ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 51 — 1998

Exogénéité, propriété de Markov et mélangeance forte dans un modèle autorégressif non-linéaire

Jia SHEN*

RÉSUMÉ. – On étudie l'exogénéité de la variable $\{Z_n\}$ dans le modèle $X_{n+1} = \phi(X_n) + \psi(Z_n) + \varepsilon_n$ où les fonctions ϕ et ψ sont non-linéaires, des conditions suffisantes de propriété markovienne du processus $\{X_n\}$, et enfin des conditions suffisantes d'ergodicité et de α-mélangeance de $\{X_n\}$.

Exogeneity, Markov Property and Strong Mixing in an Autoregressive Non-Linear Model

ABSTRACT. – We study the exogeneity of the variable $\{Z_n\}$ in the nonlinear model $X_{n+1} = \phi(X_n)+\psi(Z_n)+\varepsilon_n$, as well as sufficient conditions of Markov property for $\{X_n\}$, and ergodicity and α-mixing property for $\{X_n\}$.

* J. SHEN Fudan University Dept. of Statistics, Shanghai 200433, People's Republic of China

1 Introduction

La plupart des travaux récents de recherche en estimation non-paramétrique ont été réalisés sous l'hypothèse de mélangeance et de stationnarité (cf. Robinson [1983], Roussas et Tran [1992], Bosq [1993], etc.). L'ergodicité dans des modèles autorégressifs a été largement étudiée. Parmi les études de modèles autorégressifs non-linéaires, citons Doukhan et Ghindès [1980] pour le modèle $X_{n+1} = f(X_n) \cdot \varepsilon_n$, Doukhan et Ghindès [1983] pour le modèle $X_{n+1} = f(X_n) + \varepsilon_n$, Mokkadem [1987] pour le modèle $X_{n+1} = f(X_n) + \varepsilon_{X_n,n}$, Diebolt et Guégan [1990] pour le modèle $X_{n+1} = f(X_n) + g(X_n) \cdot \varepsilon_n$. Par ailleurs, on trouve un nombre important, bien que non-exhaustif, de modèles non-linéaires dans Tjøstheim [1990, 1994]. Pourtant dans différents domaines, il semble plus adéquat de modéliser certains phénomènes en tenant compte de l'influence d'éléments extérieurs (variables exogènes), que de considérer ces phénomènes isolément. En estimant le modèle (2) suivant (cf. Shen [1995]), l'équivalent non-linéaire de l'ARMAX (Auto-Regressive-Moving-Average systems with eXogenous variable), étudié notamment par Hannan et Deistler [1988], nous nous sommes intéressés à la vérification de l'ergodicité et de la α-mélangeance (cf. Rosenblatt [1956], Bradley [1986], Doukhan [1994], etc.) de (2), dans un contexte markovien. Dans un premier temps, nous allons considérer un modèle autorégressif non-linéaire

$$Y_{n+1} = R(Y_n) + \xi_n \tag{1}$$

où $Y_n = (X_n', Z_n')' \in R^{m_1+m_2}$, avec $X_n \in R^{m_1}$,$Z_n \in R^{m_2}$, et $R(Y_n) = ((\phi(X_n) + \psi(Z_n))', (F(Z_n) + G(X_n))')'$, $\xi_n = (\varepsilon_n', \eta_n')'$, et où ϕ, ψ, F, G sont des fonctions boréliennes, $\{\xi_n\}$ et $\{\eta_n\}$ des processus définis sur un espace probabilisé (Ω, Σ, P). On considère notamment la situation où $Z_{n+1} = F(Z_n) + \eta_n$. A notre connaissance, la définition de non-causalité et d'exogénéité, issue des études paramétriques de modèles linéaires (voir par exemple Granger [1969], Sims [1972] etc.), généralisée en concepts non-paramétriques d'indépendance conditionnelle, n'a pas été étudiée dans le cadre d'un modèle concret ayant des fonctions de transfert non-linéaires. Dans le paragraphe 1, on propose donc une étude de l'exogénéité et de la propriété de Markov dans le modèle (1) sans hypothèse de stationnarité. Dans le paragraphe 2, notre attention se porte sur l'étude de l'ergodicité et de la mélangeance forte du processus markovien $\{X_n\}$ défini par le modèle suivant:

$$X_{n+1} = \phi(X_n) + \psi(Z_n) + \varepsilon_n. \tag{2}$$

Notons $\alpha(k) = \sup_{A,B} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|$, où $A \in \sigma(X_s, s \leq t), B \in \sigma(X_s, s \geq t+k)$. Le processus $\{X_n\}$ est dit *fortement mélangeant* (cf. Rosenblatt [1956] ou Bradley [1986]) si $\alpha(k) \to 0$ $(k \to \infty)$ et *géométriquement mélangeant* si $\exists \rho \in]0, 1[, a \geq 0$, tel que $\alpha(k) \leq a\rho^k$. Diebolt et Guégan [1990] montrent que si un processus markovien $\{X_n\}$

est homogène, ergodique et Harris-récurrent, défini sur un espace d'états séparable, alors

$$\alpha(k+1) \leq \int_{\Omega} ||P^{k-1}(x,\cdot) - \pi(\cdot)||\pi(dx), \qquad k \geq 2,$$

où π est la loi invariante de $\{X_n\}$, $P^k(\cdot,\cdot)$ est sa loi itérée de transition, et $||\cdot||$ désigne la variation totale.

On établit des critères d'ergodicité, i.e. $|| P^k(x,\cdot) - \pi(\cdot) || \to 0$, $(k \to \infty)$ et d'ergodicité géométrique, i.e. $|| P^k(x,\cdot) - \pi(\cdot) || = M(x)\rho^k$ grâce aux critères de Tweedie. On obtient ainsi la loi invariante et la mélangeance forte du processus $\{X_n\}$.

2 Exogénéité et propriété de Markov

Nous allons étudier des conditions suffisantes de l'exogénéité du processus $\{Z_n\}$ par rapport au processus $\{X_n\}$ dans le modèle (1), et de la propriété de Markov de $\{X_n\}$.

D'abord, on donne les notations suivantes: soient les σ-algèbres $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G} \subset \Sigma$, nous notons

• $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in$I pour désigner "$\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont indépendantes";

• $(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}, \mathcal{F}_2)$ $\in$CI pour désigner "$\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{G}$".

Cette dernière notation signifie:

$$\forall A_1 \in \mathcal{F}_1, \forall A_2 \in \mathcal{F}_2 \qquad \text{on a} \qquad P(A_1 \cap A_2|\mathcal{G}) = P(A_1|\mathcal{G})P(A_2|\mathcal{G}),$$

ou de manière équivalente:

$$\forall A_1 \in \mathcal{F}_1, \qquad \text{on a} \qquad P(A_1|\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{G}) = P(A_1|\mathcal{G}),$$

où $\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{F}_2 \cup \mathcal{G})$. Ces égalités sont comprises au sens presque sûr.

Il existe de nombreuses interprétations mathématiques de la causalité d'un processus par un autre (voir par exemple PIERCE et HAUCH [1977]) et de la noncausalité qui est souvent confondue avec l'exogénéité. L'exogénéité (ou la noncausalité) a été largement étudiée par de nombreux auteurs (voir par exemple ENGLE, HENDRY et RICHARD [1983], FLORENS et MOUCHART [1982, 1985], BOUISSOU, LAFFONT et VUONG [1986] etc.) Le concept principal de l'exogénéité a été décrit par KOOPMANS [1950]: "Exogenous variables are defined as variables that influence the endogenous variables but not themselves influenced by the endogenous variables". Cependant, la formulation mathématique de l'exogénéité reste délicate, le principe de bon sens selon lequel "le futur ne cause pas le passé" étant difficile à interpréter par des outils probabilistes classiques à cause de la symétrie de l'indépendance conditionnelle. Notons que Bosq [1975] a proposé, en réponse à un problème posé par Savage [1972], une définition qualitative de l'indépendance qui interprète en effet une relation d'ordre "à sens unique", et qui pourrait s'avérer pertinente quant à l'idée de noncausalité.

Ici, nous nous contenterons des définitions populaires de l'exogénéité qui l'interprètent par l'indépendance conditionnelle du futur de la variable exogène $\{Z_n\}$ et du passé de l'endogène $\{X_n\}$ sachant le passé de $\{Z_n\}$. A notre connaissance, les résultats présentés dans ce paragraphe sont nouveaux, excepté le Lemme 1 et les trois premières équivalences du Lemme 2.

2.1 Exogénéité de la variable $\{Z_n\}$

Définition 1 : (Noncausalité de Granger) On dit que $\{X_n\}$ ne cause pas $\{Z_n\}$ au sens de Granger si et seulement si

$$(3) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad (\sigma(Z_{n+1}), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in \text{CI}.$$

Définition 2 : (Exogénéité stricte): On dit que $\{Z_n\}$ est strictement exogène à $\{X_n\}$ si et seulement si

$$(4) \ \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad (\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \mathcal{X}, \sigma(X_n)) \in \text{CI},$$

$\forall \mathcal{X} \subset \sigma(X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots)$.

L'exogénéité stricte a été initialement définie par Sims (1972) pour étudier des prédicteurs linéaires sous la forme suivante :

$$(5) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad (\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \ldots), \sigma(X_n)) \in \text{CI}.$$

Cette condition a été étudiée dans le cadre d'un processus faiblement stationnaire, sans partie déterministe, ayant une représentation autorégressive linéaire. Hosoya [1977] montre que la stationnarité et l'exclusion du déterminisme ne sont pas nécessaires pour un processus bivarié $\{(X_n, Z_n), n \in \mathbb{Z}\}$ où X_n et Z_n appartiennent à l'espace hilbertien de variables aléatoires de variance finie. Notons que ses résultats concernent uniquement des projections linéaires au sens de moyenne quadratique. La version (4) de l'exogénéité a été donnée par Chamberlain [1982] qui montre en particulier que (3) entraîne (5), que la réciproque n'est pas vraie, et que (3) et (4) sont équivalentes.

DÉFINITION 3 : (Noncausalité globale): On dit que $\{X_n\}$ ne cause pas $\{Z_n\}$ si et seulement si

$$(6) \qquad \forall n \in \mathbb{Z},\ (\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots),$$
$$\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in \mathrm{CI}.$$

La condition (6) a été étudiée par FLORENS et MOUCHART [1982], BOUISSOU, LAFFONT et VUONG [1986]. Ils ont établi l'équivalence de (6) et (4), et obtenu des résultats sous l'hypothèse de Markov du processus exogène en vue de tests de noncausalité, que nous appliquerons plus loin.

Des propriétés de l'indépendance conditionnelle, étudiées ou obtenues par MOUCHART et ROLIN [1984], van PUTTEN et van SCHUPPEN [1985] et résumées dans le lemme suivant seront également appliquées.

LEMME 1 : Si les σ-algèbres $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{G} \subset \Sigma$, on a:

1. si $(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \vee \mathcal{G}, \mathcal{F}_3) \in \mathrm{I}$, alors
$$(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}, \mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_3) \in \mathrm{CI} \Longleftrightarrow (\mathcal{F}_1, \mathcal{G}, \mathcal{F}_2) \in \mathrm{CI};$$
2. si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{G}$, ou $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}$, alors $(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}, \mathcal{F}_2) \in \mathrm{CI}$;
3. si $\mathcal{F}_3 \subset \mathcal{F}_2 \vee \mathcal{G}$, alors
$$(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}, \mathcal{F}_2) \in \mathrm{CI} \Longrightarrow (\mathcal{F}_1, \mathcal{G}, \mathcal{F}_3) \in \mathrm{CI};$$
4. $(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}, \mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_3) \in \mathrm{CI} \Longleftrightarrow (\mathcal{F}_1, \mathcal{G}, \mathcal{F}_2) \in \mathrm{CI}$ et $(\mathcal{F}_1, \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3) \in \mathrm{CI}$;
5. $$\left.\begin{array}{r}(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}, \mathcal{F}_2) \in \mathrm{CI} \\ (\mathcal{F}_1, \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3) \in \mathrm{CI}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}, \mathcal{F}_3) \in \mathrm{CI} \\ (\mathcal{F}_1, \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_2) \in \mathrm{CI};\end{array}\right.$$
6. $(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}, \mathcal{F}_2) \in \mathrm{CI} \Longleftrightarrow (\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{G}, \mathcal{G}, \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_2) \in \mathrm{CI}$.

THÉORÈME 1 : Dans le modèle $Z_{n+1} = F(Z_n) + G(X_n) + \eta_n$, si $(\sigma(\eta_n), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in \mathrm{I}$, alors $\{Z_n\}$ est strictement exogène si et seulement si $G(X_n)$ est mesurable par rapport à $\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots)$.

Démonstration: ($\Longleftarrow$): si $G(X_n)$ est mesurable par rapport à $\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \ldots)$, il existe alors une fonction mesurable h telle que

$$G(X_n) = h(Z_n, Z_{n-1}, \cdots).$$

Donc le processus $\{Z_n\}$ vérifie l'équation $Z_{n+1} = F(Z_n) + h(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) + \eta_n$. Alors $\sigma(Z_{n+1}) \subset \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(\eta_n)$. Puisque $(\sigma(\eta_n), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \ldots)) \in \mathrm{I}$, on a par le Lemme 1.1^o,

$$(\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(\eta_n), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in \mathrm{CI}$$
$$\Longleftrightarrow (\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \ldots), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \ldots), \sigma(X_n, X_{n-1}, \ldots)) \in \mathrm{CI}.$$

Et la dernière condition est trivialement vérifiée (Lemme 1.2^o).Par le Lemme 1.3^o,

$$(\sigma(Z_{n+1}), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots), \sigma(X_n, X_{n-1}, \ldots)) \in \text{CI}.$$

Donc la condition (3) est vérifiée.

($\Longrightarrow$): Supposons que la condition (3) est vérifiée, i.e.

$$\begin{aligned} &P(Z_{n+1} \in \cdot | \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \ldots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \ldots)) \\ &\quad = P(Z_{n+1} \in \cdot | \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots)). \end{aligned}$$

Donc

$$E[Z_{n+1}|\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \ldots)] = E[Z_{n+1}|\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots)]. \tag{$*$}$$

La quantité de gauche s'écrit

$$\begin{aligned} &E[F(Z_n)|\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)] \\ &\qquad + E[G(X_n)|\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)] \\ &\qquad + E[\eta_n|\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)]. \end{aligned}$$

Comme $F(Z_n) = E[F(Z_n)|Z_n]$, on a :

$$\begin{aligned} &E[F(Z_n)|\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)] \\ &\quad = E[E(F(Z_n)|Z_n)|\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)] \\ &\quad = E(F(Z_n)|Z_n) = F(Z_n). \end{aligned}$$

De même, on a:

$$E[G(X_n)|\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)] = E[G(X_n)|X_n] = G(X_n),$$

et

$$E[\eta_n|\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)] = E\eta_n.$$

Donc

$$E[Z_{n+1}|\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)] = F(Z_n) + G(X_n) + E\eta_n.$$

La quantité de droite de l'expression $(*)$ s'écrit $F(Z_n) + E[G(X_n)|Z_n, Z_{n-1}, \cdots] + E\eta_n$. Donc $G(X_n) = E[G(X_n)|Z_n, Z_{n-1}, \cdots]$, $G(X_n)$ est mesurable par rapport à $\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \ldots)$. $\square$

2.2. **Propriété de Markov**

On considère maintenant des conditions suffisantes pour que les processus $\{X_n\}$ et $\{Z_n\}$ soient markoviens. Les résultats présentés ici sont à notre connaissance nouveaux, excepté l'équivalence $1^o \Leftrightarrow 2^o \Leftrightarrow 3^o$ du Lemme 2 qui est due à Bouissou, Laffont et Vuong [1986]. Rappelons que la propriété de Markov est aussi définie par une relation d'indépendance conditionnelle. Un processus $\{Z_n\}$ est dit markovien si et seulement si

$$(\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n), \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI}.$$

Cette condition est équivalente à $(\sigma(Z_{n+1}), \sigma(Z_n), \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots)) \in$CI, i.e.

$$P(Z_{n+1} \in \cdot | Z_n, Z_{n-1}, \cdots) = P(Z_{n+1} \in \cdot | Z_n).$$

On peut établir aisément l'équivalence de ces deux conditions par le Lemme 1.4^o.

LEMME 2 : Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. $\{Z_n\}$ est markovien et n'est pas causé par $\{X_n\}$ au sens de Granger, i.e.

$$\begin{cases} a)(\sigma(Z_{n+1}), \sigma(Z_n), \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots)) \in \text{ CI} \qquad \text{et} \\ b)(\sigma(Z_{n+1}), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in \text{ CI;} \end{cases}$$

2. (R_1): $(\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n), \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in$ CI;

3. $$\begin{cases} a)(\sigma(Z_{n+1}), Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n), \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI}, \\ b)(\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n Z_{n-1}, \cdots), \sigma(X_n, X_{n+1}, \cdots)) \in \text{CI;} \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} a)(\sigma(Z_{n+1}), \sigma(Z_n) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots), \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI}, \\ b)(\sigma(Z_{n+1}), \sigma(Z_n), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in \text{CI;} \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} a)(\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots), \\ \quad \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI}, \\ b)(\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)); \end{cases}$$

6. $(\sigma(Z_{n+1}), \sigma(Z_n), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots)) \in$ CI.

Démonstration: L'équivalence $1^o \iff 2^o \iff 3^o$ est due à BOUISSOU, LAFFONT et VUONG (1986). $3^o b)$ est la définition de la noncausalité globale. Et si on note

$$\mathcal{F}_1 = \sigma(Z_{n+1}), \mathcal{G} = \sigma(Z_n),$$

$$\mathcal{F}_2 = \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots), \mathcal{F}_3 = \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots),$$

en appliquant le Lemme 1.5^o, on obtient $1^o \iff 4^o$. Si on note

$$\mathcal{F}_1 = \sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \mathcal{G} = \sigma(Z_n),$$

$$\mathcal{F}_2 = \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots), \mathcal{F}_3 = \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots),$$

en appliquant le Lemme 1.5^o, on obtient $3^o \iff 5^o$. Et enfin par le Lemme 1.4^o, on obtient $6^o \iff 4^o$ ou $1^o \iff 6^o$. $\square$

Remarque 1 : Le Lemme 2 montre que dans le cas où $\{Z_n\}$ est à la fois markovien et strictement exogène, on peut d'un certain point de vue considérer indifféremment le futur immédiat $\sigma(Z_{n+1})$ et tout le futur $\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots)$ du processus $\{Z_n\}$ conditionnellement à la tribu $\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)$.

Considérons à présent le modèle $Z_{n+1} = F(Z_n) + G(X_n) + \eta_n$ lorsque $G(X_n) \equiv 0$.

THÉORÈME 2 : Si $Z_{n+1} = F(Z_n) + \eta_n$ avec la fonction F borélienne, et si

(7) $$(\sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \cdots), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in \text{I},$$

alors (R_1) est vérifiée, i.e. $\{Z_n\}$ est à la fois markovien et strictement exogène.

Démonstration : D'après le modèle

$$\eta_n = Z_{n+1} - F(Z_n),$$

η_n est mesurable par rapport à $\sigma(Z_n, Z_{n+1})$, $\forall n$. Ce qui entraîne

$$\sigma(Z_n) \vee \sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \cdots) \subset \sigma(Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots).$$

Il est clair d'après le modèle $Z_{n+1} = F(Z_n) + \eta_n$ que $\sigma(Z_{n+1}) \subset \sigma(Z_n, \eta_n)$ et

$$\sigma(Z_{n+m}) \subset \sigma(Z_{n+m-1}, \eta_{n+m-1}) \subset \sigma(Z_n, \eta_n, \eta_{n+1}, \cdots, \eta_{n+m-1})$$

pour tout entier positif m. Donc

$$\sigma(Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots) = \sigma(Z_n) \vee \sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots).$$

Alors la noncausalité globale s'écrit

$$(\sigma(Z_n) \vee \sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in \text{CI}.$$

Et d'après le Lemme 1.1^o et l'hypothèse (7), la condition précédente est équivalente à

$$(\sigma(Z_n), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in \text{CI}.$$

Et cette dernière condition est trivialement vérifiée (d'après le Lemme 1.2^o) puisque $\sigma(Z_n) \subset \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots)$. Donc l'exogénéité est vérifiée. Comme $(\sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots)) \in$I, il est clair que selon le Lemme 1.6^o,

$$\begin{aligned} &(\sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \cdots), \sigma(Z_n), \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI} \\ \Longleftrightarrow\ &(\sigma(Z_n) \vee \sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots), \sigma(Z_n), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots)) \in \text{CI} \\ \Longleftrightarrow\ &(\sigma(Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots)) \in \text{CI}, \end{aligned}$$

car $\sigma(Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots) = \sigma(Z_n) \vee \sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \ldots)$. Et cette dernière condition est équivalente à la propriété de Markov

$$(\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n), \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI},$$

d'après le Lemme 1.6^o. □

Remarque 2: *Pour que $\{Z_n\}$ soit markovien, il suffit que*

$$(\sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \cdots), \sigma(Z_n), \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI}.$$

COROLLAIRE 1 : Sous (7), le processus $\{Z_n\}$ défini par le modèle $Z_{n+1} = F(Z_n) + G(X_n) + \eta_n$ vérifie la condition (R_1) si et seulement si $\{Z_n\}$ suit le modèle

$$Z_{n+1} = \widetilde{F}(Z_n) + \eta_n$$

pour une fonction $\widetilde{F}$ borélienne.

Démonstration: ($\Longleftarrow$): C'est le Théorème 2.
($\Longrightarrow$): Il est clair que (7) entraîne

$$(\sigma(\eta_n), \sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in \text{I}.$$

Par le Théorème 1, on a

$$\begin{aligned} &P_{Z_{n+1}}[\cdot|\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)] \\ &\quad = P_{Z_{n+1}}[\cdot|\sigma(Z_n, Z_{n-1}, \cdots)] = P_{Z_{n+1}}[\cdot|Z_n]. \end{aligned}$$

Donc $G(X_n) = E[G(X_n)|Z_n]$ (voir la démonstration du Th. 1) est mesurable par rapport à $\sigma(Z_n)$. Il existe alors une fonction mesurable h telle que $G(X_n) = h(Z_n)$. Il suffit de noter

$$\widetilde{F}(Z_n) = F(Z_n) + G(X_n) = F(Z_n) + h(Z_n). \quad \square$$

Remarque 3:

1. *Il est clair que si $Z_{n+1} = F(Z_n) + G(X_n, X_{n-1}, \cdots, X_{n-k}) + \eta_n$, on peut obtenir le résultat analogue car alors $G(X_n, \cdots, X_{n-k}) = E[G(X_n, \cdots, X_{n-k})|Z_n]$.*
2. *Si $\{\eta_n\}$ est un processus indépendant et si $\forall n$, $\sigma(\eta_n)$ est indépendant de $\sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots)$, on a*

$$\begin{aligned} &(\sigma(\eta_n), \sigma(Z_n), \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI} \\ \Longleftrightarrow\ &(\sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \cdots), \sigma(Z_n), \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI}, \end{aligned}$$

par le Lemme 1.1^o.

Nous considérons maintenant la propriété de Markov pour le processus $\{X_n\}$ défini par le modèle $X_{n+1} = \phi(X_n) + \psi(Z_n) + \varepsilon_n$.

THÉORÈME 3 : Sous l'hypothèse (8)

$$(\sigma(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \cdots), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots)) \in \text{I}, \qquad \forall n,$$

si $(\sigma(Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(X_n), \sigma(X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots)) \in$CI, alors $\{X_n\}$ est markovien.

Démonstration: On remarque que $X_{n+1} = \phi(X_n) + \psi(Z_n) + \varepsilon_n$ est mesurable par rapport à $\sigma[\sigma(X_n) \cup (\vee_{m=n}^{\infty} \sigma(\phi(Z_m) + \varepsilon_m))]$ ainsi que X_m, $m > n+1$. Et $\psi(Z_m) + \varepsilon_m = X_{m+1} - \phi(X_m)$, $m \geq n$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_n, X_{n+1}, \cdots)$. On a donc

$$\begin{aligned}\sigma(X_n, X_{n+1}, \cdots) &= \sigma[\sigma(X_n) \cup (\vee_{m=n}^{\infty} \sigma(\phi(Z_m) + \varepsilon_m))] \\ &\subset \sigma(X_n) \vee \sigma(Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots) \vee \sigma(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \cdots).\end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned}(\sigma(X_n) \vee \sigma(Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots) \vee \sigma(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \cdots), \\ \sigma(X_n), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in \text{CI},\end{aligned} \qquad (**)$$

par le Lemme 1.3^o, on a

$$(\sigma(X_n, X_{n+1}, \cdots), \sigma(X_n), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in \text{CI}.$$

Or

$$\begin{aligned}(**) \Longleftrightarrow (\sigma(Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots) \vee \sigma(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \cdots), \\ \sigma(X_n), \sigma(X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI}.\end{aligned} \qquad (***)$$

Par (8), et le Lemme 1.1^o, on a

$$(***) \Longleftrightarrow (\sigma(Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(X_n), \sigma(X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI}. \quad \square$$

COROLLAIRE 2 : Si $(\sigma(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \cdots), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots) \vee \sigma(Z_{n-k}, Z_{n-k+1}, \cdots)) \in$I, $\forall n$ et pour un k entier positif et si

$$(\sigma(Z_{n-k}, Z_{n-k+1}, \cdots), \sigma(X_n), \sigma(X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI},$$

alors le processus $\{X_n\}$ défini par le modèle

$$X_{n+1} = \phi(X_n) + \widetilde{\psi}(Z_n, Z_{n-1}, \cdots, Z_{n-k}) + \varepsilon_n$$

est markovien.

Démonstration : Il suffit de noter

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}_n &= (Z_n', Z_{n-1}', \cdots, Z_{n-k}')', \\ \psi(\widetilde{Z}_n) &= \widetilde{\psi}(Z_n, \cdots, Z_{n-k}).\end{aligned}$$

Il est facile de voir que les hypothèses du Th. 3 sont vérifiées. $\square$

Par le Lemme 1.4^o, on obtient facilement

COROLLAIRE 3 : La condition $(\sigma(Z_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(X_n), \sigma(X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots)) \in$CI équivaut à

$$\begin{cases}(\sigma(Z_n), \sigma(X_n), \sigma(X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI}, \quad \text{et} \\ (\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(X_n) \vee \sigma(Z_n), \sigma(X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI}.\end{cases}$$

Démonstration: Claire. $\square$

COROLLAIRE 4 : Si $\{Z_n\}$ est markovien et strictement exogène, sous (8), si

$$(\sigma(Z_n), \sigma(X_n), \sigma(X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI},$$

alors le processus $\{X_n\}$ est markovien.

Démonstration: La condition (R_1)

$$(\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n), \sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots) \vee \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in \text{CI}$$

entraîne par le Lemme 1.3^o

$$(\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in \text{CI}.$$

Ce qui entraîne par le Lemme 1.4^o

$$(\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n) \vee \sigma(X_n), \sigma(X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI}.$$

Les conditions du Th. 3 sont donc satisfaites grâce au Corollaire 3. $\square$

COROLLAIRE 5 : Sous (7) et (8), si $Z_{n+1} = F(Z_n) + \eta_n$ et si

$$(\sigma(Z_n), \sigma(X_n), \sigma(X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI}, \qquad \forall n,$$

alors le processus $\{X_n\}$ défini par le modèle $X_{n+1} = \phi(X_n) + \psi(Z_n) + \varepsilon_n$ est markovien.

Démonstration: Sous (7), le modèle $Z_{n+1} = F(Z_n) + \eta_n$ équivaut à la condition (R_1) selon le Corollaire 1. $\square$

Analogue au Lemme 2, on a:

COROLLAIRE 6 : Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. $(\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n), \sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)) \in$CI;

2. $\begin{cases} (\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(X_n) \vee \sigma(Z_n), \sigma(X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI}, \\ (\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n), \sigma(X_n)) \in \text{CI}; \end{cases}$

3. $\begin{cases} (\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n) \vee \sigma(X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots), \sigma(X_n)) \in \text{CI}, \\ (\sigma(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \cdots), \sigma(Z_n), \sigma(X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots)) \in \text{CI}. \end{cases}$

Démonstration: En appliquant le Lemme 1.4^o, on peut voir aisément que $1 \Leftrightarrow 2$ et $1 \Leftrightarrow 3$. $\square$

Remarque 4: *La condition* 1 *du Corollaire 6 est plus faible que* (R_1) *mais elle ne comporte aucune information sur* $\sigma(Z_{n-1}, Z_{n-2}, \cdots)$*, le passé du processus* $\{Z_n\}$.

3 Condition suffisante de mélangeance forte du processus $\{X_n\}$

On suppose que le processus $\{X_n\}$ est défini par le modèle :

$$X_{n+1} = \phi(X_n) + \psi(Z_n) + \varepsilon_n, \tag{9}$$

où $\varepsilon_n \in \mathcal{R}^d, Z_n \in \mathcal{R}^m, X_n \in \mathcal{R}^d, \phi : \mathcal{R}^d \to \mathcal{R}^d$ et $\psi : \mathcal{R}^m \to \mathcal{R}^d$ sont mesurables.

Nous supposerons l'indépendance de $\{\varepsilon_n\}$ par rapport à $\{Z_n\}$ pour le modèle (9), puisque $\{Z_n\}$ est exogène (voir par exemple GEWEKE [1984]). Par définition, l'exogénéité forte exige au moins la non-prédictibilité de $\{Z_n\}$ à partir du passé de $\{X_n\}$ à chaque date n, d'où notre hypothèse

$$P\{Z_n \in A|\sigma(X_n, X_{n-1}, \cdots)\} = P\{Z_n \in A|X_n\}.$$

Pour simplifier le calcul de la probabilité de transition, nous sommes amenés à faire l'hypothèse d'indépendance de X_n et Z_n, $\forall n$. Cette hypothèse est vérifiée notamment quand $\{Z_n\}$ est un processus indépendant.

3.2. Mélangeance forte et géométrique

Nous faisons l'hypothèse suivante: H0 1: En plus des hypothèses du Th. 3, $\{\varepsilon_n\}$ est un processus équidistribué, de loi $F(\cdot)$, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ, et $dF/d\lambda = f > 0$; $\{Z_n\}$ est équidistribué; $\forall n$, $\{Z_n\}$ est indépendant de $\{X_n\}$.

Alors le processus $\{X_n\}$ est markovien, homogène et a pour probabilité de transition

$$\begin{aligned}
P(x, A) &= P\{X_{n+1} \in A|X_n = x\} \\
&= P\{\psi(Z_n) + \varepsilon_n \in A - \phi(x)|X_n = x\} \\
&= \int P_Z(dz) F(A - \phi(x) - \psi(z)) \\
&= \int P_Z(dz) \int_A \lambda(dt) f(t - \phi(x) - \psi(z)),
\end{aligned}$$

où $A \in \mathcal{B}^d$, $x \in \mathcal{R}^d$, $P_Z(\cdot)$ est la loi de Z_0.

On définit ensuite la probabilité de transition itérée pour $P^1(\cdot,\cdot) = P(\cdot,\cdot)$,

$$P^n(x, A) = \int P(x, dy) P^{n-1}(y, A), \qquad n \geq 2.$$

DÉFINITION 4 : Un processus markovien est dit λ-irréductible si pour tout $A \in \mathcal{B}^d$, tel que $\lambda(A) > 0$, on a $\forall x \in R^d$, $\exists n_0 \geq 1$, tel que $P^{n_0}(x, A) > 0$.

DÉFINITION 5 : Un ensemble $B \in \mathcal{B}^d$, $\lambda(B) > 0$ est dit petit (pour $P(\cdot, \cdot)$) s'il existe une mesure $\nu(\cdot) > 0$ et $n_0 \geq 1$, tels que

$$P^{n_0}(x, A) \geq \nu(A), \qquad \forall A \in \mathcal{B}^d, \forall x \in B.$$

Alors $\nu(\cdot)$ est dite petite.

DÉFINITION 6 : On appelle cycle de longueur k, un k-uplet $(E_0, E_1, \cdots, E_{k-1})$ de boréliens disjoints tels que

$$\forall x \in E_i, \quad P(x, E_{i+1}^C) = 0, i = 0, \cdots, k-2,$$
$$\forall x \in E_{k-1}, P(x, E_0^C) = 0.$$

Dans ce cas, $P(\cdot, \cdot)$ est dite périodique de période d, si d est le plus grand commun diviseur des longueurs k. Et le processus $\{X_n\}$ est dit apériodique si $d = 1$.

Pour tout le reste du paragraphe, nous faisons de plus l'hypothèse suivante:

H0 2: $\phi(\cdot)$ est localement bornée. Il existe $L \in R^d - \{\infty\}$, tel que $P_Z\{\psi(Z_0) \leq L\} \geq \delta > 0$.

Remarque 5 : Notons $N_0 = \{\psi(Z_0) \leq L\}$. Alors $P(x, A) \geq P_Z\{N_0\}F(A - \phi(x) - L)$. Sous H01, H02, $P(x, A) > 0$, $\forall x \in R^d$, $\forall A \in \mathcal{B}^d$, $\lambda(A) > 0$. $\{X_n\}$ est donc λ-irréductible.

Remarque 6 : Soit C un compact de R^d, tel que $\lambda(C) > 0$. On a

$$\begin{aligned} P(x, A) &\geq P_Z\{N_0\}F\left(A - \sup_{x \in C} \phi(x) - L\right) \\ &\geq \nu(A) = \delta F\left(A - \sup_{x \in C} \phi(x) - L\right), \end{aligned}$$

$\forall x \in C$, $\forall A \in \mathcal{B}^d$, $\lambda(A) > 0$. Donc tout compact C λ-non-nul est un petit ensemble.

Remarque 7 : Une mesure d'irréductibilité μ (i.e. $\{X_n\}$ est μ-irréductible) est dite maximale, si toute mesure d'irréductibilité est dominée par μ. Une mesure d'irréductibilité existe et est unique à une équivalence près. On peut construire cette mesure maximale à partir de λ, par exemple, $\mu = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} \lambda P^n$. On a donc $\lambda << \mu << \lambda$. Ainsi, la mesure de Lebesgue est une mesure d'irréductibilité maximale. Si $(E_0, E_1, \cdots, E_{k-1})$ est un cycle, on a $\mu(\{\sum_{i=0}^{k-1} E_i\}^C) = 0$ (voir par exemple NUMMELIN (1984) Proposition 2.5) Alors sous H01 et H02 la chaîne $\{X_n\}$ définie par (3) est apériodique, car $P(x, E_0^C) = 0$, $\forall x \in R^d$ entraîne $\lambda(E_0^C) = 0$. On a donc $d = 1$.

Remarque 8 : De plus, il est facile de voir que sous H01 et H02, la chaîne est également Harris-récurrente, i.e.

$$P\{X_n \in B \quad \text{i.o.}|X_0 = x\} \equiv 1, \qquad \forall x \in R^d, \forall B \in \mathcal{B}^d, \lambda(B) > 0.$$

En résumé, on a:

PROPOSITION 1 : Sous H01, H02, la chaîne définie par (9) est λ-irréductible, apériodique et Harris-récurrente. Et tout compact λ-non-nul est un petit ensemble pour sa loi de transition.

DÉFINITION 7 : Soit $\nu(\cdot)$ une mesure non-triviale et σ-finie. Si pour $P(\cdot,\cdot)$ irréductible, on a $\nu \geq \nu P$, $\nu(\cdot)$ est dite sous-invariante. Si de plus $\nu = \nu P$, alors ν est dite invariante, et notée π. La chaîne est alors dite ergodique.

Notons qu'une mesure sous-invariante existe toujours. Par exemple,

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} F P^n$$

car $\nu(B) = 0$ implique $F(B) = 0$ et donc $\nu P(B) = 2(\nu - 2^{-1}F)(B) = 0$. On peut maintenant énoncer des conditions suffisantes d'ergodicité de $\{X_n\}$ grâce à un critère de Tweedie. Notons H0=$\{$H01, H02$\}$.

LEMME T1 : (TWEEDIE [1975]) Une condition suffisante d'ergodicité de la chaîne $\{X_n\}$ est l'existence d'une fonction mesurable non négative g et d'un ensemble $K \in \mathcal{F}_\nu$, où $\mathcal{F}_\nu = \{K : K \in \mathcal{B}, 0 < \nu(K) < \infty\}$ pour une mesure sous-invariante fixe ν, tels que

$$\begin{cases} \displaystyle\int P(x,dy)g(y) \leq g(x) - 1, & \forall x \in K^C \\ \exists B < \infty, \quad \displaystyle\int P(x,dy)g(y) \leq B, & \forall x \in K. \end{cases}$$

Il est connu que tout petit ensemble appartient à $\mathcal{F}_\nu$ (voir par exemple NUMMELIN [1984], Proposition 5.6 (ii)). Si nous posons $\nu = \sum_n FP^n$, tout compact K λ-non-nul appartient à $\mathcal{F}_\nu$.

PROPOSITION 2 : Sous H0, s'il existe $M > 0$, $\eta > 0$, et $s > 0$ tels que

$$\begin{cases} E|\phi(x) + \psi(Z_0) + \varepsilon_0|^s \leq |x|^s - \eta, & \text{pour } |x| > M, \\ \sup\limits_{|x| \leq M} E|\phi(x) + \psi(Z_0) + \varepsilon_0|^s < \infty, \end{cases} \tag{10}$$

où $|\cdot|$ est la norme euclidienne, alors la chaîne définie par (9) est ergodique.

Démonstration: On prend $g(x) = a|x|^s$ avec $a > \eta^{-1}$, pour $|x|$ assez grand,

$$\begin{aligned}\int P(x,dy)g(y) &= \int P_Z(dz) \int dy f(y-\phi(x)-\psi(z)) a|y|^s \\ &= a \int P_Z(dz) \int f(y)|y+\phi(x)+\psi(z)|^s \\ &= aE|\phi(x)+\psi(Z_0)+\varepsilon_0|^s \\ &\leq a|x|^s - a\eta \\ &\leq g(x) - 1.\end{aligned}$$

Il est clair que $\sup_{|x|\leq M} \int P(x,dy)g(y) < \infty$. $\square$

Remarque 9 : La condition (C1) est vérifiée si $E|\psi(Z_0)|^s < \infty$, $E|\varepsilon|^s < \infty$, s'il existe $M > 0$, $A \geq E|\psi(Z_0)|^s + E|\varepsilon_0|^s$, tels que

$$\begin{cases} |\phi(x)|^s \leq |x|^s - A, & \textit{pour} \quad |x| < M \quad \textit{et} \\ \sup\limits_{|x|\leq M} |\phi(x)|^s < \infty. \end{cases}$$

Pour le cas où $s = 1$, et le bruit est centré, on a:

PROPOSITION 3 : Sous H0, si $E\varepsilon_n = 0$, si $\psi(z)$ est finie, si pour $|x|$ assez grand, $\phi(x)$ satisfait la condition suivante: $\forall K > 0$, $\exists K'$ tel que $|\phi(x)| > K' \Longrightarrow |\phi_i(x)| > K$, $i = 1, \cdots, d$, où $\{\phi_i, i = 1, \cdots, d\}$ sont les composantes de ϕ, (de même pour $\{\psi_i\}$ et ψ), alors si $\exists \eta > \sum_{i=1}^d E|\psi_i(Z_0)|$, tel que $\exists\, N > 0$,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^d |\phi_i(x)| \leq \sum_{i=1}^d |x_i| - \eta, \quad \text{pour} \quad |x| > N, \quad \text{et} \\ &\sup_{|x|\leq N} |\phi(x)| < \infty, \end{aligned}$$

la chaîne $\{X_n\}$ est ergodique.

Démonstration: Notons $g(x) = A\sum_{i=1}^d |x_i|$, $x = (x_1, \cdots, x_d)'$, $0 < A < \infty$.

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{R}^d} P(x,dy)g(y) \\ &\quad = \int P_Z(dz) \int_{\mathcal{R}^d} dy\, f(y-\phi(x)-\psi(z)) A(|y_1| + \cdots + |y_d|) \\ &\quad = \int_{R^m} AP_Z(dz) \int_{\mathcal{R}^d} f(y) \sum_{i=1}^d |y_i + \phi_i(x) + \psi(z)|\, dy_1 \ldots dy_d. \end{aligned}$$

Pour $z \in \mathcal{R}^m$, et $i = 1, 2, \cdots, d$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}^d} f(y)|y_i + \phi_i(x) + \psi_i(z)| dy_1 \cdots dy_d \\
&\qquad = \int_R f_i(y_i)|y_i + \phi_i(x) + \psi_i(z)| dy_i \\
&\qquad \leq \int_R f_i(y_i)|y_i + \phi_i(x)| dy_i + |\psi_i(z)|.
\end{aligned}$$

Notons $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_d)$ avec $\delta_i = \pm 1$, et

$$\begin{aligned}
I_{\delta_i} &= [\,-\phi_i(x), +\infty\,[, \qquad \text{pour} \quad \delta_i = +1, \\
I_{\delta_i} &=]-\infty, -\phi_i(x)[, \qquad \text{pour} \quad \delta_i = -1.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{R}^d} P(x, dy) g(y) \\
&\quad \leq A \left[\sum_{i=1}^{d} \int_R f_i(y_i)|y_i + \phi_i(x)| dy_i + \sum_{i=1}^{d} E|\psi_i(Z_0)| \right] \\
&\quad \leq A \sum_{\delta} \int_{I_{\delta_i}} f_i(y_i) \delta_i y_i dy_i + A \sum_{i=1}^{d} |\phi_i(x)| + A \sum_{i=1}^{d} E|\psi_i(Z_0)|.
\end{aligned}$$

Si $|\phi_i(x)|$ est assez grand, le premier terme peut être arbitrairement petit, puisque le bruit $\{\varepsilon_n\}$ est centré. Pour $|x|$ assez grand, $\int_{\mathcal{R}^d} P(x, dy) g(y)$ peut être majoré par

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} + A \sum_{i=1}^{d} |\phi_i(x)| + A \sum_{i=1}^{d} E|\psi_i(Z_0)| \\
&\leq \frac{1}{2} + g(x) - A(\eta - \sum_{i=1}^{d} E|\psi_i(Z_0)|).
\end{aligned}$$

En choisissant convenablement la constante A, on a, pour $|x|$ assez grand,

$$\int_{\mathcal{R}^d} P(x, dy) g(y) \leq g(x) - 1.$$

Et pour $|x| \leq N$, il est facile de vérifier que $\int P(x, dy) g(x) \leq B < \infty$ car $E|\varepsilon_n| < \infty$. $\square$

Remarque 10 : L'ergodicité équivaut à $||P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)|| \to 0$ où $|| \cdot ||$ est la norme de la variation totale (voir par exemple Nummelin (1984)). Par le Lemme 2 de Diebolt et Guégan [1990], pour $n \geq 2$, $\alpha(n+1) \leq \int ||P^{n-1}(x, \cdot) - \pi(\cdot)|| \pi(dx)$. Donc sous les hypothèses de Proposition 2 ou de Proposition 3, la chaîne markovienne $\{X_n\}$ définie par le modèle (3) est fortement mélangeante.

DÉFINITION 8 : Une chaîne de Markov ergodique est dite géométriquement ergodique, s'il existe une constante $0 \leq \rho < 1$, telle que

$$||P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)|| = O(\rho^n), \quad \forall x \in R^d,$$

où $|| \cdot ||$ est la variation totale et $\pi(\cdot)$ la loi invariante.

Par le Lemme T2 suivant et des résultats de NUMMELIN-TUOMINEN [1982], on peut obtenir des conditions suffisantes d'ergodicité géométrique énoncées dans la Proposition 4 et le Corollaire 7.

LEMME T2 : (TWEEDIE [1983a]) Si $\{X_n\}$ est une chaîne ergodique de probabilité invariante $\pi(\cdot)$ et s'il existe un petit ensemble K et une fonction g telle que

(i) $0 < m' \leq g(x) \leq M'$, pour $x \in K$, et des constantes m' et M';

(ii) $\sup_{x \in K} \int P(x, dy) g(y) < \infty$;

(iii) $\exists r > 1$, tel que $r \int_{K^C} P(x, dy) g(y) < g(x), \quad \forall x \in K^C$,

alors $\int g(x) \pi(x) < \infty$,

$$\int \pi(x) ||P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)|| = O(\rho^n) 0 < \rho < 1,$$

où $||\nu||_g = \sup_{|h| \leq g} \int h(y) \nu(dy)$.

PROPOSITION 4 : Sous H0, s'il existe $\rho \in]0, 1[$, $s > 0$, $M > 0$, tels que

$$(11) \qquad \begin{cases} E|\phi(x) + \psi(Z_0) + \varepsilon_0|^s \leq \rho |x|^s, & \text{pour} \quad |x| > M, \text{ et} \\ \sup_{|x| \leq M} E|\phi(x) + \psi(Z_0) + \varepsilon_0|^s \leq \infty, \end{cases}$$

alors $\{X_n\}$ est géométriquement ergodique, et π admet un moment d'ordre s. De plus, $\exists \rho_1 < 1$, tel que

$$\int \pi(dx) ||P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)||_g = O(\rho_1^n),$$

où $||\nu||_g = \sup_{|h| \leq |x|^s + 1} \int h(y) \nu(dy)$.

Démonstration: Il est facile de voir que (11) entraîne la condition (10). Donc sous (11) la chaîne $\{X_n\}$ est ergodique. On choisit $r \in]1, \rho^{-1}[$, $g(x) = 1 + |x|^s$. Il est facile de vérifier que la variation totale $|| \cdot || \leq || \cdot ||_g$, puisque $g \geq 1$. Pour $|x|$ assez grand,

$$
\begin{aligned}
r \int P(x, dy) g(y) - g(x) &= rE|\phi(x) + \psi(Z_0) + \varepsilon_0|^s + r - g(x) \\
&\leq r\rho|x|^s - |x|^s - 1 + r \\
&= (r\rho - 1)|x|^s + r - 1 \\
&< 0.
\end{aligned}
$$

Et il est clair que $\sup_{|x| \leq M} \int P(x, dy) g(y) < \infty$. $\square$

COROLLAIRE 7 : Si $E|\varepsilon_n|^s < \infty$, $E|\psi(Z_n)|^s < \infty$, alors la condition (11) équivaut à: $\exists M' > 0, 0 < \rho' < 1$, tels que

$$
(12) \qquad \begin{cases} |\phi(x)| \leq \rho' |x|, & \text{pour} \quad |x| > M, \quad \text{et} \\ \sup_{|x| \leq M'} |\phi(x)| < \infty. & \end{cases}
$$

Démonstration: Pour $0 < s \leq 1$, on a par (12), pour $|x|$ assez grand,

$$
\begin{aligned}
E|\phi(x) + \psi(Z_0) + \varepsilon_0|^s &\leq |\phi(x)|^s + E|\psi(Z_0)|^s + E|\varepsilon_0|^s \\
&\leq \rho' |x| + E|\psi(Z_0)|^s + E|\varepsilon_0|^s.
\end{aligned}
$$

Donc il existe $\rho \in]\rho', 1[$, tel que

$$
E|\phi(x) + \psi(Z_0) + \varepsilon_0|^s \leq \rho |x|^s.
$$

i.e. (12) $\Longrightarrow$ (11). Et sous (11),

$$
\begin{aligned}
|\phi(x)|^s &= E|\phi(x) + \psi(Z_0) + \varepsilon_0 - \psi(Z_0) - \varepsilon_0|^s \\
&\leq E|\phi(x) + \psi(Z_0) + \varepsilon_0|^s + E|\psi(Z_0)|^s + E|\varepsilon_0|^s \\
&\leq \rho|x|^s + E|\psi(Z_0)|^s + E|\varepsilon_0|^s.
\end{aligned}
$$

On peut donc trouver $\rho' \in]\rho, 1[$, pour $|x|$ assez grand, tel que $|\phi(x)|^s \leq \rho' |x|^s$ i.e. (11) $\Longrightarrow$ (12). Pour $s > 1$, en appliquant l'inégalité de Minkowski,

$$
|\phi(x)| \leq \{E|\phi(x) + \psi(Z_0) + \varepsilon_0|^s\}^{\frac{1}{s}} + E^{\frac{1}{s}} |\psi(Z_0)|^s + E^{\frac{1}{s}} |\varepsilon_0|^s.
$$

(11) $\Longrightarrow |\phi(x)| \leq \rho^{\frac{1}{s}} |x| + E^{\frac{1}{s}} |\psi(Z_0)|^s + E^{\frac{1}{s}} |\varepsilon_0|^s$. On choisit $\rho' \in]\rho^{\frac{1}{s}}, 1[$ pour obtenir (12). Sous (12),

$$
\begin{aligned}
\{E|\phi(x) + \psi(Z_0) + \varepsilon_0|^s\}^{\frac{1}{s}} &\leq |\phi(x)| + E^{\frac{1}{s}} |\psi(Z_0)|^s + E^{\frac{1}{s}} |\varepsilon_0|^s \\
&\leq \rho' |x| + E^{\frac{1}{s}} |\psi(Z_0)|^s + E^{\frac{1}{s}} |\varepsilon_0|^s.
\end{aligned}
$$

En choisissant $\rho \in]\rho', 1[$, on a

$$
E|\phi(x) + \psi(Z_0) + \varepsilon_0|^s \leq \rho^s |x|^s. \quad \square
$$

Remarque 11 : Dans le cas d'ergodicité géométrique, on a

$$||P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)|| = M(x)\rho^n, \qquad 0 < \rho < 1$$

(voir par exemple NUMMELIN [1984]), CHAN, K.S. [1989] montre que la fonction $M(x)$ peut être représentée par $c_1 + c_2 g(x)$, où c_1 et c_2 sont des constantes, et $g(x)$ est la fonction utilisée dans le critère de TWEEDIE [1983]. Ainsi en choisissant $g(x) = 1 + |x|^s$, la Proposition 4 ci-dessus montrant que $E_\pi|X_0|^s < \infty$, on a donc

$$\alpha(n+1) \leq (c_3 + c_4 E_\pi|X_0|^s)\rho^{n-1}, \qquad \text{pour } n \geq 2,$$

où $\alpha(\cdot)$ est le coefficient de mélangeance forte.

On obtient l'ergodicité géométrique et les moments exponentiels de la loi π, avec des hypothèses supplémentaires, en appliquant le Lemme T2.

PROPOSITION 5 : Sous H0, si $C = E[\exp\{a|\psi(Z_0) + \varepsilon_0|\}] < \infty$ pour un nombre $a > 0$, et s'il existe $M > 0$, et $A > \frac{1}{a}\log C$ tels que

$$(13) \qquad \begin{cases} \phi(x) \leq |x| - A, & \text{pour } |x| > M, \\ \sup\limits_{|x|\leq M} |\phi(x)| < \infty, \end{cases}$$

alors le processus $\{X_n\}$ est géométriquement ergodique, et la transformée de Laplace de π : $\varphi(u) = \int_0^\infty e^{-ux}\pi(dx)$ est finie sur $[-a, a]$. De plus, il existe $\rho_1 < 1$ tel que $\int \pi(dx)||P^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)||_{g_1} = O(\rho_1^n)$, où $||\nu||_{g_1} = \sup_{|h|\leq e^{a|x|}} \int h(y)\nu(dy)$.

Démonstration: En appliquant le Lemme T2, on choisit $g(x) = e^{a|x|}$ et $r \in]0, C^{-1}e^{aA}[$. Alors

$$\begin{aligned} r\int P(x,dy)g(y) - g(x) &= r\int P_Z(dz)\int f(y)e^{a|y+\phi(x)+\psi(z)|}dy - e^{a|x|} \\ &\leq re^{a|\phi(x)|}E[\exp\{a|\psi(Z_0)+\varepsilon_0|\}] - e^{a|x|} \\ &\leq e^{a|x|}(re^{-aA}C - 1) < 0. \quad \square \end{aligned}$$

4 Conclusion

Les études de modèles de prévision non-linéaires représentent un grand intérêt pour l'application, en particulier dans des domaines économiques, car elles permettent un ajustement plus approprié que les linéaire. Ainsi un grand nombre de modèles autorégressifs non-linéaires ont été étudiés notamment dans un contexte markovien (voir par exemple TJØSTHEIM (1994)), mais le plus souvent sans variable exogène. Dans ce papier, nous avons obtenu dans le premier paragraghe des conditions suffisantes de propriété de Markov du processus $\{X_n\}$ défini par $X_{n+1} = \phi(X_n)+\psi(Z_n)+\varepsilon_n$, lorsque le processus $\{Z_n\}$ est à la fois markovien et strictement exogène, surtout, moyennant quelques hypothèses sur les bruits $\{\varepsilon_n\}$ et $\{\eta_n\}$, lorsque le processus $\{Z_n\}$ admet une relation autorégressive $Z_{n+1} = F(Z_n) + \eta_n$. Ensuite, dans le contexte markovien, les propriétés d'ergodicité et de mélangeance forte de $\{X_n\}$ ont été obtenues. Ces propriétés ont été fréquemment utilisées dans les recherches non-paramétriques récentes.

• Références bibliographiques

Athreya, K. B., Pantula, S. G. (1986). – "Mixing Properties of Harris Chains and Autoregressive Processes", *J. Appl. Prob.*, 23, pp. 880-892.

Auestad, B., Tjøstheim, D., (1990). – "Identification of Nonlinear Time Series: First Order Characterization and Order determination", *Biometrika*, 77, 4, pp. 669-687.

Bosq, D. (1975). – "Une définition qualitative de l'indépendance et ses applications", *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. XI, no. 3, pp. 225-252.

Bosq, D. (1993). – "Erreur quadratique asymptotique optimale pour les estimateurs à noyau de la densité et de la régression d'un processus mélangeant", *C. R. Acad. Sci.* Paris, Série I, 316, pp. 293-295.

Bouissou, M. B., Laffont, J. J., Vuong, Q. H. (1986). – "Test of Noncausality under Markov Assumption for Qualitative panel data", *Econometrica*, vol. 54, no. 2, pp. 395-414.

Bradmey, R. C. (1986). – *Basic Properties of Strong Mixing Conditions. Dependence in Probability and Statistics, A Survey of Recent Results*, Ed. E. Eberllein and M. S. Taqqu, Boston, Birkauser, pp. 165-191.

Chamberlain, G. (1982). – "The General Equivalence of Granger and Sims Causality", *Econometrica*, vol. 50, pp. 569-581.

Chan, K. S. (1989). – "A Note on the Geometric Ergodicity of a Markov Chain", *Adv. in Appl. Prob.*, 21, no. 3, pp. 702-704.

Diebolt, J., Guégan, (1990). – "Probabilistic Properties of the General Nonlinear Markovian Process of Ordre One and Application to Time Series Modelling", *Rapport Technique # 125*, L.S.T.A. Univ. Paris 6.

Doukhan, P., Ghindès, M. (1980). – "Etude du processus $X_{n+1} = f(X_n)\cdot\varepsilon_n$", *C. R. Acad. Sci.* Paris, t. 290, Série A, pp. 921-923.

Doukhan, P., Ghindès, M. (1983). – "Estimation de la transition de probabilité d'une chaîne de Markov Doëblin-récurrente. Etude du cas du processus autorégressif général d'ordre 1", *Stochastic Processes and their Applications*, 15, pp. 271-293.

Doukhan, P. (1994). – "Mixing: Properties and Examples", *Lecture Notes in Statistics*, no. 85, Springer-Verlag.

Engle, R. F., Hendry, D. F., Richard, J.-F. (1983). – "Exogeneity", *Econometrica*, vol. 51, pp. 277-304.

Engle, R. F., Hendry, D F., Richard, J.-F. (1986). – "Semiparametric Estimate of the Relation between Weather and Electricity Sales", *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 81, no. 394, pp. 310-320.

Engle, R. F. (1984). – "Wald, Likelihood Ratio, and Lagrange Multiplier Tests in Econometrics", *Handbook of Econometrics II*, pp. 775-826.

FEIGIN, P. D., TWEEDIE, R. L. (1985). – "Random Coefficient Autoregressive Processes: a Markov Chain Analysis of Stationarity and Finiteness of Moments", *J. Time Series Anal.*, 6, pp. 1-14.

FLORENS J.-P., MOUCHART M. (1982). – "A Note on Noncausality", *Econometrica*, vol. 50, no. 3, pp. 583-591.

FLORENS J.-P., MOUCHART M. (1985). – "A Linear Theory for Noncausality", *Econometrica*, vol. 53, no. 1, pp. 157-175.

FLORENS J.-P., MOUCHART M., RICHART, H.-F. (1987). – "Dynamic Error in Variables Models and Limited Information Analysis", *Annales d'Economie et de Statistique*, no. 6-7, pp. 289-310.

FOSTER, F. G. (1953). – "On the Stochastic Matrices Associated with Certain Queueing Processes", *Ann. Math. Statist.*, 24, pp. 355-360.

GEWEKE, J. (1984). – "Inference and Causality in Economic Time Series", *Handbook of Econometrics II,* pp. 1101-1144.

GOURIÉROUX, C. MONFORT, A., RENAULT, E. (1987). – "Kullback Causality Measures", *Annales d'Economie et de Statistique,* 6/7, pp. 369-410.

GOURIÉROUX, C., MONFORT A. (1989). – "*Statistique et modèles économétriques*". (2 volumes), Economica, Paris.

GOURIÉROUX, C., MONFORT A. (1990). – "Séries Temporelles et Modèles Dynamiques", Economica, Paris.

GRANGER, C. W. J. (1969). – "Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross Spectral Methods", *Econometrica,* vol. 37, pp. 424-438.

GRANGER, C. W. J. (1980). – "Testing for Causality-A personal Viewpoint", *Journal of Economic Dynamics and Control,* 2. pp. 329-352.

HANNAN, E. J., DEITLER, M. (1988). – *The Statistical Theory of Linear Systems*, Wiley.

HOSOYA, Y. (1977). – "On the Granger Condition for Non-causality", *Econometrica,* vol. 45, pp. 1735-1736.

KOOPMANS T. C., (1950). – "When is an Equation System complete for Statistical Purposes?", *Statistical Inference in Dynamic Economic Models*, ed. by T. C. Koopmans, Wiley.

MOKKADEM, A. (1987). – "Sur un modèle autorégressif non linéaire, ergodicité et ergodicité géométrique", *J. Time Series Anal.*, vol. 8, no. 2, pp. 195-204.

MOUCHART, M., ROLIN, J.-M. (1984). – "A Note on Conditional Independence with Statistical Applications", *Statistica*, 44, 4, pp. 557-584.

MOUCHART, M., ROLIN, J.-M. (1985). – "Letter to the editor", *Statistica,* 45, 3, pp. 427-430.

NORMAN, M. F. (1972). – "*Markov Processes and Learning Models*", Academic Press, New York.

NUMMELIN, E. (1984). – "*General Irreducible Markov Chains and Non-Negative Operators*", Cambridge University Press.

NUMMELIN, E., TUOMINEN, P. (1982). – "Geometric Ergodicity of Recurrent Markov Chain with Applications to Renewal Theory", *Stochastic Processes and their Applications,* 12, pp. 187-202.

OREY, S (1971). – "*Lecture Notes on Limit Theorems for Markov Chain Transition Probabilities*", London, Van Nostrand.

PIERCE, D. A., HAUCH L. D. (1977). – "Causality in Temporel Systems: Characterization and a Survey", *Journal of Econometrics,* 5, pp. 265-293.

ROBINSON, P. M. (1983). – "Nonparametric Estimators for Time Series", *J. time series anal.,* vol. 4, no. 3.

ROSENBLATT, M. (1956). – "A Central Limit Theorem of a Strong Mixing Condition", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 42, pp. 43-47.

ROSENBLATT, M. (1971). – "*Markov Processes. Structure and Asymptotic Behaviour*", Berlin, Springer.

ROUSSAS, G. G. (1988). – "Nonparametric Estimation in Mixing Sequences of Random Variable", *Journal of Statistical Planning and Inference*, 18, pp. 135-149.

ROUSSAS, G. G., TRAN, L. T. (1992). – "Asymptotic Normality of the Recursive Kernel Regression Estimate under Dependence Condition", *The Annals of Statistics*, vol. 20, no. 1, pp. 98-120.

SAVAGE, L. J. (1972). – " *The fondations of statistics*", Dover, 2^e édition.

SHEN, J. (1995). – "*Étude probabiliste et statistique de modèles non-linéaires avec variables exogènes*", Thèse de doctorat, Université Paris 6.

SIMS, C. A. (1972). – "Money, Income and Causality", *American Economic Review*, 62, pp. 540-552.

TJØSTHEIM, D. (1990). – "Non-linear Time Series and Markov chains", *Adv. Appl. Probab.*, 22, pp. 587-611.

TJØSTHEIM, D. (1994). – "Non-linear Times Series: A Selective Review", *Scandinavian Journal of Statistics*, vol. 21, no. 2, pp. 97-130.

TWEEDIE, R. L. (1974a). – "R-Theory for Markov Chains on a General State Space I: Solidarity Properties and R-Recurrent Chains", *Ann. Prob.*, 2, pp. 840-864.

TWEEDIE, R. L. (1974b). – "R-Theory for Markov Chains on a General State Space II: r-Subinvariant Measures for r-Transient Chains", *Ann. Prob.*, 2, pp. 865-878.

TWEEDIE, R. L. (1975). – "Sufficient Conditions for Ergodicity and Recurrence of Markov Chains on a General State-Space", *Stoch. Proc. Appl.*, 3, pp. 385-403.

TWEEDIE, R. L. (1976). – "Criteria for Classifying General Markov Chains", *Adv. Appl. Prob.*, 8, pp. 737-771.

TWEEDIE, R. L. (1983a). – "The Existence of Moments for Stationary Markov Chains", *J. Appl. Prob.*, 20, pp. 191-196.

TWEEDIE, R. L. (1983b). – "Criteria for Rates of Convergence of Markov Chains with Application to Queueing and Storage Theory", Dans *Papers in Probability, Statistics and Analysis*, Ed. J. F. C. Kingman and G. E. H. Reuter, pp. 260-276, Cambridge University Press.

TWEEDIE, R. L. (1988). – "Invariant Measures for Markov Chains with no Irreducibility Assumptions", *J. Appl. Prob., 25A*, (A celebration of Applied Probability) pp. 275-285.

Van PUTTEN, G., Van SCHUPPEN, J. H. (1985). – " Invariance Properties of the Conditional Independence Relation", *The Annals of Probability*, vol. 13, no. 3, pp. 934-945.