ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 52 — 1998

Composition optimale du panier de devises dans un contexte de flottement généralisé

Myriam ZAMITI*

RÉSUMÉ. – Depuis la généralisation des changes flottants, un certain nombre de pays ont décidé de rattacher leurs taux de change à un ensemble de devises étrangères. Se pose alors pour ces pays la question de la détermination du contenu et de la composition du panier.

À la suite de Lipschitz et Sundararajan (1980), nous considérons que le panier optimal est celui qui réduit les fluctuations du taux de change effectif réel autour de son niveau d'équilibre. Cependant, nous tenons compte des effets sur la stabilité du taux de change réel, de certaines corrélations entre les mouvements de taux de change et de prix qui ont été occultés par ces auteurs.

The Optimal Currency Basket Composition Under General Floating

ABSTRACT. – If a small country chooses to peg its exchange rate against some weighted average of foreign currencies – a currency basket, the question immediately arises as to how should these weights be chosen. To analyse this problem requires the introduction of some optimality criteria which we take to be the stabilization of the elasticity-weighted real effective exchange rate about its equilibrium.

The analysis is based on the work of Lipschitz and Sundararajan (1980). However, we revise and extend their analysis by taking into account the effects of some correlations between exchange rate and price movements which have been ignored.

* M. ZAMITI: Maître Assistante à l'École Supérieure des Sciences Économiques et Commerciales, Tunis, Tunisie. Je tiens à remercier pour leur aide M. Georges Fiori et M. Robert Kast, ainsi que deux rapporteurs anonymes pour leurs commentaires. Je demeure responsable de toute erreur qui subsisterait encore dans le texte.

1 Introduction

Depuis l'abandon du système de Bretton Woods en 1973, un certain nombre de pays ont choisi de rattacher leurs monnaies à une ou plusieurs devises étrangères. Bien que la tendance à la fixité du taux de change se soit atténuée ces dernières années, les problèmes particuliers aux pays en développement font qu'il leur est plus difficile de laisser flotter librement leurs monnaies; et plusieurs de ces pays continuent à ancrer leur monnaie à un certain standard.

Ainsi, au 31 décembre 1996 [1], sur 184 pays membres du Fonds Monétaire International, 69 ont un régime de change fixe. Parmi ceux-ci, 22 ont opté pour le rattachement à un panier monétaire : dans 2 de ces pays la monnaie est alignée sur le DTS (Droits de tirage spéciaux), et dans les 20 autres pays la parité de la monnaie est définie par rapport à un panier de monnaies qui est spécifique à chacun. Ce nombre ne tient compte que des pays dont la monnaie est rigoureusement fixée à un panier de référence. D'autres pays ont aussi rattaché leurs monnaies à un ensemble de devises mais ont toléré un certain flottement autour de ce standard.

Les pays qui décident d'adopter un tel système se trouvent confrontés au problème de détermination du standard de référence sur la base duquel sera établi leur taux de change. Les poids associés aux différentes monnaies dans le panier sont souvent basés sur la répartition géographique du commerce extérieur. Toutefois, dans certains cas ces poids sont choisis de façon plus ou moins arbitraire.

LIPSCHITZ et SUNDARARAJAN [1980] proposent un critère plus rationnel pour le choix d'un panier de devises de référence. Cependant, ces derniers ont posé certaines hypothèses simplificatrices. Nous procédons à une révision et une extension de l'analyse de ces auteurs.

La section 2 présente brièvement l'approche de LIPSCHITZ et SUNDARARAJAN [1980]. La section 3 s'attache à généraliser l'analyse de ces auteurs ; elle propose alors une formule plus complète pour le calcul des poids optimaux et propose quelques nouvelles implications intéressantes de la solution optimale sur la politique de taux de change.

2 L'analyse de Lipschitz et Sundararajan (1980)

C'est une continuation de l'analyse de LIPSCHITZ [1979]. Ce dernier suggère en effet comme critère d'optimalité la minimisation de la variance

1. Cf. International Monetary Fund (1997).

du taux de change effectif réel autour d'un niveau d'équilibre défini par la parité des pouvoirs d'achat. L'adoption d'un régime de fixité à un panier est généralement motivée par le souci de minimiser l'instabilité résultant des fluctuations des taux de change internationaux. Par conséquent, les autorités monétaires vont chercher à mainternir le taux de change du pays fixe « en moyenne » par rapport à l'ensemble des devises étrangères. En outre, dans un contexte de flottement généralisé des taux de change, il est important pour un pays en développement de stabiliser son taux de change réel, car c'est une variable déterminante dans l'allocation des ressources.

Cependant, l'absence d'information immédiate sur les prix relatifs rend impossible la gestion continue du taux de change réel. En effet, si les données relatives aux taux de change sont disponibles quotidiennement, les données concernant les prix relatifs ne sont disponibles que par périodes de quelques mois. La politique de fixité à un panier monétaire permet alors d'agir sur le taux de change nominal de façon à stabiliser le taux de change réel.

A cet objectif principal, LIPSCHITZ et SUNDARARAJAN [1980] ajoutent un deuxième critère qui consiste à restreindre les écarts entre le taux de change réel moyen et sa valeur d'équilibre. En effet, s'il y a des changements structurels dans l'économie, le fait de fixer le taux de change nominal, peut maintenir le taux de change réel à un niveau écarté de l'équilibre de façon durable. D'où cette contrainte sur le taux de change réel moyen au cours de la période pour laquelle on cherche à déterminer le panier monétaire optimal.

Si la monnaie locale (MN) est rattachée à un panier log-linéaire de n monnaies (mo_i), appartenant aux principaux partenaires commerciaux, avec des poids $\omega_i (i = 1,\, n)$, le problème de sélection d'un panier optimal revient à choisir des pondérations ω_i dans:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Ln}\, \frac{R_t(\$/\mathrm{MN})}{R_\mathrm{o}(\$/\mathrm{MN})} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \,\mathrm{Ln}\, \frac{\mathrm{R_t}(\$/\mathrm{mo}_i)}{\mathrm{R_o}(\$/\mathrm{mo}_i)}$$

de façon à stabiliser un indice de taux de change effectif réel (rer):

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{rer} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \,\mathrm{Ln}\, \frac{R_t(\mathrm{mo}_i/\mathrm{MN})}{R_o(\mathrm{mo}_i/\mathrm{MN})} \, \frac{P_t/P_{it}}{P_o/P_{io}}$$

où $t = 0$ représente l'année de base,

P_t = indice des prix du petit pays au temps t,

$P_i t$ = indice des prix dans le pays i au temps t,

R_t (monnaie x/monnaie y)=prix en termes de monnaie 1 d'une unité de monnaie y, au temps t,

η_i = la contribution des fluctuations du taux de change réel avec le pays i à l'indice global. Ces poids sont supposés connus des autorités [2].

2. Les poids η_i peuvent être les parts des pays partenaires dans l'échange extérieur total, ou des élasticités déduites d'un modèle de commerce international.

Soient $q_i = \text{Ln}\,\frac{R_t(\$/\text{mo}_i)}{R_o(\$/\text{mo}_i)}$ et $rp_i = \text{Ln}\,\frac{P_t/P_{it}}{P_o/P_{io}}$ deux indices de taux de change et de prix relatifs. Ces indices sont construits à partir d'une année de base durant laquelle il y a parité des pouvoirs d'achat entre la monnaie nationale et une moyenne agrégée des monnaies des principaux partenaires commerciaux. En tenant compte des équations (1) et (2), et en prenant le dollar (monnaie 1) comme numéraire, le taux de change effectif s'écrit :

$$\text{rer} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \, rp_i + \sum_{i=2}^{n} (\omega_i - \eta_i) \, q_i \tag{3}$$

Étant donnés les critères d'optimalité retenus, et en supposant que les autorités monétaires décident de tolérer un éloignement du taux de change moyen d'une valeur α de chaque côté de l'équilibre (α est choisi a priori), les poids optimaux seront ceux qui minimisent la variance de rer sous les contraintes ($\overline{x}$ indique le niveau espéré de x) :

$$-\alpha \leq \overline{\text{rer}} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \, \overline{\text{rp}}_i + \sum_{i=2}^{n} (\omega_i - \eta_i) \, \overline{q}_i \leq \alpha \tag{4}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \tag{5}$$

Lipschitz et Sundararajan [1980] supposent que, lors de l'écriture de la variance de rer, les covariances entre les prix relatifs des pays partenaires ainsi que celles entre leurs taux de change peuvent être ignorées. Ils se sont donc donné certaines hypothèses simplificatrices qui nous paraissent être les suivantes :

(H1) $\text{cov}(q_i, q_j) = 0,\ j \neq i$

(H2) $\text{cov}(\text{rp}_i - \text{rp}_1, q_j) = 0,\ j \neq i$

(H3) $\text{cov}(\text{rp}_i - \text{rp}_1, \text{rp}_j - \text{rp}_1) = 0,\ j \neq i$

(H4) $\text{cov}(\text{rp}_i - \text{rp}_1, \text{rp}_1) = 0.$

Ils justifient ceci par le fait que l'on ne s'intéresse qu'à l'ensemble des relations bilatérales entre la monnaie nationale et chacune des monnaies des pays partenaires. Or, si les hypothèses (H3) et (H4) sont sans effet sur le chjoix des poids optimaux, tel n'est pas le cas des deux autres hypothèses. Nous montrerons dans la section suivante que $\text{cov}(q_i, q_j)$ et $\text{cov}(\text{rp}_i - \text{rp}_1, q_j)$ ne peuvent être ignorées, et qu'il est important de tenir compte de l'effet de ces covariances sur la variabilité du critère objectif.

3 Une extension de l'analyse de Lipschitz et Sundararajan

Nous nous intéressons dans cette section à l'effet de la levée des hypothèses (H1) et (H2) sur le panier optimal. Les propositions 1 et 2 ci-dessous considèrent la solution exacte du problème posé par Lipschitz et Sundararajan [3]. Les propositions 3 et 4 qui en découlent décrivent des situations particulières où le pays en question a intérêt à opter pour le régime de fixité par rapport à une monnaie unique.

> PROPOSITION 1 [4] : Si la solution optimale est telle que la moyenne du taux de change réel est comprise de façon stricte dans les limites de l'intervalle qu'on s'est donné, et si tous les poids ω_i sont non nuls, la structure optimale du panier de devises est celle qui vérifie l'équation :
>
> $$\omega^* = \eta^* - \eta\Gamma\tau^{-1}$$
>
> où $\omega^* = [\omega_2 \cdots \omega_n],\ \eta^* = [\eta_2 \cdots \eta_n],\ \eta = [\eta_1 \cdots \eta_n]$,
>
> $$\tau = \left[\frac{\operatorname{cov}(q_i,\, q_j)}{\operatorname{var}(q_j)}\right], \quad i = 2, \ldots, n \text{ et } j = 2, \ldots, n,$$
>
> et $$\Gamma = \left[\frac{\operatorname{cov}(\mathrm{rp}_i,\, q_j)}{\operatorname{var}(q_j)}\right], \quad i = 1, \ldots, n \text{ et } j = 2, \ldots, n.$$

Par conséquent, les pondérations optimales peuvent être pratiquement calculées à partir des poids-élasticités des pays partenaires, des coefficients de régression des prix relatifs sur les taux de change, et des coefficients de regression entre taux de change.

Une implication intéressante de ce résultat est que dans une situation d'absence de relation linéaire entre la variation du cours de change d'une monnaie quelconque vis-à-vis du numéraire et la variation du prix relatif du petit pays par rapport à chacun de ses partenaires (i.e. $\operatorname{cov}(\mathrm{rp}_j, q_i) = 0$ pour tout $i = 2,\ n$ et $j = 1,\ n$), il sera optimal, étant donnés les critères retenus, d'indexer la monnaie locale sur un panier basé sur les échanges extérieurs $(\omega = \eta)$.

> PROPOSITION 2 : Si la valeur moyenne du taux de change réel coïncide avec la borne inférieure [5] de l'intervalle admissible $(\overline{\mathrm{rer}} = -\alpha)$ et si tous les poids ω_i sont positifs, la solution optimale est donnée par :
>
> $$\omega^* = [\eta^*(\tau - \tau\,\overline{Q}\,X) - \eta\,(\Gamma - \Gamma\,\overline{Q}\,X) + \beta X] \cdot [(\tau - \tau\,\overline{Q}\,X) + \overline{Q}\,X]^{-1}$$
>
> où $\overline{Q} = [\overline{q}_2 \ldots \overline{q}_n]^T$,
>
> $$X = [X_2 \ldots X_n] \quad \text{avec} \quad X_i = \frac{\overline{q}_i}{\operatorname{var}(q_i)} \Bigg/ \sum_{i=2}^{n} \frac{\overline{q}_i^2}{\operatorname{var}(q_i)},$$

3. Cf. Annexe 1.
4. Les démonstrations des diverses propositions sont renvoyées en annexe.
5. Si la solution optimale est telle que $\overline{\mathrm{rer}} = \alpha$, la formule des poids optimaux est : $\omega^* = [\eta^*(\tau - \tau\,\overline{Q}\,X) - \eta\,(\Gamma - \Gamma\,\overline{Q}\,X) + \beta' X] \cdot [(\tau - \tau\,\overline{Q}\,X) + \overline{Q}\,X]^{-1}$ où $\beta' = \sum_{i=2}^{n} \eta_i \overline{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \eta_i\,\overline{\mathrm{rp}}_i + \alpha$.

et
$$\beta = \sum_{i=2}^{n} \eta_i \overline{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \eta_i \,\overline{\mathrm{rp}}_i - \alpha.$$

Les propositions 1 et 2 donnent une formule nouvelle pour le calcul du poids optimal d'une monnaie dans le panier [6]. Celle-ci fait intervenir deux éléments supplémentaires importants par rapport à celle de Lipschitz et Sundararajan, à savoir $\mathrm{cov}(q_i,\, q_j)$ et $\mathrm{cov}(\mathrm{rp}_i,\, q_j)$. Pour ces derniers, les seules covariances dont dépendent les pondérations optimales sont $\mathrm{cov}(\mathrm{rp}_i,\, q_i)$ et $\mathrm{cov}(\mathrm{rp}_1,\, q_i)$. En effet, selon ces auteurs, la part de chacune des monnaies $i\,(i = 2, \ldots, n)$ dans le panier est décrite par les formules suivantes :
$$\omega_i = \eta_i \left(1 - \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{rp}_i,\, q_i)}{\mathrm{var}\,(q_i)}\right) - (1 - \eta_i)\,\frac{\mathrm{cov}\,(\mathrm{rp}_1,\, q_i)}{\mathrm{var}\,(q_i)},$$
si la solution optimale est telle que $-\alpha < \overline{\mathrm{rer}} < \alpha$, et :
$$\omega_i = \eta_i \left(1 - \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{rp}_i,\, q_i)}{\mathrm{var}\,(q_i)}\right) - (1 - \eta_i)\,\frac{\mathrm{cov}\,(\mathrm{rp}_1,\, q_i)}{\mathrm{var}\,(q_i)}$$
$$-X_i \left[-B + \alpha + \sum_{i=2}^{n} \eta_i \left(1 - \frac{\mathrm{cov}\,(\mathrm{rp}_i,\, q_i)}{\mathrm{var}\,(q_i)}\right) \overline{q}_i + \sum_{i=2}^{n} (\eta_i - 1)\,\frac{\mathrm{cov}\,(\mathrm{rp}_1,\, q_i)}{\mathrm{var}\,(q_i)}\,\overline{q}_i\right],$$
si la solution optimale est telle que $\overline{\mathrm{rer}} = -\alpha$ [7].

Par ailleurs, la levée de l'hypothèse (H1), nous permet de décrire deux situations particulières où il est optimal de rattacher la monnaie locale à une seule devise. Nous nous plaçons dans le cas où les déviations du taux de change effectif réel moyen de son niveau optimal sont en moyenne contenues dans les limites strictes de l'intervalle que les autorités ont jugé acceptable; nous nous basons par conséquent sur la proposition 1.

PROPOSITION 3 : Dans le cas où il existe une corrélation non nulle entre les mouvements de taux de change et où ces corrélations sont de même signe, si pour chacune des devises $j = 1, \ldots, n$, la variation du cours de change du dollar par rapport à cette devise est proportionnelle à la variation du différentiel d'inflation entre les États-Unis et le pays j (i.e. si $(q_j - \mathrm{rp}_j)$ est constant), la meilleure politique de change est alors d'aligner la monnaie domestique sur une devise étrangère unique, ici le dollar américain.

---

6. Les équations décrites dans ces deux propositions permettent de trouver les pondérations optimales de ω_2 à ω_n. La part optimale de la monnaie 1 dans le panier de devises est obtenue résiduellement à partir du fait que la somme des pondérations est égale à l'unité.
7. Si la solution optimale est telle que $\overline{\mathrm{rer}} = \alpha$, alors le poids à affecter à chacune des devises i $(i = 2,\, n)$ est donné par :
$$\omega_i = \eta_i \left(1 - \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{rp}_i,\, q_i)}{\mathrm{var}\,(q_i)}\right) - (1 - \eta_i)\,\frac{\mathrm{cov}\,(\mathrm{rp}_1,\, q_i)}{\mathrm{var}\,(q_i)}$$
$$+X_i \left(B + \alpha - \sum_{i=2}^{n} \eta_i \left(1 - \frac{\mathrm{cov}\,(\mathrm{rp}_i,\, q_i)}{\mathrm{var}\,(q_i)}\right) \overline{q}_i - \sum_{i=2}^{n} (\eta_i - 1)\,\frac{\mathrm{cov}\,(\mathrm{rp}_1,\, q_i)}{\mathrm{var}\,(q_i)}\,\overline{q}_i\right).$$

PROPOSITION 4 : Dans le cas où les corrélations entre les mouvements des cours de change sont non nulles et où ces corrélations sont toutes de même signe, si d'une part il existe une relation constante de parité des pouvoirs d'achat du numéraire (monnaie 1) et de chacune des monnaies j $(j = 2, \dots, n)$, et si d'autre part cette monnaie numéraire appartient à un pays qui connaît le même taux d'inflation que le pays en question, alors ce dernier devrait opter pour un régime de fixité par rapport à une devise unique (monnaie 1).

4 Conclusion

Reprenant les critères proposés par LIPSCHITZ et SUNDARARAJAN (1980), le panier monétaire optimal a été défini comme étant celui qui minimise les fluctuations du taux de change effectif réel autour de son niveau d'équilibre mesuré par la parité des pouvoirs d'achat avec les principaux partenaires du pays.

L'apport essentiel de cette étude par rapport à l'analyse de Lipschitz et Sundararajan est qu'elle tient compte des effets sur la variabilité du taux de change effectif réel de certaines corrélations entre les mouvements de prix relatifs et de taux de change nominaux qui ont été occultées par ces auteurs.

En intégrant ces informations dans l'analyse, nous avons décrit une formule plus complète pour le calcul du panier de devises auquel un pays devrait rattacher sa monnaie. Il apparaît à la lumière de la solution trouvée que la structure optimale du panier monétaire est fonction notamment de la répartition géographique du commerce extérieur, des corrélations entre les variations des cours de change mondiaux $(\mathrm{cov}(q_i,\, q_j))$, ainsi que des corrélations entre les mouvements de prix et de taux de change nominaux $(\mathrm{cov}(\mathrm{rp}_i,\, q_j))$. En outre, en nous basant sur cette solution, nous avons déterminé de nouvelles règles permettant de conseiller un rattachement à une monnaie unique.

Résolution du programme d'optimisation à l'aide de la méthode des multiplicateurs de Lagrange

Déterminer la structure optimale du panier monétaire revient à résoudre le programme qui consiste à :

$$\underset{\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}}{\text{minimiser}} \ \text{var(rer)}$$

sous les contraintes :

$$B-\alpha \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \overline{q}_i \leq B+\alpha$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

où $B = \sum_{i=2}^{n} \eta_i \, \overline{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \eta_i \, \overline{\text{rp}}_i$.

Le lagrangien de ce programme s'écrit :

$$L = \text{var(rer)} + \lambda_1 \left(\alpha - B + \sum_{i=2}^{n} \omega_i \overline{q}_i \right) + \lambda_2 \left(\alpha + B - \sum_{i=2}^{n} \omega_i \, \overline{q}_i \right) + \lambda_3 \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i - 1 \right).$$

Les conditions de minimisation de Kuhn et Tucker associées à ce programme sont les suivantes :

$$\begin{gathered}
\omega_i \geq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \omega_i} \geq 0, \quad \omega_i \cdot \frac{\omega L}{\partial \omega_i} = 0 \quad i = 1, ..., n \\
\lambda_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \geq 0 \quad i = 1, 2 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 0 \\
\lambda_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad i = 1, 2.
\end{gathered}$$

Étant donné que la fonction à optimiser est différentiable et convexe, et que les contraintes sont linéaires, le multiplicateur de Lagrange associé à la fonction objectif peut en effet être pris comme étant égal à l'unité, et les conditions ci-dessus sont des conditions nécessaires et suffisantes à la recherche d'un minimum [8]. Nous supposons que $\omega_1 > 0$. D'après les conditions de Kuhn et Tucker, cela revient à supposer que $\lambda_3 = 0$.

8. Cf. V. Alexéev, V. Tikhomirov et S. Fomine (1982), p. 228-283; et Chiang Alpha C. (1987), p. 722-742.

Démonstrations des diverses propositions

PROPOSITION 1 : Si $\omega_i > 0$, alors d'après les conditions de premier ordre : $\frac{\partial L}{\partial \omega_i} = 0$; d'où : nous obtenons :

$$\sum_{j=2}^{n} \omega_j \frac{\operatorname{cov}(q_j,\, q_i)}{\operatorname{var}(q_i)} = \sum_{j=2}^{n} \eta_j \frac{\operatorname{cov}(q_j,\, q_i)}{\operatorname{var}(q_i)} - \sum_{j=1}^{n} \eta_j \frac{\operatorname{cov}(\mathrm{rp}_j,\, q_i)}{\operatorname{var}(q_i)}.$$

Cette équation étant valable pour tout $i = 2, \ldots, n$, le système d'équations qui en découle, transformé en écriture matricielle, permet d'obtenir la formule des poids optimaux.

PROPOSITION 2 : Si $\omega_i > 0$, alors $\frac{\partial L}{\partial \omega_i} = 0$; d'où :

$$\omega_i = \eta_i \left(1 - \frac{\operatorname{cov}(\mathrm{rp}_i,\, q_i)}{\operatorname{var}(q_i)}\right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \eta_j \frac{\operatorname{cov}(\mathrm{rp}_j,\, q_i)}{\operatorname{var}(q_i)} - \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq i}}^{n} (\omega_j - \eta_j) \frac{\operatorname{cov}(q_i,\, q_j)}{\operatorname{var}(q_i)} - \frac{\lambda_1 \overline{q}_i}{2 \operatorname{var}(q_i)}.$$

Afin de déterminer λ_1 nous substituons ω_i par cette dernière expression dans $\sum_{i=2}^{n} \omega_i \overline{q}_i = -\alpha + B$. En remplaçant λ_1 par son expression dans l'écriture de ω_i ci-dessus nous obtenons :

$$\sum_{j=2}^{n} \omega_j \frac{\operatorname{cov}(q_i,\, q_j)}{\operatorname{var}(q_i)} - X_i \left(\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} \omega_j \frac{\operatorname{cov}(q_i,\, q_i)}{\operatorname{var}(q_i)} \overline{q}_i\right) + X_i \left(\sum_{i=2}^{n} \omega_i \overline{q}_i\right)$$
$$= \sum_{j=2}^{n} \eta_j \frac{\operatorname{cov}(q_j, q_i)}{\operatorname{var}(q_i)} - \sum_{j=1}^{n} \eta_j \frac{\operatorname{cov}(\mathrm{rp}_j,\, q_i)}{\operatorname{var}(q_i)} + X_i(B - \alpha)$$
$$- X_i \left(\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} \eta_j \frac{\operatorname{cov}(q_j,\, q_i)}{\operatorname{var}(q_i)} \overline{q}_i\right) + X_i \left(\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{n} \eta_j \frac{\operatorname{cov}(\mathrm{rp}_j,\, q_i)}{\operatorname{var}(q_i)} \overline{q}_i\right),$$

avec : $X_i = \frac{\overline{q}_i}{\operatorname{var}(q_i)} / \sum_{i=2}^{n} \frac{\overline{q}_i^2}{\operatorname{var}(q_i)}$.

Il suffit d'écrire en notation matricielle le système à $(n-1)$ équations analogues à celle ci-dessus (pour $i = 2, \ldots, n$), pour trouver la formule des poids optimaux.

PROPOSITION 3 : D'après la proposition 1, les pondérations optimales sont telles qu'elles vérifient les $(n-1)$ équations suivantes :

$$\forall i = 2, \ldots, n \quad \sum_{j=2}^{n} \omega_j \frac{\operatorname{cov}(q_i,\, q_j)}{\operatorname{var}(q_i)} = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \frac{\operatorname{cov}(q_i,\, q_j - \mathrm{rp}_j)}{\operatorname{var}(q_i)}.$$

Supposons que pour tout $i = 2, \ldots, n$ et $j = 2, \ldots, n$: $\operatorname{cov}(q_i,\, q_j) \neq 0$ et que ces covariances sont toutes de même signe. Par conséquent, si pour tout $j = 1, \ldots, n$, le terme $(q_j - \mathrm{rp}_j)$ est constant, alors le panier optimal est tel que $\omega_i = 0$ pour tout $i = 2, \ldots, n$ et $\omega_1 = 1$.

PROPOSITION 4 : Soit $x_j = \operatorname{Ln} \frac{P_{jt}/P_{1t}}{P_{j0}/P_{10}}$. En remplaçant $\mathrm{rp_j}$ par $(\mathrm{rp}_1 - x_j)$, la solution optimale que nous avons obtenue peut être décrite par le système d'équations ci-après. Quelque soit $i = 2, \ldots, n$:

$$\sum_{j=2}^{n} \omega_j \frac{\operatorname{cov}(q_i, q_j)}{\operatorname{var}(q_i)} = \sum_{j=2}^{n} \eta_j \frac{\operatorname{cov}(q_i,\, q_j + x_j)}{\operatorname{var}(q_i)} - \frac{\operatorname{cov}(q_i,\, \mathrm{rp}_1)}{\operatorname{var}(q_i)}.$$

La première condition implique que $q_j + x_j = 0$ pour tout $j = 2, \ldots, n$; alors que la seconde revient à dire que rp_1 est une constante. Dans ce cas, si pour tout $i = 2, \ldots, n$ et $j = 2, \ldots, n$: $\operatorname{cov}(q_i,\, q_j) \neq 0$ et si ces covariances sont de même signe, alors les poids optimaux ω_2 à ω_n sont nuls.

• Références bibliographiques

ALEXÉEV, V., TIKHOMIROV, V., FOMINE, S. (1982). – "Commande Optimale", *Editions MIR,* Moscou, Traduction Française.

CHIANG ALPHA, C. (1987). – "Fundamental Methods of Mathematical Economics", *McGraw Hill Ed.,* Troisième Edition.

International Monetary Fund (1997). – *Annual Report on Exchange Arrangements and Exchange Restrictions.*

LIPSCHITZ, Leslie (1979). – "Exchange Rate Policy for a Small Developing Country and the Selection of an Appropriate Standard", *International Monetary Fund Staff Papers,* Volume 26, n° 3, Septembre.

LIPSCHITZ, Leslie, SUNDARARAJAN, V. (1980). – "The Optimal Basket in a World of Generalized Floating", *International Monetary Fund Staff Papers,* Volume 27, n° 1.

LIPSCHITZ, Leslie, SUNDARARAJAN, V. (1980). – "Pegging to a Currency Basket in a World of Floating Rates", *Finance and Development*, Juin.