ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 51 — 1998

Choix social positionnel et principe majoritaire

Dominique LEPELLEY, Vincent MERLIN*

RÉSUMÉ. – Un résultat bien connu en théorie du Choix Social est le suivant : toutes les règles fondées sur des classements par points (règles dites "positionnelles") violent le principe majoritaire tel qu'il est défini par Condorcet. Nous explorons dans le présent article les limites de ce résultat négatif. Des versions affaiblies du principe de Condorcet sont introduites, et les règles positionnelles qui les vérifient sont caractérisées. Nous mesurons en outre la propension de certaines règles particulières à violer ces conditions majoritaires.

Positional Social Choice and Majority Principle

ABSTRACT. – A well-known result in Social Choice theory is the following: every scoring rule violates the majority principle as defined by Condorcet. In this paper, we investigate some limits of this negative result. Some weakened versions of Condorcet principle are introduced and we characterize those scoring rules which fulfill these conditions. Moreover, we evaluate the propensity of some scoring rules to violate these majority conditions.

* D. LEPELLEY et V. MERLIN, Université de Caen. Les auteurs remercient les deux rapporteurs anonymes dont les remarques et suggestions ont permis d'améliorer la présentation de ce travail.

1 Introduction

La théorie du Choix Social s'intéresse à la conception et la mise en œuvre des mécanismes permettant d'agréger des préférences individuelles en un choix collectif. Lorsque la société doit choisir entre deux options, et deux seulement, le mécanisme le plus simple et le plus couramment utilisé consiste en un vote majoritaire : l'option *a* constitue le choix social si le nombre d'agents qui préfèrent *a* à *b* est supérieur au nombre d'agents qui préfèrent *b* à *a*. Le résultat de caractérisation de MAY [1952] constitue une justification théorique de cette pratique : dans un choix binaire, le vote majoritaire est la seule règle *équitable* (elle n'introduit aucune discrimination entre les agents et traite les options soumises au choix de manière identique) et *rationnelle* (en ce sens qu'elle "répond" de manière logique à une modification des préférences individuelles). C'est aussi le seul mécanisme équitable et *non manipulable* (cf. MOULIN [1980]).

Lorsque le nombre d'options à départager est au moins égal à trois, les résultats que nous venons d'évoquer suggèrent très naturellement de déduire la préférence collective d'une succession de choix binaires fondés sur la règle majoritaire. Cette idée d'agréger des choix binaires pour définir le choix collectif remonte à CONDORCET [1785], qui proposait de choisir l'option capable de battre chacune des autres dans des duels majoritaires (une telle option est qualifiée de *majoritaire* dans ce qui suit). La mise en œuvre de ce principe se heurte cependant à une difficulté majeure, dont Condorcet était lui-même conscient : l'option majoritaire n'existe pas toujours. Le fameux paradoxe de Condorcet constitue l'exemple type d'une situation dans laquelle la règle majoritaire s'avère incapable de conduire à un choix collectif cohérent. L'on sait aujourd'hui que cette difficulté n'est pas propre à la règle majoritaire : le théorème d'ARROW [1963] et sa descendance la plus directe montrent que tout mécanisme de choix social fondé sur des choix binaires viole certaine(s) propriété(s) d'équité et/ou de rationalité.

Le principe de Condorcet n'en a pas moins conservé une grande importance dans la théorie du Choix Social, en tant que norme ou référence dans l'évaluation des règles de décision collective. Il apparaît alors comme un critère ou une condition permettant de vérifier la conformité de la règle étudiée au principe majoritaire : on dit d'une règle d'agrégation qu'elle vérifie la *condition (ou critère) de Condorcet* si et seulement si elle sélectionne l'option majoritaire lorsque celle-ci existe.

Les difficultés inhérentes à l'agrégation des choix binaires (qu'ils soient majoritaires ou non) conduisent à envisager d'autres mécanismes d'agrégation des préférences individuelles. Une pratique très courante consiste à fonder le choix social sur les positions qu'occupent les différentes options dans les ordres de préférence des agents. La règle proposée par BORDA [1781] constitue l'exemple le plus significatif de ces méthodes de classement par points : si *m* options sont en présence, chacune d'elle reçoit *m*-1 points pour une première place, *m*-2 points pour une deuxième place, ..., 1 point pour une avant- dernière place et 0 point pour une dernière place. Il est bien clair que la règle de Borda n'est pas le seul mécanisme de ce type que l'on peut envisager : il suffit de modifier le nombre de points attribués à chaque position dans les ordres de préférence individuels pour obtenir une nouvelle règle. On définit ainsi une classe importante de règles de choix social, que l'on peut qualifier de *positionnelles*.

Les règles positionnelles ont fait l'objet de nombreuses analyses. Les contributions les plus marquantes sont dues à SMITH [1973], YOUNG [1975] et SAARI [1994]. Les résultats présentés par ces trois auteurs mettent en évidence certaines propriétés très naturelles que les mécanismes positionnels sont les seuls à vérifier; ils constituent indubitablement de puissants arguments en faveur de l'adoption d'une approche positionnelle.

On sait malheureusement depuis CONDORCET [1785] que la règle de Borda peut sélectionner une option différente de l'option majoritaire et qu'il en est ainsi de *toutes* les règles positionnelles. Il existe donc une contradiction apparemment fondamentale entre l'approche positionnelle à la Borda et le principe majoritaire de Condorcet. Nous nous proposons dans le présent article d'étudier la *portée* et les *limites* de cette contradiction. Diverses considérations ont motivé et orienté notre démarche.

– L'approche positionnelle consiste à associer à chaque option un score calculé sur la base des positions qu'elle occupe dans les ordres de préférence individuels. Les règles positionnelles que nous avons décrites ci-dessus choisissent alors l'option dont le score est le plus élevé. Il existe cependant une autre possibilité qui consiste à éliminer l'option dont le score est le plus faible; les scores des options restantes sont alors recalculés et une nouvelle option est éliminée. Le processus se poursuit jusqu'à ce qu'il ne reste plus (idéalement) qu'une seule option. On définit ainsi une nouvelle classe de mécanismes que l'on peut, au même titre que les précédents, qualifier de positionnels. Un exemple bien connu de mécanisme de ce type a été proposé par NANSON [1882] qui suggère d'éliminer, à chaque étape du processus séquentiel, l'option dont le score de Borda est le plus faible. Or il n'est pas difficile d'établir que la règle de Nanson vérifie le critère de Condorcet (voir, par exemple SMITH [1973]). Ce résultat positif semble indiquer que l'approche positionnelle et le principe majoritaire sont sans doute moins inconciliables qu'il n'y paraît. Il suggère en outre que l'introduction de plusieurs tours dans un système positionnel est de nature à en améliorer les "performances" majoritaires. Pour cette raison, une partie des développements qui vont suivre est consacrée aux règles positionnelles procédant par éliminations successives.

– La condition de Condorcet ne constitue pas, d'autre part, le seul critère susceptible de rendre compte du principe majoritaire. D'autres critères, généralement moins exigeants, ont été proposés dans la littérature (notamment par FISHBURN [1977] et RICHELSON [1978]) et rien n'empêche d'en introduire de nouveaux. On peut ainsi imposer à une règle de choix collectif de ne jamais choisir une option battue par toutes les autres dans des confrontations majoritaires ou bien encore de toujours sélectionner une option classée en tête par plus de la moitié des individus. Dans quelle mesure les règles positionnelles (à un ou plusieurs tours) vérifient-elles ces critères? La réponse à cette question nous permettra non seulement de cerner les limites du conflit oppposant principe majoritaire et méthodes positionnelles, mais aussi de mettre en évidence les mérites particuliers de certains mécanismes.

– Enfin, si le viol du critère de Condorcet (ou d'autres critères de type majoritaire) constitue à l'évidence une limite théorique importante des règles positionnelles, il nous semble pertinent de s'interroger sur la portée de cet inconvénient, en mesurant la fréquence du viol des conditions majoritaires. L'intérêt de ce type d'investigation est d'une double nature : il s'agit d'une part d'évaluer la dimension concrète de la contradiction qui nous intéresse; d'autre part de comparer et de hiérarchiser diverses règles positionnelles sur la base de leur propension (plus ou moins élevée) à violer les critères majoritaires.

L'article est organisé de la manière suivante. La Section 2 présente le cadre formel de l'étude et la notion de règle positionnelle. La Section 3 introduit diverses conditions, toutes issues du principe majoritaire, et la Section 4 se propose d'identifier les règles positionnelles qui vérifient certaines de ces conditions. Les résultats obtenus permettent de comparer les performances majoritaires de quelques règles particulières. Cette comparaison se poursuit dans la Section 5 par des calculs de nature probabiliste. Il s'agit essentiellement d'évaluer, pour les règles considérées, la fréquence théorique du viol des propriétés majoritaires introduites dans la Section 3. Les résultats que nous présentons dans cette section complètent ceux qu'ont obtenus récemment GEHRLEIN [1992, 1995] et LEPELLEY [1993]. La Section 6 conclut l'article.

2 Règles positionnelles : notation et définitions

Soit $A = \{a_1, ..., a_t, ..., a_m\}$ l'ensemble des options, avec $m \geq 3$. Lorsque la numérotation des options ne présente pas d'intérêt particulier, les éléments de A seront simplement notés a, b, c ... L'ensemble de tous les sous-ensembles non vides de A est noté 2^A. $N = \{1, ..., i, ..., n\}$ est l'ensemble des agents participant à la décision collective. Nous supposerons que tous sont capables de donner, en accord avec leur préférence sincère, un classement sans *ex aequo* de toutes les options soumises au choix. Mathématiquement, l'opinion de l'agent i est représentée par un ordre strict P_i, c'est à dire par une relation binaire transitive $(\forall a, b, c \in A : \; aP_ib \; et \; bP_ic \; \Rightarrow \; aP_ic)$, quasi complète $(\forall a, b \in A : a \neq b \; \Rightarrow \; aP_ib \; ou \; bP_ia)$ et asymétrique $(\forall a, b \in A : \; aP_ib \; \Rightarrow \; non \; bP_ia)$ définie sur $A \times A$. $L(A)$ est l'ensemble de tous les ordres stricts possibles. La donnée d'une préférence pour chaque agent i est appelée un profil et notée $\pi = (P_1, ..., P_i, ..., P_n)$. La notion de *correspondance de choix collectif* permet d'associer à tout état de l'opinion, *i.e.* à tout profil, un sous-ensemble d'options -celles que la collectivité juge les meilleures-.

DÉFINITION 1 : Une correspondance de choix collectif est une fonction f définie sur $L(A)^n$ à valeurs dans 2^A.

Les règles positionnelles (ou classements par points) sont des correspondances de choix social définies *via* un *vecteur score* $v = (v_1, ..., v_t, ..., v_m)$ où v_t est le nombre de points obtenus pour une $t^{ème}$ place. Nous supposerons dans ce qui suit que le vecteur score est monotone et décisif, ce qui revient à poser $v_t \geq v_{t+1}$ $\forall t = 1, ..., m-1$ et $v_1 > v_m$. Nous normerons en outre v de telle manière que $v_1 = 1$ et $v_m = 0$ car un classement par points est défini à une transformation affine positive près. Soit $r(i, a)$ le rang de l'option a dans l'ordre de préférence de l'agent i. Etant donné un profil π et un vecteur score v, nous noterons $S(v, \pi, a)$ le score de l'option a, avec $S(v, \pi, a) = \sum_{i \in N} v_{r(i,a)}$.

DÉFINITION 2 : Soit v un vecteur score. Une règle positionnelle simple (R.P.S.) notée f_v est une correspondance de choix collectif telle que :

$$\forall \pi \in L(A)^n,\ (a \in f_v(\pi) \iff S(v, \pi, a) \geq S(v, \pi, b)\ \forall b \in A).$$

Une R.P.S. choisit donc l'option (ou les options en cas d'*ex aequo*) dont le score est le plus élevé. Les règles les plus connues sont le vote à la majorité simple (ou règle de la pluralité), qui sélectionne l'option le plus souvent classée en tête dans les ordres de préférence des agents (on a alors $v = (1, 0, ..., 0)$); la règle de l'antipluralité, qui choisit l'option le moins souvent classée dernière ($v = (1, ..., 1, 0)$), et la règle de Borda, présentée en introduction et dont la forme normée s'écrit $v = (1, \frac{m-2}{m-1}, ..., \frac{1}{m-1}, 0)$.

On peut aussi, nous l'avons dit, utiliser les classements par points dans des processus de sélection à plusieurs tours. Pour tout entier $p, 2 \leq p \leq m$, on note $v^p = (1, v_2^p, ..., v_{p-1}^p, 0)$ le vecteur de points (supposé monotone) utilisé pour calculer le score des p options qui restent en lice, sur la base des préférences restreintes à ces options. Une liste de vecteurs $v^2, v^3, ..., v^p, ..., v^m$ est notée v^*. Pour tout v^p et tout sous-ensemble $B \subset A$ de cardinal p, $L(v^p, \pi, B)$ désigne l'ensemble des perdants, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de B qui ont le moins de points. Formellement,

$$L(v^p, \pi, B) = \{a \in B : S(v^p, \pi, a) \leq S(v^p, \pi, b)\ \forall b \in B,$$

$$et\ \exists b \in B : S(v^p, \pi, a) < S(v^p, \pi, b)\}.$$

Lorsque B ne contient qu'un élément, nous posons conventionnellement $L(v^1, \pi, B) = \emptyset$. On peut alors définir les règles positionnelles itératives de la manière suivante.

DÉFINITION 3 : Soit v^* une liste de vecteurs score. Une règle positionnelle itérative (R.P.I.) notée f_{v^*} est une correspondance de choix collectif telle que, $\forall \pi \in L(A)^n, a \in f_{v^*}(\pi) \iff a \in B_1$, où B_1 est l'ensemble défini par la récurrence :

$$B_m = A \text{ et } B_{k-1} = B_k \setminus L(v^{|B_k|}, \pi, B_k),\ k = m, ..., 2.$$

Cette formulation autorise toutes les combinaisons de règles positionnelles simples. Il est ainsi parfaitement possible d'utiliser dans une même R.P.I. $v^5 = (1,0,0,0,0)$, $v^4 = (1,\frac{9}{10},\frac{2}{10},0)$, $v^3 = (1,\frac{1}{10},0)$ et $v^2 = (1,0)$. Cependant, les R.P.I. les plus courantes utilisent la même logique à chaque étape du processus; il en est ainsi des règles proposées par (ou attribuées à) HARE [1859], COOMBS [1954] et NANSON [1882], qui constituent, respectivement, les versions itératives des règles de la pluralité, de l'antipluralité et de Borda [1].

On notera d'autre part que les options peuvent ne pas être éliminées une à une si plusieurs d'entre elles ont le même plus mauvais score. En outre, si toutes les options obtiennent le même nombre de points lors d'une étape, il n'y a aucune élimination : l'ensemble de choix est alors constitué de toutes les options restant en lice. Nous n'avons pas introduit dans la présente étude de mécanismes permettant de départager les *ex aequo* lorsqu'il y en a. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes situé dans le cadre des *correspondances de choix collectif* et non dans celui des *fonctions de choix collectif* qui associent à tout profil un et un seul élément de A. Il convient cependant de souligner que les résultats présentés dans la Section 4 restent valides lorsque sont pris en compte des mécanismes de "bris d'égalité" (*cf.* LEPELLEY [1989]).

3 Conditions majoritaires

Le cadre d'analyse développé dans la section précédente permet de définir la notion d'option majoritaire (ou vainqueur de Condorcet) et la condition *MAJ1* (ou critère de Condorcet) de la manière suivante.

DÉFINITION 4 : Soit π un profil. L'option a est dite majoritaire si et seulement si :

$$\#\{i \in N : \ aP_ib\} \ > \ n/2 \ \ \forall b \in A \setminus \{a\}.$$

Une correspondance de choix collectif vérifie la condition *MAJ1* (ou critère de Condorcet) si et seulement si l'option majoritaire, lorsqu'elle existe, constitue seule le choix collectif.

Aucune R.P.S. ne vérifie la condition *MAJ1* (CONDORCET [1785]) et la règle de Nanson est la seule R.P.I. qui la vérifie. Cette condition est

1. La règle de Hare est parfois appelée "vote préférentiel" ou "vote alternatif" (le vote majoritaire à deux tours, tel qu'on l'utilise en France pour les élections présidentielles, constitue une version tronquée de cette règle dans laquelle le deuxième et dernier tour ne retient que les deux options les mieux classées). La règle de Coombs a été étudiée par BLACK [1958] sous l'appellation de "vote exhaustif".

cependant loin de constituer une référence intangible et diverses critiques ont été émises à son encontre (voir, par exemple DUMMMETT [1984] et SAARI [1994]). Ces critiques ne signifient pas pour autant qu'il faille rejeter le principe majoritaire. Elles indiquent simplement que la condition *MAJ1* est parfois trop forte et elles justifient l'introduction de conditions majoritaires moins exigeantes. Un premier type d'affaiblissement est fondé sur la notion d'option $minoritaire$ (ou *perdant de Condorcet*).

DÉFINITION 5 : Soit π un profil. L'option a est dite minoritaire si et seulement si :

$$\#\{i \in N : \; aP_ib\} \; < \; n/2 \;\; \forall b \in A \setminus \{a\}.$$

Une correspondance de choix collectif vérifie la condition *MAJ2* si et seulement si l'option minoritaire, lorsqu'elle existe, n'appartient pas à l'ensemble de choix.

Bien que cette condition soit nettement moins exigeante que la condition *MAJ1*, il se trouve que parmi les R.P.S., seule la règle de Borda la vérifie (FISHBURN et GEHRLEIN [1976]); c'est en ce sens que ces deux auteurs ont pu qualifier d'optimale la règle imaginée par Borda.

Il est clair en revanche que, sauf cas exceptionnels liés à la présence d'*ex aequo*, l'option minoritaire ne peut être choisie lors d'un processus à plusieurs tours puisque celle-ci ne peut remporter le duel majoritaire final : toutes les R.P.I. vérifient donc (en l'absence d'*ex aequo*) la condition *MAJ2*.

Les notions d'option majoritaire et d'option minoritaire souffrent cependant d'un même défaut. La majorité qui soutient a contre b peut en effet fortement différer de celle qui soutient a contre un autre rival. Ainsi, une option peut être majoritaire sans réellement bénéficier de soutiens fermes dans la population, puisque ceux-ci peuvent changer lors de chaque confrontation. RICHELSON [1978] propose alors de ne tenir compte que des situations ou l'on peut trouver une option a soutenue par la même majorité contre toutes les autres, ce qui suppose que tous les individus constituant cette majorité classent a en première position. Une telle option est qualifiée de *fortement majoritaire* et permet de définir la condition *MAJ3*.

DÉFINITION 6 : Soit π un profil. L'option a est dite fortement majoritaire si et seulement si :

$$\#\{i \in N : \; aP_ib \, \forall b \in A \setminus \{a\}\} \; > \; n/2.$$

Une correspondance de choix collectif vérifie la condition *MAJ3* si et seulement si l'option fortement majoritaire, lorsqu'elle existe, constitue seule le choix collectif.

De la même manière, on définit la notion d'option *fortement minoritaire* et la condition *MAJ4*, qui constitue vraisemblablement la condition de type majoritaire la plus faible que l'on puisse imaginer. Il serait en effet tout à fait paradoxal qu'une option classée dernière par plus de la moitié des agents soit choisie par la collectivité.

DÉFINITION 7 : Soit π un profil. L'option a est dite fortement minoritaire si et seulement si :

$$\#\{i \in N : \ bP_i a \ \forall b \in A \setminus \{a\}\} \ > \ n/2.$$

Une correspondance de choix collectif vérifie la condition *MAJ4* si et seulement si l'option fortement minoritaire, lorsqu'elle existe, n'appartient pas à l'ensemble de choix.

A l'évidence, les conditions *MAJ3* et *MAJ4* sont logiquement plus faibles que (respectivement) les conditions *MAJ1* et *MAJ2*. Il en résulte, notamment, que la règle de Nanson vérifie *MAJ3* et que la règle de Borda vérifie *MAJ4*. Ce ne sont pas, cependant, les seules classements par points à posséder ces propriétés. L'objet de la section suivante est précisément de caractériser l'ensemble des règles positionnelles (simples et itératives) qui vérifient les conditions *MAJ3* et *MAJ4*.

4 Résultats de caractérisation

Le premier résultat que nous présentons concerne les R.P.S. et la condition *MAJ3*.

THÉORÈME 1 : Une R.P.S. f_v vérifie la condition *MAJ3* si et seulement si $v = (1, 0, ..., 0)$.

Preuve: Si $v = (1, 0, ..., 0)$, f_v est la règle de la pluralité et il est clair que cette règle vérifie la condition *MAJ3*. Il reste à montrer que pour tout vecteur score $v = (v_1, v_2, ..., v_m)$ différent de $(1, 0, ..., 0)$, on peut trouver un profil π possédant une option fortement majoritaire qui n'appartient pas à $f_v(\pi)$. Soit x un entier tel que le produit xv_2 soit supérieur ou égal à 1, et π un profil de $2x + 1$ agents, constitué de la manière suivante : $x + 1$ agents classent l'option a en première position et l'option b en deuxième position; les autres agents classent tous b au premier rang et a en dernière position. L'option a est donc fortement majoritaire et l'on obtient $S(v, \pi, a) = x + 1$ et $S(v, \pi, b) = x + (x + 1)v_2 = x + xv_2 + v_2$. Puisque xv_2 est supérieur ou égal à 1, le score de l'option a est strictement inférieur à celui de l'option b et l'option a, bien que fortement majoritaire, n'appartient pas à l'ensemble de choix. □

La règle de la pluralité (ou vote à la majorité simple) est donc la seule règle positionnelle simple vérifiant *MAJ3*. Ce résultat n'est pas véritablement étonnant, dans la mesure où la condition *MAJ3* ne tient compte que du nombre de premières places dans les ordres de préférence individuels, ce qui ramène naturellement vers la règle de la pluralité. On pourrait penser que le théorème 1 constitue un argument décisif en faveur du vote à la majorité simple. Nous verrons dans la Section 5 qu'il n'en est rien : l'argument perd une grande partie de sa valeur lorsque le nombre d'options est supérieur à quatre et le nombre d'agents élevé. Il n'en reste pas moins que le théorème 1 relativise le caractère optimal de la règle de Borda (qui viole *MAJ3*).

Le résultat suivant montre qu'un grand nombre de règles positionnelles itératives vérifient la condition *MAJ3* et confirme l'idée intuitive selon laquelle l'introduction de plusieurs tours améliore l'aptitude des règles positionnelles à vérifier le principe majoritaire.

THÉORÈME 2 : Une R.P.I. f_{v^*} vérifie la condition *MAJ3* si et seulement si, pour tout $p \in \{2, ..., m\}, \sum_{j=1}^{p} v_j^p \leq p/2$.

Preuve : *Suffisance*. Considérons un profil possédant une option fortement majoritaire, et supposons $\sum_{j=1}^{p} v_j^p \leq p/2$ pour tout $p = 2, \ldots, m$. Cela implique qu'à chaque tour, le score moyen des p options en présence est inférieur ou égal à $n(p/2)/p = n/2$. D'autre part, le score de l'option fortement majoritaire est, par définition, strictement supérieur à $n/2$ puisqu'elle est classée en première position par plus de la moitié des agents. Cette option ne peut donc être éliminée et, *in fine*, constitue (seule) le choix collectif.

Nécessité. Nous allons prouver que s'il existe une étape p pour laquelle $\sum_{j=1}^{p} v_j^p > p/2$, il est toujours possible de construire un profil π où l'option fortement majoritaire n'est pas sélectionnée. Soit p' le plus grand entier de $\{2, \ldots, m\}$ tel que $\sum_{j=1}^{p'} v_j^{p'} > p'/2$. Nous utiliserons les profils π_1 et π_2 suivants :

- π_1 est un profil de $p' - 1$ individus, où a_1 est toujours classé en tête. Les options $a_2, \ldots, a_{p'}$ occupent toutes une fois les places 2 à p'. Si j est supérieur à p', a_j occupe toujours le rang j.
- π_2 est un profil de $p' - 1$ individus, où a_1 est toujours classé en p'^{ieme} position dans les préférences. Les options $a_2, \ldots, a_{p'}$ occupent toutes une fois chacune des $p' - 1$ premières places. Enfin, si $j > p'$, a_j est toujours classé au rang j

$\underline{exemple}$: $m = 6, p' = 4, m - p' = 2.$

	π_1			π_2	
a_1	a_1	a_1	a_2	a_4	a_3
a_2	a_4	a_3	a_3	a_2	a_4
a_3	a_2	a_4	a_4	a_3	a_2
a_4	a_3	a_2	a_1	a_1	a_1
a_5	a_5	a_5	a_5	a_5	a_5
a_6	a_6	a_6	a_6	a_6	a_6

Soit un entier x tel que $x(2\sum_{j=1}^{p'} v_j^{p'} - p') > 1$. Considérons le profil π composé de x répliques des profils π_1 et π_2, auxquelles on ajoute la préférence suivante : $a_1 P_i a_2 \ldots a_{m-1} P_i a_m$. L'option a_1 bat toutes les autres options d'au moins une voix dans les comparaisons par paires et est une option fortement majoritaire pour le profil π. Pour toutes les étapes $p, p \geq p'$, l'option a_p obtient un score nul, et est éliminée seule ou non. Les options $a_1, \ldots, a_{p'}$ obtiennent toujours des scores positifs et restent en course. Selon ce processus, les options $a_{p'+1}, \ldots, a_m$ sont toutes éliminées en au plus $m-p'$ tours. Seules restent en lice les options $a_1, \ldots, a_{p'}$, et on utilise le vecteur point $v^{p'}$ pour les départager. Les scores sont alors :

$$S(v^{p'}, \pi, a_1) = x(p'-1)+1,$$

$$\begin{aligned} S(v^{p'}, \pi, a_j) &= x\sum_{k=1}^{p'-1} v_k^{p'} + x\sum_{k=2}^{p'} v_k^{p'} + v_j^{p'} \\ &= x(2\sum_{k=1}^{p'} v_k^{p'} - v_{p'}^{p'} - 1) + v_j^{p'},\ \forall\ j=2,\ldots,p' \end{aligned}$$

Comme $v^{p'}$ est monotone, toutes les options $a_2, \ldots, a_{p'-1}$ ont un score supérieur ou égal à celui de $a_{p'}$. Par ailleurs, compte tenu de la convention $v_1^p = 1$ et $v_p^p = 0$, il vient :

$$S(v^{p'}, \pi, a_{p'}) - S(v^{p'}, \pi, a_1) = x(2\sum_{k=1}^{p'} v_k^{p'} - p') - 1 > 0.$$

En conséquence, a_1 obtient le score le plus faible et est éliminé. L'option fortement majoritaire n'est donc pas choisie. □

On déduit en particulier de ce résultat que la règle de Hare vérifie *MAJ3* (dans ce cas, $\sum_{j=1}^{p} v_j^p = 1 \leq p/2\ \forall p \geq 2$) tandis que la règle de Coombs viole cette condition (on a dans ce cas $\sum_{j=1}^{p} v_j^p = p-1 > p/2\ \forall p \geq 3$).

Le dernier théorème de cette section permet d'identifier les règles positionelles simples qui vérifient la condition *MAJ4*.

THÉORÈME 3 : Une R.P.S. f_v vérifie la condition *MAJ4* si et seulement si $\sum_{j=1}^{m} v_j \geq m/2$.

Preuve: *Suffisance*. Soit π un profil dans lequel une option, disons a_1, est fortement minoritaire. Supposons que $\sum_{j=1}^{m} v_j \geq m/2$. Si a_1 l'emporte, on a $S(v,\pi,a_1) \geq S(v,\pi,a_j)$, $\forall\ a_j \in A$. En additionant les m inégalités précédentes, on obtient $S(v,\pi,a_1) \geq (1/m)\sum_{j=1}^{m} S(v,\pi,a_j) = (1/m)(n\sum_{j=1}^{m} v_j)$, d'où $S(v,\pi,a_1) \geq n/2$ puisque $\sum_{j=1}^{m} v_j \geq m/2$. Cependant, comme a_1 est classée dernière par plus de la moitié des individus, son score est obligatoirement inférieur à n/2, une contradiction. Une option fortement minoritaire ne peut donc être choisie si $\sum_{j=1}^{m} v_j \geq m/2$.

Nécessité. Nous allons montrer que si $\sum_{j=1}^{m} v_j < m/2$, il est toujours possible de construire un profil où l'option fortement minoritaire appartient à l'ensemble de choix. Soit x un entier tel que $x(m-2\sum_{j=1}^{m} v_j) > 1$ (ceci est toujours possible car $\sum_{j=1}^{m} v_j < m/2$). Le profil π est constitué à partir de x répliques des profils suivants :

- π_1 est un profil de $m-1$ individus, où a_1 est toujours classé premier, et où les autres options occupent chacune une fois toutes les places restantes.
- π_2 est aussi un profil de $m-1$ votants, mais ici a_1 occupe toujours la dernière place. Les autres options occupent chacune une fois toutes les places restantes.

Le profil final est formé de x répliques de π_1 et π_2, auxquelles on ajoute la préférence P_i, où toute option a_j est classée au rang j, sauf a_m et a_1 qui sont respectivement première et dernière. Dès lors, a_1 est une option fortement minoritaire pour ce profil π. Les scores des différentes options sont les suivants :

$$S(v, \pi, a_1) = x(m-1),$$

$$S(v, \pi, a_j) = x\sum_{j=2}^{m} v_j + x\sum_{j=1}^{m-1} v_j + v_j = -x + v_j + 2x\sum_{j=1}^{m} v_j, \ \forall j = 2, \ldots, m-1,$$

$$S(v, \pi, a_m) = x\sum_{j=2}^{m} v_j + x\sum_{j=1}^{m-1} v_j + 1 = -x + 1 + 2x\sum_{j=1}^{m} v_j.$$

On constate que le score de a_m est supérieur à celui des options a_j, j= 2,. . .,m-1, et que $S(v, \pi, a_1)$ - $S(v, \pi, a_m)$ = $x(m - 2\sum_{j=1}^{m} v_j) - 1$. Puisque $\sum_{j=1}^{m} v_j < m/2$, cette différence est strictement positive, et a_1 appartient à l'ensemble de choix bien qu'étant fortement minoritaire . $\square$

Ainsi, la règle de l'antipluralité vérifie-t-elle *MAJ4*, contrairement à la règle de la pluralité qui est susceptible d'élire une option fortement minoritaire. De manière générale, le théorème 3 montre que, pour se prémunir contre l'élection d'une option fortement minoritaire, une R.P.S. doit distribuer suffisamment de points (au moins autant que la règle de Borda).

Pour conclure cette section, on notera que les règles positionnelles itératives, qui vérifient la condition *MAJ2* (lorsque leur application ne donne pas d'*ex aequo*), vérifient aussi la condition *MAJ4* logiquement plus faible.

5 Calculs d'efficacité majoritaire

Afin de compléter les résultats qui précèdent, nous nous intéressons dans cette section au calcul de *l'efficacité majoritaire* de certaines procédures positionnelles. La notion d'efficacité majoritaire, qui mesure indirectement la fréquence theorique du viol des conditions majoritaires, a été proposée par FISHBURN [1974]. Celui-ci la définit, pour une règle donnée, comme la probabilité conditionnelle de choisir l'option majoritaire lorsqu'une telle option existe. Dans sa version originelle, la notion d'efficacité majoritaire concernait donc la seule condition *MAJ1*. Il est clair cependant que l'on peut l'étendre à l'ensemble des conditions introduites plus haut. Précisément, nous définirons *l'efficacité majoritaire de type 1 (de type 3)* d'une règle particulière comme la probabilité de choisir l'option majoritaire (fortement majoritaire) lorsque celle-ci existe; de la même façon, *l'efficacité majoritaire de type 2 (de type 4)* est la probabilité de choisir une option différente de l'option minoritaire (fortement minoritaire) lorsqu'une telle option existe.

Les notations et définitions qui suivent seront utiles.

Supposons que les $m!$ ordres de préférence possibles sur A soient numérotés de 1 à $m!$, et notons n_j le nombre d'agents qui ont l'ordre numéro j. Une *situation de vote* est un vecteur d'entiers positifs ou nuls $(n_1, ..., n_j, ..., n_{m!})$ vérifiant $\sum_{j=1}^{m!} n_j = n$. Dans le cas particulier où seules trois options sont en présence, que nous privilégierons dans la majeure partie de cette section, les six ordres de préférence possibles seront numérotés comme suit :

$$\begin{array}{lll} 1.\ aPbPc & 2.\ aPcPb & 3.\ bPaPc \\ 4.\ bPcPa & 5.\ cPaPb & 6.\ cPbPa \end{array}$$

Nous allons supposer que toutes les situations de vote ont la même probabilité d'occurrence (voir BERG et LEPELLEY [1994] pour un commentaire de cette hypothèse et pour une présentation de modèles alternatifs). Soit $p_j = n_j/n$. Compte tenu de ce changement de variable, une situation de vote devient un vecteur $(p_1, ..., p_j, ..., p_{m!})$ vérifiant $\sum_{j=1}^{m!} p_j = 1$ et $p_j \geq 0$. Pour n suffisamment grand, l'hypothèse d'équiprobabilité signifie que les situations de vote sont uniformément distribuées sur le simplexe défini par $\sum_{j=1}^{m!} p_j = 1$ et $p_j \geq 0$. La densité de probabilité k d'une situation quelconque est alors définie implicitement par

$$\int_0^1 \int_0^{1-p_1} ... \int_0^{1-p_1-...-p_{m!-2}} k\ dp_1...dp_{m!-1} = 1.$$

Or l'évaluation du membre gauche donne $k/(m!-1)!$, d'où $k = (m!-1)!$, soit 120 lorsque $m = 3$. En utilisant cette approche, on peut calculer la probabilité qu'existe une option majoritaire pour trois options et un nombre infini d'agents.

LEMME 1 : Si les situations de vote sont équiprobables, alors la probabilité d'avoir une option majoritaire est égale à 15/16 lorsque trois options sont en présence et que le nombre d'agents tend vers l'infini.

Nous renvoyons à GEHRLEIN [1981] pour une preuve de ce résultat. On notera que, compte tenu de la symétrie des notions d'option majoritaire et d'option minoritaire, la probabilité d'avoir une option minoritaire sous les mêmes hypothèses est elle aussi égale à $15/16$.

Cinq règles positionnelles seront considérées : trois règles simples (la règle de la pluralité, la règle de Borda et la règle de l'antipluralité) et deux règles itératives (la règle de Hare et la règle de Coombs). Pour m et n donnés, l'efficacité majoritaire de type α d'une règle f est notée $EM_\alpha(f)$, $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$. Le Tableau 1 (lignes 1 et 2) présente, pour chacune des règles considérées, l'efficacité majoritaire de type 1 et de type 2 lorsque trois options sont en présence et que le nombre d'agents tend vers l'infini; les résultats relatifs à l'efficacité de type 1 sont dus à GEHRLEIN [1992, 1995]; les valeurs de l'efficacité de type 2 sont déduites quant à elles de LEPELLEY [1993] [2].

TABLEAU 1

Efficacité majoritaire de quelques règles positionnelles lorsque trois options sont en présence (valeurs exactes).

Effic. maj. ($n = \infty$)	Pluralité	Anti pluralité	Borda	Hare	Coombs
type 1	0,88148	0.62963	0,91111	0,96852	0,97037
type 2	0,97037	0,96852	1	1	1
type 3	1	0,60802	0,96296	1	0,97531
type 4	0,97531	1	1	1	1

Nous nous proposons de mesurer l'efficacité majoritaire de type 3 et de type 4 des règles étudiées. D'après les résultats de la section précédente, nous savons que EM_3(Pluralité) = EM_3(Hare) = 1, et que EM_4(Antipluralité) = EM_4(Borda) = EM_4(Hare) = EM_4(Coombs) = 1. Restent à calculer les valeurs de EM_3(Antipluralité), EM_3(Borda), EM_3(Coombs) et EM_4(Pluralité). Nous commençons par déterminer la fréquence des situations comportant une option fortement majoritaire (ou fortement minoritaire).

LEMME 2 : Si les situations de vote sont équiprobables, alors la probabilité d'avoir une option fortement majoritaire (fortement minoritaire) est égale à 9/16 lorsque trois options sont en présence et que le nombre d'agents tend vers l'infini.

Preuve: L'option a est fortement majoritaire si $p_1 + p_2 > 1/2$. Comme la somme des p_i, $i = 1, ..., 6$, est égale à 1, il en résulte que l'ensemble des situations de vote dans lesquelles l'option a est fortement majoritaire est défini par les relations suivantes :

$$1/2 < p_{12} \leq 1,\ 0 \leq p_{34} \leq 1 - p_{12},\ 0 \leq p_5 \leq 1 - p_{12} - p_{34},$$

avec $p_{ij} = p_i + p_j$. Compte tenu de notre hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité que l'option a soit fortement majoritaire lorsque le nombre d'agents tend vers l'infini est alors obtenue en évaluant l'expression ci-dessous :

$$\int_{1/2}^{1} \int_{0}^{p_{12}} \int_{0}^{1-p_{12}} \int_{0}^{p_{34}} \int_{0}^{1-p_{12}-p_{34}} 120\, dp_{12} dp_2 dp_{34} dp_4 dp_5.$$

2. Compte tenu du Lemme 1, on déduit sans difficulté de ces valeurs la probabilité du viol des conditions *MAJ1* et *MAJ2*. Ainsi par exemple, la règle de la pluralité viole *MAJ1* avec une probabilité égale à (1-0,88148)15/16, soit 0,111.

L'évaluation de cette intégrale multiple donne 3/16. Comme les options a, b et c sont symétriques dans le modèle probabiliste utilisé, on en déduit que la probabilité d'avoir une option fortement majoritaire est égale à $3 \times 3/16$, soit 9/16. Compte tenu du caractère symétrique des notions d'option fortement majoritaire et d'option fortement minoritaire, il est clair que la valeur de 9/16 correspond aussi à la probabilité qu'existe une option fortement minoritaire. □

Nous sommes alors en mesure de calculer l'efficacité de type 3 des règles de Borda, de Coombs et de l'antipluralité, ainsi que l'efficacité de type 4 de la règle de la pluralité.

THÉORÈME 4 : Supposons que trois options soient en présence et que le nombre d'agents tende vers l'infini. Supposons en outre que toutes les situations de vote aient la même probabilité d'occurrence. Alors :
(i) EM_3(Coombs)=EM_4(Pluralité)=79/81;
(ii) EM_3(Borda)=26/27;
(iii) EM_3(Antipluralité)=197/324.

La preuve de ce théorème est donnée en appendice. Les résultats numériques présentés dans le Tableau 1, pris dans leur ensemble, font apparaître qu'il est difficile de considérer le viol des conditions majoritaires comme un événement tout à fait exceptionnel, puisque la fréquence d'un tel événement n'est jamais inférieure à 1,5%. Ils suggèrent d'autre part que l'efficacité majoritaire peut varier considérablement selon la règle utilisée, ce qui justifie a posteriori l'intérêt de ce type de calcul. On notera en particulier la médiocre performance de la règle de l'antipluralité : avec cette règle, la probabilité conditionnelle d'élire une option différente de l'option fortement majoritaire est de l'ordre de 40%; cette même probabilité est dix fois plus faible si l'on utilise la règle de Borda. On peut enfin observer que, conformément à ce que l'on pouvait attendre, l'efficacité majoritaire des règles positionnelles itératives (toujours supérieure à 95%) est plus élevée que celle des règles positionnelles simples.

La restriction de l'analyse au cas de trois options limite cependant la portée de ces conclusions et il est légitime de se demander ce que deviennent les valeurs de l'efficacité majoritaire lorsqu'augmente le nombre *m* d'options. S'il n'est pas facile d'apporter une réponse exacte à cette question (compte tenu des difficultés de calcul qui surgissent dès que *m* est supérieur à trois), on peut en revanche obtenir des estimations relativement précises des valeurs recherchées en recourant à la simulation aléatoire sur ordinateur. Les simulations que nous avons effectuées concernent le cas de quatre, cinq et six options et sont fondées sur les mêmes hypothèses que les calculs analytiques qui précèdent (i.e. équiprobabilité des situations de vote et nombre infini d'agents). Le Tableau 2 rassemble les résultats de ces simulations [3].

3. Sur le plan méthodologique, ces simulations s'inspirent de BERG et BJURULF [1983] et ne présentent pas de difficulté particulière. 300000 simulations ont été réalisées pour $m = 4$, 100000 pour $m = 5$ et 10000 pour $m = 6$. La précision des estimations obtenues, mesurée par l'écart-type, varie d'environ $\pm 0,002$ pour $m = 4$ à $\pm 0,01$ pour $m = 6$.

TABLEAU 2

Efficacité majoritaire de quelques règles positionnelles lorsque le nombre m d'options est supérieur à trois (estimations).

Effic. maj. ($n=\infty$)		Pluralité	Anti pluralité	Borda	Hare	Coombs
	m=4	0,742	0,550	0,872	0,928	0,938
type 1	m=5	0,610	0,511	0,851	0,890	0,907
	m=6	0,524	0,464	0,839	0,871	0,886
	m=4	0,978	0,976	1	1	1
type 2	m=5	0,983	0,978	1	1	1
	m=6	0,987	0,988	1	1	1
	m=4	1	0,617	0,999	1	0,993
type 3	m=5	1	–	–	1	–
	m=6	1	–	–	1	–
	m=4	0,991	1	1	1	1
type 4	m=5	–	1	1	1	1
	m=6	–	1	1	1	1

Les valeurs numériques présentées dans ce tableau montrent que l'influence du nombre d'options diffère selon le type d'efficacité que l'on considère. L'efficacité majoritaire de type 1 diminue au fur et à mesure que s'élève la valeur de *m* et cette conclusion est valide pour toutes les règles étudiées; il apparaît de plus que l'écart qui sépare le vote à la majorité simple de la règle de l'antipluralité tend à se réduire et que l'efficacité de la règle de Borda diminue relativement moins vite que celle des règles de Hare et Coombs. A l'inverse, les efficacités de types 2, 3 et 4 s'améliorent lorsque *m* augmente. Il est particulièrement intéressant de constater que la fréquence des situations dans lesquelles existe une option fortement majoritaire (ou fortement minoritaire) diminue très rapidement et peut être considérée comme nulle pour $m \geq 5$ [4]. Il en résulte que les conditions *MAJ3* et *MAJ4* sont trivialement vérifiées pour tout $m \geq 5$.

6 Conclusion

Les résultats présentés dans cet article précisent les limites du conflit qui oppose deux approches classiques en Choix Social; la première, initiée par Borda, suggère de déduire la préférence collective d'un calcul prenant en

4. Le lecteur pourra vérifier, en généralisant le calcul présenté dans le Lemme, que la fréquence de ces situations est de 0,02124 pour $m = 4$ et de $2,1 \times 10^{-11}$ pour $m = 5$.

compte les positions des différentes options dans les ordres de préférence des agents; la seconde considère, à la suite de Condorcet, que le choix collectif doit reposer sur des duels confrontant les paires d'options à la majorité des voix. En identifiant les règles positionnelles compatibles avec certaines versions du principe majoritaire, nous avons montré que ces deux approches sont, dans une certaine mesure, conciliables. En ce sens, nos résultats peuvent être qualifiés de positifs [5]. Il reste que l'antagonisme entre les deux approches est bien réel puisque le théorème 3 nous indique que 50% des règles positionnelles simples violent une version minimaliste du principe de Condorcet.

Les résultats proposés permettent d'autre part d'étudier les mérites comparés de certaines procédures. De ce point de vue, trois enseignements sont à souligner.

(i) Il est possible d'améliorer très substantiellement les performances majoritaires des règles positionnelles en introduisant plusieurs tours dans le processus de décision collective; en témoignent le théorème 2 ainsi que les calculs d'efficacité de la Section 5. On doit cependant observer que l'introduction de plusieurs tours s'accompagne d'effets pervers qui, au yeux de certains auteurs, disqualifient les règles itératives (voir sur ce point LEPELLEY, CHANTREUIL et BERG [1996]).

(ii) Bien qu'étant la seule règle positionnelle simple à toujours sélectionner l'option fortement majoritaire (d'après le théorème 1), la règle de la pluralité est susceptible d'élire une option minoritaire (voire fortement minoritaire lorsque le nombre d'options est limité à trois ou quatre) avec une fréquence qui ne peut être considérée comme complètement négligeable; il nous paraît donc difficile d'en recommander l'utilisation.

(iii) La règle de Borda présente une efficacité majoritaire élevée, supérieure à celle des autres règles positonnelles simples [6] et du même ordre que celle des règles positionnelles itératives étudiées : le conflit Borda-Condorcet (au sens le plus étroit) apparaît par conséquent comme moins aigu que ne le supposait Condorcet [7].

5. Une approche connexe, permettant d'obtenir des résultats positifs, consiste à restreindre le domaine de définition des correspondances de choix collectif. LEPELLEY [1996] montre ainsi que la restriction des préférences individuelles par l'hypothèse d'unimodalité permet d'accroître notablement le nombre des règles positionnelles qui satisfont aux conditions *MAJ1* et *MAJ2*.

6. Cette supériorité ne semble pas liée au modèle probabiliste utilisé, comme en témoignent les résultats récents de VAN NEWENHIZEN [1992] et MERLIN et TATARU [1995], fondés sur des hypothèses différentes.

7. Notons qu'une conclusion de même nature est obtenue par SAARI et MERLIN [1996], qui montrent que le classement collectif issu de la règle de Borda est généralement "proche" de celui qui résulte de la méthode de Copeland (fondée sur des duels majoritaires) lorsque trois options sont en présence.

Preuve du Théorème 4

Relation (i). Considérons tout d'abord l'efficacité majoritaire de type 4 de la règle de la pluralité. L'option a est à la fois fortement minoritaire et vainqueur selon la règle de la pluralité si et seulement si :
$p_1 + p_2 + p_3 + p_5 < 1/2$ (a fortement minoritaire),
$p_1 + p_2 > p_3 + p_4$ *et* $p_1 + p_2 > p_5 + p_6$ (a vainqueur à la pluralité).
Il est facile d'établir que ces inéquations sont équivalentes à (on pose, comme dans la preuve du Lemme 2, $p_{ij} = p_i + p_j$) [8] :

$$1/3 < p_{12} < 1/2,\ 1 - 2p_{12} < p_{34} < p_{12},\ 0 < p_3 < 1/2 - p_{12},$$

$$0 < p_5 < 1/2 - p_{12} - p_3.$$

La probabilité d'avoir l'option a fortement minoritaire *et* sélectionnée dans un vote à la pluralité des voix lorsque le nombre d'agents tend vers l'infini peut alors s'écire :

$$\int_{1/3}^{1/2} \int_{0}^{p_{12}} \int_{1-2p_{12}}^{p_{12}} \int_{0}^{1/2-p_{12}} \int_{0}^{1/2-p_{12}-p_3} 120\ dp_{12}dp_2dp_{34}dp_3dp_5,$$

ce qui donne, après évaluation, 1/216. Compte tenu du Lemme 2, de la définition de l'efficacité majoritaire (de type 4) et de la symétrie des options a, b et c, nous obtenons finalement :

$$EM_4(Pluralit\acute{e}) = 1 - (3 \times 1/216)/(9/16) = 79/81.$$

Ce résultat donne aussi l'efficacité majoritaire de type 3 de la règle de Coombs. En effet, si, partant d'une situation dans laquelle l'option fortement minoritaire est élue dans un vote à la pluralité, on inverse les ordres de préférence de chacun des agents, on obtient une nouvelle situation dans laquelle l'option fortement majoritaire obtient le plus de dernières positions et est donc éliminée selon la règle de Coombs. Réciproquement, si l'on inverse les ordres de préférence des agents dans une situation (avec trois options) où l'option fortement majoritaire n'est pas sélectionnée par la règle de Coombs, on obtient une situation dans laquelle l'option fortement minoritaire l'emporte à la pluralité des voix. Lorsque trois options sont en présence, l'efficacité majoritaire de type 3 de la règle de Coombs est donc égale à l'efficacité majoritaire de type 4 de la règle de la pluralité [9].

8. Dans la relation qui suit comme dans le reste de la preuve, toutes les inégalités sont écrites strictement alors que certaines d'entre elles sont en réalité des inégalités faibles. Il est clair que cela n'a pas d'incidence sur les résultats.
9. Cette égalité n'est cependant valide que dans le cas particulier où le nombre d'options en présence est égal à trois.

Relation (ii). Nous suivons ici la démarche adoptée par GEHRLEIN [1992] pour le calcul de l'efficacité majoritaire de type 1 de la règle de Borda. Cette démarche s'appuie sur le fait que la règle de Borda itérative (ou règle de Nanson) sélectionne toujours l'option majoritaire -et donc *a fortiori* l'option fortement majoritaire- lorsque celle-ci existe. Supposons que l'option a soit fortement majoritaire. La probabilité qu'elle soit sélectionée par la règle de Nanson est alors égale à 1. Le score de Borda de l'option a est donc, de manière certaine, supérieur à celui de b ou à celui de c. Par conséquent, si l'on note Pr_b (respectivement Pr_c) la probabilité que le score de Borda de a soit supérieur à celui de b (c) et Pr_{bc} la probabilité que le score de Borda de a soit supérieur à la fois à celui de b et de c, sachant que a est fortement majoritaire, il vient :

$$Pr_b + Pr_c - Pr_{bc} = 1,$$

soit encore, en observant que $Pr_b = Pr_c$ (par symétrie) et que Pr_{bc} n'est autre que l'efficacité majoritaire de type 3 de la règle de Borda :

(1) $$EM_3(Borda) = 2Pr_b - 1.$$

Il nous suffit donc d'évaluer Pr_b. Pour cela, observons que l'option a obtient un score de Borda supérieur à celui de b si et seulement si :

$$p_1 + p_2 + (p_3 + p_5)/2 > p_3 + p_4 + (p_1 + p_6)/2.$$

Puisque $\sum_i p_i = 1$, cette inégalité est équivalente à :

(2) $$p_2 > 2p_3 + 3p_4 + 2p_6 - 1.$$

D'autre part, l'option a est fortement majoritaire si et seulement si :

$$0 < p_6 < 1/2,\ 0 < p_4 < 1/2 - p_6,\ 0 < p_5 < 1/2 - p_4 - p_6,$$
$$0 < p_3 < 1/2 - p_4 - p_5 - p_6$$

(3) $$et\ 0 < p_2 < 1 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6.$$

Quand le nombre d'agents tend vers l'infini, la probabilité de la conjonction des événements *le score de Borda de a est supérieur à celui de b* et a est fortement majoritaire, probabilité notée Pr_b^*, s'obtient en évaluant l'intégrale multiple

$$\int\int \ldots \int 120\, dp_2 dp_3 \ldots dp_6$$

sur le domaine défini par les inéquations (2) et (3). Ce calcul ne peut cependant être effectué directement puisque nous avons $p_2 > Max(0, 2p_3 + 3p_4 + 2p_6 - 1)$. Nous partitionnons alors l'espace des situations vérifiant (2) et (3) en quatre sous-espaces S_1, S_2, S_3 et S_4 définis de la manière suivante :
$S_1 :\ 0 < p_6 < 1/2,\ 0 < p_4 < 1/3 - 2/3\, p_6,\ 0 < p_5 < 1/2\, p_4,$
$1/2 - p_6 - 3/2\, p_4 < p_3 < 1/2 - p_6 - p_5 - p_4,\ 2p_3 + 3p_4 + 2p_6 - 1 < p_2 < 1 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6;$

$S_2: \ 0 < p_6 < 1/2, \ 1/3 - 2/3\, p_6 < p_4 < 1/2 - p_6, \ 0 < p_5 < 1/2 - p_6 - p_4,$
$0 < p_3 < 1/2 - p_6 - p_5 - p_4, \ 2p_3 + 3p_4 + 2p_6 - 1 < p_2 < 1 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6;$
$S_3: \ 0 < p_6 < 1/2, \ 0 < p_4 < 1/3 - 2/3\, p_6, \ 1/2\, p_4 < p_5 < 1/2 - p_4 - p_6,$
$0 < p_3 < 1/2 - p_6 - p_5 - p_4, \ 0 < p_2 < 1 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6;$
$S_4: \ 0 < p_6 < 1/2, \ 0 < p_4 < 1/3 - 2/3\, p_6, \ 0 < p_5 < 1/2\, p_4,$
$0 < p_3 < 1/2 - p_6 - p_5 - p_4, \ 0 < p_2 < 1 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6.$

En utilisant cette partition, il est facile d'obtenir : $Pr_b^* = 53/288$. Puisque, d'après le Lemme 2, la probabilité d'avoir l'option a fortement majoritaire est de 3/16, la probabilité conditionnelle recherchée s'écrit : $Pr_b = 53/288 \times 16/3 = 53/54$. On obtient alors le résultat désiré en utilisant la relation (1).

Relation (iii). La preuve de cette relation est proche, dans son principe, de celle de la relation (i). Nous l'avons donc omise (le lecteur intéressé pourra cependant consulter LEPELLEY [1989] pages 100-102). □

• Références bibliographiques

ARROW, K.J. (1963). – *Social Choice and Individual Values*, Wiley, New York.

BERG, S., BJURULF, B. (1983). – "Note on the Paradox of Voting: Anonymous Preference Profiles an May's Formula", *Public Choice*, 40, pp. 307-316.

BERG, S., LEPELLEY, D. (1994). – "On Probability Models in Voting Theory", *Statistica Neerlandica*, 48, pp. 133-146.

BLACK, D. (1958) - *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press, London.

BORDA, J.C. (1781). – *Mémoire sur les Elections au Scrutin*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris.

CONDORCET, M.J.A. (1785). – *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions Rendues à la Pluralité des voix*, Paris.

COOMBS, C. (1954). – *A Theory of Data*, Wiley, New York.

DUMMETT, M. (1984). – *Voting Procedures*, Oxford University Press, Oxford.

FISHBURN, P.C. (1974). – "Aspects of One-Stage Voting Rules", *Management Science*, 21, pp. 422-427.

FISHBURN, P.C. (1977). – "Condorcet Social Choice Functions", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 33, pp. 469-489.

FISHBURN, P.C., GEHRLEIN, W.V. (1976). – "Borda's Rule, Positional Voting and Condorcet's Simple Majority Principle", *Public Choice*, 28, pp. 79-88.

GEHRLEIN, W.V. (1981). – "The Frequency of Condorcet's Paradox in Large Groups", *Proceedings of the Northeast American Institute for Decision Sciences*, Washington, DC, pp. 121-123.

GEHRLEIN, W.V. (1992). – "Condorcet Efficiency of Simple Voting Rules for Large Electorates", *Economics Letters*, 40, pp. 61-66.

GEHRLEIN, W.V. (1995). – "Condorcet Efficiency and Social Homogeneity", in *Social Choice, Welfare and Ethics*, édité par W.A. Barnett, H. Moulin, M. Salles et N.J. Schofield, Cambridge University Press, Cambridge.

HARE, T. (1859). – *Treatise on the Election of Representatives, Parliamentary and Municipal*, Longmans Green, London.

LEPELLEY, D. (1989). – *Contribution à l'Analyse des Procédures de Décision Collective*, Thèse de doctorat, Université de Caen.

LEPELLEY, D. (1993). – "On the Probability of Electing the Condorcet Loser", *Mathematical Social Sciences*, 25, pp. 105-116.

LEPELLEY, D. (1996). – "Constant Scoring Rules, Condorcet Criteria and Single-peaked Preferences", *Economic Theory*, 7, pp. 491-500.

LEPELLEY, D., CHANTREUIL, F., BERG S. (1996). – "The Likelihood of Monotonicity Paradoxes in Runoff Elections", *Mathematical Social Sciences*, 31, pp.133-146.

MAY, K.O. (1952). – "A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision", *Econometrica*, 20, pp. 680-684.

MERLIN, V., TATARU, M. (1995). – "On the Relationship of the Condorcet Winner and Positional Voting Rules", Document de travail, Université de Caen.

MOULIN, H. (1980). – *La Stratégie du Vote*, Editions du CNRS, Paris.

NANSON, E.J. (1882). – "Methods of Election", *Transactions and Proceedings of the Royal Society of Victoria*, 18, pp. 197-240.

RICHELSON, J.T. (1978). – "A Comparative Analysis of Social Choice Functions II", *Behavioral Science*, 23, pp. 38-44.

SAARI, D.G. (1994). – *Geometry of Voting*, Springer Verlag, Heidelberg.

SAARI, D.G., MERLIN, V. (1996). – "The Copeland Method 1: Relationships and the Dictionary", *Economic Theory*, 8, pp. 51-76.

SMITH, J.H. (1973). – "Aggregation of Preferences with Variable Electorate", *Econometrica*, 41, pp. 1027-1041.

VAN NEWENHIZEN, J. (1992). -"The Borda Method is Most Likely to Respect the Condorcet Principle", *Economic Theory*, 2, pp. 69-83.

YOUNG, H.P. (1975). – "Social Choice Scoring Functions", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 28, pp. 824-838.