ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 48 — 1997

Risque microéconomique, aversion à l'incertitude et indétermination de l'équilibre

Jean-Marc TALLON*

RÉSUMÉ. – Cet article se propose d'étudier les propriétés d'un modèle d'équilibre général en présence de risque purement microéconomique lorsque les agents se comportent selon le modèle d'utilité espérée au sens de Choquet (*Choquet expected utility*), *i.e.*, ils maximisent une espérance non-additive d'utilité. Cette formalisation représente un comportement reflétant un certain pessimisme, ou encore de l'aversion à l'incertitude. Sous l'hypothèse qu'il existe un certain consensus dans l'économie, nous montrons que les agents s'assurent totalement à l'équilibre, que l'allocation d'équilibre est indéterminée, et que l'ensemble des allocations d'équilibre croît avec le degré de pessimisme.

Micro-Economic Risk, Uncertainty Aversion and Indeterminacy

ABSTRACT. – This paper studies the properties of a general equilibrium model with purely microeconomic risk, in which agents behave according to Choquet expected utility (*i.e.*, they maximize a non-additive expected utility). This formalization represents a behavior exhibiting uncertainty aversion or pessimism. Under the assumption that there is a minimal consensus in the economy, it is shown that agents are fully insured at an equilibrium, that the equilibrium allocation is indeterminate, and that the size of the equilibrium set increases with the degree of uncertainty aversion.

* J. M. TALLON : CNRS-MAD, Université de Paris 1. Je tiens à remercier deux rapporteurs anonymes pour leurs commentaires.

1 Introduction

Cet article étudie les implications de l'hypothèse d'espérance non-additive d'utilité (ou utilité espérée au sens de Choquet) sur les propriétés d'un modèle d'équilibre général avec incertitude microéconomique. Cette représentation des préférences des agents a été proposée dans des contextes assez différents par SCHMEIDLER [1989] (dans l'incertain) et par QUIGGIN [1982] (dans le cas du risque) [1]. Le but de ces théories alternatives est de s'éloigner de l'hypothèse d'utilité espérée et des paradoxes qui en découlent en proposant une formalisation dans laquelle les croyances des agents ne sont plus représentées par des probabilités (additives), mais plutôt par une capacité (c'est-à-dire une mesure non-additive). La théorie proposée par Schmeidler part du constat que, dans un environnement incertain, les agents tendent à préférer les situations dans lesquelles ils possèdent une information sur la "probabilité" d'occurence d'un évènement (comme par exemple dans le paradoxe d'Ellsberg). Ce comportement suggère que les agents économiques cherchent à éviter les situations dans lesquelles ils font face à une certaine ambiguité; en d'autres termes ils sont adversaires de l'incertitude. La modélisation proposée dans la littérature récente sur la théorie de la décision dans l'incertain permet d'étudier ce comportement.

Cette représentation des préférences des agents change les propriétés de l'équilibre d'un modèle d'équilibre général. Nous nous concentrons donc sur un modèle d'équilibre général à deux périodes, dans lequel existe un risque individuel en seconde période. L'aversion des agents envers l'incertitude est représentée par l'hypothèse selon laquelle ils maximisent une espérance non-additive d'utilité, ou plus précisément, qu'ils ont un ensemble de croyances *a priori* (additives) et qu'ils évaluent l'utilité d'une perspective aléatoire par l'utilité espérée minimale de celle-ci. Dans ce cas de figure, il est montré, sous l'hypothèse qu'il existe un minimum de consensus entre les croyances des différents agents, que ceux-ci s'assurent totalement à l'équilibre, soit, en d'autres termes, qu'ils consomment le même panier de biens dans les différents états de la nature. Ceci n'est vrai dans le modèle avec croyances additives que si les agents ont exactement les mêmes croyances. En second lieu, les allocations d'équilibre sont indéterminées, contrairement au modèle avec croyances additives. De plus, lorsque l'aversion à l'incertitude augmente (dans un sens que nous préciserons dans la section 4), l'ensemble des allocations d'équilibre croît.

L'intuition sous-jacente à ces résultats est que l'aversion à l'incertitude introduit un coude dans les courbes d'indifférence, au point de certitude. Cette non-différentiabilité est introduite au travers des croyances (reflétant un comportement d'aversion à l'incertitude), et n'est pas supposée sur l'indice d'utilité, qui représente les préférences de l'agent dans le certain.

1. WAKKER (1990b) montra par la suite que ces deux approches sont en fait formellement identiques, si l'on admet que la dominance stochastique est respectée.

En conséquence, les préférences des agents ne sont pas “lisses”, ce qui explique l’indétermination de l’équilibre. En effet, l’environnement est par ailleurs standard et le résultat d’unicité locale de l’équilibre de DEBREU [1970] s’appliquerait si les croyances étaient additives.

L’article est construit de la manière suivante. La seconde section présente le modèle et quelques résultats sur la fonction d’utilité des agents, nécessaires pour l’étude des propriétés d’équilibre du modèle. Ces dernières sont regroupées dans la section 3, où il est montré que, sous l’hypothèse d’un consensus minimal, les agents s’assurent pleinement et que l’allocation d’équilibre est indéterminée. Cette section comprend également une représentation graphique intuitive de ce phénomène. La quatrième section contient une discussion de l’effet d’un accroissement du pessimisme sur l’ensemble d’équilibre.

2 Le modèle et la représentation des préférences des agents

Nous considérons une économie d’échanges à deux périodes, avec incertitude en seconde période, dans laquelle les agents maximisent une espérance non-additive d’utilité. H consommateurs ($h = 1, \ldots, H$), consomment C biens ($c = 1, \ldots, C$) dans l’état s, $s \in \Omega = \{1, \ldots, S\}$ en seconde période [2]. Il est possible d’échanger tous les biens contingents en première période. De manière alternative, il serait possible de supposer l’existence d’un système complet de marchés financiers [3]. Ces deux formulations sont équivalentes, et nous nous concentrerons sur la première (qui est plus simple du point de vue des notations à adopter).

La consommation de biens par le ménage h dans l’état s est notée $x_h(s)$, pour $s = 1, \ldots, S$. Le prix des biens contingents à s est noté $p(s)$. Le ménage h possède des dotations dans chaque état, $e_h(s)$, et nous restreindrons notre attention au cas de risque purement individuel (risque microéconomique), c’est-à-dire qu’il n’existe pas de risque agrégé. De plus, nous supposons qu’il existe bien un risque individuel intrinsèque, excluant ainsi l’hypothèse de taches solaires (étudiée dans TALLON [1995a]). L’hypothèse suivante reflète ceci :

HYPOTHÈSE 1 :
- *Risque microéconomique :* $\sum_{h=1}^{H} e_h(s) = \sum_{h=1}^{H} e_h(s')$ pour tout s, s'.
- *Pas de tache solaire :* Pour tout s, s', il existe h tel que $e_h(s) \neq e_h(s')$.

2. On suppose donc, essentiellement par souci de garder des notations simples, que les agents ne consomment pas en première période.
3. On pourrait également supposer l’existence d’un fonds mutuel d’assurance, comme dans MALINVAUD (1972) et CASS, CHICHILNISKY et WU (1996).

Soit e la dotation agrégée (constante pour tous les états de la nature), *i.e.*, $\sum_h e_h(s) = e$ pour tout s.

Les préférences de l'agent h sont représentées par un indice d'utilité u_h et une mesure de probabilité non nécessairement additive π_h. Une telle représentation des croyances peut provenir d'axiomatisations différentes. Nous nous contentons d'une brève discussion de certaines de ces axiomatisations et renvoyons le lecteur aux articles de synthèse de KARNI et SCHMEIDLER [1991], MUNIER [1995] et KAST et LAPIED [1995] pour une analyse plus complète des développements récents de la théorie de la décision. Leur but commun est d'aboutir à une séparation entre la représentation de l'attitude d'un agent envers le risque (ou l'incertitude) –représentée par ses croyances–, de celle de ses préférences dans le certain –représentées par l'indice d'utilité u_h.

Dans le cas du risque (c'est-à-dire lorsque tous les individus connaissent la vraie distribution de probabilités des états), QUIGGIN [1982] et YAARI [1987] ont proposé la théorie de l'utilité espérée dépendant du rang (*Rank Dependent Expected Utility*), selon laquelle les agents transforment les probabilités objectives avant de calculer leur utilité espérée. WAKKER [1990b] montra par la suite que cette formulation est un cas particulier de la représentation des croyances par une mesure non-additive.

SCHMEIDLER [1989] montra que, dans un environnement incertain, les croyances peuvent être représentées par des mesures non-additives (ou capacités). La non-additivité de la mesure reflète l'attitude du décideur envers l'incertitude, c'est-à-dire envers le fait qu'il ne connait pas la vraie probabilité d'apparition des états, et n'a qu'une information limitée du processus générant ces états (si celui-ci existe).

Récemment, GHIRARDATO [1994] a proposé une axiomatisation différente des croyances non-additives. Dans son modèle, les agents pensent ignorer certains aspects de l'espace des états de la nature, qui sont importants pour calculer la conséquence de leurs actes. Ils sont donc conscients de ne pas avoir tous les tenants et les aboutissants des conséquences de leurs actes. Dans ce cadre, la non-additivité des croyances reflète cette ignorance (voir aussi JAFFRAY et WAKKER [1994]).

L'une ou l'autre des deux premières interprétations est compatible avec le modèle présenté ici. Un agent peut connaître la probabilité objective qu'il tombe malade mais transformer la fonction de distribution de cette probabilité. Alternativement, un agent peut avoir peu d'information en ce qui concerne sa probabilité (ainsi que celle des autres) de tomber malade, auquel cas ses croyances sont représentées par une mesure non-additive.

Afin de représenter formellement les croyances, définissons $\Sigma = 2^{\Omega}$, et supposons que les croyances de l'agent h sont caractérisées par $\pi_h : \Sigma \to [0,1]$, sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

HYPOTHÈSE 2 : Pour tout ménage h,
- $\pi_h(\emptyset) = 0$ et $\pi_h(\Omega) = 1$,
- *Monotonie*: Pour tout E, $F \in \Sigma$, $E \subset F \Longrightarrow \pi_h(E) \leq \pi_h(F)$,
- *Convexité*: Pour tout E, $F \in \Sigma$, $\pi_h(E \cup F) + \pi_h(E \cap F) \geq \pi_h(E) + \pi_h(F)$.

Sous les deux premières hypothèses, π_h est appelée une capacité.

Le résultat suivant (proposition 1), démontré dans GILBOA et SCHMEIDLER [1994] par exemple, sera utilisé dans le reste de l'article. Il permet de caractériser l'espérance d'une variable aléatoire selon une capacité, connue sous le nom d'intégrale de Choquet. Définissons d'abord l'intégrale de Choquet (dans le cas d'un nombre fini d'états de la nature, S). Soit π une capacité et f une variable aléatoire sur S, telle que $f(1) \leq f(2) \leq \ldots \leq f(S)$. L'intégrale de Choquet de f selon π est définie par :

$$\int f d\pi = \sum_{s=1}^{S-1} (\pi(\{s, \ldots, S\}) - \pi(\{s+1, \ldots, S\})) f(s) + \pi(S) f(S)$$

Définissons maintenant le noyau (*core*) d'une capacité π (que nous noterons Core(π)) :

Core $(\pi) = \{\varphi \mid \varphi$ est une mesure de probabilité additive et, $\varphi(E) \geq \pi(E) \quad \forall \ E \in \Sigma\}$

PROPOSITION 1 : Supposons π monotone, alors π est convexe si et seulement si
(i) Core $(\pi) \neq \emptyset$
(ii) *Pour toute variable aléatoire* f *sur* S, $\int f d\pi = \min_{\varphi \in \text{Core}(\pi)} \int f d\varphi$.

La notion de convexité d'une capacité a une interprétation naturelle lorsque celle-ci représente des croyances : si le décideur est pessimiste, ses croyances seront convexes. En effet, en prenant le minimum de toutes les espérances (additives), le décideur se comporte de manière pessimiste puisqu'il anticipe que l'incertitude (représentée ici par le fait que le noyau ne se réduit pas à une seule mesure additive) se résoudra en sa défaveur. Pour un traitement formel de la question, on pourra se reporter à WAKKER [1990 a] [4].

De manière similaire, DOW et WERLANG [1992], reprenant SCHMEIDLER [1989], définissent $\xi(\pi_h, E) = 1 - \pi_h(E) - \pi_h(E^c)$ comme étant le degré d'aversion à l'incertitude de h en $E \subset \Omega$, E^c étant le complément de E. Cette mesure représente l'écart de la capacité π_h par rapport à l'additivité en E. Cet indice est toujours positif pour des mesures convexes, et est toujours égal à zéro pour une mesure additive.

Les préférences d'un agent sont donc représentées par une fonction d'utilité $\mathcal{U}_h$, qui s'exprime comme l'espérance de l'indice d'utilité u_h par rapport à la capacité π_h, *i.e.*, (en supprimant l'indice h pour alléger les notations) :

$$\mathcal{U}\Big(x(1), \ldots, x(S)\Big) \equiv E_\pi u(x(.)) = \min_{\varphi \in \text{Core}(\pi)} \sum_{s=1}^{S} \varphi(s) u(x(s))$$

L'hypothèse suivante sur la fonction u_h sera maintenue dans tout l'article.

4. Voir aussi la discussion de la proposition 3 dans YAARI (1987), ainsi que KARNI et SCHMEIDLER (1961), p. 1805-1807, CHATEAUNEUF (1991).

HYPOTHÈSE 3 : $u_h : \mathbb{R}_+^C \to \mathbb{R}$ est strictement concave, différentiable et strictement croissante pour tout h. De plus, $\{x \in \mathbb{R}_+^C | u_h(x) = c\}$ est fermé dans $\mathbb{R}_{++}^C$.

Ceci signifie, en particulier, que les résultats que nous obtiendrons ne sont pas le fait de préférences dans le certain particulières, mais découlent bien de la modélisation des croyances adoptée. Sous l'hypothèse précédente, la proposition suivante est facile à démontrer :

PROPOSITION 2 : Sous les hypothèses 2 et 3, $\mathcal{U}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^{SC}$.

Démonstration : Evident car $\mathcal{U}$ est le minimum de fonctions concaves. □

Finalement, on peut observer que $\mathcal{U}$, étant un minimum de fonctions, n'est pas différentiable, même si ces fonctions le sont. En particulier, elle n'est *a priori* pas différentiable aux points de "certitude", c'est-à-dire les points où $x(s) = x(s')$, pour tout s, s'. C'est la raison pour laquelle le résultat de DEBREU [1970] (selon lequel, génériquement, l'équilibre est localement unique) n'est pas vrai dans notre économie : les préférences ne sont pas lisses.

3 Assurance complète et indétermination de l'équilibre

Dans cette section, nous montrons que, sous une hypothèse de "consensus" minimal, l'allocation d'équilibre est telle que chaque agent est parfaitement assuré. Nous établissons ensuite le résultat d'indétermination de l'allocation d'équilibre, et en donnons une interprétation graphique.

Commençons par définir la notion (usuelle) d'équilibre retenue.

DÉFINITION 1 : $(p^\star, x^\star) \in \mathbb{R}_+^{CS} \times \mathbb{R}_+^{CSH}$ est un équilibre si :
- Pour tout h et étant donné $p^\star$, $x_h^\star$ est une solution au programme

$$\max \quad \mathcal{U}_h((x_h(1), \dots, x_h(S)) \quad \text{s.c.} \quad \sum_s p^\star(s) x_h(s) = \sum_s p^\star(s) e_h(s)$$

- $\sum_h x_h^\star(s) = \sum_h e_h(s)$ pour tout s.

Un équilibre existe dans cette économie sous les hypothèses faites ci-dessus. Nous établissons maintenant que sous l'hypothèse 4 d'au moins une croyance additive commune des agents sur la réalisation de tout état du monde, les agents s'assurent totalement à l'équilibre.

HYPOTHÈSE 4 : Il existe une mesure de probabilité $\varphi \in \cap_h \text{Core}(\pi_h)$ telle que $\varphi(s) \neq 0$ pour tout s.

PROPOSITION 3 : Supposons les hypothèses 1, 2, 3, et 4 satisfaites. Alors l'allocation d'équilibre est telle que $x_h(s) = x_h(s')$ pour tout h et tout s, s'.

Démonstration: Soit $x^\star = (x_1^\star, \ldots, x_H^\star)$ une allocation d'équilibre. Supposons qu'il existe h', s et s' tels que $x_{h'}^\star(s) \neq x_{h'}^\star(s')$ (pour simplifier, et sans perte de généralité, on suppose $x_1^\star(1) \neq x_1^\star(2)$). Soient $\varphi \in \cap_h \mathrm{Core}(\pi_h)$ vérifiant $\varphi(s) \neq 0$ pour tout s et $\overline{x}_h = \sum_{s=1}^{S} \varphi(s) x_h^\star(s)$ pour tout h. Nous montrons maintenant que l'allocation $\overline{x}$ domine au sens de Pareto l'allocation d'équilibre $x^\star$. Observons tout d'abord que l'allocation $\overline{x}$ donnant $\overline{x}_h$ à chaque agent dans chaque état est réalisable :

$$\begin{aligned}
\sum_h \overline{x}_h &= \sum_h \sum_s \varphi(s) x_h^\star(s) \\
&= \sum_s \varphi(s) \sum_h e_h(s) \text{ puisque } \sum_h x_h^\star(s) = \sum_h e_h(s) \\
&= e \qquad \text{puisque} \sum_h e_h(s) = e \text{ et } \sum_s \varphi(s) = 1
\end{aligned}$$

Maintenant $\mathcal{U}_h(\overline{x}_h, \ldots, \overline{x}_h) = u_h(\overline{x}_h)$. Du fait de la concavité de u_h :

$$\mathcal{U}_h(\overline{x}_h, \ldots, \overline{x}_h) \geq \sum_s \varphi(s) u_h(x_h^\star(s))$$

Puisque $\varphi \in \mathrm{Core}(\pi_h)$, on obtient alors :

$$\mathcal{U}_h(\overline{x}_h, \ldots, \overline{x}_h) \geq \mathcal{U}_h(x_h^\star(1), \ldots, x_h^\star(S)) \quad \text{pour tout } h$$

De plus, pour le premier ménage, on a, puisque $\varphi(s) \neq 0$ pour tout s, $x_1^\star(1) \neq x_1^\star(2)$, et u_1 est strictement concave : $u_1(\overline{x}_1) > \sum_s \varphi(s) u_1(x_1^\star(s))$, d'où

$$\mathcal{U}_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_1) > \mathcal{U}_h(x_1^\star(1), \ldots, x_1^\star(S))$$

Ainsi, l'allocation d'équilibre $x^\star$ est dominée au sens de Pareto par l'allocation réalisable $\overline{x}$, ce qui constitue une contradiction au premier théorème du bien-être, qui est vrai dans cette économie. En conséquence, à l'équilibre, $x_h(s) = x_h(s')$ pour tout s, s' et tout h. $\square$

A l'équilibre, aucun agent ne supporte plus de risque. Si les agents sont pessimistes, l'assurance totale peut être obtenue même s'ils ont des croyances différentes, tant que celles-ci ne sont pas trop différentes. Ce résultat d'assurance complète, n'est vrai, dans le cadre usuel d'espérance d'utilité avec fonctions d'utilité différentiables, que si les agents ont tous les mêmes croyances (additives). On voit d'ailleurs que la condition "il existe $\varphi \in \cap_h \mathrm{Core}(\pi_h)$" de la proposition se réduit, dans le cas additif, à $\pi_h = \varphi$ pour tout h, où φ est une mesure additive sur S.

Comme on l'a vu dans la démonstration ci-dessus, toutes les allocations d'équilibre sont Pareto optimales, puisque le premier théorème du bien-être est vérifié dans cette économie. Cependant, la proposition suivante montre qu'il existe (au moins) un continuum d'équilibres si l'intersection des différents noyaux des croyances n'est pas vide mais recouvre des croyances “suffisamment différentes” (dans le sens précis de l’énoncé de la proposition).

PROPOSITION 4 : Supposons les hypothèses 1, 2, 3 vérifiées. S’il existe φ et ψ distinctes, appartenant à $\cap_h \text{Core}(\pi_h)$ et telles que
(i) $\varphi(s) \neq 0$ et $\psi(s) \neq 0$ pour tout s,
(ii) pour tout $p \gg 0$, $p\sum_s \varphi(s)e_h(s) \neq p\sum_s \psi(s)e_h(s)$ pour au moins un ménage h,
alors l’ensemble des équilibres contient un continuum d’allocations.

Démonstration : On normalise les prix de manière à ce qu’ils appartiennent au simplexe. Soit un équilibre $(p^\star, x^\star)$ de l’économie dans laquelle tous les agents ont les mêmes croyances additives, $\varphi \in \cap_h \text{Core}(\pi_h)$ avec $\varphi(s) \neq 0$ pour tout s. Nous montrons que cet équilibre est un équilibre de l’économie d’origine (celle dans laquelle les ménages ont les croyances π_h).

En premier lieu, $x_h^\star$ peut être acheté aux prix $p^\star$ par le ménage h. De plus d’après la proposition 3, nous savons que $x_h^\star(s) = x_h^\star(s')$ pour tout s, s'. En second lieu, nous devons vérifier que ce panier donne le maximum d’utilité à h lorsque ses croyances sont π_h. Supposons qu’il existe un autre panier x'_h, pouvant être acheté au prix $p^\star$ et tel que $\mathcal{U}_h(x'_h) > \mathcal{U}_h(x_h^\star)$. Alors,

$$\min_{\phi \in \text{Core}(\pi_h)} \sum_s \phi(s) u_h(x'_h(s)) > \min_{\phi \in \text{Core}(\pi_h)} \sum_s \phi(s) u_h(x_h^\star(s)) = u_h(x_h^\star(s))$$

puisque $x_h^\star(s)$ est constant sur les états de la nature. Ceci implique, en particulier, que

$$\sum_s \varphi(s) u_h(x'_h(s)) > u_h(x_h^\star(s)) = \sum_s \varphi(s) u_h(x_h^\star(s))$$

ce qui est une contradiction au fait que $x^\star$ est une allocation d’équilibre aux prix $p^\star$ dans l’économie φ. Ainsi $(p^\star, x^\star)$ est un équilibre de l’économie d’origine.

Nous montrons maintenant qu’un équilibre de l’économie φ (l’économie dans laquelle tous les agents ont les mêmes croyances additives φ) est naturellement relié à un équilibre de l’économie sans incertitude (appelons-la l’économie φ réduite) dans laquelle les agents résolvent le problème :

$$\max u_h(x_h) \quad \text{s.c.} \quad \widetilde{p} x_h = \widetilde{p} \sum_s \varphi(s) e_h(s)$$

Plus précisément, si $(\widetilde{p}, \widetilde{x})$ est un équilibre de l’économie φ réduite, alors $(p^\star, x^\star)$ est un équilibre de l’économie φ, avec $p^\star(s) = \varphi(s)\widetilde{p}$ pout tout s, et $x_h^\star(s) = \widetilde{x}_h$ pour tout s et tout h. Pour cela, il faut vérifier en premier lieu que $x_h^\star$ ainsi défini, vérifie les conditions de premier ordre de l’économie φ (celles-ci sont suffisantes sous nos hypothèses) :

$$\varphi(s) \frac{\partial u_h(x_h^\star(s))}{\partial x_h^c(s)} = \lambda_h^\star p^{c\star}(s) \quad \text{pout tout } s \text{ et } c$$

Cette égalité est vraie étant donnée la définition de $x^\star$ et $p^\star$ et puisque :

$$\frac{\partial u_h(\widetilde{x}_h)}{\partial x_h^c} = \widetilde{\lambda}_h \widetilde{p}^c \quad \text{pout tout } c$$

Il suffit alors de choisir $\lambda_h^\star = \widetilde{\lambda}_h$ pour que les conditions de premier ordre de l'économie φ découlent de cette dernière égalité. En second lieu, nous montrons que $x_h^\star$ vérifie la contrainte budgétaire au prix $p^\star$:

$$\begin{aligned}
\sum_s p^\star(s) x_h^\star(s) &= \sum_s \varphi(s) \widetilde{p}\widetilde{x}_h \\
&= \widetilde{p}\widetilde{x}_h \\
&= \sum_s \widetilde{p}\varphi(s) e_h(s) \\
&= \sum_s p^\star(s) e_h(s)
\end{aligned}$$

Enfin, il est évident que $x^\star$ vérifie les conditions d'équilibre sur les marchés si $\widetilde{x}$ les vérifie. On remarquera que $p^\star$ appartient au simplexe si $\widetilde{p}$ y appartient également.

Montrons maintenant qu'un équilibre de l'économie φ réduite, précédemment décrite, ne peut être un équilibre de l'économie ψ réduite, dans laquelle les agents maximiseraient :

$$\max u_h(x_h) \quad \text{s.c.} \quad \overline{p} x_h = \overline{p} \sum_s \psi(s) e_h(s)$$

si φ et ψ vérifient notre hypothèse (ii). On note les variables d'équilibre de l'économie φ réduite avec un $\widetilde{\ }$ et celles de l'économie ψ réduite avec un $\bar{\ }$. Supposons $\widetilde{x}_h = \overline{x}_h$ pour tout h. Observons que, étant donné que u_h est strictement croissante pour tout h, les prix sont strictement positifs à l'équilibre des économies φ et ψ réduites. Il vient alors des conditions de premier ordre :

$$\frac{\widetilde{p}^c}{\widetilde{p}^{c'}} = \frac{\overline{p}^c}{\overline{p}^{c'}} \quad \text{pour tout } c, c'$$

et donc, du fait de la normalisation adoptée, $\widetilde{p} = \overline{p}$. On a alors :

$$\begin{cases}
\widetilde{p}\widetilde{x}_h = \widetilde{p} \sum_s \varphi(s) e_h(s) \ \ \forall h \\
\bar{p}\bar{x}_h = \overline{p} \sum_s \psi(s) e_h(s) \ \ \forall h \\
\widetilde{x}_h = \overline{x}_h \ \ \forall h \\
\widetilde{p} = \overline{p}
\end{cases} \Longrightarrow \widetilde{p} \sum_s \varphi(s) e_h(s) = \widetilde{p} \sum_s \psi(s) e_h(s) \ \ \forall h$$

ce qui constitue une contradiction à l'hypothèse (ii). Un équilibre $(\widetilde{p}, \widetilde{x})$ de l'économie φ réduite n'est donc pas un équilibre de l'économie ψ.

Nous avons ainsi montré qu'une allocation d'équilibre de l'économie φ réduite est différente d'une allocation d'équilibre de l'économie ψ réduite. De plus, nous savons que ces allocations sont également des allocations d'équilibre de l'économie d'origine (plus exactement, $(x_h^\star(s) = \widetilde{x}_h)_{h=1,s=1}^{H,S}$ est une allocation d'équilibre de l'économie originelle). Ainsi, sous nos hypothèses, il existe (au moins) deux allocations d'équilibre dans l'économie originelle. Nous montrons maintenant qu'il en existe un continuum.

Core(π_h) est convexe pour tout h. L'intersection est donc convexe : si φ et ψ appartiennent à $\bigcap_h$ Core(π_h) toutes les mesures $\phi(\mu) = \mu\varphi + (1-\mu)\psi$ appartiennent également à cette intersection pour $\mu \in [0,1]$. De plus, si les conditions (i) et (ii) sont vérifiées par φ et ψ, elles le sont également par les deux mesures $\phi(\mu)$ et $\phi(\mu')$, $\mu \neq \mu'$. En conséquence, à chacune de ces mesures correspond (au moins) une allocation d'équilibre différente. En conclusion, l'ensemble des allocations d'équilibre contient un continuum de points. $\square$

La proposition ci-dessus appelle quelques remarques. En premier lieu, ce résultat n'est pas très surprenant étant donnée la non-différentiabilité des fonctions $\mathcal{U}$. Cependant, l'intérêt de la présente approche est de montrer que cette non-différentiabilité provient de l'aversion à l'incertitude (pessimisme) et non d'une non-différentiabilité de la fonction u, ce qui semblerait plus difficile à justifier et à interpréter.

D'un point de vue technique, la condition (ii) n'est qu'une condition suffisante. En fait, il suffit qu'elle soit vérifiée uniquement pour tout $\widetilde{p}$, prix d'équilibre de l'économie φ réduite. Par ailleurs, il suffit que l'on ait $\sum_s \varphi(s)e_h(s) \gg \sum_s \psi(s)e_h(s)$ pour au moins un ménage h pour que (ii) soit vérifiée. Ainsi, dans le cas d'un bien et deux états (c'est-à-dire dans le cadre de l'exemple développé graphiquement ci-dessous), la condition (ii) est automatiquement vérifiée, du fait de l'hypothèse d'absence de tache solaire, dès l'instant où il existe deux mesures distinctes φ et ψ appartenant à $\bigcap_h$ Core(π_h). Enfin, il est clair que la seconde partie de l'hypothèse 1, selon laquelle il existe bien un risque microéconomique intrinsèque, est nécessaire pour que (ii) puisse être satisfaite.

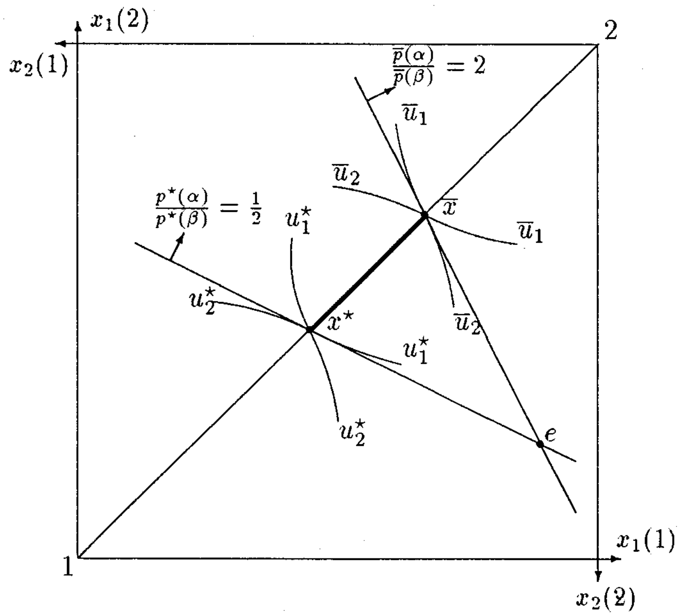
L'intuition du résultat d'indétermination de l'équilibre se représente aisément dans une boîte d'Edgeworth. On suppose ici qu'il n'existe que deux états (α et β) en seconde période, et qu'il n'y a qu'un seul bien. La boîte est carrée, reflétant ainsi le fait qu'il n'existe pas de risque agrégé, et les dotations initiales se situent en dehors de la diagonale.

Sur ce graphique, les agents ont des croyances identiques quant aux états α et β, representées par la capacité $\pi(\alpha) = 1/3$ et $\pi(\beta) = 1/3$. Dans ce cas, la pente d'une courbe d'indifférence en un point sur la diagonale est $(1-\pi(\beta))/\pi(\beta) = 2$ si $x(\alpha) \leq x(\beta)$, et $\pi(\alpha)/(1-\pi(\alpha)) = 1/2$ si $x(\alpha) \geq x(\beta)$. La courbe d'indifférence de h passant par $\overline{x}$ est indicée par $\overline{u}_h$, et celle passant par $x^\star$ par $u_h^\star$. Les allocations d'équilibre sont celles sur la diagonale entre $x^\star$ et $\overline{x}$. Pour tout point entre ceux-ci, la pente de la droite budgétaire appartient à l'intervalle défini par le taux marginal de substitution à gauche et celui à droite (évalué en un point sur la diagonale) des deux agents.

Le résultat obtenu est donc un résultat d'indétermination de l'allocation d'équilibre : la propriété d'unicité locale de l'équilibre n'est pas vérifiée

GRAPHIPHE 1

Indétermination de l'équilibre



puisqu'il existe (au moins) un continuum d'équilibres. Un autre modèle dans lequel on obtient une indétermination réelle est celui de marchés financiers incomplets avec actifs nominaux. Il convient toutefois de distinguer la source de l'indétermination obtenue dans le présent modèle de celle rencontrée dans la littérature sur les marchés incomplets (voir, *e.g.*, TALLON [1995b]). Dans ce dernier cas, l'équilibre est indéterminé lorsque les agents ne peuvent s'assurer contre une différence de taux d'inflation entre les états. La source de l'indétermination est à rechercher dans la structure des marchés financiers (marchés incomplets) et la forme des actifs présents dans le modèle (actifs nominaux). Ici, l'indétermination s'explique par le fait qu'à chaque mesure additive (partagée par les agents) correspond une allocation d'équilibre différente, et qu'un continuum de ces mesures est "admissible" pour représenter les croyances des agents. Ainsi, ce sont les croyances des agents et non des imperfections de marché qui créent cette indétermination.

Comme dans tout modèle dans lequel l'équilibre est indéterminé, il manque un mécanisme de sélection permettant de déterminer l'équilibre effectivement réalisé. Ceci pourrait conduire à introduire dans le modèle une variable de tache solaire, qui servirait de mode de sélection de l'équilibre. Une certaine volatilité serait ainsi introduite (voir par exemple la discussion des taches solaires dans un modèle de prix d'actifs avec espérance non-additive d'utilité dans EPSTEIN et WANG [1994]).

Le principe de la démonstration de la proposition 4 permet également d'établir que les ensembles d'équilibre de deux économies différant par les croyances des agents ont une intersection non vide (si les croyances (non-additives) ne sont pas trop différentes).

Soit $\mathcal{E}$ l'économie caractérisée par les croyances $(\pi_h)_{h=1}^H$, les utilités $(u_h)_{h=1}^H$, et la répartition des dotations. [5] e, et soit $\mathcal{E}'$ l'économie caractérisée par les croyances $(\pi'_h)_{h=1}^H$, les mêmes utilités $(u_h)_{h=1}^H$, et la même répartition des dotations.

PROPOSITION 5 : Supposons que les hypothèses 1, 2, et 3 sont vérifiées. S'il existe une mesure $\varphi \in \Big[\cap_h \text{Core}(\pi_h)\Big] \bigcap \Big[\cap_h \text{Core}(\pi'_h)\Big]$ telle que $\varphi(s) \neq 0$ pour tout s, alors, l'ensemble des allocations d'équilibre de l'économie $\mathcal{E}$ et celui de l'économie $\mathcal{E}'$ ont une intersection non vide.

Démonstration: Soit φ une mesure additive appartenant à $\Big[\cap_h \text{Core}(\pi_h)\Big] \bigcap \Big[\cap_h \text{Core}(\pi'_h)\Big]$. Par le même raisonnement que celui utilisé au début de la démonstration de la proposition 3.2, il est clair que l'allocation d'équilibre de l'économie dont tous les agents ont les croyances additives φ est une allocation d'équilibre des économies $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. $\square$

Cette proposition montre donc que tant que les croyances des agents dans les deux économies considérées ne sont pas disjointes, les ensembles d'équilibre ne le sont pas non plus. Trivialement, si $\Big[\cap_h \text{Core}(\pi_h)\Big] \bigcap \Big[\cap_h \text{Core}(\pi'_h)\Big]$ contient au moins deux mesures (additives) vérifiant les conditions (i) et (ii) de la proposition 3.2, alors l'intersection des ensembles d'équilibre contient un continuum d'allocations.

4 Pessimisme et degré d'indétermination

Nous nous concentrons dans cette section, sur le lien entre le degré d'aversion à l'incertitude et la taille de l'ensemble d'équilibre. Nous présenterons dans un premier temps une approche très simple, étudiant une économie dans laquelle tous les agents ont les mêmes croyances, qui prend la forme d'une capacité simple (voir DOW et WERLANG [1992] et EICHBERGER et KELSEY [1994]). Nous étendrons ensuite cette approche au cas général.

5. Nous changeons un peu les notations adoptées jusqu'à présent : e représente dorénavant une répartition des dotations initiales, *i.e.* $e \in \mathbb{R}_+^{\mathrm{CSH}}$, et non plus le vecteur agrégé des dotations dans chaque état.

La capacité simple que nous considérons pour commencer est obtenue de la manière suivante : soit φ une mesure additive, et ξ un paramètre dans $[0, 1]$. La capacité simple π^ξ est obtenue en augmentant uniformément le degré d'aversion à l'incertitude de φ (l'aversion à l'incertitude étant identiquement nulle pour une mesure additive). On pose alors $\pi^\xi(S) = 1$, et $\pi^\xi(E) = (1 - \xi)\varphi(E)$ pour tout $E \in \Sigma \setminus S$.

Ces capacités ont les propriétés suivantes (voir DOW et WERLANG [1992]) :

- π^ξ est convexe.
- Le degré d'aversion à l'incertitude est constant, égal à ξ.
- Soit f une variable aléatoire telle que $\underline{f} = \min_{s \in S} f(s)$, alors $E_{\pi^\xi} f = \xi \underline{f} + (1 - \xi) E_\varphi f$.

Ces capacités peuvent représenter un comportement de type maximin ($\xi = 1$), c'est-à-dire un pessimisme extrême, aussi bien qu'un comportement neutre vis-à-vis de l'incertitude ($\xi = 0$), ainsi que tous les degrés d'aversion à l'incertitude entre ces deux extrêmes.

Nous pouvons maintenant démontrer que l'ensemble des équilibres croît au sens large lorsque le degré d'aversion à l'incertitude augmente.

PROPOSITION 6 : Soit $(p^\star, x^\star)$ un équilibre de l'économie dans laquelle tous les agents ont les mêmes croyances $\pi^\xi = (1 - \xi)\varphi$, φ étant additive. Sous les hypothèses 1, 2 et 3, $(p^\star, x^\star)$ est un équilibre de l'économie dans laquelle les agents ont les croyances $\pi^{\xi'}$, si $\xi' \geq \xi$.

Démonstration: Il suffit de démontrer que si $x_h^\star$ maximise l'utilité de h lorsque le degré d'aversion à l'incertitude est ξ, il maximise l'utilité de h lorsque le degré d'aversion à l'incertitude est $\xi' \geq \xi$.

Observons que si $\xi' \geq \xi$, alors, pour tout $\Big(x_h(1), \ldots, x_h(S)\Big)$, la propriété suivante est vraie :

$$\begin{aligned} E_{\pi^\xi} u_h(x_h(.)) &= (1 - \xi) E_\varphi u_h(x_h(.)) + \xi \min_s u_h(x_h(s)) \\ &\geq (1 - \xi') E_\varphi u_h(x_h(.)) + \xi' \min_s u_h(x_h(s)) = E_{\pi^{\xi'}} u_h(x_h(.)) \end{aligned}$$

car $E_\varphi f \geq \min_s(f(s))$ et $\xi' - \xi \geq 0$ pour toute variable aléatoire f. De plus, puisque $(p^\star, x^\star)$ est un équilibre, d'après la proposition 3, nous savons que $x_h^\star(s) = x_h^\star(s')$ pour tout s, s', et donc

$$E_{\pi^\xi} u_h(x_h^\star(.)) = E_{\pi^{\xi'}} u_h(x_h^\star(.))$$

Donc, si $x_h^\star$ maximise $E_{\pi^\xi} u(.)$, sous la contrainte budgétaire $p^\star x_h = p^\star e_h$, il maximise $E_{\pi^{\xi'}} u(.)$ sous cette même contrainte. $(p^\star, x^\star)$ est donc un équilibre de l'économie dans laquelle tous les agents ont les croyances $(1 - \xi')\varphi$. $\square$

Lorsque le pessimisme s'accroît dans l'économie, l'ensemble des équilibres augmente, et l'indétermination devient plus importante. On aura remarqué que l'hypothèse que les agents ont des croyances communes n'est pas essentielle. Supposons en effet que chaque agent ait des croyances du type discuté ci-dessus, avec un coefficient constant d'aversion à l'incertitude ξ_h. Le même type d'argument montre que si $(p^\star, x^\star)$ est un équilibre de l'économie dans laquelle l'aversion à l'incertitude de h est ξ_h et $\min_h\{\xi_h\} = \xi$, alors, c'est un équilibre de l'économie dans laquelle l'aversion à l'incertitude de h est ξ'_h et $\min_h\{\xi'_h\} = \xi'$, si $\xi' \geq \xi$.

En fait, ceci reste vrai pour des économies dans lesquelles les croyances des agents sont quelconques, comme on le montre dans la proposition suivante.

PROPOSITION 7 : Soit $(p^\star, x^\star)$ un équilibre de l'économie dans laquelle les agents ont les croyances π_h. Alors, sous les hypothèses 1, 2, 3 et 4, $(p^\star, x^\star)$ est un équilibre de l'économie dans laquelle les agents ont les croyances π'_h si Core$(\pi_h) \subset$ Core(π'_h).

Démonstration : L'argument est semblable à celui de la démonstration de la proposition 6. Il découle de l'observation que si Core$(\pi_h) \subset$ Core(π'_h), alors :

$$\begin{aligned} E_{\pi_h} u_h(x_h(.)) &= \min_{\varphi \in \text{Core}(\pi_h)} E_\varphi u_h(x_h(.)) \\ &\geq \min_{\varphi \in \text{Core}(\pi'_h)} E_\varphi u_h(x_h(.)) = E_{\pi'_h} u_h(x_h(.)) \end{aligned}$$

Maintenant, $x^\star_h$ maximise $E_{\pi_h} u_h(x_h(.))$ sous la contrainte budgétaire $p^\star x_h = p^\star e_h$, et puisque $x^\star_h(s) = x^\star_h(s')$ d'après la proposition 3, $E_{\pi_h} u_h(x^\star_h) = E_{\pi'_h} u_h(x^\star_h)$ et donc $x^\star_h$ maximise $E_{\pi'_h} u_h(x_h(.))$ sous la même contrainte, et $(p^\star, x^\star)$ est un équilibre de l'économie dans laquelle les agents ont les croyances π'_h. $\square$

Cette dernière proposition montre que lorsque l'ensemble des croyances a priori de tous les agents augmente, alors l'ensemble des allocations d'équilibre croît. Il est toutefois difficile de donner une mesure précise du lien entre le degré d'aversion à l'incertitude et la dimension de l'ensemble des solutions d'équilibre. En effet, nous avons établi que l'ensemble des allocations d'équilibre contient un continuum, c'est-à-dire que la dimension de l'ensemble des équilibres est au moins un. Nous n'avons cependant pas établi qu'il n'existe pas de degré supplémentaire d'indétermination.

5 Conclusion

Nous avons montré dans cet article que lorsque les agents se comportent de manière pessimiste (*i.e.*, leurs croyances sont représentées par une capacité convexe) et si le risque auquel ils font face est de nature purement microéconomique, alors l'allocation d'équilibre est indéterminée, même si leur fonction d'utilité dans le certain est différentiable. La raison de cette indétermination est que le pessimisme des agents crée un coude dans leur fonction d'utilité. La source de ce coude réside donc dans la formalisation des croyances. Nous avons par ailleurs montré que lorsque le pessimisme croît dans l'économie, l'ensemble des équilibres croît également. Ainsi, lorsque l'aversion à l'incertitude augmente, les prédictions d'une analyse concurrentielle sont de moins en moins discriminantes. Une allocation concurrentielle fournit aux agents une assurance totale, mais le niveau de leur consommation en seconde période peut être un point quelconque dans un continuum.

● Références bibliographique

CASS, D., CHICHILNISKY, G., WU, H.-M. (1996). – "Individual Risk and Mutual Insurance", *Econometrica*, 64(2), pp. 333-341.

CHATEAUNEUF, A. (1991). – "On the Use of Capacities in Modeling Uncertainty Aversion and Risk Aversion", *Journal of Mathematical Economics*, 20, pp. 343-369.

DEBREU, G. (1970). – "Economies with a Finite set of equilibria", *Econometrica*, 38, pp. 387-392.

DOW, J., WERLANG, S. (1992). – "Uncertainty Aversion, Risk Aversion, and the Optimal Choice of Portfolio", *Econometrica*, 60(1), pp. 197-204.

EICHBERGER, J., KELSEY, D. (1994). – *Non-additive beliefs and game theory*. Discussion Paper 9410, Center for Economic Research, Tillburg University.

EPSTEIN, L., WANG, T. (1994). – "Intertemporal Asset Pricing Under Knightian Uncertainty", *Econometrica*, 62(3), pp. 283-322 .

GHIRARDATO, P. 1994. – *Coping with Ignorance: Unforeseen Contingencies and Non-Additive Uncertainty*, mimeo, University of California at Berkeley.

GILBOA, I., SCHMEIDLER, D. (1994). – "Additive Representations of Non-Additive Measures and the Choquet Integral", *Annals of Operations Research*, 52, pp. 43-65.

JAFFRAY, J. Y., WAKKER P. (1994). – "Decision Making with Belief Functions: Compatibility and Incompatibility with the Sure-Thing Principle", *Journal of Risk and Uncertainty*, 8, pp. 255-271

KARNI, E., SCHMEIDLER, D. (1991). – "Utility Theory with Uncertainty", In Hildenbrand W. et Sonnenschein H., éditeurs, *Handbook of Mathematical Economics*, chapitre 33, pp. 1763-1831, North-Holland.

KAST, R., LAPIED, A. (1995). – "Probabilité individuelle et probabilité de marché", *Revue d'Economie Politique*, 1, pp. 71-90.

MALINVAUD, E. (1972). – "The Allocation of Individual Risks in Large Markets", *Journal of Economic Theory*, 4, pp. 312-328.

MUNIER, B. (1995). – "Entre rationalités instrumentale et cognitive : contributions de la dernière décennie à la modélisation du risque", *Revue d'Economie Politique*, 1, pp. 5-70 .

QUIGGIN, J. (1982). – "A Theory of Anticipated Utility", *Journal of Economic Behavior and Organization*, 3, pp. 323-343

SCHMEIDLER, D. (1989). – "Subjective Probability and Expected Utility without Additivity", *Econometrica*, 57(3), pp. 571-587

TALLON, J.-M. (1995a). – *Sunspot Equilibria and Non-Additive Expected Utility Maximizers*, Mimeo, M.A.D. *A paraître dans "Journal of Economic Dynamics and Control"*.

TALLON, J.-M. (1995b). – "Théorie de l'équilibre général avec marchés financiers incomplets". *Revue Economique*, 6, pp. 1207-1241

WAKKER, P. (1990a). – "Characterizing Optimism and Pessimism Directly through Comonotonicity", *Journal of Economic Theory*, 52, pp. 453-463

WAKKER, P. (1990b). – "Under Stochastic Dominance, Choquet-Expected Utility and Anticipated Utility are Identical", *Theory and Decision*, 29, pp. 119-132.

YAARI, M. (1987). – "The dual Theory of Choice under Risk", *Econometrica*, 55(1), pp. 95-115.