des marchés sur le bien-être des agents. Le concept d'équilibre qu'ils étendent au modèle à générations imbriquées est celui de l'équilibre avec monnaie-signal.

Le premier concept d'équilibre des jeux stratégiques de marché dû à SHAPLEY et SHUBIK [1977] est celui avec bien-monnaie. Il impose que les agents détiennent de la monnaie pour pouvoir acquérir des biens. Les agents ne peuvent pas créer de monnaie. Dans le modèle à générations imbriquées on considère souvent que les premiers agents vieux ont une dotation en monnaie qui leur permet d'acquérir des biens détenus par les premiers jeunes. Cette monnaie circule alors de génération en génération et constitue un intermédiaire des échanges intergénérationnels. Ceci constitue un équilibre concurrentiel avec bien-monnaie. C'est cette notion que nous nous proposons de généraliser avec plusieurs biens dans le cadre des comportements non concurrentiels des jeux stratégiques de marché.

Dans le modèle statique des jeux stratégiques de marché avec bien-monnaie les agents échangent du bien contre de la monnaie car celle-ci a, par l'hypothèse, une utilité. Dans le modèle dynamique à générations imbriquées la monnaie n'a pas d'utilité directe, elle n'est pas un argument de la fonction d'utilité des agents. C'est sa fonction de bien durable, qui permet son utilisation à la période suivante, qui suscite son acquisition.

Dans la section I nous décrivons l'économie, spécifions les variables de décisions des agents et caractérisons le fonctionnement des marchés. Dans la section II, nous définissons un équilibre du jeu stratégique de marché dans une économie d'échange avec plusieurs biens et un bien-monnaie puis nous analysons l'équilibre autarcique. Enfin dans la section III, nous caractérisons les conditions sous lesquelles il existe un équilibre symétrique, stationnaire et non autarcique pour cette économie avant d'analyser, au travers d'un exemple, les équilibres non stationnaires.

La démonstration d'existence est le cœur de cet article. Elle fait appel à des techniques beaucoup plus simples que celles, présentées plus haut, de GOENKA et SPEAR. Le principe est d'établir l'équivalence entre l'ensemble des conditions d'existence d'un équilibre de l'économie et la solution d'un problème d'optimisation statique *ad hoc*. Une fois l'équivalence établie, l'analyse de l'équilibre de l'économie s'effectue sur la seule base du problème *ad hoc*.

2 Le modèle

2.1. Description de l'économie

Considérons un modèle d'économie d'échanges à générations imbriquées avec J biens et de la monnaie. L'économie existe de $t = 0$ à l'infini. La règle des échanges est celle des jeux stratégiques de marché. Il existe un marché pour chaque bien caractérisé par un comptoir. Dans un comptoir les agents viennent déposer une quantité de monnaie qui correspond à leurs demandes de bien ou une quantité de ce bien qui caractérise leurs offres. Une fois tous les dépôts enregistrés, le prix s'établit et la réallocation des biens s'effectue.

À chaque date $t \geqslant 0$ naît une génération d'agents d'effectif $N_t \geqslant 2$. Le nombre d'agents présents dans l'économie à cette date est $N_t + N_{t-1} \geqslant 4$. Chaque agent vit deux périodes. En première période il reçoit un vecteur de dotations $\omega_1 \in R_+^J$. En seconde période il reçoit $\omega_2 \in R_+^J$. Ces dotations sont les mêmes pour tous les agents.

Il faut noter que la monnaie ne fait pas partie de la dotation de ces consommateurs. Comme les agents ne peuvent acheter du bien qu'à l'aide de monnaie et qu'il n'y a pas de crédit possible, ils ne pourront participer aux échanges que s'ils acquièrent de la monnaie. En conséquence, il n'y a pas d'échange entre jeunes d'une même génération. Pour se procurer cette monnaie les agents jeunes peuvent offrir des biens que les agents vieux présents à la même date pourront leur acheter. La monnaie passe ainsi d'une génération à l'autre.

La monnaie est aussi le support de l'épargne des agents. Elle s'apparente à un bien durable en opposition aux biens en dotation qui sont périssables. Cependant elle n'a pas d'utilité. C'est la conception de la monnaie de Samuelson dans son article de 1958.

Les vieux de la période initiale constituent une cohorte d'agents particuliers dans la mesure où ils ne vivent qu'une période et détiennent le stock initial de monnaie.

2.2. Variables de décision des agents

La première génération en $t = 0$ compte N_{-1} vieux. Ils détiennent, à parts égales, un stock de monnaie d'un volume total $\overline{M}$, soit une quantité $\dfrac{\overline{M}}{N_{-1}}$ par agent. Les membres de cette première génération de vieux reçoivent tous le même vecteur de dotations initiales $\omega_2 \in R_+^J$. Ils ont la même fonction d'utilité concave et strictement croissante par rapport à chacun de ses arguements $V(d_0^i)\colon R_+^J \to R$.

L'offre de monnaie d'un agent i, $i \in \{1, \dots, N_{-1}\}$, sur les différents marchés $j \in \{1, \dots, J\}$ est notée m_0^{ij}. Ces offres sont telles qu'elles doivent respecter les J contraintes :

(1) $$m_0^{i,j} \geqslant 0 \quad j = 1, \dots, J$$

Chaque agent fait face à une seule contrainte de liquidité de la forme :

(2) $$\sum_{j=1}^{J} m_0^{i,j} \leqslant \frac{\overline{M}}{N_{-1}}$$

Sur le marché j, sur lequel il y a des échanges effectifs, la consommation correspondante sera en $t = 0$:

(3) $$d_0^{i,j} = \omega_2^i + \frac{m_0^{i,j}}{P_0^j}, \quad j \in \{1, \dots, J\},$$

où P_0^j est le prix de la période 0 pour le bien j. L'analyse de la formation des prix est donnée au paragraphe suivant.

Sur les marchés j', sur lesquels il n'y a pas d'échange, la consommation de l'agent i sera

(4) $$d_0^{i,j'} = \omega_2^{j'} \quad j' \neq j$$

Appelons $q_t^{i,j}$ l'offre de bien j de l'agent i né à la date $t > 0$ et $m_{t+1}^{i,j}$ son offre de monnaie sur le comptoir du bien j durant sa deuxième période de vie, pour $j = 1, \dots, J$. La consommation de première période d'un agent i né en t se définit par :

$$c_t^{i,j} = \omega_1^j - q_t^{i,j} \quad \text{pour} \quad j = 1, \dots, J.$$

Sur les marchés j, sur lesquels il y a des échanges effectifs, la consommation de deuxième période sera :

$$d_{t+1}^{i,j} = \omega_2^j + \frac{m_{t+1}^{i,j}}{P_{t+1}^j} \quad \text{pour} \quad j \in \{1, \ldots, J\}.$$

où P_{t+1}^j est le prix de bien j en $t+1$. Sur les marchés j' sur lesquels il n'y a pas d'échange la consommation sera :

$$d_{t+1}^{i,j'} = \omega_2^{j'} \quad j' \neq j$$

Tous les consommateurs se comportent sur la base d'une même fonction d'utilité. Cette fonction est concave et strictement croissante par rapport à chacun de ses arguements :

$$U(c_t^i, d_{t+1}^i) : R_+^J \times R_+^J \to R \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, N_t. \tag{5}$$

avec $c_t^i = (c_t^{i,1}, \ldots, c_t^{i,J})$ et $d_{t+1}^i = (d_{t+1}^{i,1}, \ldots, d_{t+1}^{i,J})$.

2.3. **Fonctionnement des marchés et formation des prix**

A la date $t \geqslant 0$, sur un marché $j \in \{1, \ldots, J\}$ il y a N_t jeunes et N_{t-1} vieux qui sont susceptibles de participer aux échanges. La quantité de bien j disponible dans l'économie est alors $N_{t-1}\omega_2^j + N_t\omega_1^j$. Les jeunes apportent les offres de biens issus de leurs dotations $\omega_1^{j'}$. Les vieux, seuls détenteurs du stock de monnaie de l'économie, peuvent participer au marché en effectuant des offres de monnaie.

Le marché $j \in \{1, \ldots, J\}$ *est dit actif* s'il existe, à la fois, une offre strictement positive de monnaie et une offre strictement positive de bien. Soit A_t l'ensemble des marchés actifs à la date t : $A_t \subset \{1, \ldots, J\}$. Sur un marché, j, actif à la date t, le prix est défini par :

$$P_t^j = \frac{\sum_{i=1}^{N_{t-1}} m_t^{i,j}}{\sum_{i=1}^{N_t} q_t^{i,j}} = P(M_t^j, Q_t^j) \tag{6}$$

avec $M_t^j = (m_t^{i,j})_{i=1,\ldots,N_{t-1}}$ et $Q_t^j = (q_t^{i,j})_{i=1,\ldots,N_t}$

La fonction P est la même pour tous les marchés actifs indépendamment du bien et du temps. Elle caractérise la règle de formation des prix dans cette économie. Les arguments de la fonction P montrent l'influence sur les prix que les agents possèdent via leurs offres monétaires et réelles.

Trois situations caractérisent les marchés inactifs. Lorsqu'aucune offre, ni de monnaie ni de bien, n'est faite le marché est inactif par la seule volonté des agents. S'il existe une proposition d'échange en monnaie sans contrepartie de bien, alors la règle de fonctionnement des marchés impose que ces offres monétaires soient confisquées au seul préjudice de leurs propriétaires. De même s'il n'existe sur un marché qu'une seule offre en bien, celle-ci sera confisquée à ses propriétaires.

2.4. **Décisions des agents**

L'agent i né en $t \geqslant 0$ maximise son utilité du cycle de vie $U(c_t^i, d_{t+1}^i)$, en prenant toutes les stratégies des autres joueurs comme données, sous les contraintes :

$$c_t^{i,j} = \omega_1^j - q_t^{i,j} \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, J. \tag{7}$$

L'offre de bien pour l'échange vient en déduction de la dotation de première période de vie. Cette offre est nécessairement positive si l'agent souhaite se procurer de la monnaie et respecte une contrainte de disponibilité :

$$0 \leqslant q_t^{i,j} \leqslant \omega_1^j \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, J. \tag{8}$$

Soit $\overline{m}_t^{i,j}$ l'épargne monétaire que l'agent i né en t retire du marché j, elle est définie par la relation :

$$\overline{m}_t^{i,j} = \begin{cases} P_t^j \, q_t^{i,j} & \text{si} \quad j \in A_t \\ 0 & \text{si} \quad j \notin A_t \end{cases}$$

L'épargne monétaire de l'agent i né en t, $\overline{m}_t^i$, est donnée par :

$$\overline{m}_t^i = \sum_{j=1}^{J} \overline{m}_t^{i,j} \tag{9}$$

La restriction, $j \in A_t$, montre que les recettes monétaires correspondent aux seuls marchés actifs. C'est la conséquence de la règle de fonctionnement des marchés. Si l'agent a porté, dans sa jeunesse, une quantité de bien sur un marché qui s'est révélé inactif, il n'en a retiré aucune monnaie.

$$d_{t+1}^{i,j} = \begin{cases} \omega_2^j + \dfrac{m_{t+1}^{i,j}}{P_{t+1}^j} & \text{si} \quad j \in A_{t+1} \\ \\ \omega_2^j & \text{si} \quad j \notin A_{t+1} \end{cases} \tag{10}$$

La consommation en seconde période est conditionnelle à l'activité des marchés où l'agent se porte offreur de monnaie. Sur les marchés inactifs, l'agent perd toutes les offres qu'il présente. Si le marché est actif, le ratio

$$\frac{m_{t+1}^{i,j}}{P_{t+1}^j} \quad \text{s'écrit aussi} \quad \frac{m_{t+1}^{i,j}}{\sum_{h=1}^{N_t} m_{t+1}^{h,j}} \left(\sum_{h=1}^{N_{t+1}} q_{t+1}^{h,j} \right).$$

Ceci montre que le volume de bien j que l'agent i retirera du marché est proportionnel au volume total d'offre de bien apporté au marché. Le facteur de proportionnalité est égal au rapport entre son offre personnelle de monnaie, $m_{t+1}^{i,j}$, et l'offre de monnaie totale : $\sum_{h=1}^{N_t} m_{t+1}^{h,j}$.

$$m_{t+1}^{i,j} \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, J \tag{11}$$

L'agent répartit ses offres monétaires au sein des différents marchés et doit vérifier la contrainte budgétaire qui est aussi une contrainte de liquidité :

$$\overline{m}_t^i \geqslant \sum_{j=1}^{J} m_{t+1}^{i,j} \tag{12}$$

Le membre de droite représente l'ensemble des offres monétaires que l'agent effectue dans sa vieillesse. Le membre de gauche correspond au volume de monnaie que l'agent retire des échanges durant sa jeunesse.

Dans le cadre des jeux stratégiques de marché les agents prennent en compte l'influence de leurs décisions sur la formation et le niveau des prix. Dans les contraintes (9) et (10) les prix s'expriment par :

$$P_t^j = P(M_t^j, Q_t^j) \quad \text{pour} \quad j \in A_t \tag{13}$$

$$P_{t+1}^j = P(M_{t+1}^j, Q_{t+1}^j) \quad \text{pour} \quad J \in A_{t+1} \tag{14}$$

Les vieux de la première période maximisent, les stratégies des autres joueurs étant données, la fonction $V(d_0^i)$, où d_0^i est le vecteur $(d_0^{i,1}, \ldots, d_0^{i,J})$ sous les contraintes :

$$m_0^{i,j} \geqslant 0 \quad j = 1, \ldots, J \tag{15}$$

La seule offre monétaire des vieux de la première période sur les différents marchés n'est pas une condition suffisante pour qu'ils en retirent des biens. C'est néanmoins une condition nécessaire. Il faut aussi que les jeunes de la première période proposent des biens à l'échange.

$$\sum_{j=1}^{J} m_0^{i,j} \leqslant \frac{\overline{M}}{N_{-1}} \tag{16}$$

Ces agents vieux en première période ne sont pas dans l'obligation de proposer l'ensemble de leur dotation en monnaie. Ils déterminent cependant la masse monétaire disponible en deuxième période en l'absence de création monétaire.

$$d_0^{i,j} = \begin{cases} \omega_2^j + \dfrac{m_0^{i,j}}{P_0^j} & \text{si } j \in A_0 \\ \omega_2^j & \text{si } j \notin A_0 \end{cases} \tag{17}$$

Ils prennent aussi en compte l'effet de leurs décisions sur les prix P_0^j de la période 0.

3 L'équilibre

3.1. Définition de l'équilibre du jeu stratégique de marché

Un *équilibre du jeu stratégique de marché* est une suite de vecteurs de quantités $(\widehat{M}_t^j, \widehat{Q}_t^j)$ pour $t \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, J$. Cette suite définit la suite de l'ensemble des marchés actifs $\widehat{A}_t$, avec $\widehat{A}_t = \{j / \widehat{M}_t^j \neq 0 \text{ et } \widehat{Q}_t^j \neq 0\}$. Sur ces marchés les offres de biens et de monnaies déterminent les prix $\widehat{P}_t^j$ et les vecteurs de consommations correspondant $\widehat{c}_t^i$, $\widehat{d}_{t+1}^i$ et $\widehat{d}_0^i$ tels que :

$$\widehat{P}_t^j = P(\widehat{M}_t^j, \widehat{Q}_t^j) \quad \text{pour} \quad j \in \widehat{A}_t$$

$\widehat{c}_t^i, \widehat{d}_{t+1}^i$ maximisent la fonction $U(c_t^i, d_{t+1}^i)$ sous les contraintes (7) à (12) et sous les règles de formation des prix (13), (14).

$\widehat{d}_0^i$ maximise la fonction $V(d_0^i)$ sous les contraintes (15) à (17) et sous la règle de formation du prix en $t = 0$.

Dans la procédure d'optimisation des agents qui vivent deux périodes, chacun prend en compte l'influence de ses décisions sur les prix étant donné les stratégies des autres joueurs. Pour la clarté du propos il est utile d'écrire le prix en fonction des variables de décisions de l'agent i et des stratégies des autres agents prises en l'équilibre, soit

$$P_t^j = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N_{t-1}} \widehat{m}_t^{i,j}}{q_t^{i,j} + \displaystyle\sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^{N_t} \widehat{q}_t^{h,j}} \qquad \text{pour} \quad j \in \widehat{A}_t$$

$$P_{t+1}^j = \frac{m_{t+1}^{i,j} + \displaystyle\sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^{N_t} \widehat{m}_{t+1}^{h,j}}{\displaystyle\sum_{h=1}^{N_{t+1}} \widehat{q}_{t+1}^{h,j}} \qquad \text{pour} \quad j \in \widehat{A}_{t+1}$$

De même, les agents vieux en première période prennent en compte l'influence de leurs décisions sur le prix.

$$P_0^j = \frac{m_0^{i,j} + \displaystyle\sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^{N_t} \widehat{m}_0^{h,j}}{\displaystyle\sum_{h=1}^{N_0} \widehat{q}_0^{h,j}} \qquad \text{pour} \quad j \in \widehat{A}_0$$

On remarque que dans ce jeu il y a une infinité de joueurs. L'équilibre qui en résulte est un équilibre de NASH pour une infinité de joueurs. L'ensemble des stratégies d'un agent dépend de ses ressources mais aussi des décisions des autres joueurs par l'intermédiaire de la contrainte de budget (12). En effet, la quantité de monnaie m^i_{t+1} que l'agent i né en t va offrir sur les marchés en $t+1$ dépend de son épargne monétaire, résultat de ses décisions d'offre en biens $q^{i,j}_t$. Ces mêmes décisions dépendent des décisions en monnaie des joueurs de la période précédente qui elles-mêmes... Ce jeu se ramène donc à un jeu généralisé, dont l'étude est faite par DEBREU [1952].

Un équilibre du jeu stratégique de marché porte sur l'ensemble des périodes de l'économie. La suite des équilibres temporaires constitue l'équilibre de l'économie. Aussi c'est le nombre d'équilibres qui importe et non les particularités en termes de trajectoire (cycles, chaos...) de chacun d'eux.

3.2. Étude de l'équilibre autarcique

Dans les modèles statiques de jeux stratégiques de marchés il existe toujours un équilibre qualifié de trivial qui correspond à l'autarcie où les offres de biens et de monnaie sont nulles sur tous les marchés. C'est un équilibre dans la mesure où une déviation individuelle entraîne la perte de l'offre proposée tant monétaire que réelle. De même, dans les modèles à générations imbriquées en concurrence parfaite cet équilibre autarcique est possible, comme le montre SAMUELSON [1958]. Toutefois, l'aspect intertemporel de l'équilibre que nous étudions réclame une démonstration d'existence différente du cas statique.

On appelle *équilibre autarcique* un équilibre du jeu stratégique de marché qui vérifie $\widehat{A}_t = \varnothing$ pour tout $t \geqslant 0$.

PROPRIÉTÉ 1 : Il existe un équilibre autarcique. À cet équilibre les offres initiales de monnaie faites par les vieux de la première période sont indéterminées mais toutes les autres quantités, en bien et monnaie pour toutes les dates, sont nulles. Cet équilibre est obtenue dès lors que les quantités de biens offertes par les jeunes de la première période sont nulles.

Démonstration : Considérons une suite de vecteur $(\widehat{M}^j_t, \widehat{Q}^j_t)$ où les quantités de biens sont $\widehat{Q}^j_t = 0$ pour $j = 1,\dots,J$ et pour $t \geqslant 0$ et les quantités de monnaie $\widehat{M}^j_t = 0$ pour $j = 1,\dots,J$ et pour $t \geqslant 1$. Fixons les offres de monnaie initiales $\widehat{M}^j_0$ pour $j = 1,\dots,J$ de telles sortes qu'elles vérifient $m^{i,j}_0 \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{J} m^{i,j}_0 \leqslant \frac{\overline{M}}{N_{-1}}$ pour tout $i = 1,\dots,N_{-1}$.

Toutes ces quantités vérifient les conditions de la définition d'un équilibre du jeu stratégique de marché dans le cas où $\widehat{A}_t = \varnothing$ pour tout $t \geqslant 0$. Dans ce cas tous les agents consomment leurs dotations soit : $c^i_t = \omega_1$, $d^i_{t+1} = \omega_2$ et $d^i_0 = \omega_2$ pour tout $t \geqslant 0$ et tout i. Dès lors que $\widehat{Q}^j_0 = 0, \forall j \in \{1,\dots,j\}$ tous les marchés sont inactifs à la date $t = 0$ et l'équilibre est indépendant des quantités de monnaie apportées par les premiers vieux sur les différents marchés. Elles seront toutes confisquées.

Les jeunes de la première période n'ont pas acquis de monnaie lors du premier fonctionnement des marchés et il n'y a alors plus de monnaie dans l'économie à partir de la périote $t = 1$. Tous les marchés sont donc inactifs pour toutes les périodes suivantes faute de contrepartie monétaire. C'est l'équilibre autarcique.

Dans la mesure où un équilibre est caractérisé par une suite $(\widehat{M}_t^j, \widehat{Q}_t^j)$ pour $t = 0$ à l'infini, et que les offres initiales de monnaie sont indéterminées, il existe une infinité d'équilibres autarciques.

Cqfd.

PROPRIÉTÉ 2[1] : Si à un équilibre du jeu stratégique de marché à une date $T \geqslant 0$ tous les marchés sont inactifs $(\widehat{A}_T = \varnothing)$ alors l'équilibre est autarcique.

Démonstration : D'après le programme d'un agent, si A_{t+1} est vide alors le choix optimal de chaque agent i jeune en période t est $q_t^{i,j} = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, J$. Il est inutile d'acquérir de la monnaie en cédant une partie de sa dotation de première période si à la période suivante tous les marchés sont inactifs. Cela revient, pour un agent, à perdre une partie de sa consommation du cycle de vie. La fonction d'utilité étant croissante par rapport à chacun de ses arguments ce choix se révèle sous-optimal. L'ensemble des marchés A_t est donc vide. Par récurrence tous les marchés sont inactifs jusqu'à la période T. Ce raisonnement s'applique aussi en $t = 0$. Par ailleurs comme il n'y a plus de monnaie dans l'économie à partir de la période T, tous les marchés futurs sont inactifs car incapables de fonctionner.

Cqfd.

L'équilibre autarcique correspond à la seule situation où il n'existe aucune transaction à toutes les dates. La propriété précédente indique que si les premières offres de biens et de monnaie sont strictement positives alors à l'équilibre il existera toujours une quantité strictement positive de monnaie en circulation.

PROPRIÉTÉ 3 : Considérons un équilibre, soit $A_{t+1}^i \subset A_{t+1}$ l'ensemble des marchés actifs indépendamment de l'action de l'agent i né en t. Si $A_{t+1}^i \neq \varnothing$ alors la contrainte de budget de l'agent est saturée.

Démonstration : Supposons qu'un agent i n'emploie pas tout son avoir monétaire sur les différents marchés actifs. Il peut alors par une déviation individuelle accroître son utilité en offrant un volume supplémentaire de monnaie sur un des marchés actifs. En effet, considérons la consommation de seconde période de l'agent i né en t et sa variation marginale :

1. Cette propriété est à rapprocher de la notion de confiance en la monnaie dans le modèle de SAMUELSON.

$$d_{t+1}^{i,j} = \omega_2^j + \frac{m_{t+1}^{i,j}}{P_{t+1}^j} \quad \text{avec} \quad P_{t+1}^j = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} m_{t+1}^{i,j}}{\sum_{i=1}^{N_{t+1}} q_{t+1}^{i,j}}$$

Pour $j \in A_{t+1}^i \neq \varnothing$ nous avons

$$\frac{\partial d_{t+1}^{i,j}}{\partial m_{t+1}^{i,j}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_t} m_{t+1}^{i,j}} \left(1 - \frac{m_{t+1}^{i,j}}{\sum_{i=1}^{N_t} m_{t+1}^{i,j}} \right) > 0 \quad \text{car} \quad \sum_{i=1}^{N_t} m_{t+1}^{i,j} > m_{t+1}^{i,j}$$

Cette situation initiale ne peut alors caractériser un équilibre. Cet argument est valable quel que soit t et i et notamment en $t = 0$.

Cqfd.

Si l'équilibre est non autarcique le stock de monnaie de l'économie disponible à chaque date est constant et égal au stock initial $\overline{M}$.

4 L'équilibre non autarcique

4.1. De l'existence d'un équilibre non autarcique

Dans le cas concurrentiel, l'optimum de SAMUELSON [1958] constitue un équilibre concurrentiel stationnaire avec un taux d'intérêt égal au taux de croissance de la population. Dans le cas séparable $U(c,d) = u(c) + v(d)$, avec une population constante, $N_t = N$ pour tout t, on obtient cet équilibre en maximisant $u(c) + v(d)$ sous la contrainte de ressource de l'économie :

$$Nc + Nd = N\omega_1 + N\omega_2$$

Nous allons établir un lien entre l'équilibre symétrique stationnaire de l'économie concurrentielle et la solution d'un problème d'optimisation statique pour montrer l'existence d'un équilibre du jeu stratégique de marché. Nous allons montrer qu'il est possible, dans le cas séparable et avec une population constante, d'obtenir un équilibre du jeu stratégique de marché en maximisant la fonction *ad hoc* :

$$u(c) + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 v(d).$$

Nous allons, à cet effet, caractériser, pour ce cas, les équilibres stationnaires symétriques du jeu stratégique de marché décrit plus haut. Nous allons ensuite déterminer les conditions d'équivalence entre cet équilibre et la solution du problème *ad hoc* sous les contraintes :

$$c = \omega_1 - q$$
$$d = \omega_2 + q$$
$$q \geqslant 0$$

LEMME 1 : Le jeu stratégique de marché est concave : à stratégies des autres agents données, l'ensemble des stragégies d'un agent est convexe et sa fonction de gain est une fonction concave de ses propres stratégies.

Démonstration : Le problème d'un agent i s'écrit :

$$\operatorname{Max} U(c_t^i, d_{t+1}^i)$$

sous les contraintes :

$$m_{t+1}^{i,j} \geqslant 0$$

$$\overline{m}_t^i - \sum_{j=1}^{J} m_{t+1}^{i,j} \geqslant 0$$

ou :

$$\begin{aligned}
c_t^{i,j} &= \omega_1^j - q_t^{i,j} && \text{pour} \quad j = 1, \ldots, J. \\
d_{t+1}^{i,j} &= \omega_2^j + \frac{m_{t+1}^{i,j}}{P_{t+1}^j} && \\
P_t^j &= P(M_t^j, Q_t^j) && \text{pour} \quad j \in A, \\
P_{t+1}^j &= P(M_{t+1}^j, Q_{t+1}^j) && \text{pour} \quad j \in A_{t+1}
\end{aligned}$$

Posons $\varphi_{t+1}^j(m_{t+1}^{i,j}) \stackrel{\text{déf}}{=} \omega_2^j + \dfrac{m_{t+1}^{i,j}}{P(M_{t+1}^j, Q_{t+1}^j)}$ qui est une fonction concave de $m_{t+1}^{i,j}$. En effet, la fonction $f(x) = \dfrac{x}{a+x}$, avec a positif ou nul, est une fonction concave de x dans l'ensemble des x positifs ou nuls : $\left(f''(x) = -\dfrac{2a}{(a+x)^3} \right)$.

La fonction de gain d'un agent est concave comme la composée de U, concave et croissante, avec des fonctions concaves.

En effet, considérons les notations suivantes:

$$X = (q_t^{i,1}, \ldots, q_t^{i,J}, m_{t+1}^{i,1}, \ldots, m_{t+1}^{i,J})$$
$$g_j^1(X) = \omega_1^j - q_t^{i,j} \text{ pour } j = 1, \ldots, J.$$
$$g_j^2(X) = \omega_2^j - \frac{m_{t+1}^{i,j}}{P(M_{t+1}^j, Q_{t+1}^j)}$$
$$\overrightarrow{g} = (g_1^1, \ldots, g_J^1, g_1^2, \ldots, g_J^2)$$

la fonction d'utilité s'écrit alors $U(g)$ et chacun de ses arguments est une fonction concave par rapport au vecteur des stratégies de l'agent i. On en déduit pour deux vecteurs quelconques de stratégies X et Y et pour $\lambda \in [0,1]$:

$$g_j^r(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geqslant \lambda g_j^r(X) + (1-\lambda) g_j^r(Y) \text{ pour } r = 1,2 \text{ et } j = 1,\dots,J.$$

Comme U est une fonction croissante par rapport à chacun de ses arguments on a :

$$U(\overrightarrow{g}(\lambda X + (1-\lambda)Y)) \geqslant U(\lambda \overrightarrow{g}(X) + (1-\lambda)\overrightarrow{g}(Y))$$

et la concavité de U implique :

$$U(\lambda \overrightarrow{g}(X) + (1-\lambda)\overrightarrow{g}(Y)) \geqslant \lambda U(\overrightarrow{g}(X)) + (1-\lambda) U(\overrightarrow{g}(Y))$$

De plus la fonction

$$\sum_{j \in A_t} P(M_t^j, Q_t^j) q_t^{i,j} - \sum_{j=1}^{J} m_{t+1}^{i,j}, \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0,$$

est une fonction concave du vecteur des stratégies de l'agent i. On en déduit que l'ensemble des stratégies d'un agent i est un ensemble convexe.

Pour les agents vieux en première période la fonction V est concave et croissante et l'ensemble des stratégies d'un agent i est un ensemble convexe.

Cqfd.

Pour le problème d'optimisation de chaque agent qui vit deux périodes ce lemme montre que les conditions d'optimalité du premier ordre sont nécessaires et suffisantes. Nous allons donner l'ensemble des conditions d'équilibre de ces économies et le rapprocher de la solution d'un problème d'optimisation statique.

HYPOTHÈSE 1 : L'utilité des agents est séparable et de la forme $U(c,d) = u(c) + v(d)$ avec u et v concaves, continûment différentiables et strictement croissantes par rapport à chacun de leurs arguments.

LEMME 2 : Sous l'hypothèse 1, un équilibre du jeu stratégique de marché stationnaire et symétrique est caractérisé par les conditions suivantes :

– un sous-ensemble A de l'ensemble des biens,

– des quantités $q^i > 0$ en $m^j > 0$ et un prix $P^j = \dfrac{m^j}{q^j}$ pour $j \in A$,

– des quantités $q^j = 0$ et $m^j = 0$ pour $j \notin A$.

– un multiplicateur $\lambda > 0$,

qui vérifient :

si $$A \neq \varnothing, \sum_{j \in A} m^j = \frac{\overline{M}}{N},$$

et pour tout $$j \in A \begin{cases} u_j'(\omega_1 - q) = \lambda P^j \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) \\ v_j'(\omega_2 + q)\left(1 - \dfrac{1}{N}\right) = \lambda P^j \end{cases}$$

où $u'_j = \dfrac{\partial u}{\partial c^j}(.)$ et $v'_j = \dfrac{\partial v}{\partial d^j}(.)$.

Dans le cas $A = \varnothing$, ces conditions se réduisent à $q^j = 0$ et $m^j = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$. Ce cas correspond à l'équilibre autarcique.

Nous étudions le cas $A \neq \varnothing$.

Démonstration : Le lagrangien du problème de maximisation d'un agent i qui vit deux périodes s'écrit :

$$L((q_t^{i,j})_{j=1,\ldots,J}, (m_{t+1}^{i,j})_{j=1,\ldots,J}, \lambda^i) = u(\omega_1 - q_t^i) + v(\omega_2 + B_{t+1}^i) + \lambda^i \left(\sum_{j \in A_t} P_t^j q_t^{i,j} - \sum_{j=1}^{J} m_{t+1}^{i,j} \right)$$

avec :

$$q_t^i = (q_t^{i,j})_{j=1,\ldots,J}, m_{t+1}^i = (m_{t+1}^{i,j})_{j=1,\ldots,J}.$$

$$P_t^j = P(M_t^j, Q_t^j) \text{ pour } j \in A_t$$

$$P_{t+1}^j = P(M_{t+1}^j, Q_{t+1}^j) \text{ pour } j \in A_{t+1}$$

et la notation :

$$B_{t+1}^i = \left(\frac{m_{t+1}^{i,j}}{P_{t+1}^j} \right)_{j=1,\ldots,J}$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q_t^{i,j}}(.) = -u'_j(.) + \lambda^i \left(P_t^j + \dfrac{\partial P_t^j}{\partial q_t^{i,j}}(.) q_t^{i,j} \right) \leqslant 0 \\ \qquad\qquad = 0 \text{ si } q_t^{i,j} > 0 \text{ Pour } j \in A_t \\ \dfrac{\partial L}{\partial m_{t+1}^{i,j}}(.) = v'_j(.) \left(\dfrac{1}{P_{t+1}^j} - \dfrac{m_{t+1}^{i,j} \cdot \dfrac{\partial P_t^j}{\partial m_{t+1}^{i,j}}(.)}{(P_{t+1}^j)^2} \right) - \lambda^i \leqslant 0 \\ \qquad\qquad = 0 \text{ si } m_{t+1}^{i,j} > 0 \text{ Pour } j \in A_{t+1} \end{cases}$$

et nécessairement pour $j \in A_t$: $Q_t^j > \overrightarrow{0}$ et pour $j \in A_{t+1}$: $M_{t+1}^j > \overrightarrow{0}$, où $\overrightarrow{0}$ représente le vecteur nul de R^J. C'est-à-dire qu'il existe au moins un agent i tel que $q_t^{i,j} > 0$ pour $j \in A_t$ et un agent h tel que $m_{t+1}^{h,j} > 0$ pour $j \in A_{t+1}$, avec $q_t^{i,j} = 0$ pour $j \notin A_t$ et $m_{t+1}^{i,j} = 0$ pour $j \notin A_{t+1}$. A l'aide des dérivées logarithmiques nous avons :

$$\frac{1}{P_t^j}\frac{\partial P_t^j}{\partial q_t^{i,j}} = -\frac{1}{\sum_{h=1}^{N_t} q_t^{h,j}} \; ; \; \frac{1}{P_{t+1}^j}\frac{\partial P_{t+1}^j}{\partial m_{t+1}^{i,j}} = \frac{1}{\sum_{h=1}^{N_t} m_{t+1}^{h,j}}$$

Considérons un équilibre symétrique stationnaire tel que $A_t = A$, $A \neq \varnothing$. Les différentes quantités et les prix se réécrivent : $P_t^j = P^j$, $q_t^{i,j} = q^j$ et $m_t^{i,j} = m^j$ pour tout t et tout $j \in A$ et nécessairement $q^j > 0$, $m^j > 0$ et $P^j > 0$. Pour $j \notin A$ les quantités sont nulles $q_t^{i,j} = q^j = 0$ et $m_t^{i,j} = m^j = 0$.

Les conditions du premier ordre s'expriment dans ce cas pour $j \in A$

$$\begin{cases} -u_j'(.) + \lambda^i P^j \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) = 0 \text{ et } q^j > 0 \\ v_j'(.)\dfrac{1}{P^j}\left(1 - \dfrac{1}{N}\right) - \lambda^i = 0 \text{ et } m^j > 0 \end{cases}$$

où les arguments des fonctions *u* et *v* sont :

$$\begin{cases} c^{i,j} = \omega_1^j - q^j \\ d^{i,j} = \omega_2^j + \dfrac{m^j}{P^j} \end{cases}$$

avec $P^j = \dfrac{m^j}{q^j}$ pour $j \in A$

Pour $j \notin A$, $q^j = 0$ et $m^j = 0$.

Nous avons donc pour tout $j \in \{1, \ldots, J\}$

$$\begin{cases} c^{i,j} = \omega_1^j - q^j \\ d^{i,j} = \omega_2^j + q^j \end{cases}$$

pour tous les agents $i \in \{1, \ldots, N\}$, les multiplicateurs λ^i sont égaux à λ.

Nous avons obtenu ici les conditions nécessaires pour les agents qui vivent deux périodes. Réciproquement, si les conditions précédentes sont vérifiées alors les conditions du premier ordre du problème d'optimalité de chaque agent qui vit deux périodes sont vérifiées.

Le lemme 1 précédent nous assure que ces conditions du premier ordre sont suffisantes.

On vérifie facilement que les conditions du lemme 2 impliquent l'optimalité des décisions des vieux de la première période qui détiennent le stock de monnaie $\overline{M}$.

Si de telles conditions sont vérifiées alors il existe un équilibre pour le jeu stratégique de marché.

Cqfd.

Il faut remarquer que l'équilibre stationnaire et symétrique de cette économie avec des utilités séparables vérifie que le taux marginal de substitution pour tous les biens est indépendant des quantités échangées :

$$\frac{u'_j}{v'_j} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2$$

Cette caractéristique est aussi celle du problème *ad hoc*

$$u(.) + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 v(.).$$

PROPOSITION 1 : Soit q^* la solution optimale du problème suivant :

$$\operatorname{Max} u(c) + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 v(d)$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} c &= \omega_1 - q \\ d &= \omega_2 + q \\ q &\geqslant 0 \end{aligned}$$

et $A^* = \{j \subset \{1, \ldots, J\} / q^{*j} > 0\}$.

Il existe un équilibre stationnaire symétrique du jeu stratégique de marché dont l'ensemble des marchés actifs est A^* et les quantités échangées sont q^{*j}.

Démonstration : La solution du problème est caractérisée par les conditions :

$$\begin{cases} -u'_j(\omega_1 - q^*) + \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^2 v'_j(\omega_2 + q^*) & \leqslant 0 \\ & = 0 \text{ si } q^* > 0 \end{cases}$$

Reprenons les conditions du premier ordre d'un équilibre symétrique, stationnaire et non autarcique du jeu de marché :

$$\begin{cases} -u'_j(\omega_1^j - q^{*j}) + \lambda P^j \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) = 0 \\ v'_j(\omega_2^j + q^{*j}) \dfrac{1}{p^j} \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) - \lambda = 0 \end{cases}$$

pour tout $j \in A^*$.

$$m^j = P^j q^{*j}$$

De la deuxième équation il vient :

$$P^j = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{N}\right) v'_j(\omega_2 + q^*)$$

Avec la propriété 3, nous savons que le stock de monnaie est constant. La somme des valeurs échangées correspond au volume de monnaie présent dans l'économie :

$$\overline{M} = \sum_{j \in A^*} P^j q^{*j}$$

Donc :

$$\lambda = \frac{1}{\overline{\overline{M}}} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \sum_{j \in A^*} v'_j(\omega_2 + q^*) q^{*j}$$

Ces quantités, λ, m^i et P^j vérifient les conditions de caractérisation d'un équilibre stationnaire symétrique du lemme 2.

Cqfd.

Quand N tend vers l'infini, la solution du problème *ad hoc* converge vers l'équilibre concurrentiel avec monnaie. Quand les dotations des vieux sont nulles $(\omega_2 = 0)$ on obtient l'optimum de SAMUELSON dans le cas de J biens.

Quand N est fini, l'équilibre symétrique et stationnaire du jeu stratégique de marché est dominé par le maximum d'utilité réalisable avec monnaie dans l'économie concurrentielle c'est-à-dire la solution du problème :

$$\operatorname{Max} u(c) + v(d)$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} c &= \omega_1 - q \\ d &= \omega_2 + q \\ q &\geqslant 0 \end{aligned}$$

L'équilibre du jeu stratégique de marché est Pareto-dominé par l'équilibre concurrentiel avec monnaie dans la mesure où la solution n'est pas l'autarcie.

PROPOSITION 2 : Il existe un équilibre du jeu stratégique de marché symétrique-stationnaire non autarcique s'il existe j tel que l'inégalité

$$-u_j'(\omega_1) + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 v_j'(\omega_2) > 0$$

est vérifiée. Si pour tout j l'inégalité

$$-u_j'(\omega_1) + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 v_j'(\omega_2) \leqslant 0$$

est vérifiée, alors la solution du problème *ad hoc* est $q^* = 0$.

Démonstration : Sous les hypothèses 1 et 2 si $-u_j'(\omega_1) + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 v_j'(\omega_2) > 0$ alors $q^* = 0$ ne peut pas être solution du problème *ad hoc*. Comme ce problème admet une solution, celle-ci n'est pas nulle. Il existe nécessairement au moins un équilibre non autarcique. Le jeu stratégique de marché admet alors un équilibre symétrique et stationnaire différent de l'équilibre autarcique.

Cqfd.

Dans le cas de fonctions d'utilité strictement concaves, le problème *ad hoc* possède une solution unique.

La particularité des jeux stratégiques de marchés est la coexistence, à l'équilibre, de marchés actifs et de marchés inactifs. Aussi dans la preuve précédente il ne faut pas prendre l'ensemble A^* comme forcément l'ensemble de tous les biens de l'économie. Il est tout à fait possible de fermer arbitrairement un marché et d'obtenir un équilibre. Considérons la situation où le marché du bien J_0 est inactif.

Soit q_0^* la solution optimale du problème *ad hoc* suivant :

$$\operatorname{Max} u(c) + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 v(d)$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} c &= \omega_1 - q \\ d &= \omega_2 + q \\ q &\geqslant 0 \\ q^{j_0} &= 0 \end{aligned}$$

et $A_0^* = \{j/j \subset \{1,\ldots,J\},\ j \neq j_0 \ \text{ et } \ q^{*i} > 0\}$.

La solution du problème *ad hoc* est caractérisée pour tout $j \neq j_0$ par les conditions :

$$\begin{cases} -u'_j(\omega_1 - q^*) + \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^2 v'_j(\omega_2 + q^*) & \leqslant 0 \\ & = 0 \ \text{ si } \ q^* > 0 \end{cases}$$

Ce problème possède toujours une solution. Ce nouvel équilibre n'est pas autarcique dans la mesure où la complémentarité entre les biens n'est pas suffisante pour rendre les autres marchés inactifs.

Si les fonctions d'utilité sont additivement séparables, les conditions d'équilibre sont indépendantes entre elles. L'équilibre se résout marché par marché.

Considérons les fonctions suivantes :

$$u(c) = \sum_{k=1}^{J} \widetilde{u}^k(c^k) \quad \text{et} \quad v(d) = \sum_{k=1}^{J} \widetilde{v}^k(d^k)$$

La solution du problème *ad hoc* est caractérisée par les conditions, pour $k = 1,\ldots,J$:

$$\begin{cases} -\widetilde{u}'^k_j(\omega_1^k - q^{k*}) + \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^2 \widetilde{v}'^k_j(\omega_2^k + q^{k*}) & \leqslant 0 \\ & = 0 \ \text{ si } \ q^{k*} > 0 \end{cases}$$

et avec la proposition 1 l'ensemble des marchés actifs devient :

$$A^* = \left\{ k \subset \{1,\ldots,J\} / -\widetilde{u}'^k_j(\omega_1^k) + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 \widetilde{v}'^k_j(\omega_2^k) > 0 \right\}.$$

4.2. **Analyse du nombre de solutions**

Par définition, toute suite de quantités de biens et de monnaie, qui vérifie les conditions d'équilibre, est un équilibre. Ainsi, pour compter le nombre d'équilibres il suffit de compter le nombre de ces suites. Pour les économies avec un seul bien et des agents identiques, la seule détermination de la suite des quantités de bien échangés permet de caractériser l'équilibre. Dans ce cas, nous pouvons effectuer l'analyse du nombre de solutions en renvoyant aux travaux produits en concurrence parfaite.

4.2.1. **Cas séparable**

Prenons le cas séparable et N agents identiques par génération. La démonstration du lemme 2 contient les conditions qui caractérisent un équilibre symétrique non autarcique. L'indexation par t montre que cet équilibre n'est pas nécessairement stationnaire. Reprenons ces conditions dans le cas où $J = 1$:

Pour les agents nés en $t \geqslant 0$

$$\begin{cases} -u'(\omega_1 - q_t) + \lambda P_t \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) = 0 \\ v'\left(\omega_2 - \dfrac{m_{t+1}}{P_{t+1}}\right) \dfrac{1}{P_{t+1}} \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) - \lambda = 0 \end{cases}$$

et du fait de l'existence d'un seul marché nous avons $m_t = P_t q_t$ et $m_t = \dfrac{\overline{M}}{N}$.

Pour les vieux de la date initiale :

$$d_0 = \omega_2 + \frac{m_0}{P_0} \quad \text{soit} \quad d_0 = \omega_2 + q_0$$

Ces conditions sont équivalentes à l'existence d'une suite de $q_t > 0$ qui vérifie l'équation :

$$q_t \cdot u'(\omega_1 - q_t) = q_{t+1} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 v'(\omega_2 + q_{t+1}) \text{ et } q_t \in (0,\omega_1)$$

L'équilibre stationnaire de cette économie vérifie l'égalité précédente avec $q_t = q$ soit :

$$u'(\omega_1 - q) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 v'(\omega_2 + q) \text{ pour } q \in (0,\omega_1)$$

posons $G(q) = \dfrac{u'(\omega_1 - q)}{v'(\omega_2 + q)}$. L'équilibre stationnaire symétrique doit alors vérifier $G(q) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^2$. La fonction $G(q)$ est croissante par rapport à q.

On peut alors noter $q^* = G^{-1}\left(\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^2\right)$. Pour avoir un équilibre non autarcique il faut vérifier $G(0) \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^2$.

Il est dès lors possible d'indicer la quantité d'équilibre stationnaire q^* par le nombre d'agents présents dans l'économie et q^*_N est une fonction croissante de N. Cela illustre la caractéristique standard de la concurrence imparfaite où le volume des transactions est inférieur au volume concurrentiel. Aussi quand N tend vers l'infini, cet équilibre symétrique stationnaire correspond à l'équilibre concurrentiel.

Pour les *équilibres non stationnaires*, reprenons l'équation dynamique précédente. Posons $F(q_t) = q_t \cdot u'(\omega_1 - q_t)$ et $H(q_{t+1}) = q_{t+1}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 v'(\omega_2 + q_{t+1})$. La fonction F est une fonction croissante. La suite des quantités échangées qui définit l'équilibre est caractérisée par la relation :

$$q_t = F^{-1} \circ H(q_{t+1})$$

On retrouve ici la formulation de la dynamique de l'équilibre de concurrence parfaite de GRANDMONT (1985) au facteur $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2$ près et les éléments de son étude s'appliquent. La présence de concurrence imparfaite influence le volume des transactions de l'équilibre stationnaire mais les éléments qui caractérisent la trajectoire des quantités échangées restent les mêmes c'est-à-dire indépendants du nombre d'agents présents sur le marché.

Ce résultat peut être aussi obtenu en considérant une économie concurrentielle avec des agents identiques et une fonction d'utilité de la forme :

$$u(c) + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 v(d)$$

Les conditions d'équilibre de cette économie sont les mêmes que celles du jeu stratégique de marché avec une utilité de la forme $u(c) + v(d)$ et N agents par génération. Ainsi toute solution dynamique de concurrence parfaite de cette économie, qu'elle soit stationnaire, cyclique ou chaotique est un équilibre de concurrence imparfaite du jeu stratégique de marché.

4.2.2. Cas non séparable

L'équation de récurrence qui caractérise l'équilibre de concurrence imparfaite est :

$$q_t U_c'(\omega_1 - q_t, \omega_2 + q_{t+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 q_{t+1} U_d'(\omega_1 - q_t, \omega_2 + q_{t+1})$$

l'étude du nombre d'équilibres suit alors l'analyse de P. MICHEL et B. WIGNOLLE [1993].

5 Conclusion

Nous avons étudié le jeu stratégique de marché avec bien-monnaie dans le modèle à générations imbriquées. La monnaie est considérée comme un bien durable sans utilité. De ce fait, c'est un modèle proche de celui de Samuelson et il permet une analyse claire des relations entre l'équilibre de concurrence imparfaite et celui de concurrence parfaite.

L'analyse des jeux stratégiques de marché dans le modèle à générations imbriquées doit se poursuivre en considérant une monnaie-signal c'est-à-dire un modèle de création monétaire.

• Références bibliographiques

AMIR R., SAHI S., SHUBIK M., YAO S. (1990). – "A strategic market game with complete markets", *Journal of Economic Theory* 51, pp. 126-143.

BALASKO Y., SHELL K. (1980). – "The overlapping-generations model, I : The case of pure exchange without money", *Journal of Economic Theory*, 23, pp. 281-306.

DEBREU G. (1952). – "A social equilibrium existence theorem", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 38, pp. 886-893.

DUBEY P., MAS-COLELL A., SHUBIK M. (1980). – "Efficiency properties of strategic market games: An axiomatic approach", *Journal of Economic Theory*, 22, pp. 339-362.

FORGES F., PECK J. (1995). – "Correlated Equilibrium and Sunspot Equilibrium", *Economic Theory*, 5, pp. 33-50.

GOENKA A., SPEAR S.E. (1996). – "Market Games and the Overlapping Generations Model: Existence and Stationary Equilibria", *Mimeo*.

GRANDMONT J.M. (1985). – "On Endogenous Competitive Business Cycles", *Econometrica*, 53, pp. 995-1045.

MICHEL P., WIGNOLLE B. (1993). – "Une présentation simple des dynamiques complexes", *Revue Economique*, 44, pp. 885-911.

PECK J., SHELL K. (1991). – "Market uncertainty: Correlated and sunspot equilibria in imperfectly competitive economies", *Revue of Economic Studies*, 58, pp. 1011-1029.

PECK J., SHELL K. and SPEAR S.E. (1992). – "The market game: Existence and structure of equilibrium", *Journal of Mathematical Economics*, pp. 271-299.

SAMUELSON P.A. (1958). – "An exact Consumption-Loan model of interest with or without the social contrivance of Money", *Journal of Political Economy*, 66, pp. 467-482.

SHAPLEY L.S. (1976). – "Noncooperative General Exchange" in *Theory and Measurement of Economic Externalities* (S.A.Y. Lin, Ed.), Academic Press, New York.

SHAPLEY L.S., SHUBIK M. (1977). – "Trade Using One Commodity as Means of Payment" *Journal of Political Economie*, 85(5), pp. 937-968.

SHUBIK M. (1990). – "A Game theoretic approach to the Theory of money and financial Institutions", *Handbook of monetaries economies*, Chap. 5, pp. 171-219.