

De l'usage optimal de divers types de ressources naturelles

Jean-Pierre AMIGUES, Pascal FAVARD,
Gérard GAUDET, Michel MOREAUX*

RÉSUMÉ. – Une analyse en équilibre partiel suggère qu'un ensemble de gisements de ressources naturelles de coût moyens d'extraction constants devrait être exploité en stricte séquence, par ordre de coûts croissants. KEMP et LONG [1980] ont montré qu'il n'en était pas nécessairement ainsi dans une analyse d'équilibre général. Dans un modèle d'arbitrage consommation-loisir, nous montrons que l'ordre optimal d'exploitation n'est jamais strict, et que pour certaines configurations des paramètres du modèle, les sentiers d'exploitation des ressources peuvent être indéterminés bien que le sentier consommation-loisir soit toujours parfaitement déterminé.

On the Optimal Use of Different Kinds of Natural Resources

ABSTRACT. – A partial equilibrium analysis shows that a pool of natural resources with constant unit costs of extraction has to be exploited in strict increasing cost order. KEMP and LONG [1980] have shown that it is not necessarily the case in a general equilibrium framework. In a consumption-leisure trade-off model, we show that the optimal order of exploitation is never strict, and that for a set of model parameters, the resources exploitation paths may be indeterminate although the consumption-leisure paths are perfectly determined.

* J.-P. AMIGUES : ERNA-INRA, Université de Toulouse 1; P. FAVARD : GREMAQ, CNRS, Université de Toulouse 1; G. GAUDET : Université de Montréal, Canada; M. MOREAUX : ERNA-INRA, GREMAQ, IDEI, Université de Toulouse 1, Institut Universitaire de France. Cette étude a été réalisée pour partie lors d'un séjour de Gérard Gaudet comme chercheur invité à l'ERNA-INRA-Toulouse et d'un séjour de Michel Moreaux à l'Université Laval. Michel Moreaux tient à remercier la Fondation Enrico Mattei pour le soutien qu'elle a bien voulu lui accorder. Les auteurs remercient N. V. Long pour de très fructueuses discussions lors de l'élaboration de cet article.

1 Introduction

Un des résultats les plus connus de la théorie de l'exploitation optimale de ressources naturelles non renouvelables disponibles sous formes de gisements exploitables à coûts moyens constants, spécifie que ces gisements doivent être exploités séquentiellement par ordre de coût croissant, et ce, quelle que soit la distribution des réserves entre les différents gisements. Ce résultat d'analyse partielle ¹ est une conséquence quasi-immédiate de l'actualisation : toutes choses égales par ailleurs, il faut repousser le plus loin possible dans le futur les opérations les plus coûteuses. KEMP et LONG [1980] ont souligné la fragilité de ce résultat en montrant que cet ordre ne devrait pas nécessairement être respecté dans un cadre plus général. Ils supposent que l'offre de travail est constante et inélastique, et que la société produit avec du travail et des ressources naturelles un bien de consommation finale. L'une des ressources naturelles est une ressource renouvelable dont le flux est suffisamment abondant pour que la société puisse, si elle le désire, affecter tout le travail disponible à la transformation de cette ressource en bien de consommation. Les autres ressources sont des ressources non renouvelables disponibles en quantités limitées et dont les coûts de transformation sont différents. Les techniques de transformation des deux types de ressources sont linéaires, avec facteurs strictement complémentaires (techniques de type Leontiev). L'utilité marginale instantanée du bien de consommation est positive et décroissante et l'objectif du planificateur est de maximiser la somme des utilités actualisées à un taux constant. KEMP et LONG ² montrent que sous ces hypothèses, si la ressource renouvelable est exploitée en permanence le long du sentier optimal, alors l'ordre d'exploitation des différentes ressources est, dans certaines limites, indéterminé. De plus il existe des spécifications de la fonction d'utilité ³ pour lesquelles, si l'offre de travail est suffisamment grande, la société doit effectivement exploiter en permanence la ressource renouvelable.

Parmi les hypothèses retenues par Kemp et Long il en est trois qui méritent un examen plus attentif. La première est l'hypothèse d'inélasticité de l'offre de travail qui imprègne l'analyse d'un arrière-goût d'équilibre partiel. La seconde est l'hypothèse d'abondance de la ressource renouvelable, hypothèse qui accentue le contraste entre ressource renouvelable et ressource non renouvelable. La troisième particularité est l'absence d'accumulation possible de capital. De ces trois hypothèses, c'est l'hypothèse d'impossibilité d'accumulation qui fut la première remise en cause, par LEWIS [1982]. L'analyse de Lewis montre que, s'il est possible de mettre en réserve une partie de la production du bien final et que pendant cette mise en réserve la

1. Les théorèmes d'équivalence équilibre-optimum de l'analyse partielle s'appliquent ici de sorte qu'à l'équilibre concurrentiel les différentes ressources sont exploitées séquentiellement.

2. KEMP et LONG [1980] : Section 4, Proposition 2 (p. 668) et Proposition 3 (p. 669).

3. En l'occurrence $u(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ où x est la quantité de bien de consommation.

quantité de bien augmente ⁴, alors les ressources non renouvelables devraient être exploitées selon l'ordre que le calcul économique partiel suggère. Nous reviendrons dans un instant sur cette contribution. L'hypothèse d'abondance de la ressource renouvelable n'est pas une hypothèse innocente ou de pure commodité. Dans une étude jumelle de celle présentée ici ⁵ nous montrons que si la ressource renouvelable est rare, il peut être optimal d'exploiter des ressources de coût d'accès élevé avant d'exploiter des ressources de coût d'accès modeste. L'objet du présent mémoire est de lever l'hypothèse d'inélasticité de l'offre de travail, en supposant toujours la population stationnaire, tout en gardant l'hypothèse d'abondance de la ressource renouvelable. Nous décrivons de façon exhaustive l'ensemble des sentiers d'exploitation optimaux en fonction des paramètres du modèle de sorte que les conditions que nous établissons sont des conditions nécessaires **et** suffisantes. Le principal résultat de l'analyse est qu'il n'est jamais optimal d'exploiter les ressources selon l'ordre strict de leurs coûts moyens d'accès. Les niveaux des réserves initiales des ressources non renouvelables jouent un rôle crucial. Pour certains niveaux des stocks initiaux il existe un ordre séquentiel faible d'exploitation mais il y a toujours chevauchement des périodes d'exploitation des différentes ressources, i.e. les intervalles de temps au cours desquels on exploite deux ressources de coûts moyens différents ne sont jamais de mesure nulle. Pour d'autres valeurs des stocks initiaux il peut être optimal d'exploiter simultanément plus de deux ressources de coûts moyens différents et les sentiers optimaux peuvent ne pas être uniques. On retrouve donc en partie les résultats de Kemp et Long mais sous la forme de conditions nécessaires et suffisantes sur les fondamentaux du modèle et non sous la forme d'une condition suffisante sur les caractéristiques de la solution. Ces résultats sont robustes aux possibilités de stockage et donc à l'introduction d'une certaine forme d'accumulation du capital. Le point mérite cependant des développements qui déborderaient largement le cadre de la présente étude et fait l'objet d'un mémoire séparé ⁶.

La prise en compte de l'élasticité de l'offre de travail permet de déterminer l'évolution optimale de la consommation par tête et du loisir par tête au cours du temps. Dans le présent modèle cette évolution peut être caractérisée ainsi. Si les stocks initiaux des ressources non renouvelables sont faibles l'évolution des deux grandeurs est monotone, consommation et loisir décroissant régulièrement jusqu'à ce que soient épuisées les ressources non renouvelables après quoi s'instaure un régime stationnaire fondé sur l'exploitation de la seule ressource renouvelable. Si au contraire les ressources non renouvelables sont initialement importantes, alors, avant que soit atteint le régime stationnaire, la consommation par tête décroît régulièrement tandis que le loisir par tête fluctue, alternant des phases de croissance et de décroissance, la dernière phase du mouvement étant toujours

4. Pensons aux vins qui s'améliorent en vieillissant, tout au moins certains. Ici l'hypothèse est que c'est la quantité plutôt que la qualité qui augmente par vieillissement, hypothèse qui n'est évidemment pas sans rappeler certaines formulations de la théorie autrichienne du capital.

5. Cf. AMIGUES, FAVARD, GAUDET et MOREAUX [1995.a].

6. Cf. AMIGUES, FAVARD, GAUDET et MOREAUX [1995.b].

une phase de décroissance. Enfin, en termes de sentiers de consommation et de loisir, l'indétermination des sentiers d'exploitation des ressources admet la traduction suivante. Il existe un ensemble de sentiers de consommation et de loisir tel que chacun d'eux peut être le sentier optimal pour une infinité de stocks initiaux différents des ressources non renouvelables.

L'article est organisé comme suit. On présente le modèle à la section 2. On explore d'abord le cas où une seule ressource non renouvelable est disponible à la section 3. On décrit à la section 4 les deux types de sentiers optimaux possibles lorsqu'on dispose de plusieurs ressources non renouvelables. On montre aux sections 5 et 6 comment sont construits ces deux types de sentiers, et on détermine les ensembles de fondamentaux de l'économie pour lesquels l'un ou l'autre de ces types de sentiers est le type optimal. On conclut enfin à la section 7.

2 Le modèle

Précisons les hypothèses de l'étude et montrons ensuite à quel type de problème d'optimisation elles conduisent.

2.1. Hypothèses

On considère une population d'effectif constant égal à N . Chaque membre de cette population peut voir mis à sa disposition, à tout instant t , une quantité $c(t)$ de bien de consommation et se voir demandé en contrepartie une quantité de travail $w(t) = 1 - \ell(t)$, $\ell(t)$ étant le loisir dont il peut disposer ($\ell(t) \in [0, 1]$). L'utilité instantanée est supposée la même pour chaque individu, indépendante de son histoire personnelle et de l'histoire collective qu'il a vécue. On la note $U(c(t), \ell(t))$. On supposera que la fonction U est continue sur $R_+ \times [0, 1]$ ⁷, deux fois continuellement différentiable sur $R_{++} \times (0, 1)$ et additivement séparable⁸. L'utilité marginale de la consommation et celle du loisir sont positives et décroissantes, chacun de ces deux biens étant essentiel, on a donc :

$$(1a) \quad U(c, \ell) = u(c) + v(\ell), \quad \forall (c, \ell) \in R_+ \times [0, 1]$$

où les fonctions u et v sont strictement concaves, croissantes, deux fois continuellement différentiables sur R_{++} et $(0, 1)$ respectivement, et telles que :

$$(1b) \quad \lim_{c \downarrow 0} u'(c) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\ell \downarrow 0} v'(\ell) = +\infty$$

7. On désigne par R_+ l'ensemble des réels non-négatifs et par R_{++} l'ensemble des réels positifs.

8. Poser la séparabilité simplifie la présentation. L'hypothèse fondamentale est la concavité stricte de la fonction U .

La production totale du bien de consommation ainsi que l'effort en travail à fournir sont à chaque instant également répartis entre tous les membres de la société. Les utilités instantanées sont actualisées au taux constant $\rho > 0$ et on se propose de maximiser la somme de ces utilités actualisées sur l'ensemble des effectifs présents et à venir, c'est-à-dire de maximiser la fonction de bien-être social \mathcal{U} définie par :

$$(2) \quad \mathcal{U} = \int_0^{\infty} N U(c(t), \ell(t)) e^{-\rho t} dt$$

Le bien de consommation peut être produit à partir de deux types de ressources, renouvelables et non renouvelables. Dans chaque cas la transformation exige, outre l'une ou l'autre des ressources, du travail. Elle s'effectue à rendements constants selon des technologies du type Leontiev.

La ressource renouvelable est disponible sous forme d'un flux constant d'intensité égale à \bar{x} de sorte que sur l'intervalle de temps $(t, t + dt)$ la société peut disposer d'une quantité $\bar{x} dt$ de la ressource en question. A chaque instant l'obtention d'une unité de bien final exige le sacrifice d'une unité de ressource et de η unités de travail. On note $x(t)$ la quantité de la ressource utilisée à cette fin à l'instant t .

La ressource non renouvelable est disponible sous forme de deux stocks Y_i^0 , $i = 1, 2$. Hormis les quantités de travail requises pour les transformer en bien final, ces deux stocks sont des substituts parfaits l'un de l'autre d'une part et de la ressource renouvelable d'autre part. On est donc en droit de choisir les unités de mesure des différentes ressources de telle sorte que la quantité de chacune d'elles, nécessaire pour produire une unité de bien final, soit la même. Le plus simple est de poser que cette quantité est égale à 1. On note alors μ_i , $i = 1, 2$, la quantité de travail requise pour fabriquer une unité de bien final à partir d'une unité de ressource i ⁹. On conviendra d'indicer ces ressources de telle sorte que $\mu_1 < \mu_2$. On notera $y_i(t)$ la quantité de la ressource i consacrée à l'instant t à la production du bien de consommation.

On suppose que la ressource renouvelable n'est pas stockable en l'état, sauf à consentir un sacrifice en travail prohibitif. On montre à l'appendice A.1 que la société n'a jamais intérêt à stocker le bien de consommation finale. Dans ces conditions la production et la consommation instantanées de bien final sont confondues et s'élèvent à $x(t) + \sum_i y_i(t)$ et la quantité de travail qu'il faut mobiliser à cet effet s'élève à $\eta x(t) + \sum_i \mu_i y_i(t)$.

2.2. Formulation du problème

2.2.1. Etant donné les hypothèses posées sur U et l'hypothèse de disponibilité en ressource renouvelable, il est clair qu'à chaque instant

9. Les ressources, renouvelable et non renouvelables, étant de parfaits substituts, et les technologies de transformation étant linéaires, on ne distingue pas le secteur de l'extraction proprement dit du secteur de la transformation du produit minier en bien de consommation. Les différences entre η et μ_i , $i = 1, 2$ doivent s'interpréter comme des différences de coûts d'extraction.

chacun doit consommer du bien de consommation et du loisir. Donc dans tout problème d'optimisation dynamique les contraintes $c(t) \geq 0$ et $\ell(t) \geq 0$ ne sont jamais saturées. Puisque la production de bien de consommation nécessite du travail quelle que soit la ressource à partir de laquelle on la produit, la contrainte $1 - \ell(t)$ n'est jamais saturée non plus. Le problème de la recherche des sentiers optimaux d'utilisation des différentes ressources peut, sans perte de généralité, se formuler ainsi :

$$(3a) \quad \underset{\{x(t), y_i(t), i=1,2; t \geq 0\}}{\text{Max}} \quad \mathcal{U}$$

$$(3b) \quad c(t) = (x(t) + \sum_i y_i(t))/N, \quad t \geq 0$$

$$(3c) \quad \ell(t) = 1 - (\eta x(t) + \sum_i \mu_i y_i(t))/N, \quad t \geq 0$$

$$(3d) \quad \bar{x} - x(t) \geq 0, \quad x(t) \geq 0, \quad t \geq 0$$

$$(3e) \quad \frac{dY_i}{dt} = -y_i(t), \quad i = 1, 2 \quad t \geq 0$$

$$(3f) \quad y_i(t) \begin{cases} \geq 0 & \text{si } Y_i(t) \geq 0 \\ = 0 & \text{si } Y_i(t) = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad t \geq 0$$

$$(3g) \quad Y_i(0) = Y_i^0 \text{ donné} \quad i = 1, 2.$$

On notera $\{x^*(t), y_i^*(t) \mid i = 1, 2, t \geq 0\}$ la solution de ce problème.

Si la société ne dispose que de la seule ressource renouvelable le problème est un simple problème d'optimisation statique. A chaque instant il s'agit d'utiliser au mieux le flux de ressource renouvelable c'est-à-dire de résoudre le problème (4) suivant :

$$(4a) \quad \text{Max}_x N[u(x/N) + v(1 - \eta x/N)]$$

$$(4b) \quad \bar{x} - x \geq 0.$$

Les conditions de premier ordre de ce problème sont :

$$(5) \quad u' - \eta v' - \alpha = 0, \quad \alpha(\bar{x} - x) = 0 \text{ et } \alpha \geq 0.$$

Puisque la fonction d'objectif (4a) est strictement concave ¹⁰ les conditions nécessaires (5) sont suffisantes. On notera x_r^* la solution du problème (4), α_r^* la valeur du multiplicateur α associé à la contrainte (4b) et U_r^* le niveau d'utilité par tête optimal.

On dira que la ressource renouvelable est abondante si la contrainte de disponibilité (4b) n'est pas effective dans le régime régulier. On a alors : $u'(c_r^*) = \eta v'(\ell_r^*)$ où $c_r^* = x_r^*/N$ et $\ell_r^* = 1 - \eta x_r^*/N$. La ressource est exploitée jusqu'au niveau où la valeur marginale de la consommation par tête est égale au coût marginal par tête, valeur et coût étant chacun mesurés en termes d'utilité individuelle. Le taux marginal de substitution du loisir au bien de consommation est égal au taux marginal de transformation du travail en bien de consommation : $u'/v' = \eta$. Aucune rente de rareté n'est associée à la ressource renouvelable en tant que telle; elle est sans valeur bien qu'indispensable. C'est le cadre dans lequel nous nous plaçons dans la présente étude.

2.2.2. Il est clair que les ressources non-renouvelables ne doivent être exploitées que si leur coût d'exploitation est suffisamment faible par rapport à celui de la ressource renouvelable, c'est-à-dire si : $\mu_1 < \mu_2 < \eta$, ce que nous supposons. De plus, sous les conditions de linéarité des techniques de production, si les ressources non renouvelables doivent être exploitées, elles doivent l'être complètement d'une part et sur un intervalle de temps fini d'autre part. Soit T la date à partir de laquelle seule la ressource renouvelable est exploitée. Notons $B(T)$ la valeur à l'instant 0 du programme régulier démarrant en T : $B(T) = U_r^* e^{-\rho T} / \rho$. On peut donc réécrire le programme (3) ainsi :

$$(3') \quad \underset{\{T; x(t), y_i(t), i=1,2, T \geq t \geq 0\}}{\text{Max}} \quad N \int_0^T [u(c(t)) + v(\ell(t))] e^{-\rho t} dt + B(T)$$

sous les conditions (3b) à (3g) restreintes à $t \in [0, T]$.

Notons $\lambda_i, i = 1, 2$, les variables adjointes associées aux équations (3e) d'évolution des stocks, que l'on appellera aussi dans ce qui suit rentes ou valeurs intrinsèques des ressources non renouvelables. Puisque les variables d'état ne figurent pas dans le hamiltonien du problème (3') ces variables sont des constantes. Soit $\nu_i(t), i = 1, 2$, les multiplicateurs

10. $\frac{d^2}{dx^2} [N(u(x/N) + v(1 - \eta x/N))] = \frac{1}{N} \left[\frac{d^2 u}{dc^2} + \eta^2 \frac{d^2 v}{d\ell^2} \right] < 0$, car sous l'hypothèse posée de concavité stricte $\frac{d^2 u}{dc^2} < 0$ et $\frac{d^2 v}{d\ell^2} < 0$

associés aux contraintes (3f), et $\bar{\alpha}(t)$ et $\underline{\alpha}(t)$ les multiplicateurs associés aux contraintes (3d). Les conditions de premier ordre du problème (3') sont :

$$(6) \quad u' = \eta v' + [\bar{\alpha}(t) - \underline{\alpha}(t)]e^{\rho t}$$

$$(7) \quad u' = \mu_i v' + [\lambda_i - \nu_i(t)]e^{\rho t} \quad i = 1, 2$$

et la condition de transversalité s'écrit :

$$(8) \quad u((x(T) + \sum_i y_i(T))/N) + v(1 - (\eta x(T) + \sum_i \mu_i y_i(T))/N) - \bar{U}_r \\ = e^{\rho T} \sum_i \frac{\lambda_i y_i(T)}{N}.$$

2.2.3. On doit noter que la structure de la solution est markovienne au sens suivant. Supposons que $\{T^*, \bar{x}(t), \bar{y}_i(t), i = 1, 2, T^* \geq t \geq 0\}$ soit la solution du problème (3) lorsque les stocks initiaux sont $Y^o = (Y_1^o, Y_2^o)$. Considérons une date $t' > 0$ à laquelle la société dispose, si le sentier optimal $\{\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t)\}$ partant de Y^o a été suivi sur $[0, t')$, de stocks $Y_i^{t'} = Y_i^o - \int_0^{t'} \bar{y}_i(\tau) d\tau, i = 1, 2$. Alors la solution du problème (3') lorsque la société dispose de stocks initiaux $Y^{t'} = (Y_1^{t'}, Y_2^{t'})$, est de la forme $x'(t) = \bar{x}(t + t'), y_i'(t) = \bar{y}_i(t + t'), i = 1, 2, T^* - t' \geq t \geq 0$. En termes des multiplicateurs associés aux variables d'état, cette propriété s'exprime comme suit : soit $\lambda(Y^o) = (\lambda_1(Y^o), \lambda_2(Y^o))$ les valeurs des multiplicateurs lorsque les stocks initiaux s'élèvent à Y^o , alors $\lambda(Y^{t'}) = \lambda(Y^o)e^{\rho t'}$.

3 Une seule ressource non renouvelable est disponible

Supposons que la société ne dispose que de la seule ressource non renouvelable i et de la ressource renouvelable. On va montrer que les sentiers d'exploitation des ressources ont la structure suivante. Si le stock initialement disponible de la ressource i est inférieur à un certain niveau limite que l'on notera \tilde{Y}_i^o alors avant d'atteindre le régime stationnaire, il faut d'entrée exploiter simultanément les deux ressources, la quantité exploitée de la ressource renouvelable croissant de façon continue jusqu'au niveau \bar{x}_r , la quantité exploitée de la ressource i décroissant continuellement jusqu'à s'annuler. On dira alors que la ressource i est « rare ». Si au contraire le stock initial Y_i^o est supérieur à \tilde{Y}_i^o , la phase d'exploitation simultanée que l'on vient de décrire est précédée d'une phase au cours de laquelle seule la ressource non renouvelable i est exploitée. On dira alors que cette ressource

i est « *abondante* ». Dans les deux cas, bien que la ressource renouvelable soit plus coûteuse à exploiter que la ressource non renouvelable, il existe toujours une phase d'exploitation commune. Examinons successivement ces deux cas de *rareté* et d'*abondance*.

3.1. La ressource non-renouvelable est « rare »

On caractérise d'abord une phase au cours de laquelle on doit avoir recours aux deux types de ressources. On établit ensuite les relations qui lient la valeur de la ressource, le niveau du stock disponible et le point de départ du sentier d'exploitation optimal.

3.1.1. Caractérisons une phase d'exploitation simultanée de la ressource non renouvelable i et de la ressource renouvelable. Posons que la société dispose autant que nécessaire de la ressource renouvelable (on verra que sous l'hypothèse d'abondance sous laquelle nous nous sommes placés on ne bute jamais sur la contrainte $\bar{x} - x(t) \geq 0$). A tout instant t d'une telle phase les contraintes (3d) ne sont pas effectives de sorte que $\underline{a}(t) = \bar{a}(t) = 0$. Par ailleurs la contrainte $y_i(t) \geq 0$ n'est pas saturée de sorte que $\nu_i(t) = 0$. Les conditions de premier ordre (6) et (7) s'écrivent donc :

$$(9) \quad u' - \eta v' = 0, \quad \text{et}, \quad u' - \mu_i v' = \lambda_i e^{\rho t}.$$

Les conditions (9) définissent un système d'équations en $(c(t), \ell(t))$ qui se résoud en deux étapes. La première consiste à résoudre le système (9) en (u', v') :

$$(10) \quad u' = (\eta/(\eta - \mu_i))\lambda_i e^{\rho t}, \quad v' = (1/(\eta - \mu_i))\lambda_i e^{\rho t}.$$

La seconde étape part de la remarque suivante. Les fonctions u et v sont par hypothèse strictement concaves en c et ℓ respectivement et donc les fonctions u' et v' sont inversibles¹¹. On peut donc inverser séparément chacune des relations (10), d'où :

$$(11) \quad c(t) = u'^{-1}(\eta\lambda_i e^{\rho t}/(\eta - \mu_i)), \quad \text{et}, \quad \ell(t) = v'^{-1}(\lambda_i e^{\rho t}/(\eta - \mu_i)).$$

Notons $c(t; \lambda_i)$ et $\ell(t; \lambda_i)$ les fonctions ainsi obtenues.

11. Si la fonction U n'était pas séparable on ne pourrait pas inverser séparément chacune des relations (10). On aurait :

$$\frac{\partial U}{\partial c} = \frac{\eta}{\eta - \mu_i} \lambda_i e^{\rho t}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial \ell} = \frac{1}{\eta - \mu_i} \lambda_i e^{\rho t},$$

où chacune des dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial c}$ et $\frac{\partial U}{\partial \ell}$ est fonction de c et ℓ .

On déduit de (10) et (11) qu'au cours d'une phase d'exploitation simultanée des deux types de ressources $c(t; \lambda)$ et $\ell(t; \lambda)$ sont toutes deux décroissantes au cours du temps :

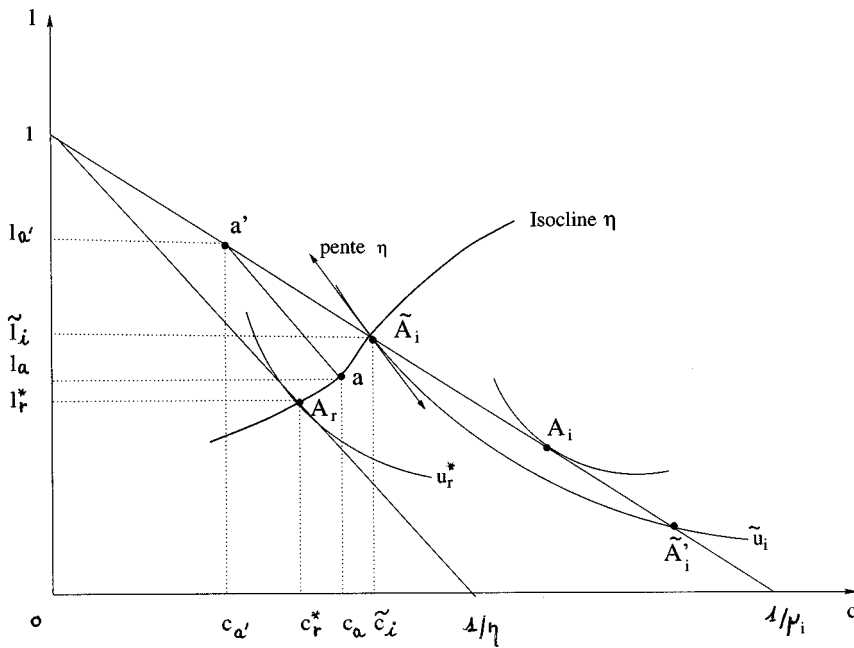
$$(12) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\eta \rho \lambda_i e^{\rho t}}{(\eta - \mu_i) u''} = \rho \frac{u'}{u''} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \ell}{\partial t} = \frac{\rho \lambda_i e^{\rho t}}{(\eta - \mu_i) v''} = \rho \frac{v'}{v''} < 0.$$

On note aussi que $c(t; \lambda_i)$ et $\ell(t; \lambda_i)$ sont des fonctions décroissantes de λ_i :

$$(13) \quad \frac{\partial c}{\partial \lambda_i} = \frac{\eta e^{\rho t}}{(\eta - \mu_i) u''} = \frac{1}{\lambda_i} \frac{u'}{u''} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \ell}{\partial \lambda_i} = \frac{e^{\rho t}}{(\eta - \mu_i) v''} = \frac{1}{\lambda_i} \frac{v'}{v''} < 0.$$

FIGURE 1

Cas où seules la ressource i et la ressource renouvelable sont disponibles.
(N.B. : Le segment $[a', a]$ est de pente $-\eta$).



Une conséquence immédiate de (10) est qu'au cours d'une phase d'exploitation simultanée des deux types de ressources, on doit avoir :

$$(14) \quad u' / v' = \eta.$$

De (12) et (14) on déduit qu'un sentier $(c(t), \ell(t))$ suit, pendant une telle phase, l'isocline η . Sur la figure 1 le segment de courbe $[A_r, \tilde{A}_i]$, $A_r = (c_r^*, l_r^*)$ et $\tilde{A}_i = (\tilde{c}_i, \tilde{l}_i)$, représente la partie de cette isocline comprise entre les deux droites issues de $(\ell = 1, c = 0)$ et de pentes $-\eta$

et $-\mu_i$ respectivement, le point A_r correspondant au régime stationnaire qui prévaut une fois la ressource non renouvelable i épuisée. On appellera respectivement ces deux droites, droite de transformation de la ressource renouvelable et droite de transformation de la ressource i . On conviendra de désigner par I_η^i la partie $[A_r, \tilde{A}_i]$ de l'isocline η .

En tout point $a = (c, \ell) \in I_\eta^i$, la répartition de l'exploitation entre ressource renouvelable et non renouvelable est déterminée de façon unique. Le point a sur la figure 1 ne peut être obtenu que par la décomposition suivante en x et y_i :

$y_i = N c_{a'}$ nécessitant la quantité de travail $N[1 - \ell_{a'}]$

$x = N[c_a - c_{a'}]$ nécessitant la quantité de travail $N[\ell_{a'} - \ell_a]$. Plus généralement on doit avoir pour tout couple $a = (c, \ell) \in I_\eta^i$:

$$(15) \quad \eta x + \mu_i y_i = N[1 - \ell] \quad \text{et} \quad x + y_i = N c$$

d'où :

$$(16) \quad x = N(1 - \ell - c \mu_i)/(\eta - \mu_i), \quad y_i = N(-1 + \ell + c \eta)/(\eta - \mu_i)$$

Il est clair que lorsque le point a parcourt I_η^i dans le sens $\tilde{A}_i \rightarrow A_r$, alors x/N croît de 0 à \tilde{x}_r et y_i/N décroît de \tilde{c}_i à 0, la somme $(x + y_i)/N$ décroissant de \tilde{c}_i à \tilde{c}_r . Le fait que x/N soit toujours inférieur à \tilde{c}_r est important pour la construction du sentier solution de (3'). Si en effet un sentier $(c(t), \ell(t))$ parcourt I_η^i , $(x(t), y_i(t))$ se déduisant de $(c(t), \ell(t))$ via (16), alors la contrainte $\bar{x} - x(t) \geq 0$ n'est jamais effective de sorte que la caractérisation (9) d'une phase pendant laquelle les deux ressources, renouvelable et non renouvelable, sont exploitées, est la caractérisation pertinente. Cette hypothèse étant levée, montrons maintenant comment construire les sentiers optimaux.

3.1.2. Examinons les valeurs de la rente associées aux sentiers d'exploitation simultanée des deux types de ressources et les niveaux du stock soutenant ces sentiers. A tout sentier qui démarre à l'instant $t = 0$ du point $a_0 = (c_0, \ell_0) \in I_\eta^i$ est associée la valeur de λ_i solution (cf. (11) pour $t = 0$) indifféremment de :

$$(17) \quad c_0 = u'^{-1}(\eta \lambda_i / (\eta - \mu_i)), \quad \text{ou} \quad \ell_0 = v'^{-1}(\lambda_i / (\eta - \mu_i)).$$

La phase d'exploitation simultanée se termine à l'instant $t_i^s(\lambda_i)$ défini par :

$$(18) \quad \tilde{c}_r = u'^{-1}(\eta \lambda_i e^{\rho t} / (\eta - \mu_i)), \quad \text{ou} \quad \tilde{\ell}_r = v'^{-1}(\lambda_i e^{\rho t} / (\eta - \mu_i)).$$

Le stock initial de la ressource i nécessaire et suffisant pour pouvoir suivre un tel sentier, que l'on note $Y_i^o(\lambda_i)$, s'élève à :

$$(19) \quad Y_i^o(\lambda_i) = \int_0^{t_i^s(\lambda_i)} y_i(t; \lambda_i) dt,$$

où (cf. (16)) ¹² :

$$(20) \quad y_i(t; \lambda_i) = N(-1 + \ell(t; \lambda_i) + \eta c(t; \lambda_i))/(\eta - \mu_i).$$

On remarquera enfin que si on ne dispose que de la ressource i la condition de transversalité (8) s'écrit :

$$(21) \quad u((x(T) + y_i(T))/N) + v(1 - (\eta x(T) + \mu_i y_i(T))/N) - U_r^* = e^{\rho T} \frac{\lambda_i y_i(T)}{N}.$$

Or en $T = t_i^s(\lambda_i)$ on a :

$$x(t_i^s(\lambda_i)) = N \bar{c}_r^* \quad \text{et} \quad y_i(t_i^s(\lambda_i)) = 0$$

et les membres gauche et droit de (21) sont tous deux nuls.

Il est assez évident que lorsque a_0 parcourt I_η^i dans le sens $A_r \rightarrow \tilde{A}_i$, alors :

α - La valeur de λ_i qui définit le mouvement $\{(c(t; \lambda_i), \ell(t; \lambda_i)), t \in [0, t_i^s(\lambda_i)]\}$ partant de a_0 , décroît de λ_i^r solution de (17) pour $c_0 = \bar{c}_r^*$, à $\tilde{\lambda}_i$ solution de (17) pour $c_0 = \tilde{c}_i$ ¹³. La valeur maximale de λ_i, λ_i^r , s'élève donc à :

$$(22) \quad \lambda_i^r = u'(\bar{c}_r^*) - \mu_i v'(\bar{\ell}_r^*) = (\eta - \mu_i) v'(\bar{\ell}_r^*) = (\eta - \mu_i) u'(\bar{c}_r^*) / \eta$$

12. On déduit de (20) que :

$$\frac{\partial y_i(t; \lambda_i)}{\partial t} = \frac{N}{\eta - \mu_i} \left[\frac{\partial \ell(t; \lambda_i)}{\partial t} + \eta \frac{\partial c(t; \lambda_i)}{\partial t} \right]$$

et puisque d'après (12), $\partial \ell / \partial t < 0$ et $\partial c / \partial t < 0$, on a :

$$\frac{\partial y_i(t; \lambda_i)}{\partial t} < 0.$$

Par ailleurs, de $x(t)$ défini en posant $\ell = \ell(t; \lambda_i)$ et $c = c(t; \lambda_i)$ dans (3.8) on déduit que :

$$\frac{\partial x(t; \lambda_i)}{\partial t} = -\frac{N}{\eta - \mu_i} \left[\frac{\partial \ell(t; \lambda_i)}{\partial t} + \mu_i \frac{\partial c(t; \lambda_i)}{\partial t} \right] > 0$$

Un coup d'oeil à la figure 1 permet de voir pourquoi lorsque l'on parcourt l'isocline η dans le sens $\tilde{A}_i \rightarrow A_r$, l'exploitation de la ressource i diminue jusqu'à s'annuler et celle de la ressource renouvelable augmente.

13. On a, en différenciant (17) :

$$\frac{d\lambda_i}{dc_0} = \frac{\eta - \mu_i}{\eta} \frac{d^2 u}{dc^2} < 0$$

β - Le stock initial de la ressource i qui est nécessaire et suffisant pour suivre ce sentier est croissant, de 0 pour $a_0 = A_r$ à $\tilde{Y}_i^o = Y_i^o(\tilde{\lambda}_i)$ pour $a_0 = \tilde{A}_i$ ¹⁴;

γ - La durée de la phase d'exploitation simultanée des deux types de ressources croît de 0 lorsque $a_0 = A_r$, à $t_i^s(\tilde{\lambda}_i) = \tilde{t}_i^s$ lorsque $a_0 = \tilde{A}_i$ ¹⁵.

3.2. La ressource non-renouvelable est « abondante »

On caractérise d'abord une phase au cours de laquelle seule la ressource i est exploitée puis on détermine les relations entre valeur de la ressource i , niveau du stock initialement disponible et position du point de départ du sentier. On souligne enfin les particularités de l'évolution de l'effort en travail le long de ce genre de sentier.

3.2.1. Au cours d'une phase pendant laquelle on n'exploite que la seule ressource i , $\ell(t)$ se déduit de $c(t)$ par la relation $\ell(t) = 1 - \mu_i c(t)$ et puisque $y_i(t) > 0$ le multiplicateur $\nu_i(t)$ est nul. Le mouvement est donc défini par la seule équation (7) en $c(t)$ où l'argument de v' a pour valeur $\ell(t) = 1 - \mu_i c(t)$:

$$(23) \quad u' - \mu_i v' = \lambda_i e^{\rho t},$$

l'équation (6) étant satisfaite pour $\bar{\alpha}(t) = 0$ et $\underline{\alpha}(t) = e^{-\rho t}(\eta - \mu_i)v' + \lambda_i > 0$ car la contrainte $x(t) \geq 0$ est effective.

La fonction $U_i(c) = u(c) + v(1 - \mu_i c)$ est strictement concave ¹⁶. On peut donc inverser sa dérivée $U_i' = u' - \mu_i v'$, d'où :

$$(24) \quad c(t) = U_i'^{-1}(\lambda_i e^{\rho t}).$$

14. On a, en différenciant (20) :

$$\frac{\partial y_i(t; \lambda_i)}{\partial \lambda_i} = \frac{N}{\eta - \mu_i} \left[\frac{\partial \ell(t; \lambda_i)}{\partial \lambda_i} + \eta \frac{\partial c(t; \lambda_i)}{\partial \lambda_i} \right].$$

Or d'après (13) : $\frac{\partial c(t; \lambda_i)}{\partial \lambda_i} < 0$ et $\frac{\partial \ell(t; \lambda_i)}{\partial \lambda_i} < 0$, d'où $\frac{\partial y_i(t; \lambda_i)}{\partial \lambda_i} < 0$.

Par ailleurs on montre à la note suivante que $\partial t_i^s / \partial \lambda_i < 0$. On conclut donc que :

$$\frac{dY_i^o(\lambda_i)}{d\lambda_i} < 0.$$

15. On a, en différenciant (18) :

$$\frac{dt_i^s}{d\lambda_i} = -\frac{1}{\rho \lambda_i} < 0.$$

16. On a : $\frac{d^2}{dc^2}[u(c) + v(1 - \mu_i c)] = \frac{d^2 u}{dc^2} + \mu_i^2 \frac{d^2 v}{d\ell^2} < 0$ puisque $\frac{d^2 u}{dc^2} < 0$, $\frac{d^2 v}{d\ell^2} < 0$ et $\mu_i > 0$.

Soit $c(t; \lambda_i)$ la fonction ainsi définie et $\ell(t; \lambda_i) = 1 - \mu_i c(t; \lambda_i)$, la quantité de ressource i exploitée à l'instant t , $y_i(t; \lambda_i)$, s'élève à :

$$(25) \quad y_i(t; \lambda_i) = Nc(t; \lambda_i).$$

On déduit de (23) et (24) qu'au cours d'une phase d'exploitation de la seule ressource i la consommation par tête est décroissante et le loisir par tête croissant :

$$(26a) \quad \frac{\partial c(t; \lambda_i)}{\partial t} = \frac{\rho \lambda_i e^{\rho t}}{u'' + \mu_i^2 v''} = \rho \frac{u' - \mu_i v'}{u'' + \mu_i^2 v''} < 0,$$

$$(26b) \quad \frac{\partial \ell(t; \lambda_i)}{\partial t} = -\mu_i \frac{\partial c(t; \lambda_i)}{\partial t} > 0.$$

Par ailleurs :

$$(27a) \quad \frac{\partial c(t; \lambda_i)}{\partial \lambda_i} = \frac{e^{\rho t}}{u'' + \mu_i^2 v''} = \frac{1}{\rho \lambda_i} \frac{\partial c(t; \lambda_i)}{\partial t} < 0,$$

$$(27b) \quad \frac{\partial \ell(t; \lambda_i)}{\partial \lambda_i} = -\mu_i \frac{\partial c(t; \lambda_i)}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{\rho \lambda_i} \frac{\partial \ell(t; \lambda_i)}{\partial t} > 0.$$

Considérons la figure 1 et la droite de transformation de la ressource i . Soit U^i le plus haut niveau d'utilité par tête qu'on puisse obtenir en n'utilisant que la ressource i , et, $A_i = (c_i, \ell_i)$ le point de tangence de la courbe d'indifférence correspondante avec cette droite de transformation. Ce point est situé entre le point \tilde{A}_i d'intersection de l'isocline η et cette droite, et le point \tilde{A}'_i second point d'intersection de la courbe d'indifférence passant par \tilde{A}_i avec cette même droite de transformation.

Soit $a_0 = (c_0, \ell_0)$ un point du segment $[\tilde{A}_i, A_i]$ de la droite de transformation du stock i . A tout sentier qui part à l'instant 0 de ce point on peut associer la valeur de λ_i solution (cf. (24) pour $t = 0$) :

$$(28) \quad c_0 = U_i'^{-1}(\lambda_i).$$

La phase d'exploitation de la seule ressource i prend fin à l'instant $\tilde{t}_i(\lambda_i)$ défini comme solution de :

$$(29) \quad \tilde{c}_i = U_i'^{-1}(\lambda_i e^{\rho \tilde{t}_i}).$$

Le stock de ressource nécessaire pour suivre le sentier $c(t; \lambda_i)$ entre 0 et $\tilde{t}_i(\lambda_i)$ s'élève à $\Delta Y_i^o(\lambda_i)$ égal à :

$$(30) \quad \Delta Y_i^o(\lambda_i) = \int_0^{\tilde{t}_i(\lambda_i)} c(t; \lambda_i) dt.$$

Lorsque a_0 parcourt le segment $[\tilde{A}_i, A_i)$ dans le sens $\tilde{A}_i \rightarrow A_i$:

α - La valeur de λ_i qui définit le mouvement $\{(c(t; \lambda_i), \ell(t; \lambda_i)), t \in [0, \tilde{t}_i(\lambda_i)]\}$ partant de a_0 , décroît de $\tilde{\lambda}_i$ pour $a_0 = (\tilde{c}_i, \tilde{\ell}_i)$ à 0 pour $a_0 = (c_i, \ell_i)$ ¹⁷;

β - Le stock $\Delta Y_i^o(\lambda_i)$ nécessaire pour suivre ce sentier entre 0 et $\tilde{t}_i(\lambda_i)$ passe de 0 pour $a_0 = \tilde{A}_i$ à l'infini lorsque a_0 tend vers A_i ¹⁸;

γ - La durée de la phase de consommation de la seule ressource i $\tilde{t}_i(\lambda_i)$ passe de 0 lorsque $a_0 = \tilde{A}_i$ à l'infini lorsque a_0 tend vers A_i ¹⁹.

On a souligné à la fin de la section 2 l'aspect markovien de la solution du problème (3'). La façon dont on doit enchaîner les phases d'exploitation de la seule ressource i et d'exploitation simultanée des deux ressources devrait être assez claire maintenant. Si $Y_i^o > \tilde{Y}_i^o$, posons $\Delta Y_i^o = Y_i^o - \tilde{Y}_i^o$: on a une première phase d'exploitation de la seule ressource i , λ_i et $\tilde{t}_i(\lambda_i)$ étant déterminés par le couple d'équations (29)-(30) au cours de laquelle est utilisée la partie ΔY_i^o du stock de la ressource i . Le reste, \tilde{Y}_i^o , est utilisé au cours de la phase d'exploitation simultanée qui démarre ensuite. Si $Y_i^o < \tilde{Y}_i^o$ on démarre directement la phase d'exploitation simultanée des deux ressources.

3.2.2. Un aspect important de ces sentiers optimaux doit être mis en évidence. Lorsque la ressource i est relativement rare, consommation et loisir par tête décroissent tous deux dans un premier temps puis se stabilisent au niveau permanent $(\tilde{c}_r^*, \tilde{\ell}_r^*)$. Si au contraire la ressource i est abondante, la consommation par tête est en permanence décroissante tant que le régime stationnaire n'est pas atteint. Mais le sentier de loisir par tête n'est pas monotone. Dans un premier temps le loisir augmente, au cours de la phase d'exploitation de la seule ressource i , puis il diminue, au cours de la phase d'exploitation simultanée et se stabilise enfin au niveau stationnaire $\tilde{\ell}_r^*$.

3.3. Quelques notations utiles

Avant de nous tourner vers le cas où les deux ressources non renouvelables sont disponibles, introduisons un certain nombre de notations qui s'avèreront utiles par la suite.

17. En différenciant (28), on obtient :

$$\frac{d\lambda_i}{dc_0} = \frac{d^2 u}{dc^2} + \mu_i^2 \frac{d^2 v}{d\ell^2} < 0.$$

18. D'après (27a) $c(t; \lambda_i)$ est une fonction décroissante de λ_i et on montre à la note suivante que $d\tilde{t}_i/d\lambda_i < 0$. Il en résulte que $\Delta Y_i^o(\lambda_i)$ est une fonction décroissante de λ_i .

19. En différenciant (29) on obtient :

$$\frac{d\tilde{t}_i}{d\lambda_i} = -\frac{1}{\rho\lambda_i} < 0.$$

On définit $t_i(\lambda_i), \lambda_i \in (0, \lambda_i^r)$ comme la durée du parcours nécessaire pour rejoindre l'état stationnaire lorsque la valeur de la ressource i est λ_i :

$$(31) \quad t_i(\lambda_i) = \begin{cases} t_i^s(\lambda_i) & \text{si } \lambda_i \in [\tilde{\lambda}_i, \lambda_i^r] \\ \tilde{t}_i(\lambda_i) + \tilde{t}_i^s & \text{si } \lambda_i \in (0, \tilde{\lambda}_i) \end{cases}$$

Il est clair que t_i est un fonction décroissante de λ_i qui varie de $+\infty$ si $\lambda_i = 0$ à 0 si $\lambda_i = \lambda_i^r$.

Pour tout $\lambda_i \in (0, \lambda_i^r)$ on désigne par $y_i(t; \lambda_i)$ la quantité de la ressource i exploitée le long d'un sentier, solution des conditions nécessaires (6), (7). $y_i(t; \lambda_i)$ est défini par (25) si la ressource i est exploitée seule, par (20) si la ressource i est exploitée simultanément avec la ressource renouvelable. On note $Y_{i0}(\lambda_i)$ le stock dont il faut disposer pour soutenir cette exploitation :

$$(32) \quad Y_{i0}(\lambda_i) = \int_0^{t_i(\lambda_i)} y_i(t; \lambda_i) dt$$

La fonction Y_{i0} est décroissante de $+\infty$ si $\lambda_i = 0$ à 0 si $\lambda_i = \lambda_i^r$. On notera λ_{i0} son inverse.

4 Les structures des sentiers d'exploitation lorsque plusieurs ressources non renouvelables sont disponibles

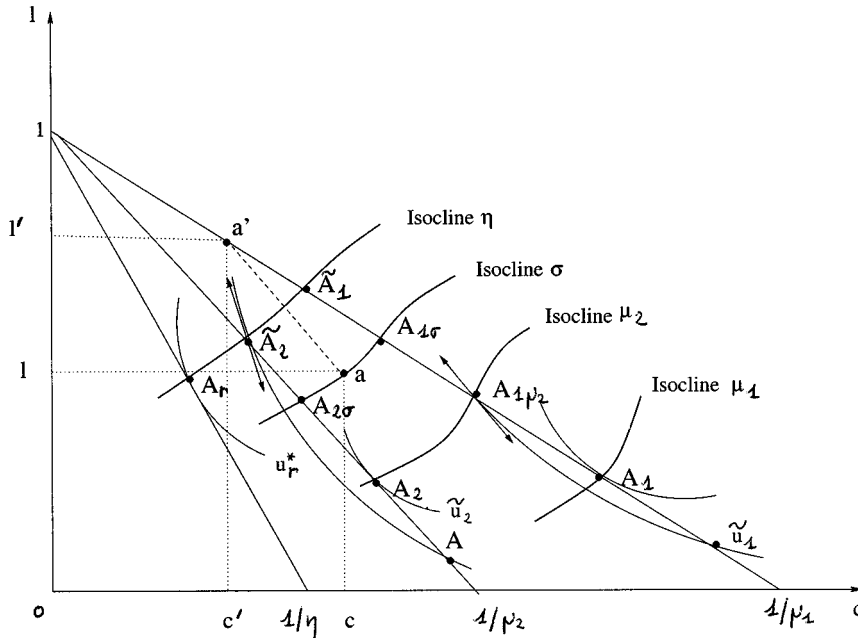
Esquissons maintenant ce que sont les structures des sentiers d'exploitation optimaux lorsque la société dispose des deux ressources non renouvelables. Pour ce reportons nous à la figure 2. Sur cette figure sont portées les trois droites de transformation des ressources. Les points \hat{A}_1 et \hat{A}_2 sont situés à l'intersection de l'isocline η et des droites de transformation des ressources 1 et 2 respectivement. Les points A_1 et A_2 sont ceux correspondant aux plus hauts niveaux d'utilité qu'on peut atteindre le long de ces deux droites de transformation. On a tracé deux autres isoclines, l'isocline μ_2 correspondant au lieu des points où les courbes d'indifférence sont de pente $-\mu_2$, et l'isocline σ où elles sont de pentes $-\sigma, \mu_2 < \sigma < \eta$. De façon générale on notera $I_\sigma = [A_{1\sigma}, A_{2\sigma}]$, $A_{i\sigma} = (c_{i\sigma}, \ell_{i\sigma}), i = 1, 2$, la partie de l'isocline σ comprise entre les droites de transformation des ressources 1 et 2. On montrera que selon la valeur des stocks le sentier optimal est de l'un des deux types suivants.

4.1. Sentiers du premier type

Le premier type de sentier part d'un point situé sur la droite de transformation de la ressource 1, entre A_1 et \hat{A}_1 et suit cette droite de

FIGURE 2

Cas où les deux ressources non-renouvelables sont disponibles. (N.B. : Le segment $[a', a]$ est de pente $-\mu_2$).



transformation en direction de \tilde{A}_1 jusqu'en un point $A_{1\sigma}$, situé avant \tilde{A}_1 , où il bifurque pour suivre l'isocline σ jusqu'en $A_{2\sigma}$. Il parcourt alors la droite de transformation de la ressource 2 jusqu'en \tilde{A}_2 et suit enfin l'isocline η jusqu'en A_r point auquel le régime permanent d'exploitation de la seule ressource renouvelable est atteint. L'exploitation des ressources évolue ainsi : pendant le parcours de la première partie du sentier, le long de la droite de transformation de la ressource 1, évidemment seule cette ressource est exploitée en quantités décroissantes; au cours de la seconde partie, les ressources 1 et 2 sont toutes deux exploitées : la part de la ressource 1 diminue jusqu'à s'annuler et la part de la ressource 2 augmente corrélativement, le stock disponible de ressource 1 étant épuisé à l'issue de cette période; pendant la troisième partie, le long de la droite de transformation de la ressource 2, seule cette ressource est utilisée en quantités décroissantes; enfin au cours de la dernière phase, la quantité utilisée de la ressource 2 décroît jusqu'à s'annuler et la ressource renouvelable est mise en exploitation en quantités croissantes. Puisque la solution du problème (3') est markovienne, il existe des versions écourtées du parcours pour des stocks plus faibles dont les points de départ sont situés soit sur I_σ entre $A_{2\sigma}$ et $A_{1\sigma}$, soit sur la droite de transformation de la ressource 2 entre $A_{2\sigma}$ et

\tilde{A}_2 , soit enfin sur la partie I_η^2 de l'isocline ²⁰ η . On réservera l'appellation sentier du premier type à ceux qui partent soit de la droite de transformation de la ressource 1, soit d'une partie I_σ d'une isocline $\sigma, \mu_2 < \sigma < \eta$, soit enfin de la partie (A_2, \tilde{A}_2) de la droite de transformation de la ressource 2 (ce dernier cas étant un cas dégénéré où seule la ressource 2 est initialement disponible). Il faut noter qu'on exclut les sentiers qui partiraient de I_η^2 . On verra pourquoi à la section 6.

4.2. Sentiers du second type

Les sentiers du second type sont au départ semblables à ceux du premier type. Un sentier de ce type part d'un point de la droite de transformation de la ressource 1 situé entre A_1 et \tilde{A}_1 et remonte cette droite de transformation jusqu'en \tilde{A}_1 , contrairement aux sentiers du premier type qui bifurquent sur une isocline $\sigma, \mu_2 < \sigma < \eta$, avant d'atteindre \tilde{A}_1 . Ensuite le sentier suit l'isocline η de \tilde{A}_1 à A_r . Là encore le parcours peut être écourté. On appellera sentiers du second type les sentiers qu'on vient de décrire quel que soit leur point de départ, c'est-à-dire qu'il soit situé sur la droite de transformation de la ressource 1 ou sur I_η^1 . Assez évidemment on a des sentiers de ce type si la société ne dispose que de la seule ressource 1 comme on l'a montré à la section précédente. Plus intéressant est le fait qu'on peut avoir aussi des sentiers de ce type lorsque la société dispose initialement des deux ressources non renouvelables, et ce n'est pas une simple curiosité. On montrera que dans R_+^2 l'ensemble des couples de stocks initiaux $Y^o = (Y_1^o, Y_2^o)$ pour lequel la solution du problème (3') est de ce type, est de mesure non nulle. On montrera aussi que, contrairement aux sentiers du premier type dans lesquels les profils d'exploitation individuels des ressources sont parfaitement déterminés en fonction de l'état initial des stocks disponibles, les profils d'exploitation individuels sont, le long des sentiers du second type, en partie indéterminés. En particulier le long de ce genre de sentier l'ordre d'exploitation peut être indéterminé.

5 Les sentiers du premier type

Nous caractérisons d'abord les phases d'exploitation simultanée des seules ressources non renouvelables, phases propres à ces sentiers. On construit ensuite deux applications : la première d'une partie de l'espace des multiplicateurs dans l'espace des sentiers du premier type (identifiés

20. Rappelons que nous sommes convenus de noter I_η^i la partie $[\tilde{A}_i, A_r]$ de l'isocline η et que de façon générale I_σ est la partie de l'isocline σ comprise entre les droites de transformation des ressources 1 et 2 de sorte que $I_\eta = \{I_\eta^1 \setminus I_\eta^2\} \cup \{A_2\}$.

à leurs points de départ), la seconde d'une partie de l'espace des stocks initialement disponibles dans l'espace des sentiers du premier type également. Implicitement on définit une bijection de la partie concernée de l'espace des multiplicateurs dans la partie concernée de l'espace des stocks initialement disponibles. On montre enfin comment les sentiers du second type peuvent être vus comme un cas limite de sentiers du premier type.

5.1. Caractérisation des phases d'exploitation simultanée des deux ressources non renouvelables

5.1.1. Au cours d'une phase de ce genre $y_i(t) > 0, i = 1, 2$, de sorte que $\nu_i(t) = 0, i = 1, 2$ d'une part, et d'autre part $x(t) = 0$ de sorte que $\bar{\alpha}(t) = 0$ et $\underline{\alpha}(t) \geq 0$. Le mouvement est donc défini par les seules équations (7) :

$$(33) \quad u' - \mu_i v' = \lambda_i e^{\rho t} \quad i = 1, 2$$

l'équation (6) étant satisfaite pour $\bar{\alpha}(t) = 0$ et $\underline{\alpha}(t) = e^{-\rho t}(\eta - \mu_i)v' + \lambda_i > 0$. (33) définit un système de deux équations à deux inconnues $c(t)$ et $\ell(t)$. Résolvons-le en deux étapes. La première étape consiste à résoudre en (u', v') :

$$(34) \quad u' = [(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)/(\mu_2 - \mu_1)]e^{\rho t}, \quad \text{et}, \quad v' = [(\lambda_1 - \lambda_2)/(\mu_2 - \mu_1)]e^{\rho t}.$$

Les fonctions u' et v' sont par hypothèse inversibles. La seconde étape consiste alors à inverser séparément chacune des relations (34) :

$$(35a) \quad c(t) = u'^{-1}([(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)/(\mu_2 - \mu_1)]e^{\rho t})$$

$$(35b) \quad \ell(t) = v'^{-1}([(\lambda_1 - \lambda_2)/(\mu_2 - \mu_1)]e^{\rho t}).$$

On notera $c(t; \lambda)$ et $\ell(t; \lambda)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, les fonctions ainsi définies.

On déduit de (34) ou (35) qu'au cours d'une phase d'exploitation des deux ressources la consommation et le loisir par tête sont tous deux décroissants :

$$(36) \quad \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial t} = \rho \frac{u'}{u''} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial t} = \rho \frac{v'}{v''} < 0$$

On note aussi que $c(t; \lambda)$ est une fonction décroissante de λ_1 et croissante de λ_2 :

$$(37) \quad \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} = \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \frac{e^{\rho t}}{u''} < 0, \quad \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} = -\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \frac{e^{\rho t}}{u''} > 0$$

d'où (cf. (36)) :

$$(38) \quad \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial t} = \rho \lambda_1 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} + \rho \lambda_2 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_2}.$$

La fonction $\ell(t; \lambda)$ est une fonction décroissante en λ_1 et croissante en λ_2 :

$$(39) \quad \frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} = \frac{e^{\rho t}}{\mu_2 - \mu_1} \frac{1}{v''} < 0, \quad \frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} = -\frac{e^{\rho t}}{\mu_2 - \mu_1} \frac{1}{v''} > 0$$

d'où (cf. (36)) :

$$(40) \quad \frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial t} = \rho \lambda_1 \frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} + \rho \lambda_2 \frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} = \rho(\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_i}.$$

On remarquera enfin que, par hypothèse, $v' > 0$ et $\mu_2 - \mu_1 > 0$ et donc une conséquence directe de (34) est qu'une telle phase d'exploitation simultanée est possible si et seulement si $\lambda_1 > \lambda_2$. Le fait que la ressource la moins coûteuse en travail ait une rente associée supérieure est un résultat classique de la théorie des ressources épuisables.

5.1.2. Revenons sur les relations (34) et la valeur du rapport u'/v' qu'elles définissent implicitement :

$$(41) \quad \frac{u'}{v'} = \frac{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \sigma.$$

En d'autres termes au cours d'une phase d'exploitation simultanée le sentier parcourt une certaine isocline σ dans le sens (cf. (36)) $A_{1\sigma} \rightarrow A_{2\sigma}$.

On peut considérer la relation (41) qui lie les trois paramètres σ , λ_1 et λ_2 sous plusieurs angles. Une première lecture est de voir σ comme une fonction de λ_1 et λ_2 . Alors :

$$(42) \quad \frac{\partial \sigma(\lambda)}{\partial \lambda_1} = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \lambda_2 < 0, \quad \frac{\partial \sigma(\lambda)}{\partial \lambda_2} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \lambda_1 > 0,$$

propriété que nous utiliserons à l'appendice A.2.

Une seconde lecture, qui s'avèrera très féconde, consiste à voir (41) comme une condition liant λ_1 et λ_2 , qui doit être vérifiée pour que le sentier $(c(t), \ell(t))$ emprunte l'isocline $\sigma, \mu_2 < \sigma < \eta$:

$$(43) \quad \lambda_2 = \frac{\sigma - \mu_2}{\sigma - \mu_1} \lambda_1.$$

Ce qu'il faut alors remarquer c'est que le coefficient $\sigma - \mu_2 / \sigma - \mu_1$ est une fonction croissante de σ :

$$(44) \quad \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\sigma - \mu_2}{\sigma - \mu_1} \right) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{(\sigma - \mu_1)^2} > 0.$$

On notera D_σ la droite du plan (λ_2, λ_1) , lieu des points $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ vérifiant la relation (43).

5.1.3. Déterminons maintenant comment évolue l'exploitation de chacune des ressources non renouvelables au cours d'une phase d'exploitation

commune de ces deux seules ressources. Sur la figure 2 considérons un point $a = (c, \ell) \in I_\sigma$, $\mu_2 < \sigma < \eta$. La partie de la consommation c qui provient de l'exploitation de la ressource 2 s'élève à $c - c'$ et celle qui provient de la ressource 1 à c' , les quantités de travail nécessaires s'élevant respectivement à $\ell' - \ell$ et $1 - \ell'$. Au cours de la phase étudiée, I_σ est parcourue dans le sens $A_{1\sigma} \rightarrow A_{2\sigma}$. On voit donc que l'exploitation de la ressource 1 doit décroître et l'exploitation de la ressource 2 se développer. Pour tout couple $(c, \ell) \in I_\sigma$, on a :

$$(45) \quad y_1 + y_2 = Nc, \text{ et } \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 = N[1 - \ell]$$

et donc, le long de I_σ :

$$(46a) \quad y_1(t; \lambda) = \frac{N[-1 + \ell(t; \lambda) + \mu_2 c(t; \lambda)]}{\mu_2 - \mu_1}$$

$$(46b) \quad y_2(t; \lambda) = \frac{N[1 - \ell(t; \lambda) - \mu_1 c(t; \lambda)]}{\mu_2 - \mu_1}$$

d'où, en tenant compte de (36) :

$$(47a) \quad \frac{\partial y_1(t; \lambda)}{\partial t} = \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \left[\frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial t} + \mu_2 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial t} \right] < 0$$

$$(47b) \quad \frac{\partial y_2(t; \lambda)}{\partial t} = -\frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \left[\frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial t} + \mu_1 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial t} \right] > 0.$$

5.2. Valeurs des rentes ou valeurs intrinsèques des ressources non-renouvelables soutenant les sentiers du premier type

Soit $a_0 = (c_0, \ell_0) \in I_\sigma$. Un sentier qui démarre à l'instant 0 de a_0 doit vérifier (cf. (34) pour $t = 0$) :

$$v'(\ell_0) = (\lambda_1 - \lambda_2)/(\mu_2 - \mu_1)$$

et puisque $\lambda_2 = \frac{\sigma - \mu_2}{\sigma - \mu_1} \lambda_1$, on doit avoir :

$$(48a) \quad \lambda_1 = (\sigma - \mu_1)v'(\ell_0).$$

Notons $\lambda_1(a_0)$ la fonction ainsi définie et soit $\lambda_2(a_0)$ la valeur correspondante de λ_2 :

$$(48b) \quad \lambda_2(a_0) = \frac{\sigma - \mu_2}{\sigma - \mu_1} \lambda_1(a_0) = (\sigma - \mu_2)v'(\ell_0).$$

Lorsque a_0 parcourt I_σ dans le sens $A_{1\sigma} \rightarrow A_{2\sigma}$, ℓ_0 décroît (cf. figure 2) de sorte que $v'(\ell_0)$ croît. On peut donc définir un segment $[\lambda^-(\sigma), \lambda^+(\sigma)]$ de la droite D_σ , $\lambda^-(\sigma) < \lambda^+(\sigma)$, où :

$$(49) \quad \lambda^-(\sigma) = (\lambda_1(A_{1\sigma}), \lambda_2(A_{1\sigma})), \quad \text{et}, \quad \lambda^+(\sigma) = (\lambda_1(A_{2\sigma}), \lambda_2(A_{2\sigma}))$$

Assez évidemment lorsque a_0 balaye I_σ dans le sens $A_{1\sigma} \rightarrow A_{2\sigma}$, $\lambda(a_0)$ balaye $[\lambda^-(\sigma), \lambda^+(\sigma)]$ dans le sens $\lambda^-(\sigma) \rightarrow \lambda^+(\sigma)$.

Notons Λ^- et Λ^+ les lieux des extrémités des segments $[\lambda^-(\sigma), \lambda^+(\sigma)]$:

$$(50) \quad \Lambda^- = \{ \lambda^-(\sigma) \mid \mu_2 < \sigma < \eta \}, \quad \text{et}, \quad \Lambda^+ = \{ \lambda^+(\sigma) \mid \mu_2 < \sigma < \eta \}.$$

Ces lieux définissent des courbes continuellement différentiables dans le plan (λ_1, λ_2) (se reporter à la figure 3) ²¹.

Pour tout couple de rentes $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ tel que $\lambda \in D_\sigma$, $\lambda \in (0, \lambda_\sigma^-)$, le sentier démarre sur la droite de transformation de la ressource 1. Le point de départ est défini par le niveau d'extraction $y_1(0; \lambda)$ solution de (cf. (24) pour $i = 1$ et $t = 0$) :

$$(51) \quad y_1(0; \lambda) = NU_1'^{-1}(\lambda_1).$$

Considérons la partie de l'espace des rentes située sous la droite D_η et à droite de la courbe Λ^+ . Soit $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2)$ un couple de valeurs intrinsèques des ressources situé dans cette zone, et notons $H_{\lambda'_2}$ l'horizontale d'ordonnée λ'_2 . L'intersection de $H_{\lambda'_2}$ avec Λ^+ définit une valeur σ' du taux marginal de substitution du loisir à la consommation (se reporter à la figure 3). Pour $\lambda = (\lambda_1^+(\sigma'), \lambda'_2)$ (NB : par construction $\lambda_2^+(\sigma') = \lambda'_2$) le sentier démarre sur la droite de transformation de la ressource 2 en $A_{2\sigma'}$. λ'_2 est la valeur de la ressource 2 pour laquelle, lorsque la société ne dispose que de cette seule ressource non renouvelable, le sentier démarre sur la droite de transformation de la ressource 2 en $A_{2\sigma'}$. Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \lambda'_2)$, $\lambda_1 > \lambda_1^+(\sigma')$, il n'existe

21. Considérons un point $a_0 = (c_0, \ell_0)$, $\ell_0 = 1 - \mu_i c_0$ situé à l'extrémité $A_{i\sigma}$, $i = 1, 2$ de I_σ : $\ell_0 = 1 - \mu_i c_0$. Si ce point a_0 est le point de départ d'un sentier, on a d'après (33) pour $t = 0$:

$$u'(c_0) - \mu_1 v'(\ell_0) = \lambda_1, \quad \text{et}, \quad u'(c_0) - \mu_2 v'(\ell_0) = \lambda_2.$$

Soit $da_0 = (dc_0, d\ell_0)$ une petite variation du point de départ du sentier telle que $a_0 + da_0$ reste sur la droite de transformation de la ressource i : $d\ell_0 = -\mu_i dc_0$. On a donc :

$$\frac{d\lambda_1}{dc_0} = \begin{cases} u'' + \mu_1^2 v'' & \text{si } i = 1 \\ u'' + \mu_1 \mu_2 v'' & \text{si } i = 2 \end{cases}, \quad \text{et}, \quad \frac{d\lambda_2}{dc_0} = \begin{cases} u'' + \mu_1 \mu_2 v'' & \text{si } i = 1 \\ u'' + \mu_2^2 v'' & \text{si } i = 2 \end{cases}$$

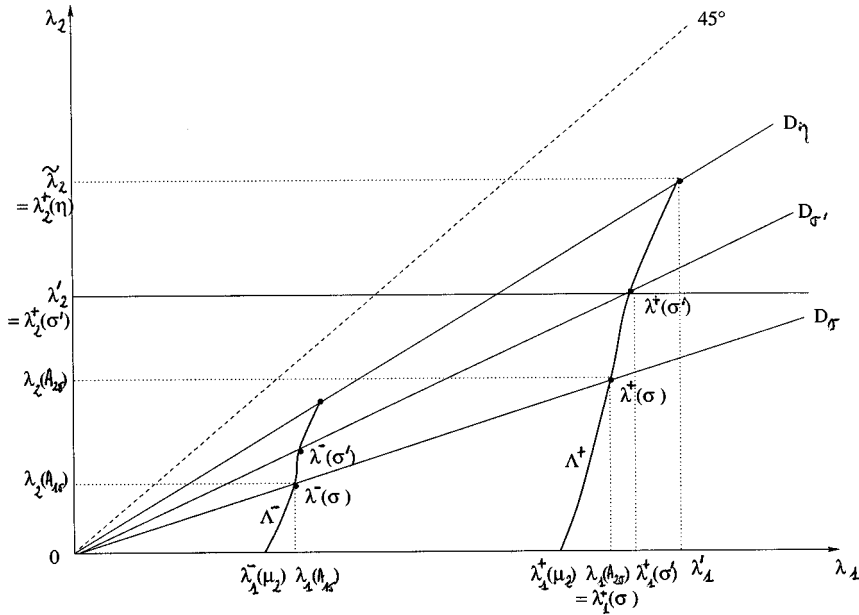
d'où on conclut puisque $\mu_2 > \mu_1 > 0$, $u'' < 0$ et $v'' < 0$:

$$\frac{d\lambda_2^+}{d\lambda_1^+} = \frac{u'' + \mu_1 \mu_2 v''}{u'' + \mu_1^2 v''} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{d\lambda_2^-}{d\lambda_1^-} = \frac{u'' + \mu_2^2 v''}{u'' + \mu_1 \mu_2 v''} > 1.$$

les courbes Λ^- et Λ^+ coupent donc la droite D_η de pente inférieure à 1.

FIGURE 3

Domaine de variation des rentes.



aucune valeur de σ pour laquelle le sentier pourrait démarrer sur la partie $[A_{1\sigma}, A_{2\sigma})$ de l'isocline σ . Lorsqu'on parcourt la courbe Λ^+ dans le sens $(\lambda_1^+(\mu_2), 0) \rightarrow (\lambda_1^+(\eta), \lambda_2^+(\eta))$, en direction de la droite D_η , le point de départ des sentiers décrit le segment $[A_2, \tilde{A}_2]$ de la droite de transformation de la ressource 2 dans le sens $A_2 \rightarrow \tilde{A}_2$. On devrait donc avoir $\lambda_2^+(\eta) = \tilde{\lambda}_2$, valeur critique de λ_2 en deçà de laquelle, lorsque la société ne dispose que de la ressource non renouvelable 2, le sentier démarre sur la droite de transformation de cette ressource.

5.3. Niveaux des stocks initiaux soutenant les sentiers du premier type

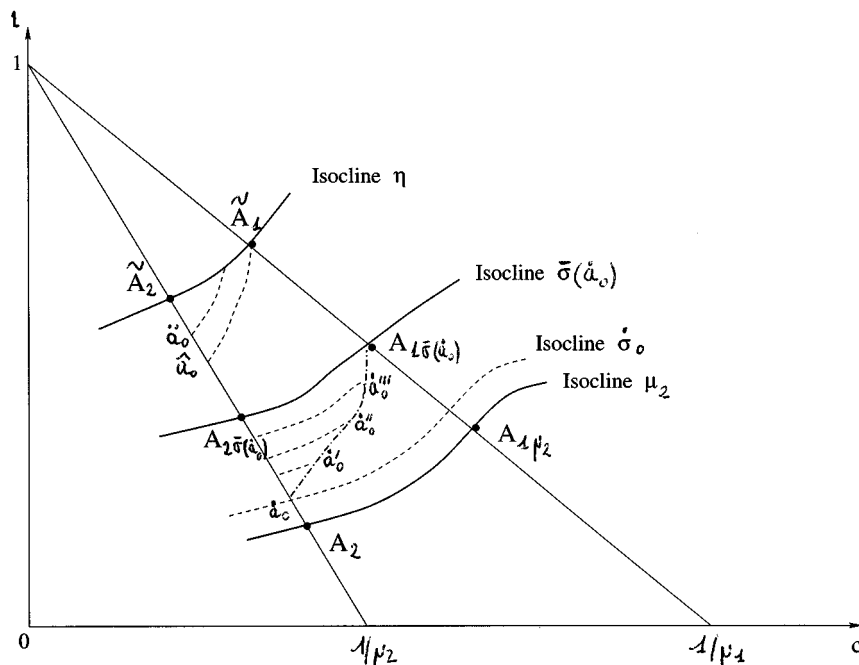
Déterminons les valeurs des stocks initiaux justifiant les valeurs des rentes ou des valeurs intrinsèques des ressources et les sentiers qui leur sont associés.

5.3.1. Considérons d'abord un niveau $\dot{Y}_2^0 > \tilde{Y}_2^0$ du stock initial de la ressource 2 suffisamment grand pour que, si la société ne dispose que de ce stock, le point de départ du sentier \dot{a}_0 soit proche de A_2 sur la droite de transformation de la ressource 2. Notons $\dot{\sigma}_0$ la valeur absolue de la pente de la courbe d'indifférence passant par \dot{a}_0 (se reporter à la Figure 4). Supposons maintenant que la société dispose en sus de \dot{Y}_2^0 , d'une petite quantité \dot{Y}_1^0 de ressource 1. Le sentier optimal doit alors

comporter une phase de consommation simultanée et partir d'un point \hat{a}'_0 situé sur $I_{\sigma'} \setminus \{A_{1\sigma'}, A_{2\sigma'}\}$, $\dot{\sigma}_0 < \sigma'$. Puisque Y_1° est petit, \hat{a}'_0 est proche de \hat{a}_0 . Augmentons progressivement les stocks initiaux de la ressource 1, $Y_1^{\circ}, Y_1^{\circ}, \dots$ le stock de ressource 2 étant maintenu constant à \dot{Y}_2° . Les points de départ des sentiers $\hat{a}''_0, \hat{a}'''_0, \dots$ sont situés sur des isoclines $I_{\sigma''}, I_{\sigma''}, \dots$ de plus en plus éloignées de $I_{\dot{\sigma}_0}$ et sont de plus en plus proches des extrémités $A_{1\sigma''}, A_{1\sigma''}, \dots$ situées sur la droite de transformation de la ressource 1. Sur la figure 4 la courbe en pointillé $(\hat{a}_0, A_{1\bar{\sigma}}(\hat{a}_0))$ représente le lieu des points de départ sur les différentes isoclines. On montre à l'appendice A.2 que la fonction $\ell_0(c_0; \dot{Y}_2^{\circ})$ dont cette courbe est l'image est croissante en c_0 . Puisque \dot{Y}_2° est suffisamment grand, il existe une valeur limite du stock de ressource 1 que l'on notera $\bar{Y}_1^{\circ}(\dot{Y}_2^{\circ})$, telle que le point de départ du sentier est exactement à l'extrémité $A_{1\bar{\sigma}}(\hat{a}_0)$ d'un certain segment d'isocline $I_{\bar{\sigma}(\hat{a}_0)}$ de pente $-\bar{\sigma}(\hat{a}_0)$ telle que $\eta > \bar{\sigma}(\hat{a}_0) > \dot{\sigma}_0$. Pour $Y_1^{\circ} > \bar{Y}_1^{\circ}(\dot{Y}_2^{\circ})$ et $Y_2^{\circ} = \dot{Y}_2^{\circ}$ le point de départ du sentier se situe sur la droite de transformation de la ressource 1 entre $A_{1\bar{\sigma}}(\hat{a}_0)$ et A_1 . Le sentier remonte alors la droite de transformation de la ressource 1 jusqu'en $A_{1\bar{\sigma}}(\hat{a}_0)$, emprunte $I_{\bar{\sigma}(\hat{a}_0)}$ jusqu'en $A_{2\bar{\sigma}}(\hat{a}_0)$, remonte ensuite la droite de transformation de la ressource 2 jusqu'en A_2 et décrit enfin I_{η}^2 .

FIGURE 4

Lieu des points de départ des sentiers à ressource 2 constante.



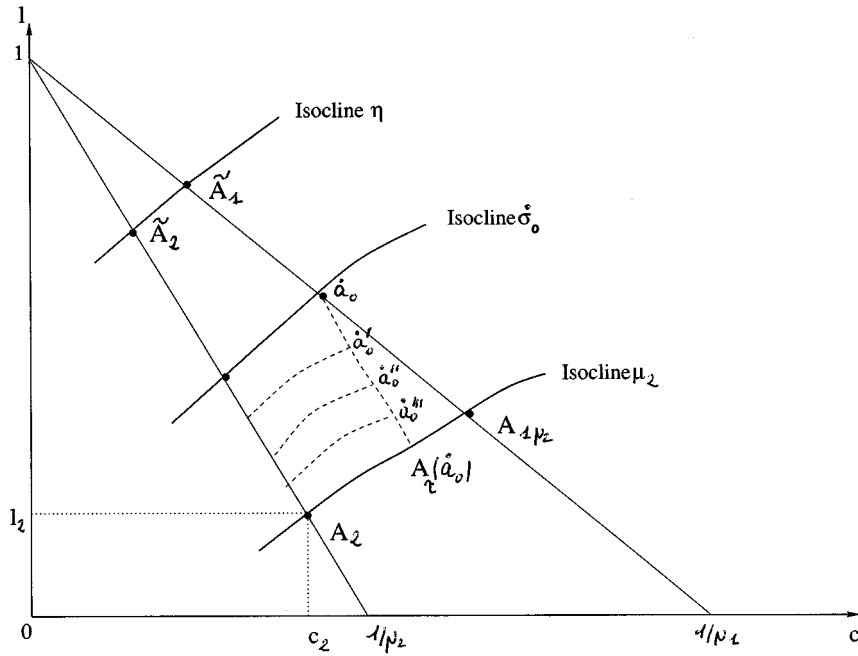
Considérons maintenant un stock initial de la ressource 2, \ddot{Y}_2° , impliquant un point de départ du sentier optimal \ddot{a}_0 proche de \tilde{A}_2 sur la droite de transformation de la ressource 2 ($\ddot{Y}_2^\circ > \dot{Y}_2^\circ$) lorsque la société ne dispose que de la ressource 2. Introduisons alors des quantités croissantes de ressource 1. Pour \ddot{a}_0 suffisamment proche de \tilde{A}_2 , la courbe pointillée lieu des points de départ des sentiers va rencontrer l'isocline I_η entre \tilde{A}_2 et \tilde{A}_1 . Notons $\bar{Y}_1^\circ(\ddot{Y}_2^\circ)$ le stock de ressource 1 correspondant à ce point de rencontre. Alors, si $Y_1^\circ \geq \bar{Y}_1^\circ(\ddot{Y}_2^\circ)$, le sentier optimal est un sentier du second type, comme on le verra à la section suivante.

Il est clair qu'il existe un stock critique de la ressource 2, \hat{Y}_2° (correspondant au point de départ \hat{a}_0 si $Y_1^\circ = 0$, sur la Figure 4) tel que, lorsqu'on augmente progressivement le stock de la ressource 1 partant de 0, le lieu des points de départ des sentiers optimaux rencontre la droite de transformation de la ressource 1 en \hat{A}_1 . Pour $Y_2^\circ > \hat{Y}_2^\circ$, les sentiers sont du premier type, démarrant sur la droite de transformation de la ressource 1 si $Y_1^\circ \geq \bar{Y}_1^\circ(Y_2^\circ)$, soit sur une partie d'isocline $I_\sigma, \mu_2 < \sigma < \eta$, dans le cas contraire. Pour $Y_2^\circ \in (\tilde{Y}_2^\circ, \hat{Y}_2^\circ]$ les sentiers sont du premier type avec un point de départ sur I_σ si $Y_1^\circ \leq \bar{Y}_1^\circ(Y_2^\circ)$, et du second type dans le cas contraire avec un point de départ soit sur I_η pour les valeurs les plus faibles de Y_1° soit sur la droite de transformation de la ressource 1 pour les valeurs les plus élevées de Y_1° .

5.3.2. Considérons maintenant le cas où la société dispose de stocks initiaux $(\dot{Y}_1^\circ, \dot{Y}_2^\circ) > (0, 0)$ tels que le point de départ du sentier optimal que l'on notera \dot{a}_0 comme aux alinéas précédents, soit situé sur la droite de transformation de la ressource 1 entre \tilde{A}_1 et $A_{1\mu_2}$ (se reporter à la Figure 5), le sentier suivant dans sa portion initiale l'isocline $\dot{\sigma}_0$ passant par \dot{a}_0 avant de remonter la droite de transformation de la ressource 2 jusqu'en \tilde{A}_2 pour parcourir enfin (\tilde{A}_2, A_r) . Augmentons progressivement le stock de ressource 2, $\dot{Y}_2^{\circ'}$, $\dot{Y}_2^{\circ''}$, $\dot{Y}_2^{\circ'''}$, ... tout en maintenant constant le niveau \dot{Y}_1° de la ressource 1. On montre à l'appendice 2 que les points de départ $\dot{a}'_0, \dot{a}''_0, \dot{a}'''_0, \dots$ des sentiers correspondants décrivent une courbe $\ell_0(c_0; \dot{Y}_1^\circ)$ qui est décroissante. Sur la Figure 5 cette courbe est la courbe pointillée $(\dot{a}_0, A_\tau(\dot{a}_0))$. Lorsque \dot{Y}_2° tend vers l'infini, toujours pour \dot{Y}_1° fixé, $\ell_0(c_0; \dot{Y}_1^\circ)$ tend vers un point de $I_{\mu_2} \setminus \{A_2, A_{1\mu_2}\}$ défini comme suit. Plaçons-nous à la limite, i.e. supposons que $\dot{Y}_2^\circ = +\infty$. La ressource 2 peut alors être considérée comme une ressource renouvelable et comme elle est moins coûteuse à exploiter que la ressource renouvelable initialement considérée, $\mu_2 < \eta$, le régime stationnaire qui s'instaure lorsque la ressource 1 est épuisée, est figuré par le point $A_2 = (c_2, \ell_2)$. D'une analyse semblable à celle menée à la section 3 on déduit que pour des niveaux de stocks initiaux de ressource 1 suffisamment faibles, le sentier optimal démarre sur I_{μ_2} et parcourt d'abord l'isocline μ_2 en direction de A_2 , l'exploitation de la ressource 1 décroissant jusqu'à s'annuler lorsque A_2 est atteint, l'exploitation de la ressource 2 montant progressivement en puissance jusqu'au niveau c_2 . En particulier il existe un point de départ sur I_{μ_2} correspondant au stock initial \dot{Y}_1° . Ce point est le point $A_\tau(\dot{a}_0)$ vers lequel convergent les points de départ des sentiers optimaux lorsque \dot{Y}_2° tend vers $+\infty$.

FIGURE 5

Lieu des points de départ des sentiers à ressource 1 constante.



5.4. Remarques sur le cas limite $\sigma = \eta$

On a pris soin jusqu'ici de restreindre l'analyse aux cas $\sigma < \eta$. On montrera à la section suivante que le cas $\sigma = \eta$ pose des problèmes spécifiques qui tiennent à la multiplicité des stocks initiaux susceptibles de soutenir ces sentiers. Une première approche de cette situation est de la considérer comme la limite, lorsque $\sigma \uparrow \eta$, des situations qu'on vient d'analyser, c'est-à-dire comme un sentier du premier type pour lequel $\sigma = \eta$. La situation peut être envisagée soit dans l'espace des multiplicateurs, soit dans l'espace des stocks.

5.4.1. Définissons $\lambda^-(\eta)$ et $\lambda^+(\eta)$ comme les limites suivantes :

$$(52) \quad \lambda^-(\eta) = \lim_{\sigma \uparrow \eta} \lambda^-(\sigma) \quad \text{et} \quad \lambda^+(\eta) = \lim_{\sigma \uparrow \eta} \lambda^+(\sigma)$$

Pour tout $\lambda, \lambda \in D_\eta, \lambda^-(\eta) < \lambda < \lambda^+(\eta)$, le sentier démarre sur I_η entre \tilde{A}_2 et \tilde{A}_1 . Tant qu'un tel sentier n'a pas atteint \tilde{A}_2 , seules les ressources 1 et 2 sont exploitées, les quantités extraites de chacune d'elles étant définies, à chaque instant t , par (46a) et (46b). Pendant la phase comprise entre l'instant initial et celui auquel le sentier atteint \tilde{A}_2 , la quantité exploitée de la ressource 1 décroît régulièrement jusqu'à s'annuler tandis que la quantité exploitée de la ressource 2 augmente. La fin du parcours, entre l'instant auquel \tilde{A}_2 est atteint et celui auquel s'instaure le régime stationnaire A_r voit,

aux termes des conditions établies au paragraphe 3.1 ci-dessus, décroître l'extraction de la ressource 2 qui s'éteint finalement et monter en puissance l'exploitation de la ressource renouvelable jusqu'à son niveau d'exploitation stationnaire c_r^* .

Pour tout $\lambda \in D_\eta, 0 < \lambda < \lambda^-(\eta)$, le sentier démarre sur la droite de transformation de la ressource 1 et remonte cette droite jusqu'en \tilde{A}_1 ; il parcourt ensuite I_η^1 en suivant un schéma d'exploitation des deux ressources 1 et 2 similaire à celui que l'on vient de décrire à l'alinéa précédent. Il diffère donc du scénario d'exploitation suivi lors du parcours $\tilde{A}_1 \rightarrow A_r$ de I_η^1 décrit au paragraphe 3.1 supra pour $i = 1$, scénario aux termes duquel seules la ressource 1 et la ressource renouvelable étaient exploitées. On verra à la section suivante que ce dernier scénario est l'autre scénario extrême parmi l'ensemble de ceux qui sont susceptibles de fournir les canevas d'évolution correspondant aux parcours $\tilde{A}_1 \rightarrow A_r$.

Pour tout $\lambda \in D_\eta, \lambda^+(\eta) < \lambda < \lambda^r = (\lambda_1^r, \lambda_2^r)$ ²², le sentier démarre sur I_η^2 entre \tilde{A}_2 et A_r et ne sont exploitées que la ressource 2 et la ressource renouvelable.

Enfin si $\lambda \in D_\eta, \lambda^r \leq \lambda$, le sentier est le sentier stationnaire d'exploitation de la seule ressource renouvelable.

5.4.2. Examinons maintenant les niveaux de stocks qui soutiennent ces sentiers. Pour ce il est utile de se reporter à la Figure 6.

Si $\lambda \in D_\eta, \lambda \in (\lambda^+(\eta), \lambda^r)$, seule la ressource 2 est exploitée, et la quantité qui en est nécessaire est par définition égale à $Y_{20}(\lambda_2) < \hat{Y}_2^\circ$. Si donc λ parcourt le segment $[\lambda^r, \lambda^+(\eta)]$ de la droite D_η dans le sens $\lambda^r \rightarrow \lambda^+(\eta)$, les stocks $Y^\circ = (Y_1^\circ, Y_2^\circ)$ soutenant les sentiers correspondants parcourent l'axe des ordonnées dans le sens $0 \rightarrow (0, \hat{Y}_2^\circ)$.

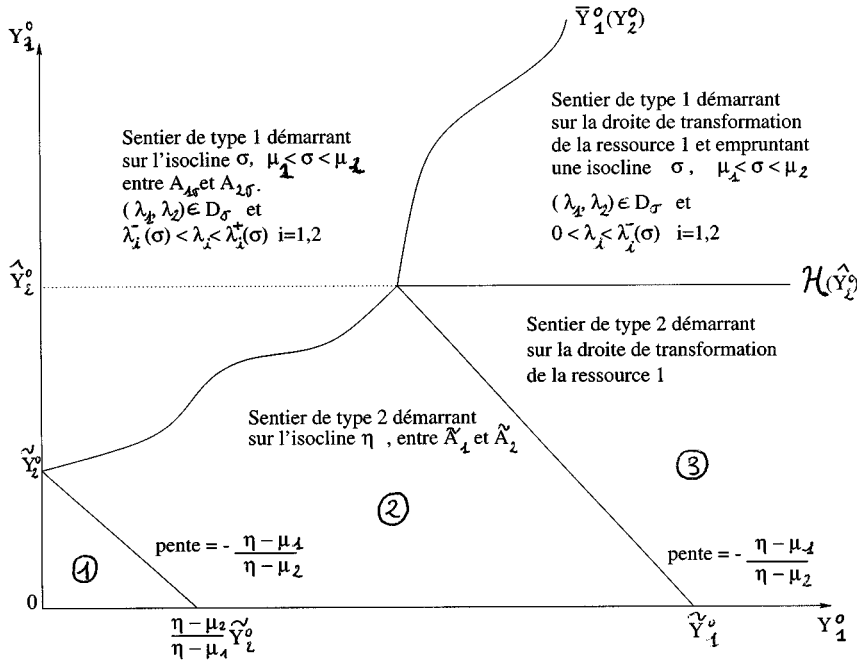
Si $\lambda \in D_\eta, \lambda \in (\lambda^-(\eta), \lambda^+(\eta))$, les deux ressources sont exploitées, la quantité de ressource 2 finalement extraite s'élève à $Y_2^\circ \in (\hat{Y}_2^\circ, \hat{Y}_2^\circ)$ et la quantité de ressource 1 à $\bar{Y}_1^\circ(Y_2^\circ)$. Si λ parcourt $(\lambda^-(\eta), \lambda^+(\eta))$ dans le sens $\lambda^+(\eta) \rightarrow \lambda^-(\eta)$, Y° parcourt le segment de courbe $\{\bar{Y}_1^\circ(Y_2^\circ) | Y_2^\circ \in (\hat{Y}_2^\circ, \hat{Y}_2^\circ)\}$ dans le sens $(0, \hat{Y}_2^\circ) \rightarrow (\bar{Y}_1^\circ(\hat{Y}_2^\circ), \hat{Y}_2^\circ)$.

Si enfin $\lambda \in D_\eta, \lambda \in (0, \lambda^-(\eta))$, alors le niveau de réserve en ressource 2 nécessaire pour soutenir le sentier s'établit à \hat{Y}_2° et la quantité de ressource 1 dont il faut disposer est supérieure à $\bar{Y}_1^\circ(\hat{Y}_2^\circ)$. Dans le plan (Y_1°, Y_2°) soit $\mathcal{H}(Y_2^\circ)$ l'horizontale d'abscisse Y_2° . Lorsque λ décrit le segment $(\lambda^-(\eta), 0)$ de la droite D_η dans le sens $\lambda^-(\eta) \rightarrow 0$, le couple de stocks initiaux qui soutient les sentiers correspondants décrit la partie $\left((\bar{Y}_1^\circ(\hat{Y}_2^\circ), \hat{Y}_2^\circ), (+\infty, \hat{Y}_2^\circ) \right)$ de l'horizontale $\mathcal{H}(\hat{Y}_2^\circ)$ dans le sens $(\bar{Y}_1^\circ(\hat{Y}_2^\circ), \hat{Y}_2^\circ) \rightarrow (+\infty, \hat{Y}_2^\circ)$.

22. Remarquer qu'une conséquence immédiate de (22) est que $\lambda^r = (\lambda_1^r, \lambda_2^r) \in D_\eta$.

FIGURE 6

Types de sentiers et stocks initiaux. (N.B. : Dans la zone ① le sentier du type 1 démarré sur l'isocline η entre \tilde{A} et A_r).



6 Les sentiers du second type

Les sentiers du second type peuvent comprendre, c'est leur particularité, des phases d'exploitation simultanée des trois ressources. Il convient donc d'abord de caractériser de telles phases. L'aspect le plus important de ce genre de phase est l'indétermination relative des niveaux d'exploitation des différentes ressources contrairement aux phases d'exploitation commune des seules ressources non renouvelables caractérisées à la section précédente ou des phases d'exploitation d'une ressource non renouvelable et de la ressource renouvelable caractérisées à la section 3, phases au cours desquelles les niveaux d'exploitation des ressources concernées sont parfaitement définis. Un sentier du second type est donc génériquement soutenable par une infinité de stock initiaux différents.

6.1. Caractérisation d'une phase d'exploitation simultanée des trois ressources

Au cours d'une phase de ce genre on a $y_i(t) > 0, i = 1, 2$, de sorte que $v_i(t) = 0$, et $x(t) > 0$, d'où $\underline{a}(t) = 0$. Supposons que la contrainte

$\bar{x} - x(t) \geq 0$ ne soit pas effective de sorte que $\bar{\alpha}(t) = 0$. Les conditions de premier ordre (6)-(7) prennent la forme :

$$(53) \quad u' - \eta v' = 0, \text{ et, } u' - \mu_i v' = \lambda_i e^{\rho t} \quad i = 1, 2$$

Ce système est un système de trois équations à deux inconnues $(c(t), \ell(t))$. Une équation est donc redondante.

Partons du système défini par l'une des équations (53). Sa solution en (u', v') est :

$$(54) \quad u' = (\eta/(\eta - \mu_i))\lambda_i e^{\rho t}, \text{ et, } v' = (1/(\eta - \mu_i))\lambda_i e^{\rho t} \quad i = 1, 2$$

et, après inversion :

$$(55) \quad c(t) = u'^{-1}(\eta\lambda_i e^{\rho t}/(\eta - \mu_i)), \text{ et, } \ell(t) = v'^{-1}(\lambda_i e^{\rho t}/(\eta - \mu_i)) \quad i = 1, 2$$

Ces conditions sont les mêmes que les conditions (11) et les fonctions $c(t)$ et $\ell(t)$ ont les mêmes propriétés. De plus on a :

$$(56) \quad \frac{u'}{v'} = \eta$$

et donc le sentier parcourt l'isocline η .

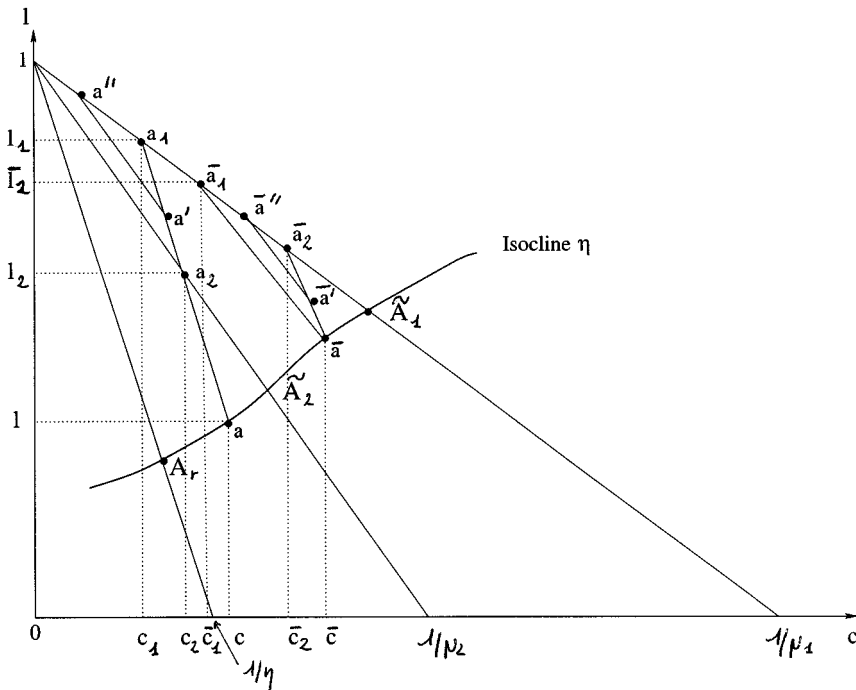
6.2. Causes de l'indétermination fondamentale de la structure d'exploitation des ressources le long de l'isocline η

Au cours d'une phase d'exploitation des trois ressources les quantités exploitées de chacune d'elles sont largement indéterminées. On a déjà constaté la diversité des stocks susceptibles de soutenir les sentiers qui parcourent cette isocline. On a vu à la section 3 qu'il pouvait être optimal de n'utiliser que la ressource 2 le long de I_η^2 et de n'utiliser que la ressource 1 le long de I_η^1 , de sorte que le long de $I_\eta^2 \subset I_\eta^1$ il devrait être possible de n'utiliser que l'une ou l'autre ressource non renouvelable en sus de la ressource renouvelable. On va voir que c'est également vrai sur la partie $I_\eta = I_\eta^1 \setminus \{I_\eta^2 \setminus \tilde{A}_2\}$ de l'isocline.

Reportons-nous à la figure 7 et considérons un point $a = (c, \ell) \in I_\eta^2$. Le segment de droite $[a, a_1]$, $a_1 = (c_1, \ell_1)$, est de pente $-\eta$, et a_2 est le point d'intersection de ce segment avec la droite de transformation de la ressource 2. Supposons que la société puisse exploiter chacune des trois ressources dans les proportions qu'elle préfère pour obtenir $a = (c, \ell)$. Il existe une infinité de façons d'obtenir ce point et c'est la cause fondamentale de l'indétermination. Une première combinaison extrême consiste à exploiter la ressource renouvelable au niveau $x = N[c - c_2]$ et la seule ressource 2 au niveau $y_2 = Nc_2$, la ressource 1 restant inexploitée. L'autre solution extrême est d'exploiter la ressource renouvelable au niveau $x = N[c - c_1]$ et la seule ressource 1 au niveau $y_1 = Nc_1$. Entre ces deux extrêmes toutes les solutions intermédiaires sont possibles. Par exemple on peut décomposer

FIGURE 7

Décomposition possible des couples loisir-consommation de l'isocline η .



l'obtention de a comme suit : passer de $(c = 0, \ell = 1)$ à a'' en exploitant la ressource 1, passer de a'' à a' (le segment $[a'', a']$ est de pente $-\mu_2$) en exploitant la ressource 2 et enfin passer de a' à a en exploitant la ressource renouvelable. Au fur et à mesure que a' parcourt la partie $[a_2, a_1]$ du segment $[a, a_1]$, le point a'' parcourt la partie $[(0, 1), a_1]$ de la droite de transformation de la ressource 1. On conclut qu'à tout point $a = (c, \ell)$ de I_η^2 correspond :

- α) une exploitation minimale de la ressource renouvelable $x = \frac{N[1 - \ell - \mu_2 c]}{\eta - \mu_2}$, une exploitation maximale de la ressource 2 la plus coûteuse en travail, $y_2 = \frac{N[-1 + \ell - \eta c]}{\eta - \mu_2}$ (cf. (16) pour $i = 2$) et une exploitation nulle de la ressource 1 la moins coûteuse en travail;

- β) une exploitation maximale de la ressource renouvelable $x = \frac{N[1 - \ell - \mu_1 c]}{\eta - \mu_1}$, une exploitation maximale de la ressource 1, $y_1 = \frac{N[1 - \ell - \eta c]}{\eta - \mu_1}$ (cf. (16) pour $i = 1$) et une exploitation nulle de la ressource 2;

– γ) une infinité de situations intermédiaires d'exploitation de la ressource renouvelable $x \in \left(\frac{N[1 - \ell - \mu_2 c]}{\eta - \mu_2}, \frac{N[1 - \ell - \mu_1 c]}{\eta - \mu_1} \right)$, le complément étant fourni par l'exploitation des deux ressources non renouvelables et déterminé comme solution du système :

$$y_1 + y_2 = N[c - (x/N)], \quad \text{et,} \quad \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 = N[1 - \ell - \eta(x/N)],$$

d'où :

$$(57) \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{N[-1 + \ell + (\eta - \mu_2)(x/N) + \mu_2 c]}{\mu_2 - \mu_1}, \\ y_2 &= \frac{N[1 - \ell - (\eta - \mu_1)(x/N) - \mu_1 c]}{\mu_2 - \mu_1}. \end{aligned}$$

Le taux auquel on peut substituer la ressource 2 à la ressource 1 en faisant varier x est donc égal à :

$$(58) \quad \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{dy_2/dx}{dy_1/dx} = -\frac{\eta - \mu_1}{\eta - \mu_2}$$

On peut décomposer le point $\bar{a} \in I_\eta$ de façon analogue (cf. figure 7). Il existe cependant une différence importante entre les couples consommation-loisir situés sur I_η^2 et ceux situés sur I_η , différence qui tient à la productivité moyenne implicitement définie par de tels couples. Lorsqu'un point $a = (c, \ell)$ parcourt I_η^1 dans le sens $\tilde{A}_1 \rightarrow A_r$, la productivité moyenne (l'inverse de la valeur absolue de la pente joignant $(1, 0)$ à a) diminue. Lorsque a est sur I_η cette productivité moyenne est suffisamment forte pour qu'il soit nécessaire d'exploiter la ressource 1 et/ou pour que l'exploitation de la ressource 2 soit limitée. La quantité maximale de la ressource 2 qu'il est possible d'exploiter ($[\bar{c} - \bar{c}_1]$ dans le cas du point $\bar{a} = (\bar{c}, \bar{\ell})$ représenté à la figure 7) définit implicitement la quantité minimale de ressource 1 qu'il faut utiliser ($N\bar{c}_1$). Dans cette situation limite on doit négliger d'exploiter la ressource renouvelable, c'est-à-dire la ressource dont le coût d'exploitation est le plus élevé. Si au contraire le couple consommation-loisir est sur I_η^2 , la productivité moyenne est faible et il existe un niveau minimal d'exploitation de la ressource renouvelable. Ce niveau faible de productivité moyenne permet de substituer complètement l'exploitation des deux ressources non renouvelables en réglant en conséquence l'exploitation de la ressource renouvelable.

6.3. Stocks soutenant les sentiers du second type

Examinons d'abord les sentiers du second type démarrant sur I_η^2 . On sait que ces sentiers sont générés par des valeurs des rentes $\lambda \in (\lambda^+(\eta), \lambda^r)$. A chaque instant la consommation par tête $c(t)$ est donnée indifféremment comme solution de :

$$u'(c(t)) = \eta \lambda_2 e^{\rho t} / (\eta - \mu_2) \quad \text{ou} \quad u'(c(t)) = \eta \lambda_1 e^{\rho t} / (\eta - \mu_1)$$

car $\lambda \in D_\eta$ implique que (10) définit implicitement le même niveau de consommation par tête quel que soit $i = 1, 2$. La durée d'une telle phase est définie par (18), indifféremment pour $i = 1$ ou $i = 2$: $t_1^s(\lambda_1) = t_2^s(\lambda_2)$. Un tel sentier peut être soutenu par n'importe quel couple de stocks initiaux $Y^\circ = (Y_1^\circ, Y_2^\circ)$ tel que :

$$Y_2^\circ = Y_{20}(\lambda_2) - \frac{\eta - \mu_1}{\eta - \mu_2} Y_1^\circ, \quad Y_1^\circ \in [0, Y_{10}(\lambda_1)]$$

où $Y_{20}(\lambda_2) < \tilde{Y}_2^\circ$. Sur la figure 6 ces sentiers correspondent à des stocks initiaux situés dans la zone 1, tous les stocks d'une même droite de pente $-(\eta - \mu_1)/(\eta - \mu_2)$ générant le même sentier de consommation et de loisir par tête.

Les sentiers démarrant sur I_η correspondent à des valeurs des rentes $\lambda \in (\lambda^-(\eta), \lambda^+(\eta))$. La consommation et le loisir par tête sont déterminés comme dans le cas précédent par (10) pour $i = 1$ ou $i = 2$, indifféremment. Mais maintenant la substitution entre les deux ressources non renouvelables ne peut pas être complète. Il est possible de ne disposer que de ressource 1, en quantité $Y_{10}(\lambda_1)$. Mais on ne peut pas suivre un tel sentier si on ne dispose que de la seule ressource 2. C'est dû au fait qu'en chaque point du sentier situé entre son point de départ et \tilde{A}_2 le niveau d'exploitation de la ressource 2 ne peut pas descendre au-dessous d'un certain minimum comme on l'a mis en évidence à la sous-section 6.2. Partant d'un stock en seule ressource 1, $Y_1^\circ \in \left(\frac{\eta - \mu_2}{\eta - \mu_1} \tilde{Y}_2^\circ, \tilde{Y}_1^\circ \right)$ pouvant soutenir un sentier de ce genre, le stock 2 peut se substituer au stock 1 au taux $dY_2^\circ/dY_1^\circ = -(\eta - \mu_1)/(\eta - \mu_2)$ jusqu'à ce que la droite qu'on vient de définir rencontre la courbe $\tilde{Y}_1^\circ(Y_2^\circ)$ qui marque la limite de ces substitutions. Ces stocks correspondent à la zone 2 de la figure 6.

Les sentiers qui démarrent sur la droite de transformation de la ressource 1 correspondent à des valeurs des rentes $\lambda \in (0, \lambda^-(\eta))$. Comme les sentiers précédents, ce genre de sentier peut être soutenu par différentes valeurs des stocks. Partant d'un stock initial en seule ressource 1, $Y_1^\circ > \tilde{Y}_1^\circ$, on peut lui substituer de la ressource 2 au même taux dY_2°/dY_1° que ci-dessus. Mais le stock de ressource 2 ne peut pas excéder \tilde{Y}_2° , le stock de ressource 2 minimal pour parcourir la partie I_η du sentier.

6.4. Indétermination des sentiers d'exploitation optimaux à stocks donnés

On vient de voir qu'un même sentier optimal du second type peut généralement être soutenu par différents stocks initiaux. On peut examiner les conséquences de l'indétermination d'un autre point de vue. Considérons un couple de stocks qui permettrait de soutenir un sentier partant de $a_0 \in I_\eta$ en exploitant pendant un certain intervalle de temps $(t, t + \Delta t)$ les deux ressources non renouvelables à un niveau au moins égal à $\delta > 0$. Il suffit de prendre un couple de stocks situé à l'intérieur de la zone 2 (cf. figure 6). Il est clair qu'on peut suivre le même sentier consommation-loisir en réduisant à chaque instant sur $(t, t + \frac{1}{2}\Delta)$ l'exploitation de la ressource 1 d'un

même montant δ_1 , $0 < \delta_1 < \frac{\eta - \mu_2}{\eta - \mu_1} \delta$ et en augmentant l'exploitation de la ressource 2 d'un montant $\delta_2 = \frac{\eta - \mu_1}{\eta - \mu_2} \delta_1$ tout en réduisant en conséquence l'exploitation de la ressource renouvelable, et en procédant à la substitution inverse au cours de l'intervalle $(t + \frac{1}{2}\Delta, t + \Delta)$. A un même couple de stocks correspond donc une infinité de sentiers optimaux d'exploitation des différentes ressources.

7 Conclusion

On a montré dans cet article que, si l'offre de travail est élastique, lorsque les coûts d'exploitation sont linéaires, l'ordre d'exploitation des différentes ressources n'est jamais strict. La transition de l'exploitation d'une ressource à l'autre passe toujours par une phase d'exploitation simultanée des deux ressources en question. De plus, pour certains niveaux des ressources épuisables, les sentiers d'exploitation de chacune des ressources sont indéterminés bien que le sentier optimal d'évolution de la consommation et du loisir soit unique. Symétriquement un même sentier d'évolution de la consommation et du loisir peut être optimal pour différentes configurations des stocks initiaux. De plus ce phénomène d'indétermination n'est pas un phénomène singulier : l'ensemble des configurations de stocks initiaux qui impliquent une telle indétermination est de mesure non nulle. Enfin il doit être clair que ces résultats ne tiennent pas au fait que le modèle postule l'existence d'un substitut renouvelable aux ressources non renouvelables. On obtiendrait des résultats analogues dans un modèle où les seules ressources disponibles sont des ressources non renouvelables pourvu qu'il y en ait au moins trois.

Le stockage est non-optimal

Le stockage à coût nul ne serait justifié que si, partant d'un programme optimal sous contrainte de non stockage :

– accroître l'effort à une certaine date pour extraire plus de ressource et éventuellement produire plus de bien de consommation, stocker le produit additionnel semi-fini ou fini pour soit réduire l'effort ultérieur soit accroître la consommation ultérieure, permettrait d'augmenter l'utilité totale;

– renoncer à consommer une partie du bien final produit à une certaine date pour le stocker afin de soit réduire le travail ultérieurement fourni soit augmenter la consommation future, accroîtrait l'utilité totale.

Il est clair qu'à une même date on peut combiner l'accroissement d'effort demandé et la réduction de la consommation pour les mêmes fins. Mais toutes ces opérations ne sont pas rentables pour la société car le long du sentier optimal sous contrainte de non stockage les utilités marginales actualisées de la consommation par tête et du loisir par tête sont des fonctions continues non croissantes. En effet, il est évident que :

– au cours de la phase de régime stationnaire les utilités marginales de la consommation et du loisir sont constantes, donc les utilités marginales actualisées décroissantes;

– au cours d'une phase d'exploitation de la ressource i et de la ressource renouvelable les utilités marginales actualisées de la consommation et du loisir sont toutes deux constantes d'après (10); il en est de même d'une phase pendant laquelle les deux ressources non renouvelables sont exploitées, d'après (34);

– au cours d'une phase d'exploitation de la seule ressource i , la consommation par tête vérifie (cf. (23)) :

$$u' - \mu_i v' = \lambda_i e^{\rho t}$$

de sorte que :

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\rho e^{\rho t} \lambda_i}{u'' + \mu_i^2 v''} < 0 \Rightarrow \frac{d\ell}{dt} > 0$$

et donc, premièrement :

$$\frac{d}{dt} [v' e^{-\rho t}] = e^{-\rho t} v'' \frac{d\ell}{dt} - \rho v' e^{-\rho t} < 0,$$

et deuxièmement :

$$\frac{d}{dt} [u' e^{-\rho t}] = u'' \frac{dc}{dt} e^{-\rho t} - \rho u' e^{-\rho t} = -\frac{\rho e^{-\rho t} [\mu_i u'' v' + \mu_i^2 u' v'']}{u'' + \mu_i^2 v''} < 0.$$

Enfin la consommation et le loisir étant des fonctions continues du temps, les utilités marginales ne font pas de sauts aux dates de raccord des divers types de phases.

La société n'a donc jamais intérêt, toutes choses égales par ailleurs :

- ni à réduire la consommation à une certaine date, stocker sans coût le bien final ainsi épargné, et augmenter la consommation d'un même montant plus tard,

- ni à intensifier l'effort à une certaine date, stocker le produit de ce travail additionnel, et réduire ultérieurement l'effort d'un même montant.

Il est clair qu'il est sans intérêt non plus de monter une opération croisée. Considérons par exemple un accroissement d'effort à une certaine date permettant d'obtenir un produit additionnel qui serait stocké pour augmenter la consommation future. On vient de voir qu'il serait au moins aussi judicieux d'augmenter la consommation immédiatement. Mais comme le plan initial est un plan optimal sans stockage, la société n'a pas intérêt non plus à accroître l'effort à une certaine date pour augmenter la consommation à cette même date.

Positions de départ des sentiers et valeurs des rentes

Considérons un couple de stocks (Y_1^o, Y_2^o) tel que le point de départ du sentier optimal $a_0 = (c_0, \ell_0)$ soit situé à l'intérieur de la zone de l'espace (c, ℓ) définie par I_η, I_{μ_2} et les deux droites de transformation des ressources 1 et 2. Les valeurs des multiplicateurs qui soutiennent un tel sentier sont définies (cf. (33)) par :

$$\lambda_i = u'(c_0) - \mu_i v'(\ell_0) \quad i = 1, 2.$$

On détermine d'abord les valeurs des dérivées $\frac{\partial Y_i}{\partial \lambda_j}, i = 1, 2, j = 1, 2$ en $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, des fonctions $Y_i(\lambda), i = 1, 2$, donnant le stock de la ressource i dont la société doit initialement disposer pour soutenir un sentier défini par λ . On montre ensuite que ces fonctions sont inversibles. Des propriétés de $\frac{\partial \lambda_i}{\partial Y_j^o}, i = 1, 2, j = 1, 2$, on déduit les propriétés sur lesquelles s'appuient les développements du paragraphe 5.3. On détermine en particulier comment varie, dans cette zone, les points de départ des sentiers optimaux en fonction des stocks initialement disponibles des deux ressources.

1. Pour construire les fonctions $Y_i(\lambda), i = 1, 2$, nous devons d'abord déterminer comment varie la période d'exploitation des deux ressources non renouvelables en fonction de λ .

Notons $t_1(\lambda)$ la date à laquelle s'achève la période d'exploitation simultanée des ressources 1 et 2. Cette date est indifféremment définie par l'une des conditions suivantes :

$$c(t; \lambda) = c_{2\sigma}, \ell(t; \lambda) = \ell_{2\sigma}, y_1(t; \lambda) = 0$$

où $(c_{2\sigma}, \ell_{2\sigma}) = A_{2\sigma}, \sigma = \frac{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$ et $c(\cdot; \lambda), \ell(\cdot; \lambda), y_1(\cdot; \lambda)$ et $y_2(\cdot; \lambda)$ sont définies respectivement par (35a, 35b, 46a et 46b). On a :

$$(A.2.1) \quad \frac{\partial t_1}{\partial \lambda_1} = -\frac{\partial c(t_1^-; \lambda)/\partial \lambda_1}{\partial c(t_1^-; \lambda)/\partial t} < 0, \quad \frac{\partial t_1}{\partial \lambda_2} = -\frac{\partial c(t_1^-; \lambda)/\partial \lambda_2}{\partial c(t_1^-; \lambda)/\partial t} > 0 \quad 23$$

En combinant (36) et (37), on obtient pour tout $t < t_1(\lambda)$:

$$(A.2.2) \quad \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial t} = \rho \lambda_1 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} + \rho \lambda_2 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_2}$$

23. Pour toute fonction $f : R^n \rightarrow R$, la notation $\frac{\partial f(\hat{x}_i^-, \hat{x}_{-i})}{\partial x_j}, i, j = 1, \dots, n, (\hat{x}_i, \hat{x}_{-i}) \in R^n$, désigne la limite $\lim_{x_i \uparrow \hat{x}_i} \frac{\partial f(x_i, \hat{x}_{-i})}{\partial x_j}$

et en faisant tendre t vers $t_1(\lambda)$ et en tenant compte de (A.2.1) :

$$(A.2.3) \quad \rho\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial \lambda_1} + \rho\lambda_2 \frac{\partial t_1}{\partial \lambda_2} = -1.$$

2. $Y_1(\lambda)$ est égal à la somme des prélèvements sur la réserve en ressource 1 qui ont lieu au cours de la phase d'exploitation des ressources non renouvelables :

$$Y_1(\lambda) = \int_0^{t_1(\lambda)} y_1(t; \lambda) dt$$

d'où, d'après (46a) :

$$(A.2.4) \quad Y_1(\lambda) = \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} [\mu_2 c(t; \lambda) + \ell(t; \lambda) - 1] dt.$$

De (A.2.4), (37) et (39) on déduit que :

$$(A.2.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_1} &= \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \left\{ \frac{\partial t_1}{\partial \lambda_1} [\mu_2 c_{2\sigma} + \ell_{2\sigma} - 1] \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t_1(\lambda)} \left[\mu_2 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} \right] dt \right\} \\ &= \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} \left[\mu_2 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} \right] dt < 0 \end{aligned}$$

car $\ell_{2\sigma} = 1 - \mu_2 c_{2\sigma}$. Des mêmes relations on déduit également que :

$$(A.2.6) \quad \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} = \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} \left[\mu_2 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} \right] dt > 0.$$

Le signe de la fonction :

$$(A.2.7) \quad \Gamma_1(\lambda) \equiv \rho\lambda_1 \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_1} + \rho\lambda_2 \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2}$$

sera utilisé aux paragraphes 4 et 5 ci-dessous. Développons :

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\lambda) &= \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} \left[\mu_2 \left(\rho\lambda_1 \frac{\partial c_1}{\partial \lambda_1} + \rho\lambda_2 \frac{\partial c_2}{\partial \lambda_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\rho\lambda_1 \frac{\partial \ell}{\partial \lambda_1} + \rho\lambda_2 \frac{\partial \ell}{\partial \lambda_2} \right) \right] dt \end{aligned}$$

et, d'après (A.2.2) :

$$\Gamma_1(\lambda) = \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} \left[\mu_2 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial t} + \frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial t} \right] dt$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_1(\lambda) = \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} [\mu_2(c_{2\sigma} - c_0) + (\ell_{2\sigma} - \ell_0)]$$

$$(A.2.8) \quad \Leftrightarrow \Gamma_1(\lambda) = \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} [1 - \mu_2 c_0 - \ell_0] < 0.$$

3. $Y_2(\lambda)$ est égal à la somme des prélèvements effectués sur les réserves de la ressource 2 pendant la phase d'exploitation des seules ressources non renouvelables, de ceux effectués pendant la phase d'exploitation de la seule ressource 2 et de ceux effectués pendant la phase d'exploitation simultanée de la ressource 2 et de la ressource renouvelable.

Rappelons que $\tilde{t}_2(\lambda_2)$ est la date à laquelle la phase d'exploitation de la seule ressource 2 prend fin (cf. section 3). Elle est déterminée indifféremment par l'une des conditions suivantes : $c(t; \lambda_2) = \tilde{c}_2$ ou $\ell(t; \lambda_2) = \tilde{\ell}_2$ où $(\tilde{c}_2, \tilde{\ell}_2) = \tilde{A}_2$ et $c(t; \lambda_2), \ell(t; \lambda_2)$ sont les fonctions définies en (24).

D'après (46b) :

$$(A.2.9) \quad Y_2(\lambda) = \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} [1 - \ell(t; \lambda) - \mu_1 c(t; \lambda)] dt + N \int_{t_1(\lambda)}^{\tilde{t}_2(\lambda_2)} c(t; \lambda_2) dt + \tilde{Y}_2^\circ$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_1} &= -\frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} \left[\frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} + \mu_1 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} \right] dt \\ &\quad + \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \frac{\partial t_1}{\partial \lambda_1} [1 - \ell_{2\sigma} - \mu_1 c_{2\sigma}] - N \frac{\partial t_1}{\partial \lambda_1} c(t_1(\lambda); \lambda_2). \end{aligned}$$

Puisque $y_2(t)$ est continue en $t_1(\lambda)$:

$$(A.2.10) \quad \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} [1 - \ell_{2\sigma} - \mu_1 c_{2\sigma}] = y_2(t_1(\lambda); \lambda) = y_2(t_1(\lambda); \lambda_2) = N c(t_1(\lambda), \lambda_2)$$

et on a donc d'après (37) et (39) :

$$(A.2.11) \quad \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_1} = -\frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} \left[\frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} + \mu_1 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} \right] dt > 0.$$

Enfin d'après (37) $\mu_1 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} = -\mu_2 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_2}$ et d'après (39) $\frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} = -\frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_2}$ d'où :

$$(A.2.12) \quad (A.2.6) \cup (A.2.11) \Rightarrow \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_1}.$$

$$(A.2.13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_2} &= -\frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} \left[\frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} + \mu_1 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} \right] dt \\ &\quad + \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \frac{\partial t_1}{\partial \lambda_2} [1 - \ell_{2\sigma} - \mu_1 c_{2\sigma}] \\ &\quad - N \frac{\partial t_1}{\partial \lambda_2} c(t_1(\lambda); \lambda_2) + N \int_{t_1(\lambda)}^{\tilde{t}_2(\lambda_2)} \frac{\partial c(t; \lambda_2)}{\partial \lambda_2} dt + N \frac{\partial \tilde{t}_2}{\partial \lambda_2} \tilde{c}_2. \end{aligned}$$

Remarquons que, $\tilde{t}_2(\lambda_2)$ étant définie par $u'(\tilde{c}_2) = \lambda_2 e^{\rho t}$, on a :
 $\frac{d\tilde{t}_2}{d\lambda_2} = -\frac{1}{\rho\lambda_2}$; donc en tenant compte de (27a) et (A.2.10) on peut réécrire
 $\frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_2}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_2} &= -\frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} \left[\frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} + \mu_1 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} \right] dt \\ &\quad + \frac{N}{\rho\lambda_2} \int_{t_1(\lambda)}^{\tilde{t}_2(\lambda_2)} \frac{\partial c(t; \lambda_2)}{\partial t} dt \\ &\quad - \frac{N}{\rho\lambda_2} \tilde{c}_2. \end{aligned}$$

La somme des deux derniers termes du membre droit de cette relation est égale à : $\frac{N}{\rho\lambda_2} [\tilde{c}_2 - c_{2\sigma} - \tilde{c}_2]$ de sorte que finalement, compte tenu de (37) et (39) :

$$(A.2.14) \quad \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_2} = -\frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} \left[\frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} + \mu_1 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} \right] dt - \frac{N}{\rho\lambda_2} c_{2\sigma} < 0.$$

Le signe de la fonction :

$$(A.2.15) \quad \Gamma_2(\lambda) = \rho\lambda_1 \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_1} + \rho\lambda_2 \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_2}$$

sera utilisé ci-dessous aux paragraphes 4 et 5. Développons :

$$\begin{aligned} \Gamma_2(\lambda) &= -\frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} \left\{ \left[\rho\lambda_1 \frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} + \rho\lambda_2 \frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \mu_1 \left[\rho\lambda_1 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} + \rho\lambda_2 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} \right] \right\} dt \\ &\quad - \rho\lambda_2 \frac{N}{\rho\lambda_2} c_{2\sigma} \end{aligned}$$

d'où en tenant compte de (A.2.2) :

$$\begin{aligned} \Gamma_2(\lambda) &= -\frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} \left[\frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial t} + \mu_1 \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial t} \right] dt - N c_{2\sigma} \\ &= -\frac{N}{\mu_2 - \mu_1} [\ell_{2\sigma} - \ell_0 + \mu_1(c_{2\sigma} - c_0) + (\mu_2 - \mu_1)c_{2\sigma}] \\ (A.2.16) \quad &= \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} [\ell_0 + \mu_1 c_0 - 1] < 0. \end{aligned}$$

4. Procédons à l'inversion des fonctions $Y_i(\lambda), i = 1, 2$. Pour cela considérons le système d'équations :

$$(A.2.17) \quad Y_1(\lambda_1, \lambda_2) = Y_1^0, \text{ et } Y_2(\lambda_1, \lambda_2) = Y_2^0$$

Montrons que le jacobien du système n'est pas nul. Puisque $\frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_1}$ (cf. (A.2.12)) le jacobien a pour expression :

$$(A.2.18) \quad |J| = \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_1} \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_2} - \left(\frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} \right)^2$$

Considérons le couple des relations $\Gamma_1(\lambda)$ et $\Gamma_2(\lambda)$:

$$\Gamma_1 = \rho \lambda_1 \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_1} + \rho \lambda_2 \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2}, \text{ et } \Gamma_2 = \rho \lambda_1 \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_1} + \rho \lambda_2 \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_2}$$

Puisque d'après (A.2.14), $\frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_2} < 0$ et d'après (A.2.6), $\frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} > 0$, en multipliant la première égalité par $\frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_2}$ et la seconde par $\frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2}$, puis en soustrayant, on obtient :

$$\Gamma_1 \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_2} - \Gamma_2 \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} = \rho \lambda_1 \left[\frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_1} \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_1} \right]$$

d'où :

$$|J| = \frac{1}{\rho \lambda_1} \left[\Gamma_1 \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_2} - \Gamma_2 \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} \right],$$

et puisque $\Gamma_1 < 0$ (cf (A.2.8)), $\Gamma_2 < 0$ (cf. (A.2.16)), $\frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_2} < 0$ (cf. (A.2.14)) et $\frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} > 0$ (cf. (A.2.6)), alors :

$$(A.2.19) \quad |J| > 0.$$

Soit $\lambda_1(Y_1^o, Y_2^o)$, $\lambda_2(Y_1^o, Y_2^o)$ les fonctions inverses de $Y_1(\lambda_1, \lambda_2)$ et $Y_2(\lambda_1, \lambda_2)$. De (A.2.5), (A.2.6), (A.2.11), (A.2.12) et (A.2.14) on obtient :

$$(A.2.20) \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial Y_1^o} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_2} < 0, \text{ et, } \frac{\partial \lambda_1}{\partial Y_2^o} = -\frac{1}{|J|} \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} < 0$$

$$(A.2.21) \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial Y_1^o} = -\frac{1}{|J|} \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial Y_2^o} < 0, \text{ et, } \frac{\partial \lambda_2}{\partial Y_2^o} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_1} < 0$$

5. Nous pouvons décrire à présent les variations du niveau de l'isocline σ sur laquelle le sentier démarre lorsque l'on fait varier les niveaux de stocks initiaux $Y_i^o, i = 1, 2$. De l'expression de σ donnée par (41), on déduit que :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial Y_1^o} = \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial Y_1^o} + \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial Y_1^o}$$

et d'après (42), (A.2.15), (A.2.20) et (A.2.21) :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial Y_1^o} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{|J|(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left[-\lambda_2 \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_2} - \lambda_1 \frac{\partial Y_2}{\partial \lambda_1} \right] = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{|J|(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \frac{\Gamma_2(\lambda)}{\rho}$$

d'où en substituant à $\Gamma_2(\lambda)$ son expression (A.2.16) :

$$(A.2.22) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial Y_1^o} = -\frac{N}{\rho|J|(\lambda_1 - \lambda_2)^2} [\ell_0 + \mu_1 c_0 - 1] > 0.$$

Si donc comme au paragraphe 5.3 on suppose Y_2^o fixé et égal à \dot{Y}_2^o , lorsque Y_1^o augmente, passant de 0 à $Y_1^{o'}$, $Y_1^{o''}$, $Y_1^{o'''}$, ..., les points de départ des sentiers optimaux sont situés sur des isoclines correspondant à des valeurs absolues des pentes des courbes d'indifférence $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma''', \dots$ de plus en plus élevées.

De (41), (42), (A.2.7), (A.2.20) et (A.2.21) on déduit aussi que :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial Y_2^o} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{|J|(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \left[\lambda_1 \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_1} + \lambda_2 \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} \right] = \frac{\mu_2 - \mu_1}{|J|(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \frac{\Gamma_1(\lambda)}{\rho}$$

d'où en substituant à $\Gamma_1(\lambda)$ son expression (A.2.8) :

$$(A.2.23) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial Y_2^o} = \frac{N}{\rho|J|(\lambda_1 - \lambda_2)^2} [1 - \mu_2 c_0 - \ell_0] < 0.$$

Si donc comme à l'alinéa 5.3.2. du paragraphe 5.3, on augmente progressivement le stock de ressource 2, $Y_2^o, Y_2^{o'}, Y_2^{o''}, Y_2^{o'''}, \dots$, en maintenant fixé le stock de ressource 1, les points de départ des sentiers optimaux sont situés sur des isoclines $\sigma', \sigma'', \sigma''', \dots$ de niveaux de plus en plus faibles.

6. Variations des niveaux de consommation et d'effort initiaux

Différencions la relation (48a) par rapport à Y_1^o :

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial Y_1^o} = v'(\ell_0) \frac{\partial \sigma}{\partial Y_1^o} + (\sigma - \mu_1) v''(\ell_0) \frac{d\ell_0}{dY_1^o}$$

d'où, après prise en compte de (A.2.20), (A.2.21) et (A.2.22) :

$$(A.2.24) \quad \frac{d\ell_0}{dY_1^o} = \frac{1}{v''(\ell_0)[\sigma - \mu_1]} \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial Y_1^o} - v'(\ell_0) \frac{\partial \sigma}{\partial Y_1^o} \right] > 0.$$

Puisque $u'(c_0) = \sigma v'(\ell_0)$ alors $\left(1 - \frac{\mu_1}{\sigma}\right) u'(c_0) = \lambda_1$, et donc :

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial Y_1^o} = u'(c_0) \frac{\mu_1}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial Y_1^o} + \left(1 - \frac{\mu_1}{\sigma}\right) u''(c_0) \frac{dc_0}{dY_1^o},$$

d'où, en tenant compte de (A.2.20) et (A.2.22) :

$$(A.2.25) \quad \frac{dc_0}{dY_1^o} = \frac{1}{u''(c_0) \left(1 - \frac{\mu_1}{\sigma}\right)} \left[\frac{\partial \lambda_1}{\partial Y_1^o} - u'(c_0) \frac{\mu_1}{\sigma^2} \frac{\partial \sigma}{\partial Y_1^o} \right] > 0.$$

Par ailleurs (cf. (34) pour tout $t = 0$) :

$$v'(\ell_0) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Différencions cette relation par rapport à Y_2° :

$$(\mu_1 - \mu_2)v''(\ell_0)\frac{d\ell_0}{dY_2^\circ} = \frac{\partial\lambda_1}{\partial Y_2^\circ} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial Y_2^\circ}$$

d'où, en tenant compte de (A.2.20) et (A.2.21) :

$$\frac{d\ell_0}{dY_2^\circ} = -\frac{1}{|J|(\mu_2 - \mu_1)v''(\ell_0)} \left[\frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} \right].$$

D'après (A.2.5) et (A.2.6) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} &= \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} \left[\mu_2 \left(\frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} \right) \right] dt, \end{aligned}$$

qu'on peut réécrire (cf. (37) et (39)) :

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} = \frac{N\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} \frac{e^{\rho t}}{u''} dt < 0,$$

d'où

$$(A.2.26) \quad \frac{d\ell_0}{dY_2^\circ} < 0.$$

D'autre part (cf. (34) pour $t = 0$) :

$$u'(c_0) = \frac{\mu_2\lambda_1 - \mu_1\lambda_2}{\mu_2 - \mu_1}.$$

Différencions cette relation par rapport à Y_2° :

$$(\mu_2 - \mu_1)u''(c_0)\frac{dc_0}{dY_2^\circ} = \mu_2\frac{\partial\lambda_1}{\partial Y_2^\circ} - \mu_1\frac{\partial\lambda_2}{\partial Y_2^\circ}.$$

d'où, en tenant compte de (A.2.20) et (A.2.21) :

$$\frac{dc_0}{dY_2^\circ} = -\frac{1}{|J|(\mu_2 - \mu_1)u''(c_0)} \left[\mu_2\frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} + \mu_1\frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_1} \right].$$

D'après (A.2.5) et (A.2.6) :

$$\begin{aligned} \mu_2\frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} + \mu_1\frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_1} &= \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} \left[\left(\mu_2\frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} + \mu_1\frac{\partial c(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} \right) \mu_2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\mu_2\frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_2} + \mu_1\frac{\partial \ell(t; \lambda)}{\partial \lambda_1} \right) \right] dt \end{aligned}$$

et en tenant compte de (37) et (39) :

$$\mu_2 \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_2} + \mu_1 \frac{\partial Y_1}{\partial \lambda_1} = - \frac{N}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^{t_1(\lambda)} \frac{e^{\rho t}}{v''} > 0,$$

d'où :

$$(A.2.27) \quad \frac{dc_0}{dY_2^0} > 0.$$

● Références bibliographiques

- AMIGUES, J. P., FAVARD, P., GAUDET, G., MOREAUX, M. (1997). – “Ressources naturelles et ordre optimal d'exploitation”, *Revue d'Economie Politique*, 107, (2), pp. 205-230.
- AMIGUES, J. P., FAVARD, P., GAUDET, G., MOREAUX, M. (1997). – “Productive Accumulation and Order of Exploitation of Natural Resources”, *en cours de rédaction*.
- KEMP, M. C., LONG, N. V. (1980). – “On Two Folk Theorems Concerning the Extraction of Exhaustible Resources”, *Econometrica*, 48, pp. 663-673.
- LEWIS, T. R. (1982). – “Sufficient Conditions for Extracting Least Cost Resource First”, *Econometrica*, 50, pp. 1081-1083.