ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 52 — 1998

Transferts intergénérationnels : étude dans une petite économie ouverte

Pascal BELAN*

RÉSUMÉ. – Nous considérons un modèle à générations imbriquées en petite économie ouverte avec progrès technique neutre au sens de Harrod. Si le taux d'intérêt est supérieur au taux de croissance, un système de transferts intergénérationnels forfaitaires augmente le bien-être de certaines générations et diminue celui d'autres générations. On considère un planificateur qui maximise un critère de bien-être social utilitariste défini comme la somme actualisée des utilités de toutes les générations. Dans de nombreux cas, la trajectoire optimale conduit à une nouvelle répartition des gains liés au progrès technique entre les générations. Plus précisément, le taux de croissance optimal des consommations peut être plus grand ou plus petit que le taux de croissance du progrès technique. S'il est plus petit, le planificateur fait bénéficier les générations proches de la date initiale d'un progrès technique qui survient dans le futur, mais cela nécessite un endettement important qui devra être remboursé en imposant des transferts des jeunes aux vieux de plus en plus grands qui deviennent supérieur au salaire. En outre, si les consommations optimales croissent au même taux que le progrès technique, le sens des transferts qui permettent de décentraliser la solution optimale, dépend des valeurs des paramètres.

Intergenerational Transfers: The Small Open Economy Case

ABSTRACT. – We consider an overlapping generations model of small open economy with Harrod neutral technical progress. If the interest rate is less than the growth rate, intergenerational public transfers increase welfare of some generations and reduce welfare of others. Then, we consider a central planner who maximises an intertemporal social welfare function defined as a discounted sum of generational utilities. In many cases, the optimal path entails a new repartition of technical progress between generations. More precisely, the optimal growth rate of consumptions could be higher or lower than technical progress growth rate. If it's lower, first generations benefits of a technical progress that occurs in the future. This entails an important borrowing which have to be returned by transfers from the young to the old. These transfers grow permanently and, in long run, become higher than wages. On the other hand, if optimal consumptions and technical progress growth rates are equal, intergenerational transfers that allow a decentralization of the optimal path can be from the young to the old or the old to the young.

* P. BELAN: CREST, Laboratoire de macroéconomie. Je tiens à remercier Philippe MICHEL pour ses suggestions et ses précieux conseils pour l'élaboration de ce texte. Je remercie également deux rapporteurs anonymes dont les remarques ont permis d'améliorer la présentation de ce travail. Bien entendu, je reste seul responsable du contenu de cet article.

1 Introduction

Les transferts publics intergénérationnels sont aujourd'hui l'objet d'un débat virulent dans la plupart des pays développés. Même si les transferts descendants sont importants (dépenses d'éducation, allocations familiales,...), les transferts publics restent, pour l'essentiel, ascendants : pensions versées par les systèmes de prévoyance collective, dépenses de santé (en France, la moitié au moins va aux personnes de plus de 60 ans). En outre, la partie de l'accroissement de la dette publique remboursée par les générations futures constitue un transfert intergénérationnel ascendant, l'autre composante de la variation de la dette étant remboursée par les générations mêmes qui ont bénéficié des dépenses publiques non financées par leurs impôts. Même si les dépenses d'éducation ont fortement augmenté depuis un siècle, l'extension des systèmes de transferts intergénérationnels a de plus en plus favorisé les personnes âgées, le mouvement n'ayant fait que s'accélérer depuis les années 1950 (KESSLER, MASSON et PESTIEAU [1991]). En outre, les évaluations comparées amènent à penser que les transferts familiaux, destinés en majorité aux jeunes générations, ne compensent pas la croissance des transferts publics en faveur des plus âgées.

Le ralentissement de la croissance et la hausse des taux d'intérêts réels ont accru la nécessité de respecter la contrainte budgétaire et de limiter la dette. Or, la protection sociale, dans son ensemble, souffre de l'affaiblissement des sources de prélèvement (proportion décroissante des individus bénéficiant d'un emploi stable et régulier) et de l'accroissement de la demande (montée du chômage, proportion croissante des personnes âgées, aspirations plus élevées dans le domaine de la santé et de l'éducation). En outre, l'assurance-vieillesse est confrontée à la concurrence des marchés financiers : si la rentabilité des cotisations au système de retraite par répartition, assise sur la croissance économique globale, a longtemps été supérieure au rendement de l'épargne privée, on assiste aujourd'hui à un retournement.

Face à ces difficultés, la comptabilité par génération fournit un indicateur utile pour la gestion des finances publiques. Elle consiste à évaluer pour chaque cohorte d'individus présente ou future, le bilan actualisé des prestations reçues (ou à recevoir) et des cotisations et impôts versés (ou à verser) sur l'ensemble de son cycle de vie. Cependant, elle donne lieu, surtout aux États-Unis, à des recommendations discutables pour la politique à suivre en matière de transferts sociaux. Ainsi, KOTLIKOFF [1992] et AUERBACH, GOKHALE et KOTLIKOFF [1994] préconisent un arrêt immédiat de la redistribution ascendante qui aurait permis aux générations âgées de peu cotiser et de bénéficier de transferts importants, et mis en péril l'avenir des générations suivantes qui risquent en conséquence de verser beaucoup trop à l'état et de consommer beaucoup moins. Selon KOTLIKOFF [1992], en maintenant la politique actuelle (en 1992), les générations futures devront payer au gouvernement une part de leurs ressources de cycle de vie de 21% supérieure à celle acquittée par les américains d'aujourd'hui. Notons cependant que les estimations sont très sensibles à la conjecture du moment et aux hypothèses retenues. Ainsi, AUERBACH, GOKHALE et KOTLIKOFF

[1994] obtiennent un surcroît relatif d'impôts pour les générations futures de 111%.

Un certain nombre de critiques ont été formulées contre l'utilisation de la seule comptabilité par générations pour légitimer des coupes importantes dans les transferts sociaux (HAVEMAN [1994], MASSON [1995]). Mais, le problème fondamental est l'évaluation des systèmes de transferts intergénérationnels sur une base comptable sans critère de justice intergénérationnelle. Un bilan actualisé des taxes et des transferts pour chaque génération ne permet pas, à lui seul, d'évaluer les politiques en matière de transferts. En particulier, pour les systèmes de retraite par répartition, « l'augmentation prévue des taux (...) ne pose problème que si elle nuit à la réalisation d'objectifs éthiques, notamment en défavorisant trop certaines générations par rapport à d'autres » (FLEURBAEY et MICHEL [1992, p. 48]).

Le problème de la détermination de l'optimum social et des transferts intergénérationnels permettant de le décentraliser ont déjà fait l'objet d'études nombreuses. Les auteurs considèrent un modèle à générations imbriquées de type ALLAIS [1947], SAMUELSON [1958], DIAMOND [1965] et retiennent généralement un critère utilitariste définie comme la somme des utilités de toutes les générations présentes et futures, actualisées à un facteur donné. Dans un modèle où les agents sont identiques et vivent deux périodes, DIAMOND [1973] étudie l'optimum social dans une économie fermée à n biens et montre que des transferts intergénérationnels forfaitaires permettent de le décentraliser. Dans une économie fermée avec fluctuations de la fertilité et de la productivité, MARCHAND, MICHEL et PESTIEAU [1990] comparent l'évolution des consommations correspondant à l'optimum social à celles obtenues pour l'équilibre concurrentiel sans intervention; ils étudient également la décentralisation à l'aide de transferts forfaitaires. MARCHAND, MICHEL et PESTIEAU [1993] procèdent au même type d'analyse dans un cadre de croissance endogène avec externalité à la Romer.

D'autres auteurs ont étudié les politiques de taxation optimale dans le modèle de Diamond avec offre de travail endogène en supposant que les instruments dont disposent le gouvernement introduisent des distorsions. Dans ce contexte, PESTIEAU [1974] introduit des taxes sur le salaire et sur les revenus du capital et s'intéresse essentiellement à l'interaction entre la structure de taxation et les politiques d'investissement public. ATKINSON et SANDMO [1980] examinent les rôles respectifs de la taxation du revenu et de la taxation de la consommation et, notamment, leurs implications en termes d'efficacité et d'allocation intertemporelle des ressources. En supposant des fluctuations de la fertilité et de la productivité, BOADWAY, MARCHAND et PESTIEAU [1991] étudie le système de retraite par répartition optimal en économie fermée lorsque les cotisations introduisent une distortion dans l'arbitrage entre travail et loisir.

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier l'optimum social et les politiques de transferts intergénérationnels forfaitaires qui permettent de le décentraliser dans une petite économie ouverte, en introduisant un progrès technique exogène neutre au sens de Harrod. Cette hypothèse implique une croissance à taux constant de la productivité marginale du travail et permet de prendre en compte un élément important dans l'évaluation des politiques de transferts publics et notamment des systèmes de retraite par répartition. En effet, les projections faites sur l'avenir de ces systèmes sont très sensibles aux estimations de l'évolution future de la productivité du travail, qui semblent moins fiables que les projections démographiques (MARCHAND et PESTIEAU [1991]). Ces projections jouent d'ailleurs un rôle central dans le Livre Blanc sur les retraites [1991].

Nous nous intéressons ici à un autre aspect qui est la redistribution du progrès technique entre les générations. Dans la plupart des pays et surtout dans les pays de tradition bismarckienne, l'un des objectifs du système de retraite est d'assurer une certaine parité entre les niveaux de vie des actifs et des retraités. Ceci implique une redistribution du progrès technique entre les différentes générations. Ainsi, dans notre étude, le problème du sens et de la taille des transferts entre générations est directement lié à la façon dont l'autorité publique désire répartir les gains d'une croissance exogène entre les différentes générations. En supposant l'existence d'un progrès technique neutre au sens de Harrod, la question devient la suivante : faut-il faire bénéficier les générations actuelles d'un progrès technique postérieur à leur période d'activité ? Ou faut-il que le niveau de vie des agents suivent l'évolution de ce progrès technique ?

En petite économie ouverte, le taux d'intérêt international détermine l'intensité capitalistique et la production à chaque période. Sous l'hypothèse d'un taux d'intérêt supérieur au taux de croissance de l'économie, la richesse actualisée du pays est finie. Dans un article devenu célèbre, AARON [1966] a montré que le rendement d'un système par répartition est égal au produit du taux de croissance de la population et du taux de croissance des salaires. Nous supposerons ici que le taux d'intérêt réel est supérieur à ce rendement, sans quoi la richesse actualisée du pays est infinie et le problème centralisé n'admet pas de solution. Sous cette hypothèse, le système par répartition diminue le revenu de cycle de vie de tous les individus nés après son introduction et seuls les premiers retraités bénéficient du système en recevant une pension sans avoir cotisé au cours de leur activité. C'est ce que les anglo-saxons appellent le « free-lunch » (déjeuner gratuit) et qui conduit à un transfert net négatif pour toutes les générations suivantes.

Cependant, l'absence de transferts ne domine pas le système par répartition au sens de Pareto. De la même façon, on ne peut pas comparer, selon le critère de Pareto, un système de transferts publics des retraités vers les actifs aux autres politiques : il réduirait le revenu de cycle de vie des premiers retraités et serait à l'avantage de toutes les générations suivantes. La détermination des transferts optimaux suppose de considérer une fonction de bien-être social intertemporelle.

Avec un objectif utilitariste, nous montrons que l'optimum social conduit à une nouvelle répartition des gains liés au progrès technique entre les générations et que cette répartition dépend du facteur d'actualisation social. Le taux de croissance optimal des consommations est une fonction croissante de ce dernier et peut être plus grand ou plus petit que le taux de croissance du progrès technique. S'il est plus grand, il conduit à un transfert de ressources des générations présentes vers les générations futures et, s'il est plus petit, il implique un transfert des générations futures vers les générations présentes.

On étudie les transferts entre vivants permettant de décentraliser l'optimum social lorsque le taux de croissance optimal des consommations est compris entre zéro et le taux de croissance du progrès technique. Quand le taux de croissance des consommations est inférieur à celui du progrès technique, le transfert intergénérationnel est ascendant à toutes les périodes ou au moins à partir d'une date finie. Mais, à long terme, il devient supérieur au salaire des actifs qui se voient contraints d'emprunter sur leur retraite pour consommer. En revanche, lorsque les deux taux sont égaux, le transfert est une proportion constante du salaire et peut être ascendant ou descendant selon les valeurs des paramètres.

La section 2 est consacrée à la présentation du modèle et à l'étude de l'équilibre concurrentiel avec transferts. Dans la section 3, on étudie la solution optimale du programme du planificateur et, notamment, la répartition des gains du progrès technique entre les différentes générations. Dans la section 4, on s'intéresse à la décentralisation de la trajectoire optimale à l'aide du système de transferts intergénérationnels. La section 5 conclut l'article.

2 Économie concurrentielle

On considère une petite économie ouverte avec un secteur de production. Nous supposons qu'il existe un marché international parfait des capitaux et un marché international parfait du bien produit à chaque période qui peut être utilisé pour la consommation ou pour la constitution du stock de capital. La technologie du pays est représentée par une fonction de production à rendements d'échelle constants : $F(K_t, A_tL_t)$, où K_t est le capital, L_t est la quantité de travail et A_t, un facteur de progrès technique exogène qui croît au taux g positif : $A_t = (1+g)A_{t-1}$.

Nous faisons l'hypothèse de mobilité parfaite des capitaux. Les agents peuvent donc librement emprunter ou prêter au taux d'intérêt international r que nous supposons constant. En outre, les firmes se comportent de façon concurrentielle. La productivité marginale nette du capital est donc égale à r : $F'_K(K_t, A_tL_t) - \mu = r$, où μ est le taux de dépréciation du capital. On note z_t, le stock de capital par unité de travail efficace $(z_t = K_t/A_tL_t)$. Comme F est à rendements constants, les productivités marginales sont homogènes de degré zéro. Dès lors, le stock de capital par unité de travail efficace est constant et égal à un niveau que l'on note $\overline{z}$. En outre, le taux de salaire à la période t est : $w_t = A_tF'_L(\overline{z}, 1) \equiv A_t\overline{w}$, et croît au même taux que le facteur de progrès technique.

A chaque période, naissent N_t agents qui vivent deux périodes. N_t croît au taux n qui est donc également le taux de croissance de la population. Chaque individu offre de façon inélastique une unité de travail quand il est jeune et reçoit un salaire w_t qu'il répartit entre consommation (c_t) et épargne (s_t) rénumérée au taux r. En seconde période de vie, il est en retraite et consomme les revenus de son épargne. Les contraintes budgétaires de première et de seconde période de vie sont donc :

$$c_t + s_t = w_t \tag{1}$$

$$d_{t+1} = (1+r)s_t \tag{2}$$

Nous supposons que les agents ont une fonction d'utilité homogène de degré a $(a < 1)$: $u(c_t, d_{t+1})$, où : $u'_c > 0$, $u'_d > 0$, $u''_{cc} < 0$, $u''_{dd} < 0$, $u'_c(0,d) = +\infty$, $u'_d(c,0) = +\infty$.

En maximisant l'utilité des agents sous les contraintes (1) et (2), on obtient la condition du premier ordre suivante :

$$u'_c(c_t, d_{t+1}) = (1+r)u'_d(c_t, d_{t+1}) \tag{3}$$

qui représente l'arbitrage d'un agent entre ses deux consommations. Avec une fonction d'utilité homogène, les consommations sont proportionnelles au revenu de cycle de vie qui est ici le salaire w_t : $c_t = \varphi(r)w_t$ et $d_{t+1} = (1+r)(1-\varphi(r))w_t$; elles croissent donc au taux g.

Étudions à présent l'effet sur le bien-être des agents, de l'introduction d'un système de transferts entre générations vivant à chaque période. Un agent né en t est taxé au taux τ sur son salaire lorsqu'il est jeune et reçoit en seconde période de vie un montant b_{t+1}, financé par les taxes prélevées sur les jeunes de la génération née en $(t+1)$. L'équilibre budgétaire du système à la période $(t+1)$ s'écrit donc : $N_t b_{t+1} = N_{t+1}\tau w_{t+1}$. Ainsi, on obtient le montant reçu par un agent de la génération née en t lorsqu'il est retraité : $b_{t+1} = (1+n)\tau w_{t+1} = (1+n)(1+g)\tau w_t$. Selon que le taux de cotisation est positif ou négatif, le transfert ira des jeunes vers les vieux ou des vieux vers les jeunes. Le revenu de cycle de vie d'un agent né en t, noté Ω_t, devient :

$$\Omega_t = \left(1 - \tau + \frac{(1+n)(1+g)}{1+r}\tau\right) A_t \overline{w} \tag{4}$$

Par conséquent, pour un taux de cotisation positif, selon que $(1+r)$ est inférieur ou supérieur à $(1+n)(1+g)$, les deux consommations et l'utilité des agents augmentent ou diminuent. Le résultat est bien entendu inversé si le taux de cotisation est négatif.

Ainsi, des transferts des jeunes vers les vieux améliorent le bien-être de toutes les générations quand le facteur d'intérêt est inférieur à $(1+n)(1+g)$. Dans le cas contraire, les premiers vieux bénéficient d'un transfert sans avoir cotisé lorsqu'ils étaient jeunes mais toutes les générations suivantes voient leur revenu de cycle de vie diminuer. On obtient dans le cas d'un progrès technique explicite, la condition de AARON [1966] sous laquelle un système de retraite par répartition est Pareto-améliorant : dans une situation où le taux de rendement du système est supérieur au taux d'intérêt, le bien-être de toutes les générations augmente.

En revanche, des transferts des vieux aux jeunes pénalisent toujours la génération retraitée au moment de l'introduction du système de transferts puisqu'elle doit verser une taxe sans rien avoir reçu quand elle était jeune. Un tel système est donc totalement défavorable quand $(1+r)$ est inférieur au produit $(1+n)(1+g)$ et ne permet pas une amélioration au sens de Pareto quand le facteur d'intérêt est supérieur à $(1+n)(1+g)$.

3 Optimum social

• Le problème

On définit Δ_t, comme la dette extérieure du pays à la fin de la période $(t-1)$. L'accroissement de la dette au cours de la période t, $(\Delta_{t+1}-\Delta_t)$, est égal à la somme des intérêts de la dette $(r\Delta_t)$ et de l'excès de la demande intérieure (consommation et investissement brut) sur la production. On obtient donc :

$$(5)\quad \Delta_{t+1}-\Delta_t = r\Delta_t+N_tc_t+N_{t-1}d_t+K_{t+1}-(1-\mu)\,K_t-F(K_t,A_tN_t)$$

On considère le point de vue d'un planificateur qui, à la période 0, maximise un critère de bien-être social intertemporel défini comme la somme des utilités de toutes les générations actualisées à un facteur β inférieur à un :

$$(6)\qquad W_0=\sum_{t=-1}^{+\infty}\beta^t u(c_t,d_{t+1}),\quad 0<\beta<1.$$

Le planificateur maximise (6) sous la contrainte (5) et une contrainte de solvabilité (que nous définirons ultérieurement), c_{-1} et Δ_0 étant donnés.

> LEMME : la trajectoire optimale vérifie les deux propriétés suivantes :
> – elle vérifie l'arbitrage intertemporel d'un agent sur son cycle de vie entre ses deux consommations : $u'_c(c_t,d_{t+1})=(1+r)u'_d\,(c_t,d_{t+1})$
> – le stock de capital optimal coïncide avec le choix concurrentiel; il vérifie l'égalité de la productivité marginale nette du capital et du taux d'intérêt international : $F'_K(K_t,A_tN_t)-\mu=r$.

Démonstration : On maximise W en c_t,d_{t+1},Δ_{t+1} et K_{t+1}, le reste de la trajectoire étant donné. Cela revient à maximiser $u(c_t,d_{t+1})$ sous la contrainte de ressources écrite aux périodes t (équation (5)) et $(t+1)$:

$$\begin{aligned}\Delta_{t+2}-\Delta_{t+1}&=r\Delta_{t+1}+N_{t+1}c_{t+1}+N_td_{t+1}\\&\quad+K_{t+2}-(1-\mu)K_{t+1}-F(K_{t+1},A_{t+1}N_{t+1})\end{aligned}$$

On remplace c_t et d_{t+1} dans $u(.)$ par leurs expressions données par les contraintes de ressources et on obtient les deux conditions marginales d'optimalité suivantes en dérivant par rapport à Δ_{t+1} et K_{t+1} :

$$\begin{aligned}
0 &= u'_c(c_t, d_{t+1}) \frac{\partial c_t}{\partial \Delta_{t+1}} + u'_d(c_t, d_{t+1}) \frac{\partial d_{t+1}}{\partial \Delta_{t+1}} \\
&= \frac{1}{N_t}(-u'_c(c_t, d_{t+1}) + (1+r)u'_d(c_t, d_{t+1})) \\
0 &= u'_c(c_t, d_{t+1}) \frac{\partial c_t}{\partial K_{t+1}} + u'_d(c_t, d_{t+1}) \frac{\partial d_{t+1}}{\partial K_{t+1}} \\
&= \frac{1}{N_t}(-u'_c(c_t, d_{t+1}) + (F'_K + 1 - \mu)\, u'_d(c_t, d_{t+1}))
\end{aligned}$$

La première équation nous donne l'arbitrage intertemporel d'un agent entre ses deux consommations. De plus, les deux équations ne sont compatibles que si la productivité marginale nette du capital est égale au taux d'intérêt. □

Le stock de capital par unité de travail efficace est donc constant le long de la trajectoire optimale. Son niveau est le même que dans l'économie concurrentielle : pour tout t, $z_t = \overline{z}$. En posant $\overline{M} = F(\overline{z}, 1) - (1+n)(1+g)\overline{z} + (1-\mu)\overline{z}$, nous pouvons réécrire l'équation (5) de la façon suivante :

$$(7) \qquad \Delta_{t+1} = (1+r)\Delta_t + N_t c_t + N_{t-1} d_t - A_t N_t \overline{M}$$

En outre, il est nécessaire d'imposer une limite à l'endettement du pays. On introduit une contrainte supplémentaire dans le programme du planificateur : la contrainte de solvabilité. Nous reprendrons ici l'énoncé qu'en donne MICHEL [1993] : à chaque période, le montant de la dette Δ_t doit être inférieur ou égal à la capacité de remboursement du pays, notée Q_t, définie comme la somme actualisée en $(t-1)$ de toutes les productions futures nettes des dépenses d'investissement :

$$\begin{aligned}
(8) Q_t &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^{i+1} A_{t+i} N_{t+i} [F(\overline{z}, 1) + (1-\mu)\overline{z} - (1+n)(1+g)\overline{z}] \\
&= \frac{1}{1+r} A_t N_t \overline{M} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{(1+n)(1+g)}{1+r}\right)^i
\end{aligned}$$

La contrainte de solvabilité s'écrit donc : pour tout t, $\Delta_t \leq Q_t$.

On constate que la capacité de remboursement est infinie, dès lors que le facteur d'intérêt $(1+r)$ est inférieur ou égal à $(1+n)(1+g)$. Si tel est le cas, la possibilité d'endettement du pays est illimitée et le niveau de consommation optimal est infini. Dans une petite économie ouverte, ce cas est exclu et, dans tout ce qui suit, nous ferons l'hypothèse :

(H) : Le taux d'intérêt est supérieur au taux de croissance de l'économie :

$$1 + r > (1+n)(1+g).$$

Sous l'hypothèse (H), on montre dans l'annexe 1 que la contrainte de solvabilité est équivalente à : $\lim_{t \to +\infty} (1+r)^{-t} \Delta_t \leq 0$.

• Conditions d'optimalité

On écrit le programme du planificateur en considérant la dette par actif : $\delta_t = \frac{\Delta_t}{N_t}$:

$$\text{Max} \sum_{t=-1}^{+\infty} \beta^t u(c_t, d_{t+1})$$

$$\begin{aligned} sc: \quad & (1+n)\delta_{t+1} = (1+r)\delta_t + c_t + \frac{1}{1+n} d_t - A_t\overline{M}, \\ & \lim_{t\to+\infty} (1+r)^{-t} N_t \delta_t \leq 0, \\ & c_{-1} \text{ et } \delta_0 \text{ données.} \end{aligned}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes de ce programme sont données dans l'annexe 2. On montre en particulier que la condition de transversalité est équivalente à l'égalité dans la contrainte de solvabilité du pays : $\lim_{t\to+\infty} (1+r)^{-t} N_t \delta_t = 0$.

On peut obtenir les deux conditions d'optimalité d'une façon plus directe. Après avoir remplacé c_t dans l'objectif par son expression donnée par la contrainte de ressources, on maximise $u(c_t, d_{t+1}) + \beta\, u(c_{t+1}, d_{t+2})$ en d_{t+1} et δ_{t+1}, à d_t, δ_t, d_{t+2} et δ_{t+2} fixés. On obtient ainsi :

$$(9) \qquad u'_c(c_t, d_{t+1}) = \frac{\beta(1+r)}{1+n}\, u'_c(c_{t+1}, d_{t+2})$$

$$(10) \qquad u'_d(c_t, d_{t+1}) = \frac{\beta}{1+n}\, u'_c(c_{t+1}, d_{t+2})$$

En combinant ces deux conditions, on retrouve l'équation d'arbitrage d'un agent sur son cycle de vie entre ses deux consommations :

$$(11) \qquad u'_c(c_t, d_{t+1}) = (1+r) u'_d(c_t, d_{t+1})$$

S'il existe une solution optimale, la condition de transversalité (limite nulle de la dette actualisée) nous conduit à faire une remarque sur l'évolution des consommations optimales. On définit : $B_t \equiv (1+r)^{-t}\Delta_t$, la dette du pays actualisée à la période 0. On obtient avec la contrainte de ressources (7) :

$$B_{t+1} = B_t + \frac{N_0}{(1+r)}\left(\frac{1+n}{1+r}\right)^t \left(c_t + \frac{d_t}{(1+n)}\right) - \frac{A_0 N_0 \overline{M}}{(1+r)}\left(\frac{(1+g)(1+n)}{1+r}\right)^t$$

On obtient donc :

$$(12) \qquad \begin{aligned} B_{t+1} = \Delta_0 &+ \frac{N_0}{(1+r)} \sum_{i=0}^{t} \left(\frac{1+n}{1+r}\right)^i \left(c_i + \frac{d_i}{(1+n)}\right) \\ &- \frac{A_0 N_0 \overline{M}}{(1+r)} \sum_{i=0}^{t} \left(\frac{(1+g)(1+n)}{1+r}\right)^i \end{aligned}$$

Comme nous avons supposé que $(1+r)$ était strictement supérieur à $(1+n)(1+g)$, la condition de transversalité implique que la somme infinie des $\left(\frac{1+n}{1+r}\right)^i \left(c_i + \frac{d_i}{(1+n)}\right)$ est finie. Par conséquent, les consommations optimales ne peuvent pas croître plus vite que $((1+r)/(1+n))^t$.

• Caractérisation de la solution optimale

Dans le cas d'une fonction d'utilité homogène de degré a $(a < 1)$, l'équation (11) implique que le rapport des consommations c_t/d_{t+1} est constant. De plus, en définissant la fonction v : $v\left(\frac{c}{d}\right) = d^{-a}u(c,d)$, l'équation (9) nous donne :

$$d_{t+1}^{a-1} v'\left(\frac{c_t}{d_{t+1}}\right) = \frac{\beta(1+r)}{1+n}\, d_{t+2}^{a-1}\, v'\left(\frac{c_{t+1}}{d_{t+2}}\right)$$

La consommation de seconde période de vie d_t croît donc à un taux constant. Comme c_t/d_{t+1} est constant également, le taux de croissance est donc identique pour les consommations des jeunes et des vieux : $\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{d_{t+1}}{d_t} = \left(\frac{\beta(1+r)}{1+n}\right)^{\frac{1}{1-a}} \equiv 1 + g_c$. La condition de transversalité, qui impose que le facteur de croissance optimal des consommations est inférieur à $(1+r)/(1+n)$, nous donne une condition sur le facteur d'actualisation social :

$$1 + g_c = \left(\frac{\beta(1+r)}{1+n}\right)^{1/(1-a)} < \frac{1+r}{1+n} \quad \Leftrightarrow \quad \beta < \left(\frac{1+n}{1+r}\right)^a$$

Si le facteur d'actualisation social β ne vérifie pas cette inégalité, la condition de transversalité n'est plus vérifiée et il n'existe pas de solution au programme du planificateur. De plus, comme les taux de croissance des deux consommations sont identiques, le rapport des consommations des jeunes et des vieux en $t(c_t/d_t)$ est constant. On définit $\zeta \equiv d_t/c_t$, pour tout t. Avec l'équation (12), on obtient :

$$B_{t+1} = \Delta_0 + \frac{N_0}{(1+r)}\left(1 + \frac{\zeta}{1+n}\right)\left(\sum_{i=0}^{t} m_c^i\right)c_0 - \frac{A_0 N_0 \overline{M}}{(1+r)}\left(\sum_{i=0}^{t} m^i\right)$$

où :

$$m_c = \frac{(1+n)(1+g_c)}{1+r} \qquad \text{et} \qquad m = \frac{(1+n)(1+g)}{1+r}.$$

Par hypothèse, m est strictement inférieur à 1 et nous savons que la condition de transversalité implique : $m_c < 1$. Par conséquent, la limite de la dette actualisée sera nulle si et seulement si c_0 vérifie :

$$\text{(13)} \qquad \frac{N_0}{(1+r)}\left(1 + \frac{\zeta}{1+n}\right)\frac{1}{1-m_c}c_0 = \frac{1}{1+r}\,\frac{A_0 N_0 \overline{M}}{1-m} - \Delta_0$$

Si $\Delta_0 \geq \frac{1}{1+r}\frac{A_0 N_0 \overline{M}}{1-m}$, le pays est en faillite : la valeur actualisée du produit national ne permet pas de rembourser la dette initiale. Sinon, il existe c_0 strictement positif vérifiant l'équation (13), ce qui détermine la solution du problème centralisé.

• Répartition des gains du progrès technique entre les générations

La solution optimale peut conduire à une modification de la répartition du progrès technique entre les générations. Le taux de croissance optimal des consommations est une fonction croissante du facteur d'actualisation social :

$$1 + g_c = \left(\frac{\beta(1+r)}{1+n} \right)^{1/(1-a)}$$

On constate que, selon la valeur de β, la solution optimale conduit à des consommations croissantes, constantes ou décroissantes au cours du temps [1]. Considérons deux valeurs particulières de β qui correspondent respectivement à $g_c = g$ et $g_c = 0$:

• *Premier cas* : le taux de croissance optimal des consommations est égal au taux de croissance du progrès technique, soit :

$$\left(\frac{\beta(1+r)}{1+n} \right)^{\frac{1}{1-a}} = 1 + g \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{(1+n)(1+g)^{1-a}}{1+r} \equiv \beta_g$$

Dans ce cas, l'hypothèse (H) implique : $1+g_c = 1+g < (1+r)/(1+n)$, ce qui équivaut à la condition de transversalité. A chaque période, le bénéfice du progrès technique est attribué aux générations qui vivent pendant cette période.

• *Deuxième cas* : le taux de croissance optimal des consommations est nul. Ceci est obtenu pour un facteur d'actualisation social : $\beta = (1+n)/(1+r) \equiv \beta_0$. Comme dans le cas précédent, l'hypothèse (H) implique : $1 + g_c = 1 < (1+r)/(1+n)$; la condition de transversalité est donc bien vérifiée.

Par l'intermédiaire de son endettement, le pays répartit tous les gains futurs du progrès technique entre toutes les générations de manière égalitaire. Le même résultat est obtenu avec un objectif social à la Rawls qui serait appliqué à l'ensemble des générations successives. Dans une économie fermée, une telle redistribution des revenus des générations futures vers les

1. On peut noter ici une différence importante avec la solution optimale en économie fermée où le taux d'intérêt s'ajuste et conduit, à long terme, à l'égalité : $1 + r = (1+n)(1+g)/\beta$. Le salaire et les consommations croissent alors au taux g.

générations présentes n'est pas possible, car elle annulerait la croissance du produit national (Arrow [1973]). L'hypothèse d'une petite économie ouverte permet au contraire une redistribution intergénérationnelle de type égalitaire sans modifier la croissance de l'économie.

Remarquons qu'en l'absence de progrès technique ($g = 0$), ces deux cas coïncident : $\beta_0 = \beta_g = (1+n)/(1+r)$. Nous allons à présent étudier les transferts intergénérationnels qui se situent entre ces deux cas extrêmes en supposant que le facteur d'actualisation social vérifie : $\beta_0 \leq \beta \leq \beta_g$, ce qui implique : $0 \leq g_c \leq g$ [2].

4 Décentralisation de la solution optimale

Nous étudions maintenant la décentralisation de la solution optimale au moyen de transferts entre vivants. À la période t, le salaire des jeunes est taxé au taux τ_t et chaque retraité reçoit un montant $(1+n)\tau_t w_t$, le taux de cotisation pouvant être positif ou négatif et permettant ainsi des transferts des jeunes vers les vieux ou des vieux vers les jeunes.

Nous nous intéresserons plus particulièrement au sens des transferts selon les valeurs des paramètres. Dans une économie avec un tel système de transferts, le programme d'un agent né en t devient :

$$\underset{s_t}{\text{Max}}\ u((1-\tau_t)w_t - s_t,\ (1+r)s_t + (1+n)\tau_{t+1}w_{t+1})$$

Les conditions du premier ordre du programme sont :

$$u'_c(c_t, d_{t+1}) = (1+r)u'_d(c_t, d_{t+1})$$
$$c_t + \frac{d_{t+1}}{1+r} = \left(1 - \tau_t + \frac{(1+n)(1+g)}{1+r}\tau_{t+1}\right)A_t\overline{w} \equiv \Omega_t$$

Soit $(c_t^*, d_t^*, \delta_t^*)_{t\geq 0}$, la solution optimale choisie par le planificateur. Comme elle vérifie à chaque période, l'équation d'arbitrage d'un agent entre ses deux consommations, l'équilibre intertemporel de l'économie avec transferts coïncidera avec la solution centralisée si le revenu de cycle de vie, Ω_t, est égal à la somme actualisée des consommations d'un individu sur la trajectoire optimale : $\Omega_t = c_t^* + (1+r)^{-1}d_{t+1}^*$. Or, sous l'hypothèse d'homogénéité de la fonction d'utilité, c_t^* et d_t^* croissent à un

2. Nous n'étudions pas le cas où le facteur d'actualisation social conduirait à un taux de croissance des consommations optimales supérieur au taux de croissance du progrès technique ($\beta > \beta_g$). Pour de telles valeurs de β, la trajectoire optimale privilégierait les générations futures au détriment des générations présentes; les gains actuels liés au progrès technique seraient reportés sur les générations futures.

taux constant g_c. On obtient alors une équation décrivant la dynamique de τ_t :

$$(14) \qquad 1 - \tau_t + m\,\tau_{t+1} = \left(\frac{1+g_c}{1+g}\right)^t \eta^*.$$

où :

$$\eta^* = \frac{1}{A_0 \overline{w}}\left(c_0^* + \frac{d_1^*}{1+r}\right).$$

Remarquons qu'il n'existe pas de condition initiale sur le taux de cotisation τ_t: l'équation (14) est une équation orientée vers le futur. Nous distinguons deux cas pour sa résolution selon que g_c est inférieur ou égal à g.

• Étude des transferts optimaux dans le cas $0 \leq g_c < g$

Lorsque g_c est inférieur à g, la trajectoire optimale fait bénéficier les générations proches de la date initiale d'un progrès technique qui survient dans le futur. La solution générale de l'équation (14) est :

$$(15) \qquad \tau_t = \frac{H}{m^t} + \frac{1}{1-m} - \frac{1}{\frac{1+g_c}{1+g}\,m - 1}\left(\frac{1+g_c}{1+g}\right)^t \eta^*$$

et l'unique solution bornée est obtenue pour $H = 0$.

Ainsi, à long terme, le taux de taxation $\tau_\infty = (1-m)^{-1}$ est positif et supérieur à un. L'intuition de ce résultat est la suivante : le taux de croissance optimal g_c étant inférieur au taux de croissance du progrès technique, la solution optimale fait bénéficier les générations proches de la date initiale d'un progrès technique qui survient dans le futur. Ceci n'est possible qu'avec un endettement important qui sera remboursé ultérieurement. Il en résulte qu'il faudrait à long terme taxer les agents jeunes à plus de 100% pour rembourser la dette et réduire leur revenu de cycle de vie. Si cette solution est théoriquement possible, les agents jeunes devant emprunter à l'étranger à la fois pour payer des taxes supérieures à leur revenu et pour consommer, elle paraît cependant peu plausible.

Un système de transferts intergénérationnels plus raisonnable consiste à utiliser une partie des taxes sur les jeunes pour rembourser la dette et à n'en redistribuer qu'une partie aux vieux. Par exemple, on peut attribuer à chaque agent les consommations optimales avec un taux de taxe τ_t et une retraite forfaitaire b_{t+1} qui vérifient : $(1-\tau_t)w_t = c_t^*$ et $b_{t+1} = d_{t+1}^*$, le solde servant à rembourser la dette. En effet, comme les consommations optimales vérifient la condition d'arbitrage des agents sur leur cycle de vie, les agents choisissent dans ce cas une épargne nulle et l'économie décentralisée suit le sentier de croissance optimale.

Mais cette politique conduit néanmoins à un taux de taxation croissant qui tend vers 100% (sans jamais l'atteindre) dès lors que le taux de croissance optimal des consommations est inférieur au taux de croissance des revenus. En effet :

$$1 - \tau_t = \frac{c_t^*}{w_t} = \frac{(1+g_c)^t c_0^*}{(1+g)^t A_0 \overline{w}}$$

tend vers zéro à long terme et $\tau_\infty = 1$. La divergence entre consommations et revenus s'accentue de période en période.

• Étude des transferts optimaux dans le cas $g_c = g$

Lorsque les consommations optimales croissent au même taux que le progrès technique, la solution générale de l'équation de récurrence (14) est :

$$\tau_t = \frac{H}{m^t} + \frac{1}{1-m}(1-\eta^*) \tag{16}$$

et l'unique solution bornée est obtenue avec $H = 0$. Dans ce cas, τ_t est constant et égal à un niveau que l'on note τ :

$$\tau = \frac{1}{1-m}(1-\eta^*) = \frac{1}{1-m}\left(1 - \frac{1}{A_0\overline{w}}\left(1 + \frac{1+g}{1+r}\zeta\right)c_0^*\right)$$

En remplaçant c_0^* par son expression donnée par l'équation (13), on obtient :

$$\tau = \frac{1}{1-m}\left(1 - \theta\frac{\overline{M}}{\overline{w}}\right) + (1+r)\theta\,\frac{\delta_0}{A_0\overline{w}} \tag{17}$$

où :

$$\theta \equiv \left(1 + \frac{\zeta}{1+n}\right)^{-1}\left(1 + \frac{1+g}{1+r}\zeta\right)$$

• Influence de la dette initiale sur le sens des transferts

On voit immédiatement que pour une dette initiale par actif δ_0 importante, le taux de cotisation sera positif. Il est alors optimal d'introduire des transferts des jeunes vers les vieux pour répartir la charge de la dette entre toutes les générations. En revanche, si le pays dispose d'une créance importante sur le reste du monde à la période 0 (δ_0 fortement négative), des transferts des vieux vers les jeunes permettent de faire bénéficier les générations futures de cette richesse initiale.

• Cas d'une dette initiale nulle

Pour une dette initiale nulle, le taux de cotisation est positif ou négatif selon que $\theta\,\overline{M}/\overline{w}$ est inférieur ou supérieur à 1. Le ratio $\overline{w}/\overline{M}$ est la part des salaires dans le produit national net des dépenses d'investissement : $\overline{w}/\overline{M} = (N_t w_t)/\big(N_t A_t \overline{M}\big)$. Il est déterminé par la technologie et le taux d'intérêt international :

$$\begin{aligned}\overline{M} &= F(\overline{z}, 1) + (1-\mu)\overline{z} - (1+n)(1+g)\overline{z}\\ &= \overline{w} + [(1+r) - (1+n)(1+g)]\overline{z}\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse (H), $\overline{w}/\overline{M}$ est inférieur à 1 et sera proche de 1 si le taux de croissance de l'économie $((1+n)(1+g)-1)$ est proche du taux d'intérêt mondial. Or, l'hypothèse (H) implique que θ est également inférieur à un et, ici aussi, quand $(1+n)(1+g)$ est proche du facteur d'intérêt, θ est proche de un. On ne peut donc pas trancher de manière générale.

Considérons un exemple avec une fonction de production et une fonction d'utilité toutes deux Cobb-Douglas : $F(K_t, A_tL_t) = B(K_t)^\alpha(A_tL_t)^{1-\alpha}$ et $u(c_t, d_{t+1}) = (c_t)^{a\lambda}(d_{t+1})^{a(1-\lambda)}$, où $0 < \lambda < 1$. On suppose $\alpha = (1/3)$ et une dépréciation totale : $\mu = 1$. On obtient : $1+r = B\alpha\overline{z}^{\alpha-1} = \overline{w}/(2\overline{z})$; par conséquent : $\overline{M}/\overline{w} = 1 + \frac{1}{2}(1-m)$. En outre, la condition d'arbitrage intertemporel d'un agent entre ses deux consommations implique :

$$1+r = \frac{u'_c(c_t, d_{t+1})}{u'_d(c_t, d_{t+1})} = \frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{d_{t+1}}{c_t} = \frac{\lambda}{1-\lambda}(1+g)\zeta$$

La constante θ est donc donnée par l'expression suivante :

$$\theta = \left(1 + \frac{1-\lambda}{\lambda m}\right)^{-1}\left(1 + \frac{1-\lambda}{\lambda}\right) = \frac{m}{1-\lambda(1-m)},$$

Par conséquent, pour une dette initiale nulle, le taux de cotisation est :

$$\tau = \frac{1}{1-m}\left(1 - \theta\frac{\overline{M}}{\overline{w}}\right) = (1-\lambda(1-m))^{-1}\left(1 - \lambda - \frac{1}{2}m\right)$$

Donc :

$$\tau \gtrless 0 \quad \text{selon que} \quad \frac{(1+n)(1+g)}{1+r} \lessgtr 2(1-\lambda) \tag{18}$$

On constate que le signe du taux de cotisation optimal dépend du poids accordé par les agents à chacune des consommations dans leur fonction d'utilité et de l'écart entre le taux de croissance de l'économie $((1+n)(1+g)-1)$ et le taux d'intérêt mondial.

Notons tout d'abord que si les poids des consommations dans la fonction d'utilité des agents sont égaux ($\lambda = 1/2$), l'hypothèse (H) implique un taux de cotisation positif. En revanche, si le poids de la consommation de seconde période est plus faible ($\lambda > 1/2$), le taux optimal sera négatif quand le taux de croissance de l'économie est proche du taux d'intérêt et positif quand l'écart entre ces deux grandeurs est plus important.

Ce résultat est surprenant car les transferts optimaux vont des jeunes vers les vieux lorsqu'ils sont le plus défavorable en terme de revenu de cycle de vie pour les agents nés à la période 0 et après. Quand $(1+n)(1+g)$ est plus petit par rapport à $(1+r)$, le gouvernement favorise la génération née en (-1) au détriment de toutes les générations suivantes. Mais, quand les deux grandeurs sont proches, il introduit des transferts des vieux aux jeunes qui pénalisent les premiers retraités mais permet une augmentation du revenu de cycle de vie pour toutes les autres générations.

Cependant, l'égalité du taux de croissance optimal des consommations et du taux de croissance du progrès technique est obtenue pour une valeur particulière du facteur d'actualisation social : $\beta_g = (1+n)(1+g)^{1-a}/(1+r)$. Ainsi, plus l'écart entre $(1+n)(1+g)$ et

$(1+r)$ est grand, plus le facteur d'actualisation social qui garantit l'égalité entre g_c et g est petit. Le planificateur accorde alors un poids plus élevé aux générations proches de la date initiale et introduit des transferts des jeunes aux vieux.

Dans cette section, nous avons étudié la décentralisaiton de la solution optimale pour un taux de croissance des consommations g_c compris entre 0 et g. En l'absence de progrès technique $(g = 0)$, cette étude se ramène au cas d'une trajectoire optimale avec consommations constantes : $g_c = g = 0$. Les conclusions obtenues pour $g_c = g$ s'appliquent donc quand $g = 0$ et on peut mettre en évidence les deux situations avec transferts des jeunes vers les vieux et des vieux vers les jeunes.

5 Conclusion

Nous avons étudié l'optimum social et sa décentralisation dans une petite économie ouverte avec progrès technique neutre au sens de Harrod, en considérant un critère de bien-être social utilitariste. Le problème centralisé n'admet de solution que si le taux d'intérêt international est supérieur au taux de croissance de l'économie. Contrairement au cas d'une économie fermée, dans lequel la valeur du facteur d'actualisation social détermine le stock de capital stationnaire optimal, l'hypothèse de petite économie ouverte conduit à un niveau d'intensité capitalistique optimal constant. Le facteur d'actualisation social détermine uniquement la répartition de la richesse du pays entre les générations. Il existe une valeur du facteur d'actualisation sociale pour laquelle les consommations optimales suivent l'évolution du progrès technique. En dehors de cette valeur, les consommations optimales croissent plus vite ou moins vite que le progrès technique et impliquent respectivement un transfert des gains liés au progrès technique des générations présentes vers les générations futures ou des générations futures vers les générations présentes. En particulier, un optimum avec consommations constantes correspondrait à une redistribution égalitaire du progrès technique entre les générations. Cette situation est obtenue pour un facteur d'actualisation social égal au rapport du facteur de croissance de la population et du facteur d'intérêt.

Nous avons étudié la décentralisation de l'optimum social lorsque le taux de croissance optimal des consommations est compris entre 0 et g. S'il est inférieur à g, le planificateur fait bénéficier les générations proches de la date initiale d'un progrès technique qui survient dans le futur, mais cela nécessite un endettement important qui devra être remboursé en imposant des transferts des jeunes aux vieux de plus en plus grands. Une telle politique conduit à long terme à un taux de cotisation sur le salaire des jeunes qui est supérieur à 100%.

Si les consommations optimales croissent au même taux que le progrès technique, le sens des transferts qui permettent de décentraliser la solution optimale, dépend des valeurs des paramètres. Dans un exemple, avec une fonction d'utilité et une fonction de production toutes deux Cobb-Douglas, les transferts vont des jeunes aux vieux quand les agents accordent un faible poids à la consommation de seconde période dans leur fonction d'utilité et/ou quand l'écart entre le taux de croissance de l'économie et le taux d'intérêt est important. Ainsi, la décentralisation d'un optimum social peut conduire à des transferts nets négatifs pour les générations futures, ceci d'autant plus que le taux d'intérêt international est élevé. En définitive, ceci montre que si une succession de générations connaît un transfert net négatif sur son cycle de vie, un tel phénomène ne doit pas être condamné en lui-même mais replacé dans un cadre plus large qui est celui de la redistribution intergénérationnelle optimale sur l'ensemble des générations. Certes, il est possible que les transferts ascendants soient actuellement trop importants. Mais, il faut nuancer la conception assez largement répandue selon laquelle un système de retraite par répartition est néfaste s'il est moins rentable qu'un système par capitalisation ou que l'épargne privée.

On montre que, sous l'hypothèse $(1+n)(1+g) < (1+r)$, la contrainte de solvabilité d'une petite économie ouverte ($\Delta_t \leq Q_t$, pour tout t) est équivalente à : $\lim\limits_{t \to +\infty} (1+r)^{-t} \Delta_t \leq 0$.

La capacité de remboursement du pays à la période t est :

$$Q_t = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{i+1} A_{t+i} N_{t+i} \overline{M}$$

On en déduit la relation suivante :

$$(1+r)^{-(t+1)} Q_{t+1} = (1+r)^{-t} Q_t - (1+r)^{-(t+1)} A_t N_t \overline{M}$$

De plus, la dynamique de la dette actualisée en 0 est régie par l'équation :

$$(1+r)^{-(t+1)} \Delta_{t+1} = (1+r)^{-t} \Delta_t + (1+r)^{-(t+1)} [N_t c_t + N_{t-1} d_t - A_t N_t \overline{M}]$$

En combinant ces deux équations, on obtient :

$$(1+r)^{-(t+1)} (Q_{t+1} - \Delta_{t+1}) = (1+r)^{-t} (Q_t - \Delta_t) - (1+r)^{-(t+1)} [N_t c_t + N_{t-1} d_t]$$

Ainsi, la suite des excès de la capacité de remboursement sur la dette est monotone décroissante. La contrainte de solvabilité, qui impose que tous les termes de cette suite sont positifs, est donc équivalente à : $\lim\limits_{t \to +\infty} (1+r)^{-t} (Q_t - \Delta_t) \geq 0$. Cependant, la capacité de remboursement actualisée est égale à :

$$\begin{aligned}
(1+r)^{-t} Q_t &= (1+r)^{-(t+1)} A_t N_t \overline{M} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{(1+n)(1+g)}{1+r} \right)^i \\
&= \left(\frac{(1+n)(1+g)}{1+r} \right)^t \frac{A_0 N_0 \overline{M}}{(1+r) - (1+n)(1+g)}
\end{aligned}$$

Par conséquent, la limite de $(1+r)^{-t} Q_t$ est nulle et la contrainte de solvabilité est équivalente à : $\lim\limits_{t \to +\infty} (1+r)^{-t} \Delta_t \leq 0$.

Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité du programme centralisé

On introduit une variable d'état supplémentaire $y_{t+1} = c_t$ dans le programme du planificateur de façon à obtenir une forme standard permettant d'appliquer les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité de MICHEL [1990]. Le programme devient :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Max} \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t u(y_t, d_t) \\
&\quad sc: \quad y_{t+1} = c_t, \\
&\qquad\qquad \delta_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left[(1+r)\delta_t + c_t + \frac{1}{1+n}\, d_t - A_t\overline{M}\right], \\
&\qquad\qquad \lim_{t\to+\infty} (1+r)^{-t} N_t \delta_t \leq 0, \\
&\qquad\qquad y_0 \text{ et } \delta_0 \text{ données.}
\end{aligned}$$

y_t et δ_t sont des variables d'état; c_t et d_t sont des variables de décision. On note λ_t et p_t, les variables adjointes respectives de δ_t et y_t. On écrit le lagrangien de la période t :

$$\begin{aligned}
L_t = u(y_t, d_t) &+ \frac{\beta}{1+n}\,\lambda_{t+1}\left[(1+r)\,\delta_t + c_t + \frac{1}{1+n}\, d_t - A_t\overline{M}\right] - \lambda_t\delta_t \\
&+ \beta\, p_{t+1} c_t - p_t y_t
\end{aligned}$$

Une trajectoire $(c_t, d_t, \delta_t, y_t)$ est optimale si et seulement si elle maximise L_t pour tout t et vérifie la condition de transversalité donnée aux équations (7) et (8). Les conditions d'optimalité sont donc :

(1) $$u'_c(y_t, d_t) = p_t$$

(2) $$u'_d(y_t, d_t) = \beta(1+n)^{-2}\lambda_{t+1}$$

(3) $$\frac{\beta(1+r)}{1+n}\,\lambda_{t+1} = \lambda_t$$

(4) $$\frac{\beta}{1+n}\,\lambda_{t+1} = \beta\, p_{t+1}$$

(5) $$\delta_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left[(1+r)\,\delta_t + c_t + \frac{1}{1+n}\, d_t - A_t\overline{M}\right]$$

(6) $$y_{t+1} = c_t$$

(7) $$\lim_{t \to +\infty} \beta^t \lambda_t \delta_t = 0$$

(8) $$\lim_{t \to +\infty} \beta^t p_t y_t = 0$$

Les équations (1), (2), (3) et (4) permettent de retrouver les deux conditions marginales d'optimalité (9) et (10) dans le texte. De plus, la condition (3) décrit la dynamique de la variable adjointe λ_t et nous donne : $\lambda_t = [1 + n/\beta(1+r)]^t \lambda_0$. Par conséquent :

$$\beta^t \lambda_t \delta_t = \beta^t \left(\frac{1+n}{\beta(1+r)} \right)^t \lambda_0 \delta_t = \frac{\lambda_0}{N_0} \frac{\Delta_t}{(1+r)^t}$$

Donc, la condition de transversalité (7) est équivalente à : $\lim\limits_{t \to +\infty} (1+r)^{-t} \Delta_t = 0$, qui est l'égalité dans la contrainte de solvabilité du pays.

• Références bibliographiques

AARON, H. (1966). – "The Social Insurance Paradox", *Canadian Journal of Economics and Political Science,* 32, pp. 371-374.

ALLAIS, M. (1947). – "*Économie et intérêt,*" Imprimerie Nationale, Paris.

ARROW, K. J. (1973). – "Rawls' Principle of Just Saving" *Swedish Journal of Economics,* 75, pp. 323-335.

ATKINSON, A. B., SANDMO, A. (1980). – "Welfare Implications of the Taxation of Savings", *Economic Journal*, 90, pp. 529-549.

AUERBACH, A. J., GOKHALE, J., KOTLIKOFF, L. J. (1994). – "Generational Accounting: A Meaningful Way to Evaluate Fiscal Policy", *Journal of Economic Perspectives,* 8(1), pp. 73-94.

BOADWAY, R., MARCHAND, M., PESTIEAU, P. (1991). – "Pay-as-you-go Social Security in a Changing Environment", *Journal of Population Economics,* 4, pp. 257-280.

DIAMOND, P. A. (1965). – "National Debt in a Neoclassical Growth Model", *American Economic Review,* 55, pp. 1126-1150.

DIAMOND, P. A. (1973). – "Taxation and public production in a Growth Setting", In: *Mirlees and Stern* (eds.): Models of Economics Growth, London, *MacMillan*, pp. 215-235.

FLEURBAEY, M., MICHEL, P. (1992). – "Quelle justice pour les retraites?", *Revue d'économie financière,* 23, pp. 47-64.

HAVEMAN, R. (1994). – "Should Generational Accounts Replace Public Budgets and Deficits?" *Journal of Economics Perspectives,* 8(1), pp. 95-111.

KESSLER, D., MASSON, A., PESTIEAU, P. (1991). – "Trois vues sur l'héritage : la famille, la propriété, l'État", *Économie et prévision*, 100-101, pp. 1-29.

KOTLIKOFF, L. J. (1992). – *Generational Accounting,* New York, Free Press.

Livre Blanc sur les retraites (1991), Préface de M. Rocard, Paris, Folio/actuel.

Marchand, M., Michel, P., Pestieau, P. (1990). – “Optimal Intergenerational Transfers in a Growth Model with Fertility and Productivity Changes”, *Core Discussion paper n° 9059.*

Marchand, M., Michel, P., Pestieau, P. (1993). – “Optimal Intergenerational Transfers in an Endogenous Growth Model with Fertility Changes”, *Core Discussion Paper n° 9311.*

Marchand, M., Pestieau, P. (1991). – “Public Pensions: Choices for the Future”, *European Economic Review,* 35, pp. 441-453.

Masson, A. (1995). – “L’héritage au sein des transferts entre générations : théorie, constat, perspectives”, In Attias-Donfut, C. (Ed.): *Les solidarités entre générations. Vieillesse, famille, État.*

Michel, P. (1990). – “Some Clarifications on the Transversality Condition”, *Econometrica*, 58, pp. 705-723.

Michel, P. (1993). – “Croissance et équilibre intertemporel : une présentation simple d’un modèle de base”, In P. Malgrange et L. Salvas-Bronsard : *Macroéconomie, Développements récents,* Presse de l’Université du Québec et Economica.

Pestieau, P. (1974). – “Optimal taxation and discount rate for public investment in a growth setting”, *Journal of Public Economics,* 3, pp. 317-235.

Samuelson, P. A. (1958). – “An Exact Consumption-Loan Model of Interest With or Without the Social Contrivance of Money”, *Journal of Political Economy,* 66, pp. 467-482.