

Croissance et endettement dans un modèle à deux pays

Delphine BÉRAUD*

RÉSUMÉ. – L'interdépendance des économies est étudiée dans un modèle de croissance à deux pays avec horizon infini. Les échanges intertemporels entre les pays sont mis en évidence par l'étude des dynamiques des soldes de la balance des paiements et de la dette extérieure. On montre qu'il y a hystérésis dans le modèle: une remise de dette ponctuelle a des effets à long terme sur la répartition de la consommation et sur l'endettement des pays.

Growth and Debt in a Two-Country Model

ABSTRACT.– The interdependence of the world economy is studied in a two-country infinite horizon representative agent framework with integrated capital market. The dynamic adjustment, the distribution of world wealth (or consumption) across countries and the accumulation of debt overtime are analyzed. The model admits a zero eigenvalue: a temporarily remission on a debt has permanent effects on the international distribution of consumption and on debt.

* D. BERAUD : MAD, Université Paris I. Je remercie A. d'AUTUME pour ses suggestions et pour l'intérêt qu'il porte à ce travail ainsi que les participants du séminaire interne du MAD. J'ai également bénéficié des conseils avisés de J.P. LAFFARGUE et des remarques pertinentes de deux rapporteurs. Je suis seule responsable des erreurs subsistantes.

1 Introduction

L'objet de cet article est d'étudier, dans un cadre intertemporel, la dynamique économique de deux pays dans une situation de parfaite mobilité du capital physique et financier. On s'attache, en particulier, à décrire l'évolution du solde de la balance courante. Les références bibliographiques concernant ce sujet sont assez peu nombreuses. BARRO et SALA-I-MARTIN [1995], KARAYALCIN [1994] et SEN [1994] étudient, dans le cadre d'une petite économie ouverte qui ne prend pas en compte l'interdépendance des économies, la dynamique du pays et de sa balance des opérations courantes. Seul, un modèle à deux pays est adéquat pour analyser les dynamiques jointes des pays. Des articles fondateurs du courant des cycles réels, comme par exemple celui de Backus, Kehoe et KYDLAND [1992], utilisent une structure de modèle à deux pays dans laquelle ils étudient l'évolution des soldes de la balance des paiements face à des chocs stochastiques. Cependant, la répartition de la consommation, faite de façon égalitaire entre les deux pays par un planificateur central, ne dépend pas de la richesse relative de chaque pays. Par ailleurs, DEVEREUX et SHI [1991] développent un modèle déterministe dans lequel le taux de préférence pour le présent est endogène, hypothèse critiquée par BARRO et SALA-I-MARTIN [1995, p. 109] et par BLANCHARD et FISCHER [1989, p. 75].

Notre étude s'appuie sur un modèle à deux pays dans lequel l'horizon des agents est infini et la mobilité du capital parfaite. Une propriété capitale du modèle est la présence d'une hystérésis : certaines variables dépendent à l'état stationnaire des conditions initiales. Si un choc transitoire a lieu une fois l'état stationnaire atteint, ces variables convergent vers un nouvel état stationnaire : ce choc a un effet permanent¹. GIAVAZZI et WYPLOSZ [1984, 1985] montrent que l'hystérèse, qui caractérise de nombreuses séries économiques, peut apparaître dans certains modèles. Leur approche mathématique s'appuie sur l'écriture de la dynamique du modèle et de la matrice jacobienne qui lui est associée. Cette dernière est caractérisée par une valeur propre nulle parce que les équations dynamiques ne sont pas linéairement indépendantes. La détermination d'un vecteur unique de variables caractérisant l'état stationnaire est impossible parce qu'il y a n inconnues pour $n - 1$ équations indépendantes : il existe une infinité de solutions. Il est alors nécessaire d'intégrer les équations dynamiques en fixant *a priori* les valeurs initiales des variables prédéterminées. Ces conditions initiales permettent de définir une dynamique unique qui conduit à un état stationnaire unique. Ainsi, à chaque vecteur de conditions initiales correspond un vecteur unique caractérisant l'état stationnaire : l'économie a une propriété d'hystérèse.

Cependant, les deux articles de Giavazzi et Wyplosz ont soulevé des controverses concernant la notion d'hystérésis. En effet, selon AMABLE

1. Cette définition de l'hystérésis est utilisée, entre autres, par GIAVAZZI et WYPLOSZ [1984, 1985].

et al. [1992], « il n'est pas correct d'assimiler les propriétés des systèmes à valeur propre nulle (ou unitaire) à de l'hystérésis ». Ces auteurs qualifient l'existence d'une racine nulle dans la matrice jacobienne du système, de forme faible d'hystérésis. Ils l'opposent à une forme forte d'hystérésis caractérisée par le fait que deux chocs successifs transitoires de même ampleur mais opposés ne ramèneront pas le système à sa position initiale.

Notre contribution est de montrer que notre modèle a la propriété d'hystérésis définie par GIAVAZZI et WYPLOSZ [1984]. Certes, des modèles à deux pays où apparaît cette propriété existent. Par exemple, LIPTON et SACHS [1983] simulent un modèle à deux pays affecté par un choc technologique permanent tandis que TURNOVSKY et BIANCONI [1992] étudient l'interdépendance des politiques fiscales dans un modèle proche du nôtre. Ils soulignent l'existence d'une hystérésis et ses conséquences sur les effets des politiques. Cependant, ils ne mettent pas en avant les hypothèses nécessaires pour qu'une hystérésis existe et ne montrent pas comment elle affecte les deux économies.

Après avoir expliqué pourquoi une telle propriété apparaît, nous résolvons complètement le modèle pour déterminer l'influence exacte des dotations initiales sur la dynamique de chaque variable. Sous l'hypothèse de parfaite mobilité du capital physique et financier, les grandeurs caractérisant, à l'état stationnaire, l'économie mondiale, somme des deux économies, sont indépendantes du partage des créances entre les pays. En supposant, en outre, que les agents ont la même fonction d'utilité, la dynamique de l'économie mondiale est également indépendante de celle de chaque pays. Le fonctionnement de l'économie mondiale est identique à celui d'une économie fermée de Solow où l'épargne est endogène, et l'hystérésis ne l'affecte pas.

On s'attache ensuite à déterminer la dynamique des soldes de la balance des paiements de chaque pays et à montrer que le partage des actifs et de la consommation dépend des dotations initiales de chaque pays. Lorsque le taux de croissance de la consommation est le même dans les deux pays, le solde de la balance commerciale et la créance nette de chaque pays ne changent pas de signe. En outre, le solde de la balance commerciale du pays créancier (resp. endetté) se détériore (resp. s'améliore) tandis que la créance progresse (resp. la dette s'aggrave). Enfin, si une remise de dette est décidée par les deux gouvernements, elle n'affecte pas l'économie mondiale mais les créances nettes de chaque pays et les soldes de la balance des paiements des pays sont modifiés de façon permanente.

2 Les hypothèses du modèle

Le monde est composé de deux pays qui produisent un bien unique, à la fois bien d'investissement et de consommation. Il n'y a aucune entrave au commerce international qui permet d'échanger le bien ; le capital physique peut circuler sans coûts entre les deux pays tandis que le travail est immobile.

Le marché financier est parfait : la détention d'actifs nationaux ou étrangers rapporte, à l'instant t , le même taux d'intérêt r_t . On note ² b_{it} la somme du capital k_{it} et des créances nettes a_{it} détenus par les agents du pays i :

$$(1) \quad b_{it} = k_{it} + a_{it}$$

a_{it} est la valeur de la position créditrice nette vis-à-vis de l'étranger. Si $a_{it} > 0$ (resp. $a_{it} < 0$), le pays i détient une créance nette (resp. une dette) sur l'autre pays.

On suppose que les économies des deux pays sont décentralisées et que chacune est composée d'un ménage et d'une entreprise représentatifs. La population N est la même dans les deux pays et, sans perte de généralité, on norme N à l'unité.

En outre, on suppose que le capital croît dans les deux pays et que le pays 1 est initialement créancier.

De plus, les dotations initiales données *a priori* sont le capital mondial k_0 et la créance nette du pays 1, a_{10} . La répartition du capital physique entre les deux pays (k_{10} et k_{20}) est endogène et se fait de telle sorte que la productivité marginale du capital soit la même dans les deux pays. Ainsi, chaque pays a des dotations initiales différentes : à la date 0, le niveau d'accumulation n'est pas nécessairement le même et le pays 1 est créancier tandis que le pays 2 est endetté.

Dans le pays 1, le solde de la balance commerciale t_{1t} et les revenus des créances nettes déterminent le solde de la balance des transactions courantes ³. Ce dernier est égal à l'accroissement des créances détenues sur l'étranger et noté \dot{a}_{1t} :

$$(2) \quad t_{1t} + r_t a_{1t} = \dot{a}_{1t}$$

Le solde de la balance des transactions courantes est égal à l'excédent de l'épargne nationale ⁴, somme de l'épargne domestique et des intérêts des créances, sur l'investissement. Cela signifie que l'épargne non investie dans la nation est placée à l'étranger.

L'équilibre sur le marché du bien à chaque période est le suivant :

$$(3) \quad \dot{k}_{1t} + \dot{k}_{2t} = f_1(k_{1t}) + f_2(k_{2t}) - c_{1t} - c_{2t}$$

2. x_i désigne une variable x concernant le pays i : i peut prendre la valeur 1 ou 2 pour désigner respectivement le pays 1 ou 2.

3. Lorsque les créances augmentent, le solde de la balance des opérations (ou transactions) courantes est positif tandis que la balance des capitaux, qui est son opposé, est déficitaire.

4. La production nationale est la somme de la production domestique et des intérêts des créances sur l'étranger. L'épargne nationale (resp. domestique) est la production nationale (resp. domestique) moins la consommation.

où pour $i \in [1, 2]$, $f_i(k_{it})$ et c_{it} sont respectivement la production par tête qui est fonction du capital par tête ⁵ k_{it} et la consommation du pays i . $f'_i(k_{it})$ est continue, positive et strictement décroissante. De plus, $\lim_{k_{it} \rightarrow 0} [f'_i(k_{it})] = +\infty$ et $\lim_{k_{it} \rightarrow 0} [f_i(k_{it})] = 0$.

Le ménage représentatif du pays i ($i = 1$ ou 2) maximise son utilité $u_i(c_{it})$: il consomme le bien unique et travaille toujours pendant la même durée quel que soit son salaire w_{it} parce qu'il n'a pas le choix de la durée de travail. ρ est le taux de préférence pour le présent commun ⁶ aux deux pays. La dotation initiale $b_i(0)$ est supposée être positive et une condition de transversalité sur la richesse finale est imposée pour éviter que l'agent s'endette jusqu'à la faillite pour consommer davantage. Dans le pays 1 qui est supposé être créancier, la richesse b_{10} , somme de la créance et du capital investi, est nécessairement positive. Dans le pays 2, il faut que le stock de capital à la date 0 soit supérieur à la dette du pays ⁷.

Le programme du ménage du pays i ($i = 1$ ou 2) est le suivant :

$$(4) \quad \max \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u_i(c_{it}) dt$$

$$(5) \quad \dot{b}_{it} = r_t b_{it} + w_{it} - c_{it}$$

$$(6) \quad b_i(0) = b_{i0} > 0 \quad \text{ct} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^t r_s ds} b_i(t) = 0$$

La solution de ce programme est l'équation de Ramsey qui indique le taux de croissance de la consommation :

$$(7) \quad \dot{c}_{it} = (\rho - r_t) \frac{u'_i(c_{it})}{u''_i(c_{it})}$$

L'entreprise représentative de chaque pays i ($i = 1$ ou 2) maximise son profit. Les rémunérations des facteurs sont les suivantes :

$$(8) \quad r_t = f'_i(k_{it})$$

$$(9) \quad w_{it} = f_i(k_{it}) - k_{it} f'_i(k_{it})$$

Le salaire est différent dans les deux pays parce que la mobilité du travail est nulle.

5. Comme la population est normée à l'unité, les variables par tête sont égales aux variables par pays.

6. Si $\rho_1 > \rho_2$, le pays 1 est plus impatient que l'autre, il consomme toute sa richesse puis disparaît tandis que l'autre pays devient l'économie mondiale.

7. Il est nécessaire d'étudier la répartition du capital avant de pouvoir poser une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres qui assure que la richesse du pays 2 est initialement positive. Ceci est fait au paragraphe 3.1.

3 La dynamique du modèle

3.1. La propriété d'hystérésis

Si la mobilité des capitaux physiques et financiers est parfaite, il est possible de construire une fonction de production agrégée $G(k)$ telle que $y_t = G(k_t)$ où y_t et k_t sont respectivement la production agrégée des deux pays et le capital mondial⁸. $G'(k_t)$ est continue, positive et strictement décroissante. De plus, $\lim_{k_{it} \rightarrow 0} [G'(k_t)] = +\infty$ et $\lim_{k_{it} \rightarrow \infty} [G'(k_t)] = 0$.

L'égalisation des taux de rendement due à la parfaite mobilité des capitaux détermine le partage du capital entre les pays :

$$(10) \quad f'_1(k_{1t}) = f'_2(k_{2t}) = G'(k_t) = r_t$$

Cette équation permet de déterminer une répartition unique du capital entre les pays. La condition pour que la richesse du pays 2 soit initialement positive peut s'écrire :

$$(C1) \quad a_{10} < f_2'^{-1}[G'(k_0)]$$

La dynamique du modèle, composée de quatre équations dynamiques, l'équilibre sur le marché des biens, la contrainte budgétaire du pays 1 et le taux de croissance de la consommation de chaque pays, peut se réécrire en utilisant les équations (5), (7), (9) et (10) :

$$(11) \quad \dot{k} = G(k_t) - c_{1t} - c_{2t}$$

$$(12) \quad \dot{b}_{1t} = G'(k_t) b_{1t} + f_1 \{ f_1'^{-1}[G'(k_t)] \} - G'(k_t) f_1'^{-1}[G'(k_t)] - c_{1t}$$

$$(13) \quad \dot{c}_{1t} = [\rho - G'(k_t)] \frac{u'_1(c_{1t})}{u''_1(c_{1t})}$$

$$(14) \quad \dot{c}_{2t} = [\rho - G'(k_t)] \frac{u'_2(c_{2t})}{u''_2(c_{2t})}$$

Les niveaux des 4 variables à l'état stationnaire $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{k}, \tilde{b}_1$ semblent pouvoir être obtenus en résolvant les quatre équations⁹. Cependant, les équations (13) et (14) ne déterminent, à l'état stationnaire, qu'une seule

8. Cf. démonstration dans l'Annexe 1.

9. La loi de Walras permet de ne pas étudier la contrainte budgétaire du second pays.

inconnue, \tilde{k} . L'équilibre du marché du bien, à l'état stationnaire, donne alors le niveau de la consommation mondiale \tilde{c} ($\tilde{c} = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2$). Par contre, la consommation et la quantité d'actifs de chaque pays ne peuvent pas être déterminées. A l'état stationnaire, l'équation (12) ne donne qu'une relation entre la consommation du pays 1, \tilde{c}_1 , et la quantité d'actifs, \tilde{b}_1 , détenus par le pays 1. Il y a donc une infinité de vecteurs $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{k}, \tilde{b}_1)$ compatibles avec la propriété d'état stationnaire où seule la valeur de k est unique.

Cependant, cette indétermination ne pose pas de problèmes majeurs parce qu'il suffit d'intégrer la contrainte budgétaire intertemporelle du pays 1 (i.e. résoudre l'équation (12)) pour obtenir une relation entre la répartition de la consommation à l'état stationnaire et les conditions initiales. Ainsi, dans chaque pays, le niveau, à l'état stationnaire, de la consommation et des créances sur l'étranger est déterminé par la résolution complète du modèle dynamique. Pour ces variables, on obtient une seule dynamique et un seul état stationnaire par dotation initiale.

Cette propriété est appelée hystérèse : l'état permanent d'une variable qui obéit à ce phénomène dépend des valeurs initiales prises par l'économie. Les chocs transitoires, dus à la politique économique ou à des causes extérieures, qui affectent un pays, conduisent à une modification permanente des niveaux des variables caractérisant l'économie de ce pays¹⁰. Cette propriété qui caractérise de nombreuses séries économiques et qui est présente dans ce modèle préjuge favorablement de sa capacité à reproduire les faits stylisés.

Cette hystérèse est liée à l'égalisation, à l'état permanent, du taux d'intérêt au taux de préférence pour le présent qui est constant et identique dans les deux pays : les équations (13) et (14) ne sont pas indépendantes. Deux conditions doivent être remplies pour que cette propriété apparaisse : la mobilité du capital financier doit être parfaite et le taux de préférence pour le présent doit être constant et identique pour tous les agents.

Comme on l'a déjà indiqué précédemment, les niveaux d'équilibre du capital mondial et de la consommation mondiale sont parfaitement déterminés et ne dépendent que des paramètres du modèle ; ils sont indépendants des conditions initiales et ne sont donc pas affectés par des chocs transitoires. Seul le partage des actifs et de la consommation entre les pays est fonction des conditions initiales : l'hystérésis ne concerne qu'une partie du modèle. La dynamique de ce dernier peut donc se résoudre en deux étapes : en premier lieu, il est possible d'étudier l'évolution de l'économie mondiale et en second lieu, d'analyser le partage des actifs entre les pays.

10. La linéarisation des équations du modèle ferait apparaître une valeur propre nulle dans la matrice jacobienne. Cette valeur propre nulle révèle l'hystérésis. Cf. GIAVAZZI et WYPLOSZ [1984, 1985].

Pour résoudre analytiquement le problème, on suppose que les agents ont tous la même fonction d'utilité et que l'élasticité de substitution intertemporelle σ est constante et identique dans les deux pays ¹¹ :

$$(15) \quad u(c_{it}) = \frac{c_{it}^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} \quad \text{avec } \sigma > 0$$

Le taux de croissance de la consommation commun aux deux pays est alors :

$$(16) \quad \frac{\dot{c}_{it}}{c_{it}} = \sigma (r_t - \rho)$$

La fonction de production est une fonction Cobb-Douglas ¹² :

$$(17) \quad y_{it} = \theta_i k_{it}^\alpha \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1$$

α est l'élasticité du produit par rapport au capital ; elle est la même dans les deux pays tandis que θ_i , la productivité globale des facteurs, est spécifique à chaque pays.

Les rémunérations des facteurs s'écrivent :

$$(18) \quad r_t = \alpha \theta_i k_{it}^{\alpha-1}$$

$$(19) \quad w_{it} = \theta_i (1 - \alpha) k_{it}^\alpha$$

3.2. La dynamique de l'économie mondiale ¹³

On a montré précédemment que, sous l'hypothèse de parfaite mobilité des capitaux physiques et financiers, la construction d'une fonction de production agrégée $G(k)$ telle que $y_t = G(k_t)$ est possible. Dans le cas où la fonction de production de chaque pays est une Cobb-Douglas donnée par l'équation (17), on obtient :

$$(20) \quad y_t = \theta k_t^\alpha \quad \text{où } \theta = \left(\theta_1^{\frac{1}{1-\alpha}} + \theta_2^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{1-\alpha}$$

11. Si l'élasticité de substitution intertemporelle n'était pas la même dans les deux pays, les taux de croissance de la consommation ne seraient pas identiques dans les deux pays et les résultats qui suivent seraient modifiés.

12. Choisir une fonction Cobb-Douglas et un α identique rend les calculs commodes. Tous les résultats suivants seraient obtenus sans cette spécification.

13. Les valeurs d'état stationnaire figurent en annexe 2, la vitesse d'ajustement et la dynamique complète sont en annexe 3.

Le taux d'intérêt est alors :

$$(21) \quad r_t = \alpha \theta k_t^{\alpha-1}$$

Si on considère l'économie mondiale, le taux de croissance de la consommation et l'équilibre sur le marché du bien décrivent la dynamique conjointe du capital et de la consommation (notée c_t):

$$(22) \quad \dot{c}_t = \sigma (r_t - \rho) c_t$$

$$(23) \quad \dot{k}_t = \theta k_t^\alpha - c_t$$

On reconnaît les équations qui caractérisent le fonctionnement d'une économie fermée dans le modèle de Solow quand le taux d'épargne est endogène (cf. Annexe 3).

Comme on l'a déjà indiqué, l'état stationnaire (\tilde{c}, \tilde{k}) est unique. Il ne dépend que de trois facteurs : le taux de préférence pour le présent, l'élasticité du produit par rapport au capital et la valeur de la productivité globale des facteurs dans chaque pays. Cet état stationnaire unique vers lequel l'économie converge est indépendant des conditions initiales : l'hystérésis mise en évidence précédemment n'affecte pas l'économie mondiale.

La vitesse d'ajustement de la consommation et du capital vers l'état stationnaire est fonction des paramètres du modèle à l'exception de la productivité. Elle est indépendante de la répartition des actifs entre les pays. Ce résultat découle de l'hypothèse selon laquelle l'élasticité de substitution intertemporelle est la même dans les deux pays.

3.3. Dynamique de chaque pays ¹⁴

Comme le capital physique est parfaitement mobile, l'égalisation des productivités marginales du capital de chaque pays détermine la répartition du capital entre les pays. Cette dernière ne dépend donc que des paramètres du modèle :

$$(24) \quad \forall i \in [1, 2], i \neq j, \text{ on a } \frac{k_{i0}}{k_0} = \frac{\theta_i^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\theta_i^{\frac{1}{1-\alpha}} + \theta_j^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

Comme la répartition du capital est constante, l'écart entre les niveaux du capital investi dans chaque pays ne peut ni être comblé ni être inversé. Le pays le plus pauvre en capital le restera à moins qu'un choc de productivité n'y rende le processus de production plus efficace.

14. Nous supposons désormais que l'économie mondiale est en phase de croissance et que le pays 1 est initialement créditeur.

Le taux de croissance de la consommation est le même dans les deux pays parce que les agents ont une fonction d'utilité identique. La répartition de la consommation est donc constante :

$$(25) \quad \forall t, h \in [0, 1], c_{1t} = hc_t \quad \text{et} \quad c_{2t} = (1-h)c_t$$

Le pays 1 consomme une part constante h de la consommation totale tandis que le pays 2 en consomme une part $(1-h)$. Le pays qui a la part la plus faible consommera toujours moins que l'autre pays : il ne peut y avoir de processus de rattrapage. Le partage de la consommation n'est pas posé *a priori* mais dépend des paramètres du modèle et de la dotation initiale de chaque pays. Pour calculer sa valeur, il convient d'étudier l'évolution du solde de la balance courante du pays 1 :

$$(26) \quad \dot{a}_{1t} = r_t a_{1t} + \theta_1 k_{1t}^\alpha - c_{1t} - \dot{k}_{1t}$$

D'une part, à l'état stationnaire, cette équation détermine une relation entre la consommation et la créance nette du pays 1 :

$$(27) \quad \tilde{c}_1 = \rho \left(\tilde{a}_1 + \frac{\tilde{k}_1}{\alpha} \right)$$

D'autre part, sa linéarisation et la résolution de l'équation linéarisée donnent la dynamique de la créance nette (cf. annexe 3) :

$$(28) \quad a_{1t} - \tilde{a}_1 = \left[\frac{\alpha(\sigma\rho - \lambda)\tilde{a}_1}{\sigma\rho} \right] \left[\frac{k_0 - \tilde{k}}{\tilde{k}} \right] e^{\lambda t}$$

L'écriture de cette équation à la date 0 et l'équation (27) permettent de déterminer la répartition de la consommation et la créance détenue par le pays 1 à l'état stationnaire.

Le pays 1 consomme la part h de la consommation totale telle que :

$$(29) \quad h = \frac{\theta_1^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\theta_1^{\frac{1}{1-\alpha}} + \theta_2^{\frac{1}{1-\alpha}}} + \frac{\alpha\sigma\rho a_{10}}{\rho\sigma\tilde{k} + \alpha(\sigma\rho - \lambda)(k_0 - \tilde{k})}$$

$$\text{Où } \tilde{k} = \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\theta_1^{\frac{1}{1-\alpha}} + \theta_2^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) \text{ et } \lambda = \frac{\rho - \rho \sqrt{1 + \frac{4\sigma(1-\alpha)}{\alpha}}}{2}$$

On montre, dans l'annexe 4, que le signe du dénominateur de la seconde fraction de l'expression (29) est positif. Comme tous les autres paramètres sont positifs, la part de la consommation du pays 1 est nécessairement positive. En outre, on vérifie facilement qu'une condition suffisante pour qu'elle soit inférieure à l'unité est que la richesse initiale du pays 2, b_{10} , soit positive.

La part de la consommation du pays 1 dans la consommation mondiale ne se modifie pas au cours du temps et dépend, entre autres, des productivités globales des facteurs et de la situation financière du pays vis-à-vis de l'autre pays. Plus la productivité globale des facteurs est importante dans le pays 1,

plus ce dernier détient de capital comparativement à l'autre pays et plus sa part de la consommation totale est importante. En outre, la part de la consommation du pays 1 est d'autant plus grande que la créance initiale du pays 1 est importante.

Ainsi, plus le pays 1 détient initialement de capital et de créances sur le pays 2, plus sa part de consommation est forte.

La consommation de chaque pays qui dépend du partage de la consommation totale, subit à l'état stationnaire l'influence des conditions initiales. Les politiques économiques, par exemple les remises de dette, qui modifient cette répartition, ont un impact permanent sur la consommation individuelle.

La position nette extérieure du pays 1, créancier à la date 0, est égale à :

$$(30) \quad \tilde{a}_1 = -\tilde{a}_2 = \frac{\rho\sigma\tilde{k}a_{10}}{\rho\sigma\tilde{k} + \alpha(\rho\sigma - \lambda)(k_0 - \tilde{k})}$$

$$\text{avec } \tilde{k} = \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\theta_1^{\frac{1}{1-\alpha}} + \theta_2^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) \text{ et } \lambda = \frac{\rho-\rho\sqrt{1+\frac{4\sigma(1-\alpha)}{\alpha}}}{2}$$

Elle dépend à l'état stationnaire de son niveau à la date 0 et du capital mondial initial. Comme dans l'équation (29), le signe du dénominateur est positif. Plus la créance initiale est grande, plus son niveau à l'état stationnaire est important. En outre, dans une économie en croissance, la créance du pays 1 est supérieure, à l'état stationnaire, à son niveau initial¹⁵ : le pays 1 qui était initialement créancier l'est également à l'état stationnaire.

La caractéristique essentielle de ce modèle apparaît dans les deux relations précédentes : il y a un phénomène d'hystérésis. La dynamique du modèle et les niveaux des variables à l'état permanent ne sont pas uniques. Il est nécessaire de se donner les dotations initiales des deux pays pour déterminer la trajectoire et l'état stationnaire vers lequel les économies convergent. Cela a deux conséquences fondamentales sur le modèle. D'une part, un choc ponctuel qui modifie la créance (ou la dette) ou la productivité globale d'un pays affecte, de façon permanente, la consommation, l'endettement et la richesse de chaque pays. D'autre part, les valeurs à long terme de ces variables dépendent des dotations initiales de chaque pays : un pays, qui a une productivité des facteurs faible ou qui est initialement débiteur, ne peut jamais rattraper le niveau de la consommation de son voisin mieux doté.

Les dynamiques de la balance commerciale et de la balance des opérations courantes sont sensibles à l'évolution comparée de la production et de la consommation et permettent d'étudier l'endettement des pays. Sous les hypothèses de parfaite mobilité des capitaux physiques et d'identité des préférences des agents du pays 1 et du pays 2, le taux de croissance de la consommation du pays 1 est, à la fois, égal à celui de la consommation dans le pays 2 et à celui de la production dans les deux pays.

Deux résultats peuvent être démontrés : dans un monde où le capital croît, le solde de la balance commerciale de chaque pays ne peut pas changer de

15. Nous reviendrons sur l'évolution de la créance (ou de la dette) de chaque pays ultérieurement.

signe; il s'améliore dans le pays 2 qui est initialement endetté tandis qu'il se détériore dans le pays 1.

Le pays 1 est initialement créancier et l'expression (30) indique qu'il l'est aussi à l'état stationnaire. A l'état stationnaire, la balance commerciale du pays 1 est déficitaire parce qu'elle est égale à l'opposé des intérêts de la créance détenue par le pays 1 sur le pays 2 : la consommation excède le produit. Durant la dynamique qui conduit à l'état stationnaire, la consommation du pays 1 augmente tandis que l'investissement diminue. Ainsi, l'évolution de l'absorption du pays 1, définie comme la somme de la consommation et de l'investissement, dépend du poids de chacune de ses deux composantes. Il est cependant possible de montrer que l'absorption augmente. De plus, dans le pays 1, l'absorption croît plus vite que la production ¹⁶: la balance commerciale du pays 1 se détériore.

En outre, l'évolution du solde commercial du pays 1 est donnée par l'équation suivante :

$$(31) \quad t_{1t} = \frac{c_t}{\tilde{c}} \tilde{t}_1$$

Cette relation indique que le signe du solde commercial ne change pas. Comme celui-ci est négatif à l'état stationnaire, cela signifie que le solde commercial est toujours déficitaire.

Ainsi, dans le pays 1, le solde commercial est toujours déficitaire. Ce déficit commercial s'aggrave parce que l'absorption croît plus vite que la production. Par symétrie, le pays 2 connaît une situation d'excédent commercial. De plus, cet excédent s'améliore.

Concernant l'endettement, on peut montrer que le pays 1 est toujours créancier et que sa créance augmente tandis que le pays 2 est de plus en plus endetté. Rappelons que le pays 1 est créancier à la date 0 et que l'expression (30) indique qu'il l'est aussi à l'état stationnaire. Dans ce cas, nous venons de montrer que sa balance commerciale est toujours déficitaire. Il est utile de faire un raisonnement par l'absurde. Supposons que le pays 1 soit endetté à la date précédant l'état stationnaire et montrons que ceci est impossible. Le solde de la balance des opérations courantes, somme des intérêts de la dette et du déficit commercial, serait nécessairement négatif. Cela implique que la dette augmenterait. Or, ce n'est pas possible parce que le pays 1 est créancier à l'état stationnaire : le pays 1 est donc créancier à la date précédant l'état stationnaire. Ce raisonnement fait de proche en proche impose que le pays 1 soit toujours créancier.

De plus, les créances de ce pays augmentent : c'est ce qu'indique l'équation (30). En effet, à l'état stationnaire, les intérêts des créances, notés $r_t a_{1t}$, sont égaux à l'opposé du déficit commercial. Si durant le processus d'ajustement, l'économie mondiale est en croissance, le taux d'intérêt diminue. Deux cas sont possibles : les intérêts des créances peuvent augmenter ou diminuer. S'ils diminuent, leur valeur à la date

16. Les démonstrations de l'évolution de l'absorption et de la balance commerciale sont disponibles sur demande à l'auteur.

t est plus importante qu'à l'état stationnaire tandis que le déficit de la balance commerciale est plus faible à la date t qu'à l'état stationnaire. Donc, à toutes les dates, les intérêts de la créance sont plus importants que le déficit commercial: le solde de la balance courante est toujours positif et la créance progresse. Si les intérêts de la créance augmentent, cela est nécessairement dû à une augmentation de la créance plus forte que la baisse du taux d'intérêt. Donc, dans les deux cas, les créances du pays 1 augmentent. Par symétrie, les dettes du pays 2 s'accroissent.

Ainsi, le pays 1 est toujours créancier et sa créance progresse tandis que le pays 2 est de plus en plus endetté. Si l'économie ne subit pas de chocs, un pays ne peut pas devenir créateur s'il est débiteur et inversement. C'est un résultat qui contredit l'analyse des étapes de la balance des paiements.

4 La dynamique du modèle face à une remise de dette du pays 2 par le pays 1 ¹⁷

On suppose que les deux pays s'accordent pour que le pays débiteur bénéficie de l'annulation d'une partie de la dette. C'est une politique qui a été appliquée à certains pays en voie de développement à la fin des années 1980. Conformément aux résultats précédents, on montre que cette politique n'affecte durablement qu'une partie du système économique, la dynamique de la consommation et de la créance nette de chaque pays. Les soldes de la balance des paiements des deux pays sont alors modifiés.

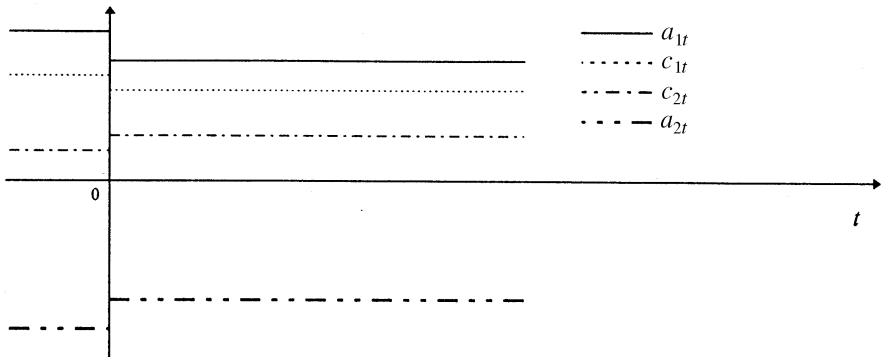
Les niveaux du taux d'intérêt, du capital et de la consommation mondiaux sont déterminés uniquement par l'élasticité du produit par rapport au capital, par le taux de préférence pour le présent et par la productivité globale des facteurs de chaque pays. Ils ne dépendent pas de la répartition des richesses et de la consommation entre les pays. Ainsi, la remise de dette n'affecte pas l'économie mondiale: le taux d'intérêt, le capital mondial et la consommation totale restent à leur niveau de long terme. De plus, le partage du capital entre pays, uniquement déterminé par la productivité relative des pays, ne change pas.

Par contre, la remise de dette modifie la répartition de la consommation et des actifs entre les pays. Le niveau de la créance du pays 1 diminue lors de la remise de dette. Aux dates suivantes, la créance est constante parce que le capital total est à son niveau d'état stationnaire. La valeur des actifs détenus par le pays 1 est à son nouveau niveau d'état stationnaire qui est plus faible qu'avant la remise de dette. L'évolution de la dette du

17. On suppose que la remise de dette a lieu lorsque l'état stationnaire est atteint.

pays 2 est identique à celle de la créance du pays 1 : la dette diminue et se fixe définitivement à un niveau plus faible qu'avant la remise de dette. La répartition de la consommation totale qui dépend de la richesse relative des pays est modifiée : la part de la consommation du pays 1 diminue parce que sa créance diminue tandis que celle du pays 2 augmente parce que ce pays est moins endetté. L'écart entre les niveaux de consommation des pays diminue sans pour autant s'inverser (à moins que le pays 1 n'accepte de devenir débiteur). Comme la baisse du niveau des créances détenues par le pays 1 n'influe pas sur le niveau de la consommation totale, l'augmentation de la part de la consommation du pays 2 se traduit effectivement par une hausse de la consommation de ce pays tandis que la consommation du pays 1 diminue. La répartition de la consommation se modifie une fois pour toutes et se fixe définitivement à un niveau plus favorable pour le pays 2 que celui précédant le choc et la consommation de chaque pays est modifiée de façon permanente.

La balance commerciale du pays 1 s'améliore durablement grâce à la baisse de la consommation du pays 1 et à la hausse de celle du pays 2 : les importations du pays 1 diminuent tandis que les exportations du pays 2 augmentent. Le déficit commercial du pays 1 est donc plus faible tandis que l'excédent du pays 2 est moins important qu'avant la remise de dette. En outre, cette dernière entraîne une baisse des intérêts de la créance (resp. la dette) du pays 1 (resp. pays 2). Comme les variables caractérisant les deux économies sautent d'un état stationnaire à un autre, le solde de la balance courante du pays 1 est toujours nul : l'amélioration de la balance commerciale compense parfaitement la baisse des intérêts des créances ¹⁸.



GRAPHIQUE 1

La dynamique du modèle après le choc.

18. Graphiquement, l'évolution des intérêts de la créance ($r_t a_{1t}$) est identique à celle de la créance. L'évolution de la balance commerciale du pays 1 est l'opposé de celle des intérêts de la créance.

5 Conclusion

Ce modèle à deux pays permet d'étudier l'interdépendance des économies : leur évolution dynamique est plus complexe et plus réaliste que celle qui apparaît dans les modèles où le pays est supposé « petit ». La propriété la plus importante est l'hystérésis due à l'égalisation, à l'état stationnaire, du taux d'intérêt international au taux de préférence pour le présent. La consommation et les créances nettes de chaque pays dépendent de la situation économique à la date initiale et les chocs transitoires les affectent durablement. Cette propriété mise en évidence sur de nombreuses données empiriques affecte une partie du modèle, la dynamique individuelle de chaque pays. La remise de dette permet d'illustrer cette propriété.

En outre, la dynamique de la balance commerciale et de la créance sont particulièrement intéressantes : le pays 1 voit sa créance augmenter de plus en plus et sa balance commerciale se dégrader tandis que l'autre pays devient de plus en plus endetté. Comme ce dernier détient moins d'actifs, il consomme moins que le pays 1 et aucun processus de rattrapage n'est possible. Seule une remise de dette permet d'améliorer sa situation.

Une extension possible de ce travail est de lever l'hypothèse de parfaite mobilité des capitaux physiques pour rendre le modèle plus réaliste en introduisant des coûts d'ajustement sur le capital ou en supposant que l'investissement est irréversible. Les dynamiques de l'accumulation du capital, de la créance et des soldes de la balance des paiements seraient alors plus complexes tandis que la propriété fondamentale, l'hystérésis, serait maintenue.

Une autre extension possible, envisagée par TURNOVSKY et BIANCONI [1992], est l'étude de l'interdépendance des politiques d'imposition du capital et de l'impact des politiques fiscales d'un pays sur la dynamique des deux pays.

Construction de la fonction de production agrégée

Cette fonction n'existe que si la mobilité du capital physique et financier est parfaite. Cela signifie qu'il n'existe pas de coûts d'ajustement sur le capital physique et que le taux d'intérêt est le même dans les deux pays.

Les productions par tête du pays 1 et 2 sont respectivement : $y_{1t} = f_1(k_{1t})$ et $y_{2t} = f_2(k_{2t})$.

La productivité marginale du capital est la même dans les deux pays et elle est égale au taux d'intérêt :

$$r_t = f_1'(k_{1t}) = f_2'(k_{2t})$$

où $f_1'(\cdot)$ et $f_2'(\cdot)$ sont des fonctions continues et strictement décroissantes.

On peut donc définir la fonction inverse : $k_{1t} = \psi_1(r_t)$ et $k_{2t} = \psi_2(r_t)$

Le capital mondial peut s'exprimer en fonction du taux d'intérêt :

$$k_t = k_{1t} + k_{2t} = \psi_1(r_t) + \psi_2(r_t) = \psi(r_t)$$

où $\psi(\cdot)$ est continue et monotone.

Donc, $r_t = \psi^{-1}(k_t)$

La production mondiale par tête est $y_t = f_1(\psi_1(r_t)) + f_2(\psi_2(r_t))$

Comme le taux d'intérêt dépend du capital total, on obtient :

$$y_t = f_1\{\psi_1[\psi^{-1}(k_t)]\} + f_2\{\psi_2[\psi^{-1}(k_t)]\}$$

Il existe donc une relation unique entre la production mondiale et le capital total que l'on note :

$$y_t = G(k_t)$$

L'état stationnaire

Les valeurs d'état stationnaire sont les suivantes :

$$\tilde{r} = \rho$$

$$\tilde{k} = \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\theta_1^{\frac{1}{1-\alpha}} + \theta_2^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$$

$$\tilde{c} = \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left(\theta_1^{\frac{1}{1-\alpha}} + \theta_2^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$$

$$\forall i \in [1, 2], \quad \tilde{k}_i = \left(\frac{\alpha \theta_i}{\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\tilde{w}_{it} = \theta_i (1 - \alpha) \tilde{k}_{it}^\alpha, \quad \forall i \in [1, 2]$$

$$\tilde{c}_1 = h\tilde{c} \text{ et } \tilde{c}_2 = (1 - h)\tilde{c}$$

$$\text{où } h = \frac{\theta_1^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\theta_1^{\frac{1}{1-\alpha}} + \theta_2^{\frac{1}{1-\alpha}}} + \frac{\alpha \sigma \rho a_{10}}{\rho \sigma \tilde{k} + \alpha (\sigma \rho - \lambda) (k_0 - \tilde{k})}$$

$$\text{et } \tilde{k} = \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\theta_1^{\frac{1}{1-\alpha}} + \theta_2^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$$

$$\tilde{a}_1 = -\tilde{a}_2 = \frac{\rho \sigma \tilde{k} a_{10}}{\rho \sigma \tilde{k} + \alpha (\rho \sigma - \lambda) (k_0 - \tilde{k})}$$

$$\text{où } \tilde{k} = \left(\frac{\alpha}{\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\theta_1^{\frac{1}{1-\alpha}} + \theta_2^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)$$

$$\tilde{b}_1 = \tilde{a}_1 + \tilde{k}_1$$

$$\tilde{b}_2 = -\tilde{a}_1 + \tilde{k}_2$$

La dynamique

La linéarisation autour de l'état stationnaire des équations (22) et (23) donne le système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{c}_t &= \frac{-\rho^2 \sigma (1-\alpha)}{\alpha} (k_t - \tilde{k}) \\ \dot{k}_t &= \rho (k_t - \tilde{k}) - (c_t - \tilde{c})\end{aligned}$$

La trace de la matrice jacobienne associée à ce système est positive tandis que le déterminant est négatif : il existe deux racines, l'une positive notée λ et l'autre négative. λ représente la vitesse d'ajustement des variables vers l'état stationnaire :

$$\lambda = \frac{\rho - \rho \sqrt{1 + \frac{4\sigma(1-\alpha)}{\alpha}}}{2}$$

La dynamique de l'économie mondiale s'écrit finalement :

$$\begin{aligned}c_t - \tilde{c} &= -\frac{(1-\alpha)\sigma\rho^2}{\alpha\lambda} (k_0 - \tilde{k}) e^{\lambda t} \\ k_t - \tilde{k} &= (k_0 - \tilde{k}) e^{\lambda t}\end{aligned}$$

Pour le pays i ($i = 1$ ou 2), on a $k_{it} - \tilde{k}_{it} = (k_{i0} - \tilde{k}_i) e^{\lambda t}$

Pour déterminer la dynamique de la créance (ou de la dette) du pays 1, il faut utiliser l'équation (26) et la linéariser. On obtient l'équation suivante :

$$\dot{a}_{1t} = \rho (a_{1t} - \tilde{a}_1) + \left[\frac{(\rho - \lambda) \theta_1^{\frac{1}{1-\alpha}} \tilde{k}}{\theta_1^{\frac{1}{1-\alpha}} + \theta_2^{\frac{1}{1-\alpha}}} + \frac{(1-\alpha) \tilde{c}_1 \rho \sigma}{\lambda} - (1-\alpha) \rho \tilde{a}_1 \right] \frac{(k_t - \tilde{k})}{\tilde{k}}$$

On pose

$$A = \left[\frac{(\rho - \lambda) \theta_1^{\frac{1}{1-\alpha}} \tilde{k}}{\theta_1^{\frac{1}{1-\alpha}} + \theta_2^{\frac{1}{1-\alpha}}} + \frac{(1-\alpha) \tilde{c}_1 \rho \sigma}{\lambda} - (1-\alpha) \rho \tilde{a}_1 \right] \frac{1}{\tilde{k}}$$

et $x_t = a_{1t} - \tilde{a}_1$. Sachant que $k_t - \tilde{k} = (k_0 - \tilde{k}) e^{\lambda t}$, on obtient comme solution $x_t = d_1 e^{\rho t + d_2} + \frac{A(k_0 - \tilde{k}) e^{\lambda t}}{\lambda - \rho}$ où d_1 et d_2 sont des constantes arbitraires. Quand $t \rightarrow \infty$, $x_t = 0$, d'où la solution. On obtient :

$$a_{1t} - \tilde{a}_1 = \left[\frac{\alpha(\sigma\rho - \lambda)\tilde{a}_1}{\sigma\rho} \right] \left[\frac{k_0 - \tilde{k}}{\tilde{k}} \right] e^{\lambda t}$$

Signe du dénominateur des équations (29) et (30)

Une condition suffisante pour que le dénominateur de l'équation (29) soit positif est que :

$$(A.1) \quad \sigma\rho - \alpha(\rho\sigma - \lambda) > 0$$

$$\text{où } \lambda = \frac{\rho - \rho\sqrt{1 + \frac{4\sigma(1-\alpha)}{\alpha}}}{2}$$

En effet, $\sigma\rho\tilde{k} + \alpha(\sigma\rho - \lambda)(k_0 - \tilde{k}) = [\sigma\rho - \alpha(\rho\sigma - \lambda)]\tilde{k} + k_0\alpha(\rho\sigma - \lambda)$. Or, λ est négatif et $\sigma > 0$ et $0 < \alpha < 1$. Dans un monde en croissance, si (A.1) est vérifiée, le dénominateur est bien positif.

Montrons que l'équation (A.1) est vraie quelles que soient les valeurs des paramètres. On a :

$$\begin{aligned} 0 &< \left[\frac{2\sigma(1-\alpha)}{\alpha} \right]^2 \\ 0 &< 1 + \frac{4\sigma(1-\alpha)}{\alpha} < \left[1 + \frac{2\sigma(1-\alpha)}{\alpha} \right]^2 \\ 0 &< \sqrt{1 + \frac{4\sigma(1-\alpha)}{\alpha}} < 1 + \frac{2\sigma(1-\alpha)}{\alpha} \\ 0 &< -\frac{2\lambda}{\rho} < \frac{2\sigma(1-\alpha)}{\alpha} \end{aligned}$$

D'où, $\sigma\rho - \alpha(\rho\sigma - \lambda) > 0$

● Références bibliographiques

- AMABLE, B., HENRY, J., LORDON, F., TOPOL, R. (1992). – “Hysteresis: What It is and What It is Not”, *Document de Travail Cepremap*, 9216.
- AMABLE, B., HENRY, J., LORDON, F., TOPOL, R. (1994). – “Strong Hysteresis versus Zero-root Dynamics”, *Economics Letters*, 44, pp. 43-47.
- BACKUS, D. K., KEHOE, P. J., KYDLAND, Finn E. (1992). – “International Real Business Cycles”, *Journal of Political Economy*, 100-4, pp. 745-75.
- BARRO, Robert J., SALA-I-MARTIN, Xavier (1995). – *Economic Growth*, McGraw-Hill.
- BERAUD, D. (1996). – “La dynamique de la balance courante dans un modèle à deux pays”, *Cahiers Eco&Math*, 96 18, Université de Paris I.
- BIANCONI, M. (1995). – “Fiscal Policy in a Simple Two-country Dynamic Model”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 19, pp. 395-419.
- BLANCHARD, O. J. (1979). – “Backward and Forward Solutions for Economies with Rational Expectations”, *American Economic Review*, 69, pp. 114-118.

- BLANCHARD, O. J., FISCHER, S. (1989). – *Lectures on Macroeconomics*, MIT Press.
- DEVEREUX, M. B., SHI, S. (1991). – “Capital Accumulation and the Current Account in a Two-country Model”, *Journal of International Economics*, 30, pp. 1-25.
- FELDSTEIN, M., HORIOKA, C. (1980). – “Domestic Saving and International Capital Flows”, *The Economic Journal*, 90, pp. 314-329.
- GIAVAZZI, F., WYPLOSZ, C. (1984). – “The Real Exchange Rate, the Current Account, and the Speed of Adjustment”, in *Exchange rates: theory and policy*, edited by Bilson C. et Marson R., Chicago University Press.
- GIAVAZZI, F., WYPLOSZ, C. (1985). – “The Zero Root Problem: A Note on the Dynamic Determination of the Stationary Equilibrium in linear Models”, *Review of Economic Studies*, 52-2, pp. 353-57.
- KARAYALCIN, C. (1994). – “Adjustment Costs in Investment, Time Preferences, and The Current Account”, *Journal of International Economics*, 37, pp. 81-95.
- LIPTON, D., SACHS, J. (1983). – “Accumulation and Growth in a Two-country Model, a Simulation Approach”, *Journal of International Economics*, 15, pp. 135-159.
- RAMSEY, F. (1928). – “A Mathematical Theory of Saving”, *Economic Journal*, 38, pp. 543-59.
- SEN, P. (1994). – “Savings, Investment, and the Current Account”, in *The Handbook of International Macroeconomics*, edited by Van Der Ploeg Frederick, Blackwell.
- TURNOVSKY, S. J., BIANCONI, M. (1992). – “The International Transmission of Tax Policies in a Dynamic World Economy”, *Review of International Economics*, 1, pp. 49-72.