ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 51 — 1998

Fondements des concepts de solution en théorie des jeux

Olivier DE WOLF*

RÉSUMÉ. – Dans cet article, nous analysons le raisonnement des joueurs dans les jeux sous forme stratégique. A cette fin, nous généralisons le concept de distribution d'équilibre corrélé objectif, introduit par AUMANN [1987], au cas subjectif. Nous proposons une axiomatique, portant sur ces distributions d'équilibre corrélé subjectif, simple et facilement interprétable du comportement rationnel. Nous élaborons ainsi une base commune à différents concepts de solution usuels ainsi qu'au concept moins connu de rationalisabilité forte proposé par STALNAKER [1994].

Fundation of Solution Concepts in Game Theory

ABSTRACT. – In this paper we study the player's reasoning in normal form games. To this end we generalize the concept of objective correlated equilibrium distributions introduced by AUMANN [1987] to the subjective case. We propose simple and easily interpretable axioms of the rational behavior dealing with these distributions of subjective correlated equilibrium. We then offer a common basis to different usual solution concepts and to the less known concept of strong rationalisability (STALNAKER [1994]).

* O. DE WOLF : CORE, Université Catholique de Louvain. Je voudrais exprimer ici mes plus sincères remerciements à Françoise FORGES, pour son aide efficace et attentive ainsi que pour ses précieux commentaires, et à Louis-André Gérard VARET pour ses nombreuses remarques. Bien évidemment, les erreurs et insuffisances persistantes sont miennes.
Je remercie également le FRIA pour son soutien financier.

1 Introduction

Le concept de solution le plus utilisé en théorie des jeux est sans conteste l'*équilibre de Nash*. Si, dans un jeu sous forme stratégique, les joueurs s'accordent sur un profil spécifique de stratégies, alors ce profil doit impérativement constituer un équilibre de Nash. Si tel n'était pas le cas, afin de maximiser son espérance d'utilité, un joueur au moins choisirait une autre stratégie que celle qui lui était préconisée par le profil. Cet argument en faveur de la propriété de Nash est le plus communément mis en avant par les défenseurs de ce concept.

Bien qu'il soit indéniable que l'analyse de ces équilibres ait énormément contribué à la compréhension du comportement économique, il serait pourtant fort audacieux de penser que cette propriété corresponde à un aboutissement en ce qui concerne la résolution des jeux non-coopératifs. A première vue, la définition de l'équilibre de Nash semble assez naturelle. Cependant, en tant que critère de sélection d'un profil de stratégies comme choix raisonnable des joueurs, force est de constater que cet équilibre n'est pas une notion empiriquement raisonnable, et encore moins une conséquence nécessaire de rationalité. La propriété de Nash ne paraît avoir du sens que si l'on suppose que chacun des joueurs, au moment de choisir sa stratégie, prédise correctement celles sélectionnées par ses adversaires. En d'autres termes, l'utilisation de ces équilibres suggère une sorte de « don divinatoire » de la part des joueurs. Cette hypothèse étant très contraignante, certains théoriciens ont étudié d'autres concepts de solution, moins restrictifs, issus logiquement des hypothèses de rationalité bayésienne [1].

Afin de mieux comprendre les hypothèses implicites formulées sur le comportement et la manière de raisonner des joueurs, on utilise généralement une base axiomatique. Un grand avantage de cette approche réside dans le fait qu'en fournissant une base commune à différents concepts de solution, elle permet leur unification et leur comparaison. Le type de concept de solution que nous étudierons ne consiste pas à préconiser un profil de stratégies particulier, mais plutôt un ensemble de choix raisonnables (un ensemble de profils de stratégies, corrélées ou non, par exemples). Une axiomatique représente un ensemble de règles spécifiant le type de rationalité motivant cet ensemble de choix.

BERNHEIM [1986] a proposé quatre axiomes de comportement rationnel en environnement stratégique portant sur des ensembles de stratégies (qu'il appelle des « *théories* »). Il a caractérisé ainsi trois concepts de solution [2] (à savoir, les équilibres corrélés objectifs, les stratégies rationalisables

1. Un individu est rationnel au sens bayésien lorsque confronté à un problème de décision, il attribue une probabilité subjective à tout événement incertain pertinent et choisit une alternative maximisant son espérance d'utilité (relativement à son système de probabilités subjectives).
2. Il est à noter que BERNHEIM [1986] a également formulé une caractérisation des équilibres de Nash ; malheureusement, son résultat n'est pas correct. Cette axiomatique a été amendée par DE WOLF-FORGES [1995] afin d'inclure les équilibres de Nash.

corrélées et les stratégies rationalisables indépendantes). Se concentrant sur les paiements plutôt que sur des demandes de stratégies, BRANDENBURGER et DEKEL [1987] ont formulé une axiomatique portant sur les équilibres corrélés subjectifs donnant ainsi une base commune aux concepts de rationalisabilité corrélée, de rationalisabilité indépendante et aux équilibres de Nash.

Dans le présent article, nous proposons un nouveau fondement axiomatique à la rationalité bayésienne. Celui-ci se base sur un autre objet : les distributions de probabilité a priori sur l'ensemble de tous les profils de stratégies. Avant même que les joueurs ne sachent quelles stratégies ils choisiront, nous supposons que chacun d'eux prend du recul et se place dans une « *position originelle* ». Dans cette position, chacun des joueurs émet des croyances sur le déroulement du jeu dans son ensemble, que nous modéliserons par une distribution de probabilité a priori. Certaines caractéristiques personnelles des joueurs telles leurs croyances ou leurs préférences sont conservées dans la position originelle. Il n'y a donc aucune raison pour que ces croyances émises par les joueurs soient identiques. Une solution d'un jeu donné consistera en une distribution conjointe, c'est-à-dire une distribution de probabilité a priori par joueur. Cette distribution conjointe spécifiera le plan du jeu (ensemble des stratégies et croyances) de chacun des joueurs. Nous verrons que l'utilisation des distributions a priori donne lieu à des axiomes simples et facilement interprétables et permet de caractériser un large éventail de concepts de solution.

Les préliminaires constitueront la deuxième section de ce papier. La troisième section présentera les différents équilibres corrélés utilisés dans cet article, ainsi que certaines notions relatives à ceux-ci, tels les équilibres corrélés canoniques et les distributions d'équilibre corrélé. L'axiomatique et le résultat principal figureront dans la quatrième section. La cinquième section présentera quelques résultats complémentaires tandis que la dernière section sera constituée de la conclusion du présent papier.

2 Préliminaires

Mathématiquement, un jeu fini sous forme stratégique Γ est un triplet $\{N, S, u\}$. N représente l'ensemble des joueurs [3]. Par souci de facilité, le nombre de joueurs sera également noté N. S est l'ensemble de tous les profils de stratégies pures : c'est le produit cartésien de l'ensemble des stratégies pures de chaque joueur [4] : $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_N$. Chaque joueur $i \in N$ choisit une stratégie pure s_i parmi l'ensemble S_i qui lui est proposé. Le choix des joueurs se fait de manière simultanée et indépendante. Le revenu du joueur i est donné par la $i$ème composante de la fonction d'utilité

3. Nous supposerons que le nombre de joueurs est toujours supérieur ou égal à 2.
4. Le jeu Γ étant fini, l'ensemble des stratégies pures d'un joueur i, S_i, est un ensemble fini.

$u : S \to \mathfrak{R}^N$ (que nous noterons u_i). Nous noterons ΔX (resp. $\underline{\Delta} X$, l'ensemble des distributions de probabilité sur un ensemble quelconque X (resp. l'ensemble des distributions attribuant une probabilité strictement positive à tous les éléments de X). Une stratégie mixte du joueur i, σ_i, est un élément de l'ensemble ΔS_i. Nous noterons s_{-i} un profil de stratégies pures des adversaires du joueur i:

$$s_{-i} \in S_{-i} := \times_{j \neq i} S_j.$$

De même, nous écrirons généralement σ_{-i} les éléments de l'ensemble $\Delta(S_{-i})$. Enfin, lorsque U est un sous-ensemble de S, Y_{-i} représentera la projection de Y sur S_{-i}:

$$Y_{-i} = \{s_{-i} \in S_{-i} : \exists s_i \in S_{-i} \, (s_i, s_{-i}) \in Y\}.$$

Soit $\Gamma := \{N, S, u\}$ un jeu fini sous forme stratégique. Les versions des définitions proposées ici sont reprises de STALNAKER [1994].

DÉFINITION 1 : La stratégie $s_i \in S_i$ est fortement dominée si et seulement si $\exists \sigma_i \in \Delta(S_i)$ tel que $\forall \, s_{-i} \in X_{-i}$ on a $u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(\sigma_i, s_{-i})$. Lorsque σ_i est connu, nous dirons aussi que la stratégie s_i est fortement dominée par σ_i.

DÉFINITION 2 : Soit X un sous-ensemble de S. $s_i \in S_i$ est faiblement dominée relativement à X si et seulement si $\exists \sigma_i \in \Delta(S_i)$:
(1) $\forall \, s_{-i} \in X_{-i} \; u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(\sigma_i, s_{-i})$
(2) $\exists s_{-i} \in X_{-i} \, : \, u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(\sigma_i, s_{-i})$.
Lorsque σ_i est connu, nous dirons aussi que s_i est faiblement dominée relativement à X par σ_i.

Un profil de stratégies $s \in X$ est inférieur relativement à X si et seulement si $\exists i \in N$ et $\exists \sigma_i \in \Delta(S_i)$ tels que

(1) s_i est faiblement dominée à X par σ_i

(2) $u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s)$

Nous dirons parfois que s est inférieur relativement à Y pour le joueur i.

Remarquons que dans les deux définitions précédentes l'ensemble X n'impose aucune restriction à la stratégie mixte dominante σ_i. Celle-ci peut être n'importe quelle stratégie mixte du joueur i.

Le travail que nous présentons ici étant dirigé principalement vers les stratégies pures, il peut paraître paradoxal d'utiliser la notion de stratégie mixte dans les définitions d'infériorité, de stratégies fortement et faiblement dominées. Cependant, nous allons démontrer que ce n'est une contradiction qu'en apparence. En effet, les définitions de stratégie fortement et faiblement dominée sont équivalentes (respectivement) à deux autres définitions ne faisant pas appels explicitement à la notion de stratégie mixte.

Nous dirons qu'une stratégie s_i est une meilleure réponse pour le joueur i s'il existe une croyance σ_{-i} sur ce que joueraient les autres joueurs (modélisée par une mesure de probabilité sur S_{-i}) telle que le joueur i maximise son espérance d'utilité en jouant s_i plutôt qu'une autre stratégie:

DÉFINITION 3 : Une stratégie $\overline{s}_i \in S_i$ est une meilleure réponse si

$$\exists \sigma_{-i} \in \Delta(X_{-i}) \ : \ \forall\, s_i \in S_i \text{ on a } u_i(\overline{s}_i,\, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i,\, \sigma_{-i})$$

Lorsque σ_i est connu, nous dirons aussi que la stratégie $\overline{s}_i$ est une meilleure réponse à σ_i. Nous noterons $\gamma_i(\sigma_{-i})$ l'ensemble des meilleures réponses à σ_{-i}.

Soix X un sous-ensemble de S. Une stratégie $\overline{s}_i \in S_i$ est une meilleure réponse pleine relativement à X si

$$\exists \sigma_{-i} \in \Delta(X_{-i}) \text{ tel que } \forall\, s_i \in S_i \text{ on a } u_i(\overline{s}_i,\, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i,\, \sigma_{-i}).$$

Lorsque σ_{-i} est connu, nous dirons que $\overline{s}_i$ est une meilleure réponse pleine à σ_{-i}.

Remarquons que dans la définition précédente, la mesure de probabilité σ_{-i} sur l'ensemble S_{-i} peut être interprétée de deux manières différentes : comme profil mixte corrélé ou comme croyance du joueur i sur les actions choisies par les autres joueurs. Cependant, d'un point de vue descriptif, ces deux interprétations sont distinctes : contrairement à la notion de stratégie fortement dominée, la notion de meilleure réponse peut être comprise sans l'utilisation de l'« artifice » des stratégies mixtes.

Comme le montrent les deux lemmes suivants, les notions de domination forte et de domination faible représentent en fait les concepts duaux de la notion de meilleure réponse et de meilleure réponse pleine.

LEMME 1 : Soit $\Gamma := \{N,\, S,\, u\}$ un jeu. Une stratégie s_i est fortement dominée si et seulement si s_i n'est pas une meilleure réponse.

LEMME 2 : Soit $\Gamma := \{N,\, S,\, u\}$ un jeu X et un sous-ensemble de S. Une stratégie s_i est faiblement dominée relativement à X si et seulement si s_i n'est pas une meilleure réponse pleine relativement à X.

Des versions de ces deux lemmes sont démontrées par PEARCE [1984].

3 Les équilibres corrélés

La première partie de cette section présentera quatre types d'équilibres corrélés : les équilibres corrélés objectifs et subjectifs introduits par AUMANN [1974], les équilibres corrélés semi-objectifs proposés par STALNAKER [1994] et les équilibres corrélés a posteriori. Ces derniers constituent la notion centrale de ce travail. La deuxième et la troisième partie de cette section seront consacrées aux équilibres corrélés canoniques et aux distributions d'équilibres corrélés (respectivement).

AUMANN [1987] a montré que, grâce à l'utilisation des représentations canoniques, la donnée d'un équilibre corrélé objectif équivalait à la donnée d'une mesure de probabilité sur l'ensemble des stratégies conjointes : il a appelé cet objet une distribution d'équilibre corrélé objectif. Ce résultat est probablement la raison du fait que les notions d'équilibre corrélé canonique et de distribution d'équilibre corrélé sont souvent amalgamées. Cependant, nous montrerons dans la quatrième partie de cette section que l'équivalence entre ces deux notions proches, bien que s'appliquant aux équilibres corrélés subjectifs, objectifs et semi-objectifs, n'est plus vraie pour les équilibres corrélés a posteriori.

3.1. **Processus de corrélation et équilibre corrélé**

Un jeu $\Gamma := \{N,\, S,\, u\}$ se déroule toujours dans un contexte particulier. Un *état de la nature* ω est la description d'un contexte donné, il représente une situation dans laquelle le jeu pourrait être joué. L'*état vrai de la nature* est la description de la situation réelle. Soit Ω un ensemble d'états de la nature contenant l'état vrai. Pour éviter des complications inutiles nous supposons que Ω est fini. Chacun des joueurs sait que l'état vrai est un élément de Ω, mais généralement, l'état vrai n'est pas connu précisément. Cette incertitude de chaque joueur i concernant l'état vrai est décrite par une mesure de probabilité P_i sur Ω (muni de la σ-algèbre discrète), que nous appelons la *distribution de probabilité a priori* du joueur i. Nous supposons également que les joueurs peuvent avoir certaines informations supplémentaires. On modélise les informations privées d'un joueur i par une partition H_i de Ω que nous appelons l'*ensemble d'information du joueur* i. Les partitions de chacun des joueurs sont supposées connaissance commune. Chaque joueur i sait dans quel élément h_i de la partition H_i se trouve l'état vrai. Si H_i est constituée exclusivement de singletons, l'état vrai de la nature est toujours connu du joueur i. Au contraire, si la partition H_i est *triviale* $(H_i = \Omega)$, le joueur i n'a aucune information (excepté sa distribution a priori P_i=. Précisons ce modèle formellement :

DÉFINITION 4 :
$\{\Omega,\, (H_i),\, P\}$ est un *processus de corrélation* si
(i) L'ensemble des états de la nature Ω est fini.
(ii) $P = (P_i)$ est une famille de N mesures de probabilité sur Ω.
(iii) $\forall\, i,\ H_i$ est une partition de Ω.

Lorsque ω est l'état vrai, nous noterons $h_i\,(\omega)$ l'ensemble des états de la nature que le joueur i pense possibles. Mathématiquement, h_i peut être vu comme une application qui à tout ω associe l'élément de la partition H_i contenant ω : $h_i\ :\ \Omega \to H_i$.

Une *stratégie corrélée subjective* relative à un jeu Γ et à un processus de corrélation $\{\Omega,\, (H_i),\, P\}$ est une application de Ω vers S qui est (H_i) mesurable. Formellement, f est une stratégie corrélée subjective si

$$\forall\, i\, \forall\, \omega \in \Omega \quad \forall\, \omega' \in h_i\,(\omega) \quad f_i\,(\omega) = f_i\,(\omega')$$

Remarquons qu'imposer la condition de « mesurabilité » revient en fait à faire l'hypothèse fort modeste que chacun des joueurs connaît la stratégie qu'il choisit.

Un *équilibre corrélé subjectif* relatif à un jeu Γ et à un processus de corrélation $\{\Omega, (H_i), P\}$ est une stratégie corrélée subjective vérifiant :

$$\forall\, i\, \forall\, h_i \in H_i\, P_i\,(h_i) > 0,\, \forall\, s_i \in S_i \sum_{\omega \in h_i} u_i\, o f\,(\omega)\, P_i\,(\omega | h_i)$$
$$\geq \sum_{\omega \in h_i} u_i\,[s_i,\ f_{-i}\,(\omega)]\, P_i\,(\omega | h_i).$$

Les équilibres corrélés subjectifs imposent donc aux stratégies corrélées de chaque joueur d'être ex ante optimales (c'est-à-dire avant même que chacun des joueurs ne prenne connaissance de son information privée).

Un renforcement possible de cette notion consiste à imposer aux stratégies corrélées choisies par les joueurs d'être optimales même sur les événements non pondérés. Cela revient à imposer aux stratégies des joueurs d'être optimales même après que les joueurs prennent connaissance de leur information sur l'état de la nature. Pour cette raison, ce cas particulier d'équilibre corrélé subjectif s'appelle l'*équilibre corrélé a posteriori*.

Une stratégie corrélée subjective f relative à un jeu Γ et à un processus de corrélation $\{\Omega, (H_i), P)$ est donc un équilibre corrélé a posteriori s'il existe un système de probabilités conditionnelles $\{P_i\,(\cdot|\omega)\}$ *régulier* et *propre* par rapport à P_i [5] :

$$\forall\, i\, \forall\, h_i \in H_i\, \forall\, s_i \in S_i \sum_{\omega \in h_i} u_i\, o f\,(\omega)\, P_i\,(\omega | h_i)$$
$$\geq \sum_{\omega \in h_i} u_i\,[s_i,\ f_{-i}\,(\omega)]\, P_i\,(\omega | h_i).$$

Bien entendu, un équilibre corrélé a posteriori est toujours un équilibre corrélé subjectif.

STALNAKER [1994] a proposé la notion d'*équilibre corrélé semi-objectif*. Un équilibre corrélé subjectif pour lequel l'ensemble des stratégies non pondérées est identique pour la distribution de chaque joueur est un équilibre corrélé semi-objectif. Un équilibre corrélé subjectif f relatif à un jeu Γ et à un processus de corrélation $\{\Omega, (H_i), P)$ est donc un équilibre corrélé semi-objectif si

$$\forall\, i,\ j\, \forall\, \omega \in \Omega\, P_i\,(\omega) = 0 \Leftrightarrow P_j\,(\omega) = 0.$$

AUMANN [1974] a introduit le concept d'*équilibre corrélé objectif*. Un équilibre corrélé subjectif pour lequel toutes les distributions des joueurs sont identiques est un équilibre corrélé objectif.

Bien entendu, si f est un équilibre corrélé subjectif, il est également un équilibre corrélé semi-objectif.

5. Régulier et propre : $\forall\, h_i\ :\ P_i\,(h_i) > 0\, P_i\,(\cdot|h_i)$ se déduit par la règle de Bayes, et $\forall\, h_i\ :\ P_i\,(h_i) = 0$, $P_i\,(\cdot|h_i)$ est une mesure de probabilité sur Ω et $P_i\,(h_i|h_i) = 1$.

3.2. **Processus canonique et équilibre corrélé canonique**

Un *processus canonique* est un cas particulier de processus de corrélation, pour lequel l'ensemble des états du monde est l'ensemble des profils de stratégies S. Implicitement, on considère que les seules alternatives incertaines sont les profils de stratégies du jeu considéré. Chaque joueur est supposé connaître la stratégie qu'il a sélectionnée. De plus on suppose qu'il n'a aucune information à propos des stratégies choisies par les autres joueurs. Les ensembles d'information d'un joueur i sont donc de la forme suivante :

$$H_{ci} := \{(s_i \times S_{-i}),\, \forall\, s_i \in S_i\}.$$

Le seul paramètre variable d'un processus de corrélation canonique est le profil de distributions a priori (qui est dans ce cas un N-uplet de distributions de probabilité sur l'ensemble des stratégies).

L'ensemble des stratégies corrélées subjectives relatives à un jeu $\Gamma = (N,\, S, u)$ et à un processus de corrélation canonique est le produit cartésien des ensembles des applications de S_i vers S_i. La *stratégie corrélée subjective canonique* relative à un jeu Γ et à un processus de corrélation canonique est l'application identité sur S (c'est-à-dire le produit cartésien des applications identité sur S_i).

Nous dirons qu'un profil de distributions de probabilité sur l'ensemble des stratégies $p := (p_1,\, \dots,\, p_N)$ d'un jeu Γ est un *équilibre corrélé subjectif canonique* (resp. a posteriori, resp. semi-objectif, resp. objectif) si la stratégie corrélée canonique est un équilibre corrélé subjectif (resp. a posteriori, resp. semi-objectif, resp. objectif) relativement au processus de corrélation canonique p. $p \in \Delta(S)^N$ est donc un *équilibre corrélé subjectif canonique* si et seulement si

$$\forall\, i\, \forall\, s_i \in S_i : \, p_i(s_i) > 0 \quad s_i \in \gamma_i\, [p_i(s_i,\, \cdot|s_i)].$$

$p \in \Delta(S)^N$ est un *équilibre corrélé a posteriori canonique* si et seulement si pour tout joueur i il existe un système de probabilités conditionnelles $\{p_i(s_i,\, \cdot|s_i)\}$ régulier et propre relativement à p_i tel que

$$\forall\, s_i \in S_i,\, s_i \in \gamma_i\, [p_i(s_i,\, \cdot|s_i)].$$

$p \in \Delta(S)^N$ est un *équilibre corrélé semi-objectif canonique* si et seulement si p est un équilibre corrélé subjectif canonique et

$$\forall\, i,\, j\, \forall\, s \in S\, p_i(S) = 0 \Leftrightarrow p_j(s) = 0.$$

$p \in \Delta(S)^N$ est un *équilibre corrélé objectif canonique* si et seulement si p est un équilibre corrélé subjectif canonique et

$$\forall\, i,\, j\, \forall\, s \in S\, p_i(s) = p_j(s).$$

3.3. **Distribution d'équilibre corrélé**

La *distribution conjointe* d'une stratégie corrélée f relative à un jeu Γ et à un processus de corrélation $\{\Omega,\, (H_i),\, P\}$ est un profil de distribution de probabilité p sur S tel que pour tout joueur i, p_i est l'image de P_i par f. Formellement, $p \in \Delta(S)^N$ est la distribution conjointe de f si

$$\forall\, i\, \forall\, s \in S\, p_i\,(s) := P_i o f^{-1}\,(s).$$

Une distribution conjointe p relative à un jeu Γ est appelée une *distribution d'équilibre corrélé subjectif* (resp. a posteriori, resp. semi-objectif, resp. objectif) s'il existe un processus de corrélation et un équilibre corrélé subjectif f (resp. a posteriori, semi-objectif et objectif) relativement au jeu Γ et à ce processus de corrélation tel que p soit la distribution de f.

La définition des équilibres de Nash ne nécessite pas l'utilisation de processus de corrélation : nous définirons ici directement ce que nous entendons par une distribution d'équilibre de Nash.

Une distribution d'équilibre de Nash p est une distribution d'équilibre corrélé objectif telle que :

$$\exists(\sigma_1,\, \ldots,\, \sigma_N) \in \Delta\,(S_1) \times \ldots \times \Delta\,(S_N)\ :$$
$$\forall\, s \in S\, p\,(s_1,\, \ldots,\, s_N) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i\,(s_i).$$

3.4. **Relation entre équilibre corrélé canonique et distribution d'équilibre corrélé**

Pour tout équilibre corrélé subjectif (resp. a priori, resp. semi-objectif, resp. objectif) canonique p, la stratégie corrélée canonique est par définition un équilibre corrélé subjectif (resp. a posteriori, resp. semi-objectif, resp. objectif) relativement au processus canonique $\{S,\, (H_{ci}),\, p\}$. La distribution p étant la distribution conjointe de la stratégie corrélée canonique (relativement au processus canonique), cette distribution est une distribution d'équilibre corrélé subjectif (resp. a posteriori, resp. semi-objectif, resp. objectif). Ainsi, tout équilibre corrélé subjectif (resp. a posteriori, resp. semi-objectif, resp. objectif) canonique p est une distribution d'équilibre corrélé subjectif (resp. a posteriori, resp. semi-objectif, resp. objectif).

La proposition suivante montre que la réciproque de cette observation est vraie dans le cas des équilibres corrélés subjectifs, semi-objectifs et objectifs.

PROPOSITION 1 : p est une distribution d'équilibre corrélé subjectif (resp. semi-objectif, resp. objectif) relativement à un jeu Γ si et seulement si p est un équilibre corrélé subjectif canonique (resp. semi-objectif, resp. objectif) relativement au jeu Γ.

Démonstration : (Subjectif) Soit p une distribution d'équilibre corrélé subjectif. Il existe donc un équilibre corrélé subjectif f relatif à un processus de corrélation$\{\Omega,\, (H_i),\, (P_i)\}$ tel que $\forall\, i\, \forall\, s \in S\, p_i\,(s) := P_i o f^{-1}\,(s)$. Pour tout joueur i, et pour toutes stratégies s_i de ce joueur, définissons

$J_i(s_i) := f^{-1}(s_i \otimes S_{-i})$ et $J_i := \{J_i(s_i) \,:\, s_i \in S_i\}$. Il est facile de vérifier que J_i est une partition de Ω [6] plus grossière que H_i. De ce fait, pour toutes stratégies s_i du joueur i, $J_i(s_i)$ peut s'écrire comme l'union de certains h_j :

$$J_i(s_i) = \bigcup_{j=1}^{r} h_j$$ [7]

La fonction f étant un équilibre corrélé, nous savons que

$$\forall\, i\, \forall\, s_i \in S_i\, \forall\, h_j \subset J_i(s_i) \,:\, P_i(h_j) > 0\, \forall\, \overline{s}_i \in S_i \sum_{\omega \in h_j} u_i o f(\omega)\, P_i(\omega | h_j)$$
$$\geq \sum_{\omega \in h_j} u_i[\overline{s}_i,\, f_{-i}(\omega)]\, P_i(\omega | h_j)$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par $P_i(h_j)$, nous obtenons que

$$\forall\, i\, \forall\, s_i \in S_i\, \forall\, h_j \subset J_i(s_i)\, \forall\, \overline{s}_i \in S_i \sum_{\omega \in h_j} u_i o f(\omega)\, P_i(\omega)$$
$$\geq \sum_{\omega \in h_j} u_i[\overline{s}_i,\, f_{-i}(\omega)]\, P_i(\omega)$$

Par sommation sur tous les h_j inclus dans $J_i(s_i)$:

$$\forall\, i\, \forall\, s_i \in S_i\, \forall\, \overline{s}_i \in S_i \sum_{\omega \in J_i(s_i)} u_i o f(\omega)\, P_i(\omega)$$
$$\geq \sum_{\omega \in J_i(s_i)} u_i[\overline{s}_i,\, f_{-i}(\omega)]\, P_i(\omega)$$

Par changement de variable, on obtient :

$$\forall\, i\, \forall\, s_i \in S_i\, \forall\, \overline{s}_i \in S_i \sum_{s_{-i} \in S_i} u_i(s_i,\, s_{-i})\, p_i(s) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i(\overline{s}_i,\, s_{-i})\, p_i(s)$$

Ceci implique que $\forall\, s_i \in S_i \,:\, p_i(s_i) > 0\;\; s_i \in \gamma_i(p_i(s_i,\, \cdot | s_i))$. p est donc un équilibre corrélé canonique relativement à Γ.

(Semi-objectif) Soit p une distribution d'équilibre corrélé semi-objectif. Il existe donc un équilibre corrélé semi-objectif f relatif à un processus de corrélation $\{\Omega,\, (H_i),\, (P_i)\}$ tel que $\forall\, i\, \forall\, s \in S\; p_i(s) := P_i o f^{-1}(s)$. f est en particulier un équilibre corrélé subjectif ; de c efait, par l'application de la proposition 3, p est un équilibre corrélé subjectif canonique. Nous devons encore vérifier que $\forall\, i, j\, \forall\, s \in S\, p_i(s) = 0 \Leftrightarrow p_j(s) = 0$. Pour cela, nous allons montrer la contraposée. Supposons donc que $p_i(s) > 0 \Leftrightarrow P_i o f^{-1}(s) > 0 \Leftrightarrow P_j o f^{-1}(s) > 0 \Leftrightarrow p_j(s) > 0$.

---

6. Par abus de langage car, généralement, J_i contient un certain nombre d'éléments vides.

7. Par convention, si $r = 0$ alors $J_i(s_i)$ est vide.

(Objectif) Soit p une distribution d'équilibre corrélé objectif. Il existe donc un équilibre corrélé objectif f relatif à un processus de corrélation $\{\Omega, (H_i), (P_i)\}$ tel que $\forall i \forall s \in S\, p_i\,(s) := P_i o f^{-1}\,(s)$. f est un particulier un équilibre corrélé subjectif ; de ce fait, par l'application du premier point de la présente proposition, p est un équilibre corrélé subjectif canonique. Enfin, $\forall\, i,\, j\, \forall\, s \in S\, p_i\,(s) = P_i o f^{-1}\,(s) = P_j o f^{-1}\,(s) = p_j\,(s)$.

Pour le cas des équilibres a posteriori, cette proposition n'a pas son analogue : l'exemple suivant montre une distribution d'équilibre corrélé a posteriori qui n'est pas un équilibre corrélé a posteriori canonique.

Exemple : Considérons le jeu à deux joueurs suivant, pour lequel le joueur 1 joue les lignes et le joueur 2 les colonnes :

	L	R
U	2,0	1,2
D	1,1	0,0

Considérons la distribution conjointe p suivante :

0	1
0	0

0	1
0	0

p n'est pas un équilibre corrélé a posteriori canonique car il n'est pas possible de trouver un système de probabilité tel que D soit une meilleure réponse. Néanmoins, p est la distribution de l'équilibre corrélé a posteriori suivant :

$$\Omega := \{a,\, b\}\,;\; H_1 := \{\{a\},\, \{b\}\}\,;\; H_2 := \{\{a,\, b\}\}\,;$$
$$P_1\,(a) = 1\,;\; P_2\,(a) = P_2\,(b) = 0.5$$
$$\text{et } f\;:\; a,\, b \rightarrow (U,\, R.)$$

Ainsi, les distributions d'équilibres corrélés a posteriori ne se caractérisent pas directement par la formule définissant les équilibres corrélés a posteriori canoniques. Néanmoins, à la section suivante nous fournirons une caractérisation simple des distributions d'équilibres corrélés a posteriori.

Remarquons également qu'un équilibre corrélé subjectif (et donc en particulier un équilibre corrélé semi-objectif) n'est pas forcément un équilibre corrélé a posteriori. En effet, nous avons vu dans l'exemple précédent que l'équilibre corrélé subjectif (canonique) p n'était pas un équilibre corrélé a posteriori, et pourtant, il s'agit bien d'un équilibre corrélé objectif. Inversement, comme l'exemple suivant le montre, un équilibre corrélé a posteriori n'est pas forcément un équilibre corrélé semi-objectif (et donc en particulier un équilibre corrélé objectif).

Exemple : Considérons le jeu à deux joueurs suivant, pour lequel le joueur 1 joue les lignes et le joueur 2 les colonnes :

	L	R
U	1, – 1	– 1, 1
D	– 1, 1	1, – 1

L'équilibre corrélé a posteriori suivant n'est pas semi-objectif car $p_1(D, L) = 0$ et $p_2(D, L) > 0$.

1/3	1/3
0	1/3

1/4	1/4
1/4	1/4

Nous venons de voir que les équilibres corrélés semi-objectifs et objectifs sont des notions tout à fait distinctes des équilibres corrélés a posteriori. Néanmoins, à la section suivante, nous montrerons que les distributions d'équilibres corrélés semi-objectifs et objectifs sont des distributions d'équilibres corrélés a posteriori. C'est là, peut-être, une des raisons importantes qui motivent l'utilisation des distributions plutôt que des équilibres dans notre axiomatique.

4 Présentation des distributions

La définition du modèle stratégique d'un jeu ne spécifie que la structure de ce jeu. Aucune information n'est donnée a priori au sujet du choix et des croyances des joueurs. En plus des hypothèses implicites relatives à l'utilisation de jeux finis sous forme stratégique, nous supposerons également que chacun des joueurs se considère lui-même de la même façon que ses adversaires. Ainsi, chacun des joueurs, avant de choisir sa stratégie, prend du recul et émet des croyances sur le déroulement du jeu dans son ensemble. En d'autres termes, nous associons à chaque joueur i une mesure de probabilité portant sur l'ensemble de tous les profils de stratégies (et non seulement sur l'ensemble des stratégies de ses adversaires). Nous appellerons cette mesure *la distribution du joueur i*. Il en découle un profil de mesures de probabilité sur les profils de stratégies que nous appellerons la *distribution conjointe*. D'un point de vue descriptif, la distribution d'un joueur i est la croyance de celui-ci sur le déroulement du jeu, avant même que ce joueur ne sache quelle stratégie il choisira ; cette croyance a pour object de l'aider dans son choix.

DÉFINITION 5 : Une distribution conjointe $p = (p_1, \ldots, p_n)$ est un profil d'éléments de $\Delta(S)$. Le i-ème élément d'une distribution conjointe est la distribution du joueur i.

La donnée d'une distribution conjointe spécifie un plan de jeu pour chacun des joueurs. Lorsqu'une stratégie $s_i \in S_i$ d'un joueur i est pondérée strictement positivement par la distribution p_i de ce joueur, nous dirons que ce joueur considère cette stratégie raisonnable. L'ensemble de toutes les stratégies raisonnables du joueur i sera appelé l'*ensemble des stratégies susceptibles d'être choisies par le joueur i*. Nous noterons $V_i(p)$ cet ensemble. Le produit cartésien de l'ensemble des stratégies susceptibles d'être jouées sera quant à lui noté $V(p)$.

Formellement,

$$V_i(p) := \{s_i \in S_i \,:\, p_i(s_i, S_{-i}) > 0\}.$$
$$V(p) := \times_i V_i(p).$$

Pour toute stratégie $s_i \in S_i$, nous supposerons que le joueur i attribue une croyance $p_i(s_i, \cdot|s_i)$, modélisée par une mesure de probabilité sur le choix des autres joueurs. Lorsque la stratégie s_i est une stratégie susceptible d'être jouée par le joueur i, la croyance $p_i(s_i, \cdot|s_i)$ correspond à la probabilité conditionnelle induite par la distribution du joueur i p_i, sachant que le joueur i a choisi s_i. Formellement, dans ce cas, $p_i(s_i, \cdot|s_i) := p_i(s_i, \cdot)/p_i(s_i)$. Si au contraire la stratégie s_i n'est pas susceptible d'être jouée par le joueur i, la croyance $p_i(s_i, \cdot|s_i)$ n'est pas déductible de la distribution du joueur i : cette croyance est arbitraire. Nous nous permettons d'insister sur le fait que la croyance $p_i(s_i, \cdot|s_i)$ ne correspond à une probabilité conditionnelle *que* dans le cas où s_i est une stratégie susceptible d'être jouée par le joueur i.

Parmi les stratégies qui ne sont pas susceptibles d'être jouées, certaines sont, néanmoins, dignes d'intérêt. En effet, ce n'est pas parce que le joueur i n'envisage pas de jouer la stratégie s_i, que pour autant, cette stratégie est irrationnelle ; cette stratégie pourrait être jugée *plausible* pour l'un ou plusieurs autres joueurs. Plus précisément, il est possible qu'une stratégie du joueur i ne soit pas susceptible d'être jouée par ce joueur, mais soit néanmoins pondérée positivement par la distribution d'un autre joueur j ; de ce fait, cette stratégie serait pondérée strictement positivement par une croyance du joueur j. L'*ensemble des stratégies plausibles du joueur i* est l'ensemble des stratégies du joueur i qui sont pondérées strictement positivement par la distribution d'au moins un joueur. L'ensemble des stratégies plausibles pour le joueur i est donc un sous-ensemble de S_i contenant l'ensemble des stratégies susceptibles d'être jouées par le joueur i, nous noterons cet ensemble $T_i(p)$. Le produit cartésien de l'ensemble des stratégies plausibles de chaque joueur sera noté $T(p)$. Formellement,

$$T_i(p) := \{s_i \in S_i \,:\, \exists j \; p_j(s_i, S_{-i}) > 0\}.$$
$$T(p) := \times_i T_i(p).$$

4.2. **Axiomes**

Au paragraphe précédent, nous avons attiré l'attention sur le fait que chacun des joueurs forme une croyance $p_i(s_i, \cdot|s_i)$ sur le choix des autres joueurs, pour chacune de ses stratégies s_i. Les seules croyances dignes d'intérêt sont celles relatives aux stratégies plausibles : toutes les autres croyances ne seront d'aucune utilité.

De plus, il est clair que les croyances attachées aux stratégies plausibles qui ne sont pas susceptibles d'être jouées sont arbitraires : elles ne sont pas fixées. De ce fait, lorsqu'un des axiomes que nous présentons impose une contrainte à ce type de croyance, l'axiome en question est validé si et seulement s'il existe au moins une croyance vérifiant cet axiome. De plus lorsque l'on considère conjointement plusieurs axiomes imposant des contraintes à ce même type de croyance, les axiomes en question sont validés si et seulement s'il existe au moins *une croyance vérifiant tous ces axiomes* et non pas une croyance par axiome.

Si s_i est une stratégie susceptible d'être jouée par le joueur i, alors la croyance $p_i(s_i, \cdot|s_i)$ du joueur i sur le choix des autres joueurs est déductible de la distribution de ce joueur par la règle de Bayes. L'axiome d'optimisation demande à toute stratégie susceptible d'être jouée par un joueur i d'tre une meilleure réponse à la croyance qu'il a sur le choix des autres joueurs $p_i(s_i, \cdot|s_i)$. Cet axiome est la condition *sine qua non* de la rationalité bayésienne.

Axiome 1 (optimisation).

$$\forall\, i \in N\, \forall\, s_i \in V_i(p) \quad s_i \in \gamma_i(p_i(s_i, \cdot|s_i))$$

Comme nous l'avons noté, il est possible qu'une stratégie d'un joueur i ne soit pas susceptible d'être jouée par ce joueur, mais soit néanmoins pondérée positivement par la distribution d'un autre joueur j. L'axiome d'optimisation n'impose rien aux stratégies plausibles qui ne sont pas suceptibles d'être jouées. Si nous voulons que les croyances des joueurs soient cohérentes, nous devons imposer aux stratégies plausibles qui ne sont pas susceptibles d'être jouées d'être des meilleures réponses à des croyances ne pondérant positivement que des stratégies plausibles (et donc, à ce titre, raisonnables). L'axiome de cohérence restreint donc le choix de la croyance $p_i(s_i, \cdot|s_i)$ dans le cas où s_i est une stratégie plausible qui n'est pas susceptible d'être jouée.

Axiome 2 (cohérence).

$$\forall\, i \in N\, \forall\, s_i \in T_i(p)\backslash V_i(p)\; p_i(s_i, \cdot|s_i) \in \Delta(T_{-i}(p))$$
$$\text{et} \qquad s_i \in \gamma_i\, p_i(p_i(s_i, \cdot|s_i)).$$

La proposition suivante montre que lorsque les axiomes d'optimisation et de cohérence sont vérifiés, le support de toute croyance attachée à une stratégie plausible d'un joueur donné est toujours incluse dans l'ensemble des stratégies plausibles des autres joueurs. Formellement, nous avons :

PROPOSITION 2 : Si p vérifie lex axiomes d'optimisation et de cohérence, alors, $\forall\, i \in N\, \forall\, s_i \in T_i(p) \quad p_i(s_i, \cdot|s_i) \in \Delta(T_{-i}(p))$

Démonstration: Soit $i \in N$ et $s_i \in T_i(p)$. Si $s_i \in T_i(p) \backslash V_i(p)$, le résultat est trivialement vérifié par l'axiome de cohérence. Supposons donc que si $s_i \in V_i(p)$. Etnat donné $s_i \notin T_{-i}(p)$, nous devons montrer que $p_i(s_i,\, s_{-i}|s_i) = 0$. Comme $s_{-i} \notin T_{-i}(p)$, $\exists \neq i\, :\, s_{-i}(j) \notin T_j(p)$ [8]. De ce fait, $\exists j \neq i\, :\, \forall k\, p_k(s_j) = 0 \Rightarrow \exists j \neq i\, :\, p_i(s_j) = 0 \Rightarrow p_i(s_i,\, s_{-i}|s_i) = 0$.

Les axiomes d'optimisation et de cohérence impliquent que les joueurs sont rationnels au sens bayésien du terme, et que tous le savent. En nous limitant aux jeux finis sous forme stratégique, nous avons fait implicitement l'hypothèse que les joueurs choisissent leur stratégie indépendamment et simultanément. Or jusqu'à présent, nous avons permis aux croyances de corréler les stratégies de différents joueurs et donc de ne tenir aucunement compte du fait que les joueurs jouent de manière indépendante. L'axiome d'indépendance remédie à cette imperfection.

Axiome 3 (Indépendance).

$$\forall\, i \in N\, \forall\, s_i \in S_i\, \forall\, s_{-i} \in S_{-i}\, :\, p_i(s_i,\, s_{-i}|s_i) = \prod_{j \neq i} p_i(s_i,\, s_j|s_i).$$

Nous avons vu que les seules croyances dignes d'intérêt sont celles attribuées aux stratégies plausibles. Ainsi, nous aurions pu, de manière équivalente, limiter l'axiome d'indépendance aux stratégies s_i qui sont plausibles.

Afin de caractériser les équilibres corrélés semi-objectifs, l'axiome suivant est nécessaire. Il assure que les joueurs ne commettent pas d'erreurs dans leur croyance tout en les laissant ignorer les croyances de leurs adversaires. Cet axiome est un pas vers la communauté de vue.

Axiome 4 (Semi-objectivité).

$$\forall\, i,\, j \in N\, \forall\, s \in S\, p_i(s) = 0 \Leftrightarrow p_j(s) = 0$$

L'hypothèse de *distribution a priori commune*, encore souvent dénommée la doctrine d'Harsanyi, est un postulat qui est repris implicitement ou explicitement dans une grande partie de la littérature, autant en théorie des jeux qu'en économie.

Occasionnellement, la possibilité de distinguer les distributions a priori (P_i) est présente, mais bien souvent, elle est vite abandonnée dans les théorèmes et les exemples. Cependant, il nous paraît important de relever le fait que dans le cadre de notre modèle, cet axiome présente un inconvénient majeur, comme nous l'expliquons à la section VI. Nous conseillons aux lecteurs souhaitant une discussion détaillée de cet axiome, de se référer à l'article de MORRIS [1995].

Axiome 5 (Distributions a priori communes).

$$p_1 = \ldots = p_N$$

Afin de caractériser les équilibres de Nash, l'axiome suivant est nécessaire.

8. Où $s_{-i}(j)$ représente la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur de stratégies s_i.

Axiome 6 (Croyances uniformes).

$$\forall\, i \quad \exists \mu_{-i} \in \Delta\,(S_{-i})\, \forall\, s_i \in T_i\,(p)\, p_i\,(s_i,\, \cdot | s_i) = \mu_{-i}\,(\,\cdot\,).$$

Remarquons que lorsqu'une distribution satisfait l'axiome de semi-objectivité, l'ensemble des stratégies plausibles coïncide avec l'ensemble des stratégies susceptibles d'être jouées. De ce fait, l'axiome de cohérence est automatiquement vérifié. De même, si une distribution satisfait l'axiome de distribution a priori commune, elle satisfait trivialement l'axiome de semi-objectivité (et donc en particulier l'axiome de cohérence).

4.3. **Le théorème principal**

Notre caractérisation axiomatique porte sur des distributions de probabilité sur l'ensemble des stratégies. Nous allons caractériser tous les concepts de solution que nous avons présentés dans les sections précédentes. Le théorème met en lumière le lien qui existe entre certaines combinaisons de nos axiomes et les distributions d'équilibre.

THÉORÈME 1 : Soit $\Gamma := \langle N\,;\ S\,;\ u\rangle$ un jeu et $p := (p_1,\, \ldots,\, p_N) \in \Delta\,(S)^N$.

(i) p vérifie l'axiome d'optimisation si et seulement si p est une distribution d'équilibre corrélé subjectif.

(ii) p vérifie les axiomes d'optimisation et de cohérence si et seulement si p est une distribution d'équilibre corrélé a posteriori.

(iii) p vérifie les axiomes d'optimisation et de semi-objectivité si et seulement si p est une distribution d'équilibre corrélé semi-objectif.

(iv) p vérifie les aixomes d'optimisation et de distribution a priori commune si et seulement si p est une distribution d'équilibre corrélé objectif.

(v) p vérifie les axiomes d'optimisation, d'indépendance, de distribution a priori commune et de croyances uniformes si et seulement si p est une distribution d'équilibre de Nash.

Démonstration : (Subjectif ; semi-objectif ; objectif) Ces trois propositions découlent des définitions, de manière évidente.

(A posteriori) Supposons que la distribution conjointe p vérifie les axiomes d'optimisation et de cohérence. Considérons le processus de corrélation suivant : $\Omega := T\,(p)$; $H_i := \{s_i \times T_{-i}\,(p)\ :\ s_i \in T_i\,(p))\}$ et les $P_i = p_i$. Clairement, p est la distribution de la stratégie corrélée $f := 1_{T\,(p)}$. Comme p vérifie les axiomes d'optimisation et de cohérence, nous savons que pour tout joueur i il existe un système de probabilités conditionnelles propre et régulier tel que $\forall\, s_i \in T_i\,(p)\ \ s_i \in \gamma_i\,(p_i\,(s_i,\, \cdot|s_i))$. f est donc un équilibre corrélé a posteriori. Réciproquement, considérons une distribution d'équilibre corrélé a posteriori p. p est donc, en particulier une distribution d'équilibre corrélé subjectif. Par le théorème 1, nous savons que p satisfait l'axiome d'optimisation. Nous devons encore montrer que p satisfait l'axiome de cohérence. Soit $s_i \in S_i\ :\ p_i\,(s_i) = 0$ et $\exists j\, p_j\,(s_i) > 0$. $p_j\,(s_i) > 0 \Rightarrow P_j o f^{-1}\,(s_i) > 0 \Rightarrow f^{-1}\,(s_1) \neq \varnothing$. Notons h_i un élément de la partition H_i tel que $f_i(h_i) = s_i$. f étant un équilibre a posteriori, nous savons que

$$\forall \overline{s}_i \in S_i \sum_{\omega \in h_i} u_i o f(\omega) P_i(\omega | h_i) \geq \sum_{\omega \in h_i} u_i [\overline{s}_i, f_{-i}(\omega)] P_i(\omega | h_i)$$
$$\Leftrightarrow s_i = f_i(h_i) \in \gamma_i [P_i [f^{-1}(s_i, \cdot) | h_i]$$

Nous allons montrer que $P_i [f^{-1}(s_i, \cdot) | h_i] \in \Delta(T_{-i}(p))$. Soit $s_{-i} \in T_{-i}(p) \Rightarrow \exists j \neq i : T_j(p) \Rightarrow \exists j \neq i : \forall k\, p_k(s_j) = 0 \Rightarrow \exists j \neq i : p_i(s_j) = 0 \Rightarrow \exists j \neq i : P_i o f^{-1}(s_i, s_{-i}) = 0 \Rightarrow P_i [f^{-1}(s_i, s_{-i}) | h_i] = 0$. p vérifie donc l'axiome de cohérence.

(Nash) Soit p une distribution conjointe vérifiant les axiomes d'optimisation, d'indépendance, de distribution a priori commune et de croyances uniformes. p est donc une distribution d'équilibre corrélé objectif vérifiant les axiomes d'indépendance et de croyances uniformes (Théorème 4). Pour montrer que p est un équilibre de Nash, nous devons montrer que

$$\forall s \in S\, p(s_1, \ldots, s_N) = \prod_{i=1}^{n} p(s_i)$$

Ce résultat est trivial lorsque $s \notin V(p)$. Supposons donc que $s \in V(p)$. Par l'application successive des axiomes d'indépendance et de croyances uniformes, nous savons que

$$\forall i\, p(s_i, s_{-i} | s_i) = \prod_{j \neq i} p(s_i, s_j | s_i) = \prod_{j \neq i} \mu_{-i}(s_j)$$

De ce fait,

$$p(s) = p(s_i)\, p(s_i, s_{-i} | s_i) = p(s_i) \prod_{j \neq i} \mu_{-i}(s_j)$$

Remarquons que $\forall j,\ p(s_j) = \mu_{-i}(s_j)$. Nous obtenons donc le résultat voulu : $p(s) = \prod_{i=1}^{n} p(s_i)$.

Afin de montrer la réciproque, supposons que p est une distribution d'équilibre de Nash. p est donc en particulier une distribution d'équilibre corrélé objectif : elle satisfait donc les axiomes d'optimisation et de distribution a priori commune. Montrons que p satisfait l'axiome d'indépendance.

$$\forall i \forall s_i \in V(p) \forall s_{-i} \in S_{-i}\, p(s_i, s_{-i} | s_i) = \prod_{j=1}^{n} p(s_j) \backslash p(s_i) = \prod_{j \neq i} p(s_j)$$

Remarquons que $\forall j,\ p(s_i, s_j | s_i) = p(s_j)$. p satisfait donc l'axiome d'indépendance :

$$p(s_i, s_{-i} | s_i) = \prod_{j \neq i} p(s_i, s_j | s_i)$$

Enfin, nous devons vérifier que p satisfait l'axiome de croyances uniformes.

$$\forall\, s_i \in V_i\,(p),\; \forall\, s_{-i} \in S_{-i}\; p_i\,(s_i,\; s_{-i}|s_i) = \prod_{j=1}^{n} p\,(s_j) \backslash p\,(s_i)$$

$\forall\, i\; \forall\, s_{-i} \in S_{-i}$ définissons $\mu_{-i}\,(s_{-i}) := \prod_{j=1}^{n} p\,(s_j)$. p satisfait donc l'axiome de croyances uniformes.

5 Autres théorèmes de caractérisation

La première partie de cette section sera consacrée à la présentation de certains espaces de solutions usuels tels D, le support des stratégies rationalisables, C, le support des équilibres corrélés ou N, le support des équilibres de Nash. Cette partie se concentrera également sur l'ensemble moins connu C^{∞}. Deux caractérisations de cette espace de solution seront proposées, l'une itérative et l'autre extensive. Dans la deuxième partie, des exemples seront fournis mettant en lumière les inclusions existantes entre ces différents concepts. Enfin, la troisième partie de cette section apportera des résultats de caractérisation de ces ensembles de stratégies en liant ces concepts à des combinaisons de postulats repris de notre axiomatique.

5.1. **Quelques concepts de solution usuel**

Le type de concept de solution le plus simple est un concept de solution spécifiant l'ensemble des stratégies que chacun des joueurs pourrait raisonnablement jouer, sans fixer de probabilités sur chacune de ces stratégies. La solution du jeu ne consiste pas à préconiser un profil spécifique de stratégies, mais plutôt un ensemble de choix raisonnables. Un ensemble de critères servira à décider de la rationalité d'un choix particulier. Dans cette approche, le théoricien (ou un des joueurs) détermine la solution du jeu en s'imaginant tour à tour dans la position de chacun des joueurs. Reprenant la nomenclature de BERNHEIM [1986], nous appellerons *théorie* un concept de solution consistant en un profil d'ensembles de stratégies (un ensemble pour chacun des joueurs). Un ensemble de règles spécifiera le type de rationalité motivant ces choix de ces ensembles de stratégies.

Adoptant une vue bayésienne du monde, nous dirons qu'une stratégie d'un joueur est raisonnable si et seulement si elle est une meilleure réponse. Ainsi toute *théorie* rationnelle E ne peut être constituée que de stratégies qui sont des meilleures réponses. Chaque joueur i est censé comprendre cela, et de ce fait, nous pouvons faire l'hypothèse qu'il ne peut raisonnablement choisir une stratégie que si celle-ci est une meilleure réponse à une mesure de probabilité dont le support est inclus dans E_{-i}. En d'autres termes, une théorie ne peut être rationnelle au sens bayésien que si celle-ci vérifie la *propriété de meilleure réponse (B.R.P.)* [9].

Pour un jeu donné, de nombreuses *théories* vérifient la propriété de meilleure réponse. Il serait assez naturel de renforcer nos critères de rationalité en ajoutant un ou plusieurs postulats d'où découlerait l'unicité d'une *théorie* rationnelle. On peut montrer facilement que l'union des théories vérifiant la propriété de meilleure réponse satisfait également cette propriété. Chacun des joueurs a la possibilité de calculer cette théorie « maximale », en ne se basant que sur la connaissance qu'il a de la structure du jeu. De plus, en l'absence d'information supplémentaire au sujet du contexte décisionnel, les joueurs tenteront de limiter leurs erreurs de prédiction et ne considéreront que la théorie maximale, appelée l'ensemble des stratégies rationalisables corrélés. BERNHEIM [1984] et PEARCE [1984] ont montré que D, l'ensemble des stratégies itérativement non dominées (ou stratégies rationanisables) est précisément cette théorie maximale. Formellement, $D := \cup\{T\,:\,T$ est une théorie vérifiant la B.R.P.$\}$.

Cette approche, basée sur les théories, caractérise le comportement rationnel qui découle de deux hypothèses. La première impose aux joueurs de maximiser leur espérance d'utilité. Tandis que l'autre stipule que les croyances des joueurs sont cohérentes avec le fait que les autres joueurs maximisent également leur espérance d'utilité. Un fondement rationnel du processus d'élimination des stratégies fortement dominées est donc fourni.

L'utilisation du modèle stratégique de représentation des jeux suggère que les joueurs choisissent leur stratégie de manière indépendante. BERNHEIM et PEARCE ont également donné un fondement à la rationalisabilité indépendante.

L'élimination des stratégies fortement dominées est une procédure qui caractérise un concept de solution très peu contraignant. Ces dernières années, les théoriciens se sont penchés sur des concepts beaucoup plus restrictifs, mais se basant toujours sur des considérations de domination. La procédure d'élimination des stratégies faiblement dominées a reçu beaucoup d'attention ; elle est cependant très problématique. STALNAKER [1994], a défini un concept de solution considérablement plus fort que la rationalisabilité de BERNHEIM-PEARCE : les profils de stratégies fortement rationalisables. Tout comme la rationalisabilité ordinaire, la rationalisabilité forte peut être définie à l'aide d'un algorithme itératif. La procédure consiste à éliminer les profils de stratégies qui sont des réponses inférieures.

> DÉFINITION 6 :
> $C\,(0)\,=\,S.$
> $\forall\,t = 1,\,2,\,\dots\,I\,(t) = \{s \in C\,(t)\,:\,s$ est inférieur relativement à $C\,(t)\}.$
> $\forall\,y\,=\,1,\,2,\,\dots\,C\,(t+1)\,=\,C\,(t) - I\,(t).$
> $C^{\infty} = \cap\{C\,(t)\,:\,t \in \mathbf{N}\}.$

9. Un N-uple $(A_1,\,\dots,\,A_N) \subset S_1 \times \ldots \times S_N$ a la propriété de meilleure réponse si et seulement si pour tout joueur i, chacune des stratégies appartenant à A_i est une meilleure réponse relativement à A_{-i}. B.R.P. sont les initiales de l'expression anglophone "Best Response Property".

La construction de C^{∞} repose sur une procédure itérative ; à chaque étape, un profil de stratégies n'est retenu que s'il n'est pas inférieur relativement à l'ensemble calculé à l'étape précédente. Plus précisément, $C(1)$ est l'ensemble des profils de stratégies qui ne sont pas inférieurs relativement à S. Parmi les profils qui ne sont pas inférieurs par rapport à S, certains pourraient cependant être inférieurs relativement à $C(1)$. L'ensemble des profils de stratégies qui ne sont pas inférieurs relativement à $C(1)$ est l'ensemble $C(2)$, etc... Le jeu Γ étant fini, il est évident qu'un nombre fini d'itérations suffira à déterminer C^{∞} :

$$\exists K \,:\, C^{\infty} = C(K) = C(K+1) = \cap\{C(t) \,:\, t \in \mathbf{N}\}$$

L'exemple suivant, repris de STALNAKER [1994] illustre adéquatement cette procédure d'élimination.

Exemple : $n = 2$; $S_1 = \{A, B, C\}$; $S_2 = \{X, Y, Z\}$, les paiements sont décrits comme suit ;

	X	Y	Z
A	2,0	2,2	0,2
B	2,2	1,2	5,1
C	2,0	1,0	1,5

Il est facile de vérifier que dans ce jeu, aucune stratégie n'est fortement dominée. Cependant, les stratégies C du joueur 1 et X du joueur 2 sont faiblement dominées par les stratégies B et Y, respectivement. Les profils CZ et AX étant inférieurs, ils sont éliminés à la première étape : $C(1) = S\backslash\{CZ, AX\}$. Les stratégies C et Z sont maintenant faiblement dominées par rapport aux stratégies A et Y (resp.) relativement à $C(1)$. Les profils AY et BZ sont alors inférieurs par rapport à $C(1)$; ils sont éliminés à la deuxième étape : $C(2) = C(1)\backslash\{AY, BZ\} = S\backslash\{CZ, AX, AY, BZ\}$. La seule stratégie faiblement dominée relativement à $C(2)$ est la stratégie B (dominée par A). Le profil BY est inférieur par rapport à $C(2)$, il est donc éliminé. $C(3) = \{AY, AZ, BX, CX\}$; aucun de ces profils ne peut être éliminé : $C^{\infty} = C(3) = \{AY, AZ, BX, CX\}$.

Il est évident que $C(0) \supset C(1) \supset \ldots \supset C(K) \supset C^{\infty}$, et on peut montrer aisément que tous ces ensembles sont non vides. Le lecteur est en droit de se demander si l'ensemble limite C^{∞} dépend de la manière dont nous avons spécifié le processus d'élimination : à chaque itération définie ci-dessus, tous les profils de stratégies qui sont inférieurs (relativement à l'ensemble qui a été calculé à l'étape précédente) sont éliminés simultanément.

Nous aurions pu éliminer les profils de stratégies inférieurs du joueur 1, ensuite ceux du joueur 2, ..., ensuite ceux du joueur N, et recommencer ensuite avec les profils de stratégies inférieurs du joueur 1, ..., ad infinitum.

Il existe bien sûr de nombreuses autres procédures pouvant être définies afin d'éliminer des profils de stratégies inférieurs. Heureusement, ces différents processus tendent tous vers le même ensemble de profils de stratégies, à savoir C^{∞}. En effet, la proposition suivante implique que lors d'un processus quelconque d'élimination, si un profil de stratégies est inférieur (pour n'importe quel joueur), alors il le restera aux étapes ultérieures (l'ensemble résiduel devenant de plus en plus petit à chaque étape) ; ainsi ce profil devra tôt ou tard être éliminé. Et inversement, si un profil n'est pas inférieur à une étape donnée, il n'aurait pas pu l'être à une étape d'élimination précédente.

PROPOSITION 3 : Soit X et Y deux sous-ensembles de S tels que $X \subset Y$. Si un profil de stratégies $s \in X$ est inférieur relativement à Y alors ce profil est aussi inférieur relativement à X.

Tout comme les stratégies itérativement non-dominées [10], les profils de stratégies itérativement non-inférieurs jouissent d'une caractérisation circulaire. Cependant, cette caractérisation circulaire est d'une nature différente de celle concernant les stratégies itérativement dominées. Contrairement à la rationalisabilité corrélée, cette caractérisation ne se base pas sur une notion de rationalité, telle la propriété de meilleure réponse ; elle ne fournit donc pas un fondement rationnel aux stratégies fortement rationalisables. La caractérisation circulaire concernant les profils de stratégies non-inférieurs s'avérera néanmoins être un outil plus facile à utiliser que la procédure itérative.

DÉFINITION 7 : Soit un jeu fini sous forme stratégique $\Gamma := \{N, S, u\}$. $X \subset S$ a la *propriété de non-infériorité* (P.N.I.) si

$$\forall\, s \in X,\ \ s \text{ n'est pas inférieur relativement à } X.$$

LEMME 3 : Si X, Y sont deux sous-ensembles de S ayant la P.N.I., alors $X \cup Y$ possède également la P.N.I.

Démonstration : Soit $s \in X \cup Y$. Si $s \in X$, alors s n'est pas inférieur relativement à X ; la proposition 1 implique que s n'est pas inférieur relativement à $X \cup Y$. De même, si $s \in Y$, s ne peut pas être inférieur relativement à $X \cup Y$.

PROPOSITION 4 :

$$C^{\infty} = \{s \in S\ :\ \exists X\ :\ X \text{ possède la P.N.I.} : s \in X\}.$$

10. La caractérisation circulaire de l'ensemble des stratégies itérativement non-dominées du joueur i est la suivante : $D_i := \{s_i \in S_i\ :\ \exists\,(X_1, \ldots, X_N)$ B.R.P. : $s_i \in X_i\}$.

Démonstration: Comme nous l'avons vu, le jeu Γ étant fini, il existe un nombre naturel K: $C^{\infty} = C(K)$. Soit $s \in C^{\infty}$. Nous avons donc $s \notin I(K)$. Ainsi, s n'est pas inférieur relativement à C^{∞}. C^{∞} vérifie donc la P.N.I. Nous venons de montrer que $C^{\infty} \subset \{s \in S : \exists X \text{ P.N.I.} : s \in X\}$.

Nous montrons l'inclusion opposée par induction sur $t \in N$. Premièrement, remarquons que $\{s \in S : \exists X \text{ P.N.I.} : s \in X\}$ représente l'union de tous les sous-ensembles de S vérifiant la P.N.I. Le lemme précédent implique que $\{s \in S : \exists X \text{ P.N.I.} : s \in X\}$ vérifie la P.N.I.

Supposons qu'il existe un $s \in \{s \in S : \exists X \text{ P.N.I.} : s \in X\} \backslash C(1)$. Alors s est inférieur relativement à S. La proposition 1 implique que s est inférieur relativement à $\{s \in S : \exists X \text{ P.N.I.} : s \in X\}$. Ce qui est absurde puisque $\{s \in S : \exists X \text{ P.N.I.} : s \in X\}$ vérifie la P.N.I. Nous en déduisons donc que $\{s \in S : \exists X \text{ P.N.I.} : s \in X\} \subset C(1)$.

Supposons qu'il existe unprofil $s \in \{s \in S : \exists X \text{ P.N.I.} : s \in X\} \backslash C(2)$. Alors s est inférieur relativement à $C(1)$. La proposition 1 implique que s est inférieur relativement à $\{s \in S : \exists X \text{ P.N.I.} : s \in X\} \subset C(1)$. Ce qui est absurde, nous en concluons que $\{s \in S : \exists X \text{ P.N.I.} : s \in X\} \subset C(2)$.

De manière itérative, nous en concluons que $\{s \in S : \exists X \text{ P.N.I.} : s \in X\} \subset C^{\infty}$.

Enfin, nous noterons C l'union de tous les supports des distrituions d'équilibres corrélés objectifs. Formellement,

$$C := \{s \in S : \exists p \, \text{distribution d'équilibre corrélé objectif } p(s) > 0\}.$$

Nous définissons N de manière analogue à C:

$$N := \{s \in S : \exists p \text{ distribution d'équilibre de Nash} : p(s) > 0\}.$$

5.2. Résultats d'inclusions

Il est clair que l'ensemble C^{∞} est toujours inclus dans l'ensemble D, et généralement l'inclusion est stricte. Le concept d'équilibre corrélé objectif est plus contraignant que celui de rationalisabilité forte car l'ensemble C est toujours inclus dans l'ensemble C^{∞}. L'exemple suivant met en lumière une inclusion stricte de C dans C^{∞}.

Exemple: $n = 2$; $S_1 = \{u, m_1, d\}$; $S_2 = \{l, m_2, r\}$, les paiement sont décrits comme suit:

	L	m_2	r
u	1,1	2,0	2;0
m_1	0,2	3,0	0,3
d	0,2	0,3	3,0

Il est facile de vérifier qu'aucune des stratégies de ce jeu n'est faiblement dominée. De ce fait, tous les profils de stratégies sont fortement rationalisables : $C^\infty = S$. On montre aisément que le seul équilibre corrélé objectif de ce jeu est le suivant :

1	0	0
0	0	0
0	0	0

Le support de tous les équilibres corrélés est donc $C = \{(u,\, l)\}$. C'est donc strictement inclus dans C^∞.

De même, N est toujours inclus dans C. Pour les jeux représentés par une matrice 2×2, il semblerait que C soit toujours égal à N. Cependant, lorsque le nombre de stratégies d'un joueur augmente, une inclusion stricte peut être mise en lumière. L'exemple suivant repris de DE WOLF-FORGES [1995] présente un jeu pour lequel N est strictement inclus dans C.

Exemple : $n = 2$; $S_1 = \{u,\, d\}$; $S_2 = \{l,\, m,\, r\}$, les revenus sont décrits comme suit :

	l	m	r
u	0,0	1,2	2,3
d	1,3	2,2	0,0

Dans cet exemple, l'ensemble C est l'ensemble S. On peut vérifier facilement que le profil $(u,\, l)$ ne peut en aucun cas appartenir à l'ensemble N. L'ensemble N est de ce fait strictement inclus dans l'ensemble C.

5.3. **Théorèmes de caractérisations**

Les deux théorèmes suivants fournissent une caractérisation des stratégies rationalisables corrélées et des profils de stratégies fortement rationalisables. Ces deux théorèmes sont les analogues des résultats présentés par BRANDENBURGER et DEKEL [1987] et STALNAKER [1994]. Ils sont cependant présentés ici de manière substantiellement différente.

THÉORÈME 2 : Soit $\Gamma := \langle N\, ;\, S\, ;\, u \rangle$ un jeu. $\cup\{V(p)\ :\ p \in \Delta(S)^N$ satisfait les axiomes d'optimisation et de cohérence$\}$ est l'ensemble D. De plus, il existe une distribution d'équilibre corrélé a posteriori p vérifiant les axiomes d'optimisation et de cohérence tel que $V(p) = D$.

Démonstration: Dans un premier temps, nous allons montrer que si p satisfait les axiomes d'optmisation et de cohérence, alors $V(p) = D$. Comme nous savons que $V(p) \subset T(p)$, il nous suffit de vérifier que $T(p) \in D$. Or, comme $\forall\, i\ D_i = \{s_i \in S_i\ :\ \exists\,(X_1, \ldots, X_N)$ B.R.P.: $s_i \in X_i\}$, nous pouvons nous contenter de montrer que $(T_1(p), \ldots T_N(p))$ a la B.R.P. Soit $s_i \in T_i(p)$. Deux cas différents sont possibles. (Cas 1) $p_i(s_i) > 0$. Comme p vérifie l'axiome d'*optimisation*, nous avons $s_i \in \gamma_i(p_i(s_i, \cdot|s_i))$. De plus, la proposition 4, nous savons que $p_i(s_i, \cdot|s_i) \in \Delta(T_i(p))$. (Cas 2) $p_i(s_i) = 0$. Comme p vérifie l'axiome de *cohérence*: $\exists \sigma_{-i} \in \Delta(T_{-i}(p))$: $s_i \in \gamma_i(\sigma_{-i})$. $(T_1(p), \ldots T_N(p))$ vérifie donc la B.R.P. dans les deux cas, $(T_1(p), \ldots T_N(p))$ vérifie donc la B.R.P. Enfin, nous allons montrer qu'il existe un p vérifiant les axiomes d'optimisation et de cohérence tel que $V(p) = D$. Remarquons que $\forall\, s_i \in D_i\ \exists \sigma_{-i} \in \Delta(D_{-i})$: $s_i \in \gamma_i(\sigma_{-i})$. Définissons la distribution suivante:

$$\forall\, s_i \in D_i\ p_i(s_i, \cdot) := \frac{\sigma_{-i}(\cdot)}{\#D_i};$$
$$\forall\, s_i \notin D_i\ p_i(s_i) := 0.$$

Remarquons que $p_i(s_i, \cdot|s_i) = \sigma_{-i}(\cdot)$. Supposons que $D_i \backslash V_i(p)$ soit non vide; Alors, $\exists s_i \in D_i \backslash V_i(p) \Rightarrow p_i(s_i) = 0 \Rightarrow \sigma_{-i}(S_{-i}) = 0$: c'est absurde. $D_i \backslash V_i(p)$ est donc vide.

Il est également possible de caractériser la rationalisabilité indépendante comme l'union de supports des distributions vérifiant les axiomes d'optimisation, de cohérence et d'indépendance.

Contrairement au concept de rationalisabilité, la rationalité forte s'applique à des profils de stratégies et non aux stratégies pures des joueurs particuliers. De ce fait la notion de stratégie susceptible d'être jouée par un joueur donné n'est pas adéquate pour caractériser ce concept de solution. Nous travaillerons plutôt avec des supports de distributions:

DÉFINITION 8 :
$\mathrm{Supp}(p) := \{s \in S\ :\ \forall\, i \in N\ p_i(s) > 0\}$

THÉORÈME 3 : Soit $\Gamma := \langle N\,;\ S\,;\ u\rangle$ un jeu. $\cup\{\mathrm{Supp}(p)\ :\ p \in \Delta(S)^N$ satisfait les axiomes d'optimisation et de semi-objectivité$\}$ est l'ensemble des profils de stratégies fortement rationalisables C^∞. De plus, il existe une distribution p satisfaisant les axiomes d'optimisation et de semi-objectivité tel que $\mathrm{Supp}(p) = C^\infty$.

Démonstration: Dans un premier temps, nous allons montrer que si p satisfait les axiomes d'optimisation et de semi-objectivité, alors $\mathrm{Supp}(p) \subset C^\infty$. Par la proposition 2, nous avons que $C^\infty := \{s \in S\ :\ \exists X$ P.N.I. $:\ s \in X\}$. Nous pouvons donc nous contenter de montrer que $\mathrm{Supp}(p)$ vérifie la P.N.I. Soit $s \in \mathrm{Supp}(p) \Rightarrow \forall\, i\ s \in V_i(p)$. Par l'axiome, d'*optimisation*, nous avons $\forall\, i\ s_i \in \gamma_i\,[p_i(s_i, \cdot|s_i)]$. Pour toute stratégie $s_i \in V_i(p)$, $\mathrm{Supp}(p_i(s_i, \cdot|s_i)) = \mathrm{Supp}(p_i(s_i, \cdot)) = \times_{j\neq i} V_j(p)$. s_i est donc une meilleure réponse pleine relativement à $\times_{j\neq i} V_j(p)$, et de ce fait, s_i n'est pas faiblement dominée relativement à $\times_{j\neq i} V_j(p)$. $\mathrm{Supp}(p)$

vérifie donc bien la propriété de non-infériorité. Nous avons montré que $\cup\{\mathrm{Supp}\,(p) : p$ distribution d'équilibre corrélé semi-objectif$\} \subset C^\infty$. Enfin, nous allons montrer qu'il existe un p vérifiant les axiomes d'optimisation et de semi-objectivité tel que $\mathrm{Supp}\,(p) = C^\infty$. Nous savons que C^∞ vérifie la P.N.I. Tout profil de stratégie fortement rationalisable n'est donc pas inférieur relativement à C^∞. De ce fait, pour tout joueur donné i, et pour toute stratégie $s \in C^\infty$, s_i n'est pas faiblement dominée relativement à $C^\infty_{-i} := \{s_{-i} \in S_{-i}\, \exists s_i \in S_i\, (s_i,\, s_{-i}) \in C^\infty\}$. Par le lemme 2 ceci revient à dire que $\forall i \forall s \in C^\infty$, s_i est une meilleure réponse pleinement relativement à C^∞_{-i}. Formellement, $\forall\, i\, \forall\, s \in C^\infty$, $\exists_{-i} \in \Delta\,(S_{-i})$: $\mathrm{Supp}\,(\sigma_{-i}) = C^\infty_{-i}$. $\forall\, i\, \forall\, s \in C^\infty$, définissons $p_i\,(s) := \sigma_{-i}\,(s_{-i}) \backslash \# C^\infty_i$ et $p_i\,(s) = 0$

si $s \notin C^\infty$. IL est facile de vérifier que p est une distribution ayant un support égal à C^∞.

De la même manière, C (resp. N) peut être représenté comme l'union de supports des distributions vérifiant les axiomes d'optimisation et de distribution a priori commune (resp. les axiomes d'optimisation, d'indépendance, de distribution a priori commune et de croyances uniformes). Ces deux résultats se vérifient sans difficulté à l'aide du théorème 1.

6 Discussion

L'axiome d'optimisation requiert que chacune des stratégies susceptibles d'être choisies par un joueur doive impérativement être une meilleure réponse à la croyance de *ce* joueur sur le choix des autres joueurs. Aucune hypothèse concernant la connaissance des joueurs sur les croyances ou les stratégies choisies par les autres joueurs n'est implicitement supposée. Cet axiome, condition *sine qua non* de la rationalité bayésienne, est clair dans son énonciation et son interprétation n'est sujette à aucun sous-entendu. Il n'en va pas de même pour l'axiome de cohérence : si les joueurs ne connaissaient pas l'ensemble des stratégies plausibles des autres joueurs, aucun d'entre eux n'aurait les moyens, lorsqu'il décide quelle est la stratégie qu'il va jouer, de satisfaire consciemment cet axiome. En effet, toute stratégie plausible non susceptible d'être jouée doit impérativement, selon cet axiome, être une meilleure réponse à une mesure de probabilité dont le support est inclus dans l'ensemble des stratégies *plausibles* des autres joueurs. Imposer aux joueurs de satisfaire cet axiome revient à supposer que les joueurs ont des informations plus ou moins précises concernent les stratégies et les conjectures des autres joueurs. Le lecteur est donc en droit de penser que cet axiome contredit les hypothèses implicitement admises par la théorie des jeux non-coopératifs : chaque joueur est supposé faire son choix stratégique sur une base purement individuelle et indépendamment des autres joueurs.

Les axiomes de semi-objectivité et de distribution a priori commune n'échappent pas non plus à ce problème, mais d'une manière quelque peu différente. Ces deux axiomes astreignent les distributions des joueurs à certains degrés de similitude. L'axiome de semi-objectivité contraint les distributions des joueurs à admettre exactement le même support, tandis que l'axiome de distribution a priori commune leur impose d'être identiques. Ces deux axiomes acculent les joueurs à se comporter de manière similaire lorsque ceux-ci émettent leurs croyances sur le déroulement du jeu. Or, ces deux contraintes sont loin d'être unanimement reconnues comme des critères de rationalité. Remarquons également que demander aux joueurs de vérifier consciemment ces axiomes implique l'acceptation du postulat que les joueurs connaissent les distributions a priori communes des autres joueurs (objectivité) ou leurs supports (semi-objectivité). Ainsi, nous revenons au problèlme qui concernait l'axiome de cohérence : on demande aux joueurs d'avoir des informations qu'ils n'auraient pas pu déduire de la seule structure du jeu.

Afin de relativiser, il est à noter que ce type de problème semble être une caractéristique commune de toutes les axiomatiques dénuées d'hypothèses épistémiques explicitement formulées (c'est le cas, par exemple, de l'axiomatique de BERNHEIM [1986], qui suppose que la théorie rationnelle est connue de tous les joueurs et de celle de BRANDENBURGER-DEKEL [1987] qui admet que les stratégies corrélées de tous les joueurs sont connues de tous).

Nous pensons être en mesure de justifier partiellement les axiomes de cohérence et de semi-objectivité. Il existe en général de nombreuses distributions conjointes vérifiant un ensemble d'axiomes donnés. Parmi l'ensemble de toutes ces distributions conjointes, seules celles qui ont les supports les plus *grands* (en terme d'inclusion) devraient être théoriquement pertinentes. En se contentant uniquement des informations déductibles de la connaissance qu'ils ont sur la structure du jeu, les joueurs peuvent identifier chacune de ces distributions conjointes ayant un support de taille maximale. En l'absence de toute information supplémentaire, les joueurs tenteront de limiter leurs erreurs de prédiction et ne considéreront que les distributions ayant un support de taille maximale. Selon ce principe, aucun joueur n'attribuerait une probabilité nulle à un profil de stratégies qu'il juge raisonnable. Ainsi, l'ensemble des stratégies plausibles d'un joueur donné coïncide avec l'ensemble des stratégies susceptibles d'être jouées par ce même joueur, qui lui, peut être identifié par tous les joueurs en ne se basant que sur la connaissance de la structure du jeu : l'axiome de cohérence n'est donc plus problématique. De même, les profils de stratégies qui ne sont pas pondérés coïncident dans la distribution de chaque joueur. L'acceptation du précédent principe de « maximalité » justifie donc les axiomes de cohérence et de semi-objectivité.

Un tel raisonnement est bien sûr impossible dans le cas de l'axiome de distribution a priori commune. Il semblerait même qu'aucune justification convaincante ne puisse légitimer l'imposition de cet axiome (voir MORRIS [1995]). Ceci peut paraître surprenant lorsque l'on sait que cette hypothèse est généralement considérée presque unanimement comme un critère de rationalité par les économistes. En particulier, le résultat d'AUMANN [1987] (ainsi que tous les travaux concernant les équilibres corrélés objectifs) est intrinsèquement basé sur l'acceptation du postulat de distribution a priori commune.

● Références bibliographiques

AUMANN R. J. (1974). – “Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies”, in *Journal of Mathematical Economics*, pp. 67-96.

AUMANN R. J. (1987). – “Correlated Equilibrium as an Expansion of Bayesian Rationality”, in *Econometrica*, pp. 1-18.

BERNHEIM B. Douglas (1984). – “Rationalizable Strategic Behavior”, in *Econometrica*, pp. 1007-1028.

BERNHEIM B. Douglas (1986). – “Axiomatic Characterizations of Rational Choice in Strategic Environments”, in *Scandinavian Journal of Economics*, pp. 473-488.

BRANDENBURGER A., DEKEL E. (1987). – “Rationalizability and Correlated Equilibria”, in *Econometrica*, pp. 1391-1402.

DE FINETTI B. (1974). – *Theory of Probability*. John Wiley and Sons.

DE WOLF O., FORGES F. (1995). – “On Strategic Equilibria and Rational Choice”, *CORE Discussion paper n° 9548.*

JACOBSEN H. J. (1994). – “On the Foundations of Nash Equilibrium”, *mimeo*, University of Copenhagen.

JOHANSEN L. (1982). – “On the Status of the Nash Type of Noncooperative Equilibrium in Economic Theory”, in *Scandinavian Journal of Economics*, n° 3, pp. 421-441.

KOHLBERG E., MERTENS J.-F. (1986). – “On the Strategic Stability of Equilibria”, in *Econometrica*, pp. 1003–1037.

KREPS D., WILSON R. (1982). – “Sequential Equilibria”, in *Econometrica*, pp. 863-894.

MORRIS S. (1995). – “The Common Prior Assumption in Economic Theory”, in *Economics and Philosophy*.

MYERSON Roger B. (1978). – “Refinements of the Nash Equilibrium Concept”, in *International Journal of Game Theory*, pp. 73-80.

NAU Robert F., MAC CARDLE Kevin F. (1990). – “Coherent Behavior in Noncooperative Games”, *Journal of Economic Theory*, 50, pp. 424-444.

PEARCE David G. (1984). – “Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection”, in *Econometrica*, pp. 1029-1050.

RAMSEY F. (1926). – “Truth and Probability”, in *the Foundation of mathematics and other Logical Essays. Keagan Paul*, 1980.

SELTEN R. (1965). – “Spieltheoretische Behandlungeines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit”, in *Zeitschrift fur die Gesampte Straatiwissenschaft*, pp. 301-324.

STALNAKER R. (1994). – “On the Evaluation of Solution Concepts”, *Theory and Decision*, 37, pp. 49-73.