ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 51 — 1998

Un modèle d'équilibre général avec volatilité stochastique des taux d'intérêt et information incomplète

Constantin MELLIOS*

RÉSUMÉ. – Dans le cadre d'un modèle d'équilibre général, nous supposons que les variables caractérisant l'état de l'économie ne sont pas observables. Les agents économiques, pour résoudre leur problème d'optimisation, procèdent, dans un premier temps, à l'estimation des variables non observables compte tenu de l'information procurée par leurs observations. La procédure d'estimation est celle du filtrage. Il est montré que, même si la structure de l'information est gaussienne, la distribution conditionnelle des variables d'état est caractérisée par deux statistiques exhaustives : l'espérance et la variance conditionnelles. Dans un second temps, la résolution du problème de choix optimal est fondé sur ces statistiques. Il s'ensuit que la valeur des obligations zéro coupon, ainsi que le processus de diffusion du taux d'intérêt dépendent des statistiques exhaustives. Dans ce cas, nous démontrons que la volatilité du taux d'intérêt est stochastique.

A General Equilibrium Model with Stochastic Interest Rate Volatility and Incomplete Information

ABSTRACT. – In a general equilibrium framework, we suppose that the variables which characterise the state of the economy are not observable. Agents solve their optimisation problem by first estimating the unobserved state variables given the information carried by the observations. Tools of filtering theory are used to derive optimal estimates. It is shown that, even if the information structure is gaussian, the conditional distribution of the state variables is characterised by two sufficient statistics : the conditional mean and the conditional variance. Then, the control problem is based on the sufficient statistics. It follows that discount bond values and the interest rate diffusion process are functions of the sufficient statistics. In that case, we demonstrate that interest rate volatility is stochastic.

* C. MELLIOS : Université de Cergy-Pontoise et CREFIB, Université Paris I. Je tiens à remercier Patrice PONCET pour ses suggestions qui ont permis d'améliorer considérablement le contenu de cet article. Je remercie aussi Philippe ARTZNER, François QUITTARD-PINON, Hubert de LA BRUSLERIE et deux rapporteurs anonymes pour leurs commentaires pertinents. Les éventuelles erreurs et omissions qui pourraient subsister relèvent néanmoins de mon entière responsabilité.

1 Introduction

Dans cet article, nous étudions, dans un cadre d'équilibre général, la structure par terme des taux d'intérêt lorsque l'information disponible aux investisseurs est imparfaite et analysons le comportement aléatoire de la volatilité des taux.

MERTON [1971 et 1973] et BREEDEN [1979], au sein d'un modèle intertemporel d'équilibre des actifs financiers, déterminent, dans un cadre d'équilibre partiel, l'espérance du rendement des actifs et la demande optimale de portefeuille. COX, INGERSOLL et ROSS [1985 a, b] (CIR dans la suite) étendent l'analyse dans un cadre d'équilibre général, dans lequel les prix des actifs sont déterminés de manière endogène. De plus, en émettant l'hypothèse d'une structure logarithmique de préférences des agents économiques, ils déduisent, de manière endogène, le processus d'évolution du taux d'intérêt. Ces auteurs supposent que les variables d'état sont observables.

Pour mieux comprendre l'évaluation des titres financiers, il est possible de relâcher l'hypothèse selon laquelle les agents économiques observent l'état de l'économie. En effet, certaines variables, qui sont pertinentes pour déterminer la valeur des actifs, sont souvent non observables. Par conséquent, les investisseurs sur le marché financier opèrent en disposant d'une information partielle sur les variables qui influencent l'état de l'économie. Par ailleurs, l'une des difficultés pour effectuer des tests empiriques des modèles en temps continu est liée à la non observabilité des variables sous-jacentes qui caractérisent l'état de l'économie. On se heurte à cette difficulté notamment pour estimer les modèles de la structure par terme des taux d'intérêt [1]. L'hypothèse de l'information complète semble être violée. Afin de tenir compte, au sein des modèles d'évaluation des actifs financiers, de l'information incomplète sur les variables d'état, trois objectifs sont recherchés : (1) déterminer la procédure d'estimation ; (2) établir la séparation entre cette procédure et le contrôle optimal ; (3) analyser l'impact de l'erreur de l'estimation sur le choix de portefeuille. Ces objectifs ont été examinés par DETEMPLE [1986 a, b], DOTHAN et FELDMAN [1986], GENNOTTE [1986] et FELDMAN [1989].

Dans une économie avec information imparfaite, d'après le principe de séparation, le problème de choix optimal des agents économiques s'effectue en deux étapes. Dans la première étape, leur objectif consiste à obtenir l'estimateur des variables non observables compte tenu de l'information procurée par leurs observations. Les variables non observables sont estimées en ayant recours à l'inférence statistique du filtrage. Dans la seconde étape, les individus maximisent leurs fonctions d'utilité sous la contrainte de budget en utilisant les variables estimées. Le problème de décision d'un individu ne

1. GIBBONS et RAMASWAMY [1988] puis PEARSON et SUN [1992] testent le modèle de CIR (1985 b) lorsque la (les) variable (s) d'état n'est (sont) pas observable(s).

disposant que d'une information incomplète peut alors se transformer en un problème d'optimisation dans une économie complètement observable où la (les) statistique(s) exhaustive(s) devient (deviennent) la (les) variable(s) d'état.

Le principe de séparation permet, d'une part, d'analyser l'impact de l'erreur de l'estimation sur la demande de portefeuille. Dans une économie avec information incomplète les investisseurs munis de préférences logarithmiques établissent leurs demandes de portefeuille en fonction, d'une part, de la covariance entre les processus de production et les variables non observables et, d'autre part, de l'erreur d'estimation et se comportent, contrairement à une économie avec information parfaite, de manière non myope. D'autre part, l'équation fondamentale d'évaluation des actifs financiers est fonction de la (des) statistique(s) exhaustive(s).

DOTHAN et FELDMAN [1986] et FELDMAN [1989], dans le cadre du modèle de CIR [1985 b], ont examiné la structure par terme des taux d'intérêt dans une économie partiellement observable. Le taux d'intérêt à l'équilibre, dans le cas des préférences logarithmiques des investisseurs, est un estimateur sans biais (au sens quadratique) de la variable non observable. De plus, la variance du taux d'intérêt est une fonction quadratique de l'erreur de l'estimation. Cette dernière est déterministe. L'imperfection de l'information explique les différentes formes de la courbe des taux.

Les modèles développés dans les articles cités ci-dessus sont fondés sur l'hypothèse fondamentale selon laquelle la structure d'information est gaussienne. Dans ce cas, la distribution des variables non observables, à une date quelconque, conditionnelle à l'information obtenue jusqu'à cette date, est gaussienne. Pour cette distribution la moyenne conditionnelle suit un processus de diffusion, tandis que la variance est déterministe. Il s'ensuit que la moyenne conditionnelle est une statistique exhaustive pour la distribution conditionnelle.

La portée de ces modèles est limitée dans la mesure où l'erreur d'estimation est déterministe. L'étude d'une dynamique aléatoire de l'erreur d'estimation conduit à une modification substantielle des propriétés de l'économie considérée et notamment de la structure par terme des taux. Tout en retenant l'hypothèse d'une structure d'information gaussienne, lorsque la covariance entre les variables observables et non observables est fonction de ces dernières, il est possible de démontrer que l'erreur de filtrage suit un processus stochastique. La distribution conditionnelle est déterminée par deux statistiques exhaustives : l'espérance et la variance conditionnelles. Nous nous référons au modèle gaussien avec erreur de filtrage stochastique, noté désormais modèle GEFIS, par opposition au modèle avec erreur de filtrage déterministe, noté modèle GEFID.

DETEMPLE [1991] propose d'abandonner l'hypothèse évoquée ci-dessus et considère une structure de l'information non gaussienne. Dans ce cas, la distribution conditionnelle est également caractérisée par deux statistiques exhaustives. Cet auteur démontre, au sein du modèle de CIR [1985 a, b], que le caractère aléatoire de la variance conditionnelle implique que la volatilité du taux d'intérêt est stochastique et qu'elle dépend de manière non linéaire de la variance conditionnelle.

Dans le cadre d'équilibre général, nous supposerons qu'une seule variable d'état non observable affecte les processus de production observables. Le taux d'intérêt instantané est déterminé de manière endogène et est une fonction affine de l'espérance conditionnelle. En effectuant un changement de variables nous démontrons que le taux d'intérêt suit un processus avec force de rappel. La variance des variations instantanées du taux d'intérêt est une fonction linéaire du niveau du taux et de la variance conditionnelle. Cette dernière étant aléatoire, il s'ensuit que la volatilité du taux d'intérêt est stochastique.

Nous généralisons les résultats obtenus par DOTHAN et FELDMAN [1986] puis par FELDMAN [1989] dans deux directions. D'une part, la volatilité du taux d'intérêt est aléatoire et d'autre part, elle est une fonction non seulement de la variance conditionnelle, mais également du taux d'intérêt. Notons que si la covariance entre les processus de production et la variable non observable ne dépend pas de cette dernière, ces modèles s'obtiennent comme un cas particulier du modèle GEFIS. Par ailleurs, notre modèle se distingue du modèle non gaussien en ce sens que, dans ce dernier, la volatilité du taux d'intérêt est une fonction non linéaire uniquement de la variance conditionnelle.

Ces deux caractéristiques de la volatilité du taux d'intérêt sont conformes aux observations empiriques. En effectuant un test empirique du modèle de CIR [1985 b], PEARSON et SUN [1991] ont été amenés à rejeter ce modèle en raison notamment de son incapacité à prendre en compte les mouvements aléatoires de la courbe des taux. Les résultats de l'étude empirique effectuée par CHAN *et al.* [1992] suggèrent que la volatilité du taux d'intérêt dépend du niveau de celui-ci et que cette volatilité est d'une importance fondamentale pour déterminer la structure par terme des taux.

Même si une seule variable d'état non observable gouverne les processus de production, dans le cadre du modèle GEFIS, les prix des obligations zéro coupon dépendent de deux facteurs : le taux d'intérêt et la variance conditionnelle. Le caractère aléatoire de cette dernière permet notamment au modèle d'intégrer plusieurs propriétés observées des taux et d'obtenir des déformations de la gamme des taux plus réalistes. Par ailleurs, dans une économie partiellement observable, l'hypothèse des anticipations locales est vérifiée lorsque, d'une part, la covariance entre les variables observables et non observable est constante, et, d'autre part, le taux d'intérêt est déterministe. Ce résultat est contraire à celui obtenu par CIR [1981] dans une économie parfaitement observable.

L'article est organisé de la manière suivante. Dans la deuxième section, nous exposerons les fondements du modèle économique en insistant notamment sur la propriété de non observabilité de la variable d'état qui gouverne l'évolution dans le temps des processus de production. La procédure d'estimation à l'aide de l'outil mathématique du filtrage sera étudiée dans la troisième section. Dans la quatrième section, nous établirons le principe de séparation, ainsi que le problème de choix d'investissements. La détermination du processus stochastique du taux d'intérêt et de l'équation aux dérivées partielles (EDP) d'évaluation de l'obligation zéro coupon fera l'objet de la cinquième section. Une dernière section conclut ce travail.

2 Le cadre d'analyse

L'objectif de cette section est de déterminer le cadre économique dans lequel les agents économiques effectuent les choix de consommation et d'investissement. L'économie envisagée est similaire à celle considérée par CIR [1985 a, b] à l'exception fondamentale que la variable d'état qui affecte la production n'est pas observable par les agents économiques.

Les hypothèses suivantes caractérisent l'ensemble de l'économie.

- H 1 Il existe un seul bien physique qui peut être alloué soit à la consommation soit à l'investissement. Toutes les valeurs sont exprimées en termes d'unités de ce bien.
- H 2 La production de ce bien est effectuée par n firmes compétitives Elles ne s'endettent pas et n'émettent qu'une seule action parfaitement divisible. Elles n'investissent que dans la production de ce bien et leur objectif est la maximisation de leur valeur. Elles agissent comme des « price takers ».
- H 3 Chaque firme est dotée d'une technologie linéaire avec des rendements d'échelle constants. Les n processus de production observables sont décrits par l'équation différentielle stochastique (EDS dorénavant) suivante :

$$(1) \qquad dY\left(t\right) = I_Y \left[A_0 + A_1 X\left(t\right)\right] dt + I_Y \sigma_{Y_1} dW_1\left(t\right) + I_Y \sigma_{Y_1} dW_2\left(t\right)$$

où : $dY(t)$ est un vecteur de dimension $(n,1)$;

I_Y est une matrice diagonale de dimension (n,n) composée des éléments de $Y(t)$;

A_0 et A_1 sont deux vecteurs de dimension $(n,1)$ composés de constantes ;

$I_Y(A_0 + A_1 X(t))$ est un vecteur de dimension $(n,1)$ représentant la dérive de $Y(t)$;

σ_{Y_1} et σ_{Y_2} sont des matrices de dimensions respectivement (n,d) et (n,m) composées de constantes positives ;

$\Sigma_Y \equiv \sigma_{Y_1}\sigma'_{Y_1} + \sigma_{Y_2}\sigma'_{Y_2}$ est la matrice instantanée des variances-covariances des rendements de la production, de dimension (n,n). Nous supposons qu'elle est inversible ;

$dW_1(t)$ et $dW_2(t)$ sont des vecteurs de dimensions respectivement $(d,1)$ et $(m,1)$ d'incréments de processus standard de Wiener indépendants.

L'EDS (1) indique que les processus de production sont stochastiques et dépendants de la variable d'état non observable $X(t)$ dont le comportement aléatoire est précisé dans l'hypothèse suivante. Le rendement instantané de $Y(t)$ est linéaire par rapport à la variable d'état non observable. Les agents économiques observent les variations instantanées des processus de production, $dY(t)$, mais ils n'observent pas l'espérance du rendement instantané, $A_0 + A_1 X(t)$, de ces processus. Par ailleurs, cette équation spécifie que le bien physique est produit par des technologies linéaires avec des rendements d'échelle constants. La technologie de production a des rendements d'échelle constants en ce sens que le rendement instantané d'un investissement dans la production est indépendant de la quantité investie dans la production.

- H 4 La variable d'état non observable $X(t)$ qui influence le comportement aléatoire des technologies satisfait l'EDS suivante :

(2) $$dX(t) = [a_0 + a_1 X(t)]\, dt + \sigma_{X_1} dW_1(t) + \sigma_{X_2} X(t)\, dW_2(t)$$

où : a_0 et a_1 sont des scalaires tels que $a_0 > 0$ et $a_1 < 0$;

σ_{X_1} et σ_{X_2} sont des vecteurs de dimensions respectivement $(1, d)$ et $(1, m)$ composés de constantes positives ;

$X(0)$ est une variable gaussienne.

Les processus de production et la variable d'état non observable sont gouvernés par les mêmes sources d'aléa et sont corrélés. La covariance instantanée entre les rendements de la production et la variable non observable est composée d'un terme constant et d'un terme aléatoire [2] fonction de $X(t)$: $\Sigma_{X_1 Y_1} + \Sigma_{X_2 Y_2} X(t)^2$.

Où : $\Sigma_{X_1 Y_1} \equiv \sigma_{X_1} \sigma'_{X_1}$ et $\Sigma_{X_2 Y_2} \equiv \sigma_{X_2} \sigma'_{X_2}$ sont des vecteurs de dimension $(1, n)$.

- H 5 Les individus n'observent pas le processus $\{X(t) : t \in [0, T]\}$ de la variable d'état, mais utilisent toute l'information procurée par l'observation des processus $\{Y(t) : t \in [0, T]\}$. Ils sont censés connaître les paramètres a_0, a_1, σ_{X_1} et σ_{X_2} de $X(t)$.

La filtration $F^Y(t)$ générée par les processus de production désigne l'information accessible aux investisseurs. Ces processus sont une combinaison linéaire d'une fonction déterministe de la variable $X(t)$ et de deux termes de bruit $W_1(t)$ et $W_2(t)$. Les agents économiques cherchent à en déduire l'information sur l'état futur du processus $X(t)$ à partir de leurs observations $Y(t)$ du passé, mais ils ne peuvent le faire que de manière imparfaite à cause de la présence de bruit. Il en découle que l'information est imparfaite dans le modèle.

- H 6 Il existe un marché où tous les agents économiques peuvent instantanément emprunter et prêter au taux d'intérêt $r(t)$.
- H 7 Il existe p marchés pour les actifs contingents. Ceux-ci peuvent être émis ou achetés aussi bien par les firmes que par les individus. Les valeurs des actifs contingents dépendent, en général, de toutes les variables nécessaires pour décrire l'état de l'économie. Les actifs contingents se distinguent par leurs caractéristiques contractuelles : un paiement $\phi(t)$ à l'échéance ou un paiement $\psi(T^*)$, $T^* < T$,

2. Le modèle GEFID suppose que cette covariance est constante ou déterministe. Une telle hypothèse est restrictive.

si l'actif fait l'objet d'un exercice prématuré [3]. Le comportement aléatoire de la valeur de l'actif contingent i est décrit par l'EDS suivante :

$$dg_i(t) = g_i \mu_{g_i} dt + g_i \sigma_{g_i} d\overline{W}(t) \tag{3}$$

où : mu_g est un vecteur de dimension $(p,1)$ des rendements espérées des actifs contingents dont la ième composante est notée μ_{g_i} ;

σ_{g_i} est un vecteur de dimension $(1,n)$ de diffusion [4] ; σ_g est une matrice de dimension (p,n) ;

$d\overline{W}(t)$ est l'incrément d'un mouvement brownien de dimension $(n,1)$ déterminé de manière endogène. Son expression sera définie par la suite.

Il convient de remarquer que l'équation (3) sert pour les notations qui seront examinées ultérieurement dans le texte. Cela ne signifie pas que la dynamique des prix est spécifiée de manière exogène. Le taux d'intérêt $r(t)$ et le rendement anticipé de l'actif contingent sont, à l'équilibre, déterminés de manière endogène.

- H 8 Le marché est sans friction : les impôts et les coûts de transaction et d'information sont nuls. Les titres financiers sont parfaitement divisibles. Les transactions s'effectuent sur le marché en continu. Tout investisseur peut procéder à des achats et à des ventes à découvert.
- H 9 Il existe un nombre important d'individus identiques avec des anticipations rationnelles. Chaque individu cherche à maximiser l'espérance de sa fonction d'utilité pendant sa durée de vie. La fonction d'utilité de consommation est logarithmique et est indépendante de l'état de l'économie :

$$\max E_t \left(\int_t^T e^{-\eta s} Lnc(s) \right)$$

où : E_t est l'opérateur de l'espérance conditionnelle à l'information disponible en t ;

$c(s)$ désigne la consommation d'un individu ; η étant un facteur d'impatience constant.

L'objectif de tout agent économique est de maximiser sa fonction d'utilité de consommation. Pour atteindre cet objectif tout individu qui dispose d'une richesse est placé face à l'alternative suivante : allouer sa richesse entre la consommation et les opportunités d'investissement. Il s'agit de prendre la décision de déterminer la proportion de sa richesse allouée à la consommation courante et celle allouée à la consommation future en tenant compte des opportunités d'investissement actuelles et futures.

Notons k_Y et k_g deux vecteurs des dimensions $(n,1)$ et $(p,1)$ représentant respectivement les proportions de la richesse de l'individu investies dans

---

3. On suppose que les actifs ne distribuent pas de dividendes, ni de coupons.
4. La relation entre μ_{g_l}, μ_{g_i} et les dérivées partielles de la valeur des actifs contingents par rapport aux variables dont ces derniers dépendent sera spécifiée à l'aide du lemme d'Itô dans la suite de l'exposé.

les processus de production et dans les actifs contingents. L'individu alloue sa richesse, $w(t)$, entre la consommation, $c(t)$, l'investissement dans les processus de production, $k_Y w(t)$, l'investissement dans les actifs contingents, $k_g w(t)$, et l'investissement dans l'actif sans risque, $w(t) - k'_Y 1_n w(t) - k'_g 1_p w(t)$. 1_n et 1_p sont des vecteurs unitaires de dimensions respectivement $(n, 1)$ et $(p, 1)$.

Le problème de décision de l'agent économique consiste à choisir les poids de son portefeuille, k_Y et k_g, composés d'actions de la firme et d'actifs contingents, et sa consommation $c(t)$, afin de maximiser l'espérance de son utilité de consommation pendant sa durée de vie. Considérons le programme suivant (P 1) :

$$\max_{(c,k_q,k_g)} E_t \left(\int_t^T e^{-\eta s} Lnc(s) \right)$$

sous la contrainte de budget (4). Il s'agit donc de résoudre un problème de contrôle stochastique en temps continu.

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{w(t)} &= [k'_Y (I_Y)^{-1} dY(t) + k'_g (I_g)^{-1} dg(t) \\ &\quad + \left[(1 - k'_Y 1_n - k'_g 1_p) r(t) - \frac{c(t)}{w(t)} \right] dt \end{aligned} \tag{4}$$

où : I_g est une matrice diagonale de dimension (p, p) composée des éléments de $g(t)$ et $dg(t)$ est un vecteur de dimension $(p, 1)$ dont la ième composante est notée $dg_i(t)$;

$c(t) \geq 0$, $k_Y \geq 0_n$, $k_g \geq 0_p$, $w(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, 0_n et 0_p sont deux vecteurs de dimension respectivement $(n, 1)$ et $(p, 1)$ composés de zéro ;

$Y(t)$ et $X(t)$ sont solutions des équations (1) et (2).

Afin de résoudre le programme (P 1) déterminé dans une économie avec information incomplète présentée ci-dessus, il convient d'identifier une économie avec une structure d'information équivalente telle que la variable non observable est remplacée par son espérance conditionnelle. La consommation et les proportions du portefeuille d'investissement d'un individu sont optimaux dans l'économie partiellement si et seulement si ils sont optimaux dans l'économie avec information parfaite.

3 La procédure d'estimation

Les agents économiques n'observent pas la variable d'état $X(t)$, mais ils utilisent toute l'information procurée par les processus de production $Y(t)$. Leur objectif consiste à construire un estimateur optimal récurrent de la variable non observable compte tenu de l'information disponible.

L'estimateur est récurrent en ce sens que, à chaque instant, il est construit à l'aide des estimateurs des dates antérieures

L'estimateur optimal (au sens quadratique), $m(t)$, à la date t pour $X(t)$ à partir de $Y(t)$ est l'espérance conditionnelle :

$$m(t) = E\left[X(t)|F^Y(t)\right] \tag{5}$$

La variance conditionnelle de l'erreur d'estimation du filtrage est donnée par la relation :

$$\gamma(t) = E\left[X(t) - m(t))^2|F^Y(t)\right] \tag{6}$$

Le modèle gaussien repose sur les hypothèses fondamentales suivantes. En premier lieu, la structure de l'information initiale est gaussienne. La variable non observable à l'instant initial, $X(0)$, est distribuée selon une loi normale de moyenne $m(0)$ et de variance $\gamma(0)$. A l'instant initial, les agents économiques considèrent que la distribution de $X(0)$ est gaussienne. L'information arrivant sur le marché continuellement, ils réactualisent, en conséquence, leur distribution en continu. En d'autres termes, ils cherchent à obtenir l'information sur l'état futur de la variable $X(t)$ à partir des observations du passé. En deuxième lieu, le terme de diffusion de la variable observable ne dépend pas de la variable non observable [5]. En troisième lieu, les tendances des processus des variables observables et non observable sont linéaires par rapport à la variable non observable [6].

Au sein du modèle gaussien, on distingue le modèle GEFID, et le modèle GEFIS. Dans le cas du modèle GEFID, c'est la méthode appliquée par Kalman et Bucy qui permet de trouver pour l'estimateur optimal $m(t)$ une équation de récurrence. Dans ce cas, $m(t)$ suit une EDS linéaire et constitue la statistique exhaustive, tandis que la variance est déterministe ($\gamma(t)$ coincide avec l'erreur de filtrage) (Chapitre 10 respectivement de Liptser et Shiryayev [1977] et de Kallianpur [1980]).

L'une des conséquences du modèle GEFID est que l'erreur de filtrage est une fonction déterministe. En effet, dans le cas du modèle GEFID, la covariance entre les variables observables et la variable non observable peut être nulle, constante ou déterministe. En revanche, dans le cas du modèle GEFIS, les processus des variables observables (1) et de la variable non

5. C'est une hypothèse d'ordre technique qui permet d'obtenir une solution au problème de filtrage.

6. Le problème du filtrage optimal a été résolu dans le cas où les variables observables et non observables suivent des processus non linéaires. Apelfeld et Conze [1990], dans le cadre de l'approche d'arbitrage, proposent une modélisation de la gamme des taux en ayant recours à des méthodes de filtrage non linéaire. En considérant le modèle gaussien comme un cas particulier, ils généralisent le modèle de Vasicek [1977] lorsque l'état de l'économie est partiellement observable.

observable (2) sont corrélés. Cette corrélation dépend de la variable non observable, $X(t)$, ce qui permet de déterminer à l'aide du théorème suivant les expressions de deux statistiques exhaustives : l'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle. Par rapport au modèle GEFID, l'erreur de filtrage évolue de manière stochastique. La variance de l'EDS de l'espérance conditionnelle n'est plus déterministe, mais elle est une fonction linéaire de l'espérance elle-même et de la variance conditionnelle [7]. Le théorème suivant, qui est un cas particulier du théorème 2.2 de Haussmann et Pardoux (1988), permet de déterminer les équations auxquelles satisfont l'espérance et la variance conditionnelles.

THÉORÈME 1 : Soit (X, Y) un processus stochastique satisfaisant aux équations (1) et (2). L'espérance conditionnelle, $m(t)$, et la variance conditionnelle, $\gamma(t)$, satisfont au système d'équations :

$$dm(t) = [a_0 + a_1 m(t)]\, dt + [\Sigma_{X_1Y_1} + \Sigma_{X_2Y_2} m(t) + A_1' \gamma(t)]\, d\overline{W}(t) \tag{7}$$

avec $m(0) = E[X(0)|Y(0)]$

$$dm(t) = \mu_m dt + \sigma_m d\overline{W}(t) \tag{7'}$$

où : μ_m est un scalaire et σ_m est un vecteur de dimension $(1, n)$.

$$d\gamma(t) = [\Sigma_{X_1} + 2a_1\gamma(t) - (\Sigma_{X_1Y_1} + \Sigma_{X_2Y_2} m(t) + A_1'\gamma(t)) (\Sigma_{X_1Y_1} + \Sigma_{X_2Y_2} m(t) + A_1'\gamma(t))' + \Sigma_{X_2} m(t)]\, dt + 2\Sigma_{X_2Y_2}\gamma(t)\, d\overline{W}(t) \tag{8}$$

avec $\gamma(0) = E[X(0) - m(0)]^2$

$$d\gamma(t) = \mu_\gamma dt + \sigma_\gamma d\overline{W}(t) \tag{8'}$$

où : μ_γ est un scalaire et σ_γ est un vecteur de dimension $(1, n)$.

$$d\overline{W}(t) = \Sigma_Y^{-1} [I_Y^{-1} dY(t) - (A_0 + A_1 m(t))\, dt] \tag{9}$$

$\overline{W}(t)$ est un mouvement brownien de dimension $(n, 1)$ par rapport à la filtration $F^{Y(t)}(t)$.

Lorsque le deuxième terme aléatoire du processus non observable n'est pas fonction de $X(t)$, la covariance entre $dX(t)$ et $dY(t)$ ne dépend pas elle non plus de $X(t)$, ce qui implique que l'erreur de filtrage est déterministe.

$\gamma(t)$ décrit la précision des estimateurs de $X(t)$. En effet, par définition, $\gamma(t)$ est la moyenne quadratique de la différence entre la variable aléatoire non observable et sa moyenne conditionnelle et constitue ainsi une mesure de

7. Dans le cas du modèle non gaussien, les statistiques exhaustives forment un système d'EDS non linéaires.

la qualité de l'information. Dans le modèle GEFID, $\gamma(t)$ est déterministe et les individus connaissent ses valeurs futures. Autrement dit, ils connaissent d'avance la précision des estimateurs futurs. En revanche, dans le modèle GEFIS, $\gamma(t)$ étant stochastique, les agents économiques ne connaissent pas son évolution future.

Le processus d'innovation décrit l'écart entre les réalisations et leurs valeurs attendues. Ce processus, contrairement aux mouvements browniens $W_1(t)$ et $W_2(t)$, est observable puisque son expression, donnée par l'équation (9), ne dépend que des processus observables. Notons que c'est le processus d'innovation qui régit l'évolution aléatoire de la valeur des actifs contingents. L'information révélée aux investisseurs par la trajectoire de $\overline{W}(t)$ est équivalente à celle contenue dans les processus de production. En d'autres termes, la filtration $F^{\overline{W}(t)}(t)$ générée par le processus d'innovation est équivalente à celle, $F^{\overline{Y}(t)}(t)$, générée par les processus observables [8].

4 Le principe de séparation et le problème du choix de portefeuille

Les agents économiques cherchent à maximiser l'espérance de leur utilité de consommation sous la contrainte de budget. Puisqu'ils n'observent pas la variable $X(t)$, leur objectif consiste à déterminer l'espérance conditionnelle à l'information procurée par les processus de production. La covariance entre les processus de production et la variable non observable étant une fonction de cette dernière, $\gamma(t)$ évolue de manière aléatoire dans le temps. Dans le cadre du modèle GEFIS, les investisseurs fondent alors leurs décisions sur $m(t)$ et $\gamma(t)$.

Après avoir procédé à l'estimation de la variable non observable compte tenu de l'information disponible, le problème de décision de l'investisseur peut être résolu dans le cadre de la programmation dynamique stochastique en vertu du principe de séparation. Selon ce principe, il est possible d'identifier l'existence d'une économie, où la variable non observable est remplacée par les statistiques exhaustives, équivalente à l'économie avec information imparfaite. Le problème de choix optimal des agents économiques s'effectue en deux phases : déterminer à l'aide du filtrage les statistiques exhaustives et résoudre le problème du contrôle optimal fondé sur ces statistiques.

8. Pour une démonstration formelle, se référer au théorème 12.5 de LIPTSER et SHIRYAYEV [1977].

THÉORÈME DE SÉPARATION 2 [9] : Les agents économiques résolvent le problème de décision d'investissement en deux étapes :
– résolution du problème de filtrage ;
– résolution du problème de contrôle optimal avec information complète.
Supposons que le problème avec information complète (programme P 2) admet les contrôles optimaux (c^*, k_Y^*, k_g^*), alors ces contrôles sont optimaux pour le programme original (P 1) avec information incomplète.

Afin d'établir le programme (P 2), définissons la classe des contrôles séparés :

$$c = c(m(t)), \gamma(t), t), k_Y = k_Y(m(t)), \gamma(t), t), k_g = k_g(m(t)), \gamma(t), t).$$

En utilisant les résultats du théorème 1 pour exprimer les rendements instantanés des processus de production en fonction de $m(t)$, de $\gamma(t)$ et du processus d'innovation, le programme (P 2) avec information complète s'écrit :

$$\max_{(c, k_q, k_g)} E_t \left(\int_t^T e^{-\eta s} Lnc(s) \right)$$

sous la contrainte :

$$\frac{dw(t)}{w(t)} = [k_Y'(A_0 + A_1 m(t) - r(t) 1_n) + k_g'(\mu_g - r(t) 1_p) + r(t) - c(t)/w(t)] d(t) + [k_Y' \Sigma_Y + k_g' \sigma_g] d\overline{W}(t) \quad (10)$$

$c(t) \geq 0$, $k_Y \geq 0_n$, $k_g \geq 0_p$, $w(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$.
$m(t)$ et $\gamma(t)$ sont solutions respectivement des EDS (7) et (8).

A partir de la relation (9), on peut écrire :

$$I_Y^{-1} dY(t) = [A_0 + A_1 m(t)] dt + \Sigma_Y d\overline{W}(t)$$

En remplaçant cette relation dans l'équation de la richesse du programme (P 1) (4) on obtient celle de la richesse du programme (P 2) (10). En vertu du théorème 1, il s'ensuit que les programmes (P 1) et (P 2) sont équivalents.

Ayant établi le problème de choix de consommation et d'investissement pour un individu (programme P 2), nous pouvons le résoudre en appliquant la méthode usuelle de programmation dynamique stochastique, afin de déterminer les fonctions de demande, le taux d'intérêt et les prix des actifs financiers à l'équilibre.

9. GENNOTTE [1986] cite ce théorème en termes économiques. Pour un traitement mathématique se référer à FLEMING et RISHEL [1975] (chapitre 6) et DAVIS [1976].

5 Processus du taux d'intérêt et équation fondamentale d'évaluation des obligations zéro coupon à l'équilibre

Nous procéderons à l'évaluation des actifs financiers qui se distinguent par leurs caractéristiques contractuelles. Leurs prix sont fonctions, en général, de la richesse de l'individu et des statistiques exhaustives ($w(t)$, $m(t)$, $\gamma(t)$). En restreignant notre analyse aux individus munis de préférences logarithmiques, les prix des titres financiers ne dépendent pas de la richesse. Lorsque l'espérance conditionnelle est l'unique statistique exhaustive (la variance est déterministe), le problème de maximisation de l'espérance de l'utilité de consommation d'un individu sous la contrainte de budget est similaire à celui étudié par MERTON [1971 et 1973], BREEDEN [1979 et 1986] et CIR [1985 a, b] avec la substitution de m(t) à X(t). La prise en compte de deux statistiques exhaustives entraîne des implications importantes pour la détermination du processus du taux d'intérêt et l'évaluation des actifs financiers.

Pour résoudre ce problème, définissons une fonction valeur associée au programme (P 2) :

$$J(w(t),\, m(t),\, \gamma(t),\, t) = \max_{(c,\, k_q,\, k_g)} E_t\left(\int_t^T e^{-\eta s} Lnc(s)\right)$$

Cette fonction valeur, qui est l'utilité indirecte de la richesse, dépend de la richesse de l'individu et des statistiques exhaustives et est égale au maximum de l'espérance d'utilité des consommations futures. C'est la fonction d'utilité indirecte.

• H 10 $\{k_q,\, k_g, c, J\}$ satisfont aux conditions de Lipschitz et de croissance.

• H 11 La fonction valeur est deux fois continûment dérivable.

La fonction d'utilité indirecte satisfait l'équation de Bellman :

$$0 = \max_{(c,\, k_q,\, k_g)} \{e^{-\eta t} Lnc(t) + LJ\left[J(w(t),\, m(t),\, \gamma(t),\, t)\right]\}$$

où $LJ(.)$ est l'opérateur différentiel du processus stochastique tel que :

$$(11) \quad \begin{aligned} 0 = {} & \max_{(c,\, k_q,\, k_g)} e^{-\eta t} Lnc(t) - \eta J \\ & + w \begin{bmatrix} k'_Y(A_t m - r1_n) + \\ k'_g(\mu_g - r1_p) + r - c/w \end{bmatrix} J_w + \mu_m J_m + \mu_\gamma J_\gamma \\ & + \frac{1}{2} w^2 K' \Omega_{ww} K J_{ww} + wK' \left[\Omega_{wm_1} + \Omega_{wm_2} \begin{vmatrix} m(t) \\ \gamma(t) \end{vmatrix}\right] J_{wm} \\ & + 2wK'\Omega_{ww}\gamma(t) J_{w\gamma} + \frac{1}{2}\sigma_m \sigma'_m J_{mm} + \sigma_\gamma \sigma'_\gamma J_{\gamma\gamma} + 2\sigma_m \sigma'_\gamma J_{m\gamma} \end{aligned}$$

où : $K = \begin{vmatrix} k_Y \\ k_g \end{vmatrix}$ est un vecteur partagé de dimension $(n+p, 1)$;

$\Omega_{ww} = \begin{vmatrix} \Sigma_Y \Sigma'_Y & \Sigma_Y \sigma'_g \\ \sigma_g \Sigma'_Y & \sigma_g \sigma'_g \end{vmatrix}$ est une matrice partagée de dimension $(n+p, n+p)$;

$\Omega_{wm_1} = \begin{vmatrix} \Sigma_Y \Sigma'_{X_1Y_1} \\ \sigma_g \Sigma'_{X_1Y_1} \end{vmatrix}$ est un vecteur partagé de dimension $(n+p, 1)$;

$\Omega_{wm_2} = \begin{vmatrix} \Sigma_Y \Sigma'_{X_2Y_2} & \Sigma_Y A_1 \\ \sigma_g \Sigma'_{X_2Y_2} & \sigma_g A_1 \end{vmatrix}$ est une matrice partagée de dimension $(n+p, 2)$;

$\Omega_{w\gamma} = \begin{vmatrix} \Sigma_Y \Sigma'_{X_2Y_2} \\ \sigma_g \Sigma'_{X_2Y_2} \end{vmatrix}$ est un vecteur partagé de dimension $(n+p, 1)$.

Les conditions d'équilibre du premier ordre s'écrivent :

$$0 = e^{-\eta t} \frac{1}{c^*} - J_w \tag{12'}$$

$$\begin{aligned} 0_n = {} & w\,(A_0 + A_1 m - r1_n)\, J_w + w^2\,(\Sigma_Y \Sigma'_Y k^*_Y + \Sigma_Y \sigma'_g k^*_g)\, J_{ww} \\ & + w\Sigma_Y\,(\Sigma'_{X_1Y_1} + \Sigma'_{X_2Y_2} m + A_1\gamma)\, J_{wm} + 2w\Sigma_Y \Sigma'_{X_2Y_2} \gamma J_{w\gamma} \end{aligned} \tag{12''}$$

$$\begin{aligned} 0_p = {} & w\,(\mu_g - r1_p)\, J_w + w^2\,(\sigma_g \Sigma'_Y k^*_Y + \sigma_g \sigma'_g k^*_g)\, J_{ww} \\ & + w\sigma_g\,(\Sigma'_{X_1Y_1} + \Sigma'_{X_2Y_2} m + A_1\gamma)\, J_{wm} + 2w\sigma_g \Sigma'_{X_2Y_2} \gamma J_{w\gamma} \end{aligned} \tag{12'''}$$

où $c*$, k^*_Y et k^*_g sont les solutions optimales de consommation et des proportions du portefeuille d'investissement d'un agent économique. Ces variables à l'optimum dépendent de la richesse de l'individu, des statistiques exhaustives et de la date courante. Pour obtenir l'expression explicite des contrôles optimaux, en résolvant les équations du premier ordre et en les substituant dans l'expression (11), on parvient à une EDP pour J. En remplaçant la solution pour J dans les équations du premier ordre, on obtient, en définitive, $c*$, k^*_Y et k^*_g, en fonction de $w(t)$, $m(t)$, $\gamma\,(t)$ et t. Cependant, les choix individuels $c*$, k^*_Y et k^*_g considèrent que $(A_0 + A_1 m)$, μ_g et $r(t)$ sont donnés. Or, à l'équilibre, ces derniers doivent être déterminés de manière endogène. Il convient, en conséquence, de spécifier les conditions de l'équilibre du marché qui permettent de déterminer le taux d'intérêt d'équilibre, l'espérance du rendement instantané des actifs contingents, le plan total de production et le plan total de consommation.

DÉFINITION : Un équilibre est défini comme un ensemble de processus stochastiques $(r\,(t),\, I_Y\,(A_0 + A_t m\,(t)),\, \mu_g,\, c\,(t))$ satisfaisant aux conditions du premier ordre et aux conditions d'équilibre du marché : $k'_Y 1_n = 1$ et $k_g = 0_P$.

Chaque actif contingent a une offre nette nulle et la somme des proportions investies dans les firmes est égale à un.

En utilisant le modèle d'équilibre général construit ci-dessus, nous déterminons le taux d'intérêt d'équilibre dans une économie partiellement observable et en déduisons l'EDP d'évaluation de l'obligation zéro coupon.

Proposition : A l'équilibre du marché, nous obtenons les résultats suivants.

(i) Le taux d'intérêt instantané est une fonction linéaire de l'espérance conditionnelle $m(t)$:

$$r(t) = \Phi + \Psi m(t) \tag{13}$$

où :

$$\Phi = \frac{1_n' \left(\Sigma_Y \Sigma_Y'\right)^{-1} A_0 - 1}{1_n' \left(\Sigma_Y \Sigma_Y'\right)^{-1} 1_n} \quad \text{et} \quad \Psi = \frac{1_n' \left(\Sigma_Y \Sigma_Y'\right)^{-1} A_1}{1_n' \left(\Sigma_Y \Sigma_Y'\right)^{-1} 1_n}$$

Le processus stochastique du taux d'intérêt instantané s'écrit comme suit :

$$dt(t) = \left[\alpha_0 - \alpha_1 r(t)\right] dt + \left[\sigma_1 + \sigma_2 r(t) + \sigma_3 \gamma(t)\right] d\widetilde{W}(t) \tag{14}$$

où :

$$\alpha_0 = \Psi a_0 - \Phi a_1,\ \alpha_1 = -a_1,\ \sigma_1^2 = \left(\Psi \Sigma_{X_1 Y_1} - \Phi \Sigma_{X_2 Y_2}\right)\left(\Psi \Sigma_{X_1 Y_1} - \Phi \Sigma_{X_2 Y_2}\right)',$$
$$\sigma_2^2 = \Sigma_{X_2 Y_2} \Sigma_{X_2 Y_2}',\ \sigma_3^2 = \Psi^2 A_1' A_1$$

L'EDS de la variance conditionnelle s'écrit :

$$\begin{aligned} d\gamma(t) = {} & \left[\theta_0 + \theta_1 \gamma(t) + \theta_2 \gamma^2(t) + \theta_3 r(t) \gamma(t)\right. \\ & \left. + \theta_4 r(t) + \theta_5 r(t)^2\right] dt + 2\sigma_2 \gamma(t) d\widetilde{W}(t) \end{aligned} \tag{15}$$

où :

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= \Sigma_{X_1} - \left(\Sigma_{X_1 Y_1} - \Sigma_{X_2 Y_2}\right) \Sigma_{X_1 Y_1}' - \frac{\Phi}{\Psi} \left(\Sigma_{X_2} - \Sigma_{X_1 Y_1} \Sigma_{X_2 Y_2}' - \Sigma_{X_2 Y_2} \Sigma_{X_1 Y_1}'\right. \\
&\quad \left. + \Sigma_{X_2 Y_2} A_1 + A_1' \Sigma_{X_2 Y_2}'\right) - \frac{\Phi^2}{\Psi^2} \Sigma_{X_2 Y_2} \Sigma_{X_2 Y_2}', \\
\theta_1 &= 2a_1 - \Sigma_{X_1 Y_1} A_1 - A_1' \Sigma_{X_1 Y_1}' + \frac{\Phi}{\Psi} \left(\Sigma_{X_2 Y_2} A_1 + A_1' \Sigma_{X_2 Y_2}'\right), \\
\theta_2 &= -A_1' A_1, \\
\theta_3 &= -\frac{1}{\Psi} \left(\Sigma_{X_2 Y_2} A_1 + A_1' \Sigma_{X_2 Y_2}'\right), \\
\theta_4 &= \frac{1}{\Psi} \left(\Sigma_{X_2} - \Sigma_{X_1 Y_1} \Sigma_{X_2 Y_2}' - \Sigma_{X_2 Y_2} \Sigma_{X_1 Y_1}'\right) \\
&\quad + 2 \frac{\Phi}{\Psi^2} \Sigma_{X_2 Y_2} \Sigma_{X_2 Y_2}',\ \theta_5 = -\frac{1}{\Psi^2} \Sigma_{X_2 Y_2} \Sigma_{X_2 Y_2}'.
\end{aligned}$$

(ii) L'EDP fondamentale d'évaluation de l'obligation zéro coupon s'écrit :

$$(16) \qquad \begin{aligned}&\frac{1}{2}B_{rr}\left[\sigma_1+\sigma_2 r\left(t\right)+\sigma_3\gamma\left(t\right)\right]^2+B_{\gamma\gamma}\sigma_2^2\gamma\left(t\right)^2\\&\quad+B_r\left[\alpha_0-\alpha_1 r\left(t\right)-\lambda_r\right]\\&\quad+B_\gamma\left[\theta_0+\theta_1\gamma\left(t\right)+\theta_2\gamma^2\left(t\right)+\theta_3 r\left(t\right)\gamma\left(t\right)\right.\\&\qquad\qquad\left.+\theta_4 r\left(t\right)+\theta_5 r\left(t^2\right)-\lambda_\gamma\right]\\&\quad+B_t-r\left(t\right)B=0\end{aligned}$$

avec la condition aux bornes $B\left(r,\gamma,T,T\right)=1$.

où : λ_r et λ_γ sont les primes de risque associées respectivement au taux d'intérêt et à la variance conditionnelle.

DÉMONSTRATION : Afin de résoudre le problème du choix des contrôles optimaux et de déterminer le processus du taux d'intérêt, il est possible de considérer que la fonction d'utilité indirecte est séparable et s'écrit [10] :

$$J\left(w,m,\gamma,t\right)=\frac{\exp(-\eta\tau)}{\eta}Lnw\left(t\right)+h\left(m,\gamma,t\right)$$

où $\tau=T-t$.

Avec cette forme d'utilité les dérivées partielles s'écrivent :

$$J_w=\frac{\exp(-\eta\tau)}{\eta w\left(t\right)},\quad J_{ww}=\frac{\exp(-\eta\tau)}{\eta w^2\left(t\right)},\quad J_{wm}=J_{w\gamma}=0$$

A partir de l'équation (12′), la consommation à l'équilibre est la suivante : $c^*\left(t\right)=\eta w\left(t\right)$

(i) A l'aide des dérivées ci-dessus et par la définition, $k_g^*=0_p$, l'équation (12″) s'écrit :

$$0_n=\left[\left(A_0+A_1 m-r1_n\right)-\Sigma_Y\Sigma_Y' k_Y^*\right]\frac{\exp(-\eta\tau)}{\eta}$$

ce qui entraîne :

$$k_Y^*=\left(\Sigma_Y\Sigma_Y'\right)^{-1}\left(A_0+A_1 m-r1_n\right)$$

Par la définition, on a :

$$1_n k_Y^*=1_n\left(\Sigma_Y\Sigma_Y'\right)\left(A_0 1+A_1 m-r1_n\right)=1$$

ce qui implique :

$$r\left(t\right)=\frac{1_n'\left(\Sigma_Y\Sigma_Y'\right)^{-1}A_0=1}{1_n'\left(\Sigma_Y\Sigma_Y'\right)^{-1}1_n}+\frac{1_n'\left(\Sigma_Y\Sigma_Y'\right)^{-1}A_1}{1_n'\left(\Sigma_Y\Sigma_Y'\right)^{-1}1_n}m\left(t\right)$$

En remplaçant Φ et Ψ par leurs expressions respectives, on obtient (13).

En substituant l'expression du taux d'intérêt (13) dans celle de k_Y' on obtient :

$$(17) \qquad k_Y'=\left(\Sigma_Y\Sigma_Y'\right)^{-1}\left[\left(A_0-\Phi1_n\right)+\left(A_1-\Psi1_n\right)m\left(t\right)\right]$$

10. MERTON [1971 et 1973] a étudié cette forme de la fonction d'utilité indirecte. La fonction d'utilité indirecte dépend des variables d'état par l'intermédiaire de $h\left(t,m\left(t\right),\gamma\left(t\right)\right)$.

En différenciant (13), on obtient :

$$dr(t) = \Psi\, dm(t)$$
$$dr(t) = \Psi\left[a_0 + a_1 m(t)\right] dt + \Psi\left[\Sigma_{X_1Y_1} + \Sigma_{X_2Y_2} m(t) + A_1'\gamma(t)\right] d\overline{W}(t)$$

Remplaçons $m(t)$ par son expression dans l'EDS précédente et définissons un mouvement brownien unidimensionnel tel que :

$$\Psi\left[\Sigma_{X_1Y_1} + \Sigma_{X_2Y_2} m(t) + A_1'\gamma(t)\right] d\overline{W}(t) \equiv \left[\sigma_1 + \sigma_2 r(t) + \sigma_3\gamma(t)\right] d\widetilde{W}(t)$$

En réarrangeant les termes, on parvient à l'EDS (14) de $r(t)$.

De même, après substitution de $m(t)$ dans l'EDS (8) de la variance conditionnelle et en réarrangeant les termes, on obtient l'équation (15).

(ii) Déterminons l'EDP d'évaluation de l'obligation zéro coupon. Puisque avec la fonction d'utilité logarithmique, le taux d'intérêt instantané et les primes de risque - on démontre leurs expressions ci-dessous - ne dépendent pas de la richesse de l'individu, la valeur de tout actif contingent ne dépend pas de la richesse. Par ailleurs, pour évaluer un actif contingent particulier, il convient de préciser les caractéristiques contractuelles et les conditions limites à l'échéance. Dans notre cas, nous procéderons à l'évaluation d'une obligation zero coupon telle que sa valeur à l'échéance $B(T,T) = 1$. Celle-ci, à l'équilibre, est fonction de sa durée de vie et des statistiques exhaustives : $B(\tau, m(t), \gamma(t))$.

D'après l'hypothèse 7, l'EDS de l'obligation s'écrit :

$$\frac{dB}{B} = \mu_B dt + \sigma_B d\overline{W}(t)$$

où : σ_B est un vecteur de dimension $(1,n)$.

Le prix de l'obligation étant fonction du temps et des statistiques exhaustives, en appliquant le lemme d'Itô, le mouvement stochastique du prix de l'obligation s'écrit :

$$\frac{dB(t,T,m,\gamma)}{B(t,T,m,\gamma)} = \frac{1}{B(t,T,m,\gamma)}\begin{bmatrix} B_t + B_m\mu_m + B_\gamma\mu_\gamma + \frac{1}{2}B_{mm}\sigma_m\sigma_m' \\ + \frac{1}{2}B_{\gamma\gamma}\sigma_\gamma\sigma_\gamma' + B_{m\gamma}\sigma_m\sigma_\gamma' \end{bmatrix} dt$$
$$+ \frac{1}{B(t,T,m,\gamma)}\left[B_m\sigma_m + B_\gamma\sigma_\gamma\right] d\overline{W}(t)$$

(18) $$\frac{dB(t,T,m,\gamma)}{B(t,T,m,\gamma)} = \mu_m(t,T,m,\gamma)\, dt + \sigma_B(t,T,m,\gamma)\, d\overline{W}(t)$$

Par ailleurs, à l'équilibre, l'offre totale de l'actif contingent est nulle, $k_g^* = 0_p$, et comme le prix de l'obligation est indépendant de la richesse, l'équation (12‴) pour l'obligation s'écrit :

(19) $$\mu_B - r = \sigma_B \Sigma_Y' k_Y^*$$

où r est déterminé par (13).

En remplaçant μ_B et σ_B par leurs expressions respectives données par (18) dans l'équation (19) et en réarrangeant les termes, on parvient à l'expression de l'EDP fondamentale d'évaluation de l'obligation en fonction des variables $m(t)$ et $\gamma(t)$:

$$\begin{aligned}(20) \qquad & B_t + B_m(\mu_m - \lambda_m) + B_\gamma(\mu_\gamma - \lambda_\gamma) + \frac{1}{2} B_{mm}\sigma_m\sigma'_m \\ & + \frac{1}{2} B_{\gamma\gamma}\sigma_\gamma\sigma'_\gamma + B_{m\gamma}\sigma_m\sigma'_\gamma - rB = 0\end{aligned}$$

où λ_m et λ_γ sont les primes de risque liées respectivement aux statistiques exhaustives : $m(t)$ et $\gamma(t)$. A partir du théorème 2 de CIR (1985 a), les expressions respectives de ces primes sont les suivantes :

$$\lambda_m = k_Y^{*\prime}\Sigma'_Y\sigma'_m$$
$$\lambda_\gamma = k_Y^{*\prime}\Sigma'_Y\sigma'_\gamma$$

L'EDP d'évaluation de l'obligation est fonction de l'espérance conditionnelle $m(t)$. Un changement de variables permet, alors, d'exprimer le prix de l'obligation en fonction du taux d'intérêt. En effet, connaissant l'expression du taux d'intérêt (13), il est possible de calculer les dérivées partielles par rapport à $m(t)$ qui apparaissent dans l'EDP (20) [11]. En remplaçant ces dérivées, on obtient :

$$\begin{aligned}(21) \qquad & B_t + B_r(\mu_m - \lambda_m) + B_\gamma(\mu_\gamma - \lambda_\gamma) + \frac{1}{2} B_{rr}\sigma_m\sigma'_m \\ & + \frac{1}{2} B_{\gamma\gamma}\sigma_\gamma\sigma'_\gamma + B_{r\gamma}\sigma_m\sigma'_\gamma - rB = 0\end{aligned}$$

En effectuant les substitutions nécessaires indiquées ci-dessus, on obtient l'EDP fondamentale d'évaluation de l'obligation zéro coupon (16) [12]. A partir des primes de risque, λ_m et λ_γ, dépendantes de la variable $m(t)$, en effectuant les substitutions nécessaires, on parvient à obtenir une relation des primes de risque en fonction du taux d'intérêt. □

Si le choix optimal du portefeuille d'un investisseur dépend uniquement de la richesse et de la distribution des rendements disponibles actuellement, le choix du portefeuille est dit myope. En effet, au sein d'une économie où

11.
$$B_m = \frac{\partial B}{\partial m} = \frac{\partial B}{\partial r}\frac{\partial(\Phi + \Psi m)}{\partial m} = \Psi B_r$$
$$B_{mm} = \frac{\partial^2 B}{\partial m^2} = \frac{\partial \Psi B_r}{\partial r}\frac{\partial(\Phi + \Psi m)}{\partial m} = \Psi^2 B_{rr}$$
$$B_{m\gamma} = 0$$

12. Le théorème 3 de CIR (1985 a) permet de déterminer l'EDP d'évaluation de tout actif contingent. En conséquence, une option sur obligation suit une EDP similaire à l'EDP (16) de l'obligation.

toutes les variables sont observables, lorsque les préférences des investisseurs sont exprimées par une fonction logarithmique, l'allocation de leur richesse dans les actifs financiers est myope. Autrement dit, MERTON [1973] a démontré que les agents économiques, en établissant leurs demandes de portefeuille, ne tiennent pas compte de la covariance entre la variable d'état économique et les processus de production. En revanche, dans une économie avec information incomplète, les agents économiques munis de préférences logarithmiques, établissent leurs demandes de portefeuille en fonction (par l'intermédiaire de l'écart-type de l'espérance conditionnelle), d'une part, de la covariance entre la variable d'état non observable et les rendements des processus de production et, d'autre part, de la qualité de l'information. En utilisant toute l'information passée, présente et future sur les opportunités d'investissement, ils agissent de manière non myope [13].

Dans le modèle gaussien construit ci-dessus, l'espace des états bidimensionnel caractérisé par le processus stochastique $\{m(t)$ et $\gamma(t)\}$ se substitue à l'unique variable d'état $X(t)$. Le taux d'intérêt et le prix des actifs financiers, en l'occurrence l'obligation zéro coupon, dépendent de la variable $X(t)$, dans le cas d'une économie avec information complète ou de la moyenne conditionnelle $m(t)$ dans le cas du modèle GEFID. Au sein du modèle GEFIS, $\gamma(t)$ est aléatoire et non plus déterministe, et le prix de l'obligation dépend de deux statistiques exhaustives. Cette propriété s'explique par le fait que, d'une part la variance des variations instantanées de $m(t)$ est fonction de $\gamma(t)$ et d'autre part, les primes de risque dépendent également de $\gamma(t)$. DETEMPLE [1991] affirme que cette propriété est vérifiée uniquement au sein du modèle non gaussien. Nous démontrons qu'elle l'est, sous certaines conditions, au sein du modèle gaussien.

Le modèle avec information complète et des individus munis de préférences logarithmiques développé par CIR (1985 b) permet d'exprimer le taux d'intérêt comme une fonction linéaire de la variable d'état parfaitement observable $X(t)$ [14]. En revanche, dans une économie avec information imparfaite, le taux d'intérêt est une fonction linéaire de l'espérance conditionnelle, et possède les mêmes propriétés stochastiques que cette espérance. Dans le cadre du modèle GEFIS, le taux instantané a une tendance avec force de rappel. En d'autres termes, le taux d'intérêt chemine aléatoirement vers sa valeur moyenne observée sur une longue période avec une vitesse d'ajustement (force de rappel), d'autant plus rapide qu'il s'en

---

13. FELDMAN [1992] examine de manière rigoureuse le comportement myope des investisseurs dans le cadre d'une économie avec information incomplète.

14. A titre de rappel, l'expression du taux instantané obtenue par CIR (1985 b) s'écrit de la manière suivante :

$$r(t) = \frac{(1_n' \Sigma_Y^{-1} A_1 - 1)\, X(t)}{1_n' \Sigma_Y^{-1} 1_n} = \overline{\Psi} X(t)$$

$X(t)$ suit un processus "racine carré".

écarte davantage. En outre, la volatilité du taux d'intérêt est une fonction affine du taux d'intérêt et de $\gamma(t)$ [15]. Lorsque la structure de l'information initiale n'est pas gaussienne, la volatilité du taux d'intérêt est une fonction non linéaire uniquement de la variance conditionnelle.

Dans le cadre du modèle d'équilibre général de CIR [1985 b] au sein d'une économie parfaitement observable, LONGSTAFF et SCHWARTZ [1992] déterminent de manière endogène les processus du taux d'intérêt et celui de sa volatilité. Pour ce faire, ils introduisent deux variables d'état qui influencent les paramètres du processus de production. Lorsque l'information est imparfaite, dans le cadre du modèle GEFIS, en raison du caractère aléatoire de la variance conditionnelle, une seule variable d'état permet d'obtenir une volatilité stochastique du taux d'intérêt.

Le modèle GEFIS se distingue essentiellement du modèle GEFID par le caractère aléatoire de la volatilité du taux d'intérêt. Posons $\sigma_{X_2} = 0_m$ et examinons les paramètres des processus des statistiques exhaustives. $\sigma_2 = 0_n$, ce qui implique que la variance des variations de l'espérance conditionnelle n'est fonction que de l'erreur de filtrage. Le terme de diffusion de cette dernière s'annule et elle devient alors déterministe. Notons que $\theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 0$. Il s'ensuit que la volatilité du taux d'intérêt ne dépend alors que de $\gamma(t)$ déterministe. On parvient ainsi au modèle élaboré par Dothan et FELDMAN [1986] et FELDMAN [1989]. Le modèle GEFIS constitue alors une généralisation du modèle GEFID. Par ailleurs, la volatilité du taux d'intérêt au sein du modèle GEFIS est plus élevée que dans le cadre du modèle GEFID.

Dans le cadre du modèle GEFID, la volatilité du taux d'intérêt s'écrit : $\Psi\left(\Sigma_{X_1Y_1} + {}'_1 A'_1 \gamma(t)\right)$. Cette volatilité comporte deux termes. Le premier désigne la covariance instantanée entre le processus des rendements de production et celui de la variable non observable. Autrement dit, ce terme reflète l'impact des mouvements browniens qui constituent les sources d'aléas dans l'économie considérée. Le second terme représente la covariance entre la variable non observable et l'espérance des rendements instantanés de la production (le signe de cette covariance est celui de A'_1). Si les deux covariances se compensent, l'évolution dans le temps de l'espérance conditionnelle, $m(t)$, n'est plus stochastique, bien que les investisseurs sachent que les variables observables et non observable fluctuent de manière aléatoire. La volatilité du taux d'intérêt s'annule et celui-ci devient déterministe. Dans le cas contraire, les deux covariances interagissent et déterminent le comportement de la variance des variations instantanées du taux d'intérêt. Dans une économie parfaitement observable cette variance reflète celle de la variable d'état et la gamme des taux ne peut être que ascendante, descendante ou en bosse. Lorsque l'information est imparfaite DOTHAN et FELDMAN [1986] puis FELDMAN [1989] ont démontré que la volatilité du taux instantané, puisqu'elle dépend de la trajectoire de l'erreur d'estimation, est une fonction croissante, décroissante

15. Parmi les modèles pour lesquelles la volatilité du taux d'intérêt est une fonction d'une ou plusieurs variables d'état, dans une économie parfaitement observable, peuvent être cités : FONG et VASICEK [1991], LONGSTAFF et SCHWARTZ [1992] et DUFFIE et KAN [1993].

ou décroissante-croissante de l'erreur de filtrage. De plus, la prime de risque liée à l'espérance conditionnelle dépend de l'erreur de filtrage. L'effet combiné de la volatilité du taux d'intérêt et de la prime de risque sur le prix des obligations zéro coupon implique que la configuration de la courbe des taux est plus proche de celle observée sur le marché.

Lorsque la covariance entre les rendements instantanés de production et la variable d'état non observable est nulle, $\Sigma_{X_1Y_1} + \Sigma_{X_2Y_2}X(t) = 0$, la volatilité du taux d'intérêt dépend de l'erreur de l'estimation (déterministe) et est égale à $\Psi A_1' \gamma(t)$. En d'autres termes, la volatilité du taux d'intérêt varie en fonction de la dynamique de la qualité de l'information. Une amélioration de la qualité de l'information (diminution de $\gamma(t)$) entraîne une baisse de la volatilité du taux d'intérêt et vice versa. Ce phénomène s'explique par le fait que l'investisseur étant bien informé, il ne réagira que faiblement à toute nouvelle information. Inversement, plus la qualité de l'information est faible, plus la réaction de l'investisseur à une nouvelle information sera importante.

Le modèle GEFIS possède une propriété qui le différencie aussi bien du modèle GEFID que du modèle non gaussien. Au sein d'une économie avec information parfaite (dans le cadre d'équilibre général), la variance des variations du taux instantané est une fonction linéaire de la variance de la variable d'état. En revanche, dans une économie avec information imparfaite, les individus procèdent à l'estimation, à l'aide du filtrage, de la variable non observable compte tenu de l'information procurée par la variable observable. La volatilité du taux d'intérêt est alors une fonction de celle de l'espérance conditionnelle. Dans le modèle GEFID, la volatilité du taux d'intérêt est une fonction linéaire de l'erreur de filtrage. Dans le modèle non gaussien, cette volatilité est une fonction non linéaire de la variance conditionnelle, la dynamique de cette dernière étant stochastique. Dans notre modèle (GEFIS), la volatilité de l'espérance conditionnelle est une fonction affine non seulement de la variance conditionnelle (aléatoire), mais également de son niveau. Ceci nous permet d'exprimer la volatilité du taux d'intérêt comme une fonction affine de son niveau et de la variance conditionnelle.

Lorsque la covariance entre les processus de production et la variable d'état est stochastique, l'espérance et la variance conditionnelles sont aléatoires. Un changement de variable permet d'exprimer les prix des obligations zéro coupon en termes du niveau du taux d'intérêt et de la qualité de l'information des investisseurs. L'EDP (16) avec la condition terminale permet d'obtenir le prix des obligations et constitue par conséquent l'équation fondamentale pour déterminer la structure par terme des taux d'intérêt.

A l'aide du lemme d'Itô et de l'équation (16), la prime de terme, égale à l'excès de rendement de l'obligation zéro coupon, s'écrit :

$$E\left[\frac{dB}{B}\right] - r(t) = \lambda_r \frac{B_r}{B} + \lambda_\gamma \frac{B_\gamma}{B} \tag{22}$$

La prime de terme est une combinaison linéaire des primes de risque associées au taux d'intérêt et à la variance conditionnelle. Le terme (B_r/B) désigne l'élasticité du prix de l'obligation par rapport au taux d'intérêt et montre la variation relative de la valeur de l'obligation zéro coupon due aux fluctuations des taux d'intérêt. Cette sensibilité relative du prix de l'obligation est donc une mesure du risque de l'obligation qui s'apparente à la duration de l'obligation. Le terme B_γ/B représente l'élasticité du prix de l'obligation par rapport à $\gamma(t)$ et peut s'interpréter comme une mesure de l'exposition du prix de l'obligation aux variations de la qualité de l'information.

Dans le cadre du modèle GEFID, l'erreur de filtrage est déterministe et converge vers un état stationnaire. Il s'ensuit que la prime de terme varie dans le temps comme une fonction de la qualité de l'information et converge, par conséquent, asymptotiquement vers une constante. En revanche, dans le modèle GEFIS, cette prime dépend à la fois de $r(t)$ et de $\gamma(t)$ et fluctue aléatoirement dans le temps.

Lorsque les primes de risque liées aux variables d'état sont nulles, l'hypothèse des anticipations locales est vérifiée. Autrement dit, l'espérance du rendement instantané des obligations zéro coupon est égale au taux d'intérêt sans risque. CIR [1981] ont démontré que, au sein d'une économie en temps continu composée d'agents économiques munis de préférences logarithmiques, cette hypothèse est vérifiée si le rendement instantané de la richesse n'est pas corrélé avec les variations instantanées des variables d'état.

Pour examiner l'hypothèse des anticipations locales dans le cadre du modèle GEFIS, réécrivons la relation (22) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E\left[\frac{dB}{B}\right] &= r(t) + K_Y^{*\prime}\Sigma_Y'\left(\Sigma_{X_1Y_1} + \Sigma_{X_2Y_2}m(t) + A_1\gamma(t)\right)\frac{B_r}{B} \\ &\quad + K_Y^{*\prime}\Sigma_Y' 2\Sigma_{X_2Y_2}\gamma(t)\frac{B_\gamma}{B} \end{aligned}$$

L'hypothèse des anticipations locales est vérifiée si $E(dB/B) = r(t)$. Les deux conditions suivantes doivent être simultanément satisfaites : $\Sigma_{X_2Y_2} = 0$ et $\Sigma_{X_1Y_1} + A_1\gamma(t) = 0$. D'une part, la covariance instantanée entre les rendements de la production et la variable non observable n'est plus stochastique, mais constante. D'autre part, $\gamma(t) = -\Sigma_{X_1Y_1}/A_1$, autrement dit, les deux covariances sont de signe opposé et l'erreur de filtrage devient constante.

Ces conditions impliquent que, d'une part, la qualité de l'information n'est pas aléatoire et est même constante et, d'autre part, le taux d'intérêt n'est pas stochastique. En effet, lorsque $\Sigma_{X_2Y_2} = 0$, le modèle GEFIS se réduit au modèle GEFID et lorsque et $\Sigma_{X_1Y_1} + A_1\gamma(t) = 0$ les deux covariances se compensent exactement. Dans ce cas, les processus de production observables n'apportent aucune information sur les variations instantanées de la variable non observable. La volatilité du taux d'intérêt s'annule. Par conséquent, au sein d'une économie partiellement observable, dans le cadre du modèle GEFIS, l'hypothèse des anticipations locales est vérifiée si l'erreur de filtrage est constante et le taux d'intérêt n'est pas stochastique.

6 Conclusion

Tout en ayant relâché l'hypothèse de l'observabilité parfaite des variables d'état, de nombreux résultats de la théorie financière, notamment dans le cadre d'un modèle d'équilibre général, sont vérifiés, après avoir réinterprété de manière appropriée la notion des variables d'état. Bien que l'hypothèse d'une structure de l'information gaussienne ait été retenue, l'espérance et la variance conditionnelles varient de manière aléatoire. En vertu du principe de séparation, ces statistiques exhaustives se substituent à la variable non observable. La volatilité du taux d'intérêt est alors stochastique et est une fonction affine du niveau du taux d'intérêt et de la variance conditionnelle. Notre modèle est une généralisation des modèles gaussiens de la gamme des taux avec information incomplète, modèles au sein desquels la volatilité du taux est déterministe.

Nous supposons qu'une seule variable d'état affecte les processus de production mais, grâce au principe de séparation et en effectuant un changement de variables, le prix des obligations zéro coupon dépend du taux d'intérêt et de la variance conditionnelle. Par rapport aux modèles d'équilibre général à une variable d'état et avec information parfaite, la configuration de la courbe des taux générée par notre modèle ressemble à celle observée sur le marché financier. Par ailleurs, l'hypothèse des anticipations locales, sauf lorsque le taux d'intérêt est déterministe, n'est pas vérifiée dans une économie partiellement observable.

• Références bibliographiques

APELFELD, R., CONZE, A. (1990). – "The Term Structure of Interest Rates : The Case of Imperfect Information", *Working Paper*, University of Chicago.

BREEDEN, D. (1979). – "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities", *Journal of Financial Economics*, 7, pp. 265-296.

BREEDEN, D. (1986). – "Consumption, Production, Inflation and Interest Rates : A Synthesis", *Journal of Financial Economics*, 16, pp. 3- 99.

CHANK, K., KAROLYI, A., LONGSTAFF, F., SANDERS, A. (1992). – "An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate", *The Journal of Finance*, 48, pp. 1209-1227.

COX, J., INGERSOLL, J., ROSS, S. (1981). – "A Reexamination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates", *The Journal of Finance*, 36, pp. 769-799.

COX, J., INGERSOLL, J., ROSS, S. (1985 a). – "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*, 53, pp. 363-384.

COX J., INGERSOLL, J., ROSS, S. (1985 b). – "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*, 53, pp. 385-407.

DAVIS, M.H.A. (1976). – "The Separation Principle in Stochastic Control via Girsanov Solutions", *SIAM Journal on Control and Optimization*, 14, pp. 176-188.

Detemple, J. (1986 a). – “Asset Pricing in a Production Economy with Incomplete Information”, *The Journal of Finance*, 41, pp. 383-391.

Detemple, J. (1986 b). – “A General Equilibrium Model of Asset Pricing with Partial or Heterogeneous Information”, *Finance*, 7, pp. 183-201.

Detemple, J. (1991). – “Further Results on Asset Pricing with Incomplete Information”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15, pp. 425-453.

Dothan, M., Feldman, D. (1986). – “Equilibrium Interest Rates and Multiperiod Bonds in a Partially Observable Economy”, *The Journal of Finance*, 41, pp. 369- 382.

Duffie, D., Kan, R. (1993). – “A Yield-Factor Model of Interest Rates”, *Working Paper*, Graduate School of Business, Stanford University.

Feldman, D. (1986). – “Discussion”, *The Journal of Finance*, 41, pp. 747-749.

Feldman, D. (1989). – “The Term Structure of Interest Rates in a Partially Observable Economy”, *The Journal of Finance*, 44, pp. 789-812.

Feldman, D. (1992). – “Logarithmic Preferences, Myopic Decisions, and Incomplete Information”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 27, pp. 619-629.

Fleming, W., Rishel, R. (1975), *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag.

Fong, G., Vasicek, O. (1991). – “Interest Rate Volatility as a Stochastic Factor”, *Manuscript*, Gifford Fong Associates.

Gennotte, G. (1986). – “Optimal Portfolio Choice under Incomplete Information”, *The Journal of Finance*, 41, pp. 733-746.

Gibbons, M., Ramaswamy, K. (1988). – “The Term Structure of Interest Rates : Empirical Evidence”, *Working Paper*, Columbia Business School.

Haussman, U., Pardoux, E. (1988). – “A Conditionally Almost Linear Filtering Problem with Non-Gaussian Initial Condition”, *Stochastics*, 23, pp. 241-275.

Kallianpur, G. (1980), *Stochastic Filtering Theory*, Springer-Verlag.

Liptser, R., Shiryayev, A. (1977), *Statistics of Random Processes I and II : General Theory*, Springer-Verlag.

Longstaff, F., Schwartz, E. (1992). – “Interest Rate Volatility and the Term Structure : A Two-Factor General Equilibrium Model”, *The Journal of Finance*, 48, pp. 1259-1282.

Merton, R. (1971). – “Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model”, *Journal of Economic Theory*, 3, pp. 373-413.

Merton, R. (1973). – “An Intertemporal Capital Asset Pricing Model”, *Econometrica*, 41, pp. 867-887.

Pearson, N., Sun, T.S. (1991). – “An Empirical Examination of the Cox, Ingersoll and Ross Model of the Term Structure of Interest Rates”, *Working Paper*, University of Houston.

Vasicek, O. (1977). – “An Equilibrium Characterization of the Term Structure”, *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 339-348.