ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 46 — 1997

Enchères asymétriques : contribution à la détermination numérique des stratégies d'équilibre Bayesien *

Philippe BENILAN,
Michel MOUGEOT, Florence NAEGELEN *

RÉSUMÉ. – Quand les croyances des agents sont issues de tirages indépendants de distributions de probabilités différentes, il est, en général, impossible de déterminer de façon analytique les stratégies d'équilibre bayesien dans une enchère au premier prix. Cet article montre que dans le cas de deux groupes d'offreurs ayant des coûts distribués selon des lois uniformes différents, il est possible de mettre la stratéfie optimale sous forme de la stratégie symétrique à laquelle s'ajoute (ou de laquelle se retranche) un mark-up dû à l'asymétrie exprimant le caractère plus (ou moins) agressif des stratégies. Le calcul de ce mark-up se ramène à la résolution numérique d'une seule équation. L'article montre, d'autre part, que deux types de solutions doivent être considérés suivant qu'il existe ou non une offre minimale commune dont les conditions d'existence sont établies. En l'absence d'une offre minimale commune, il existe un seuil en dessous duquel seuls les agents les plus compétitifs a priori participent et adoptent une stratégie analogue à une stratégie symétrique avec valeur de réserve. Enfin, l'article montre que dans ce contexte l'appel d'offres au premier prix est préférable à l'appel d'offres au second prix.

Asymmetric Auctions: a Contribution to the Numerical Computation of Bayesian-Nash Equilibrium Strategies

ABSTRACT. – In this paper, we drop the symmetry assumption in a model of first price procurement auction. We consider the case of two groups of bidders whose costs are drawn from two different uniform distributions. Conditions of existence of a common minimum bid are exhibited and bayesian equilibrium strategies of firms in both groups are computed. We show that these strategies can be written as the symmetric equilibrium strategies more or less a mark-up resulting from the asymmetry.

* P. BENILAN : Université de Besançon, 25030 Besançon Cedex ; M. MOUGEOT, F. NAEGELEN : C.R.E.S.E., Université de Besançon, 25030 Besançon Cedex.
Les auteurs remercient L. A. GÉRARD VARET et les deux rapporteurs de la Revue pour leurs commentaires.

1 Introduction

Le modèle de référence de la théorie des enchères est le modèle symétrique à valeurs privées indépendantes. Ce modèle est caractérisé par quatre hypothèses dans le cas d'un achat : tous les vendeurs et l'acheteur sont neutres vis-à-vis du risque, tous les vendeurs sont symétriques et tirent l'évaluation de leur coût c_i indépendamment d'une même distribution de probabilité F, le paiement est une fonction des offres [1]. Dans ce contexte, les stratégies d'équilibre bayésien des offreurs dans un appel d'offres au premier prix sous pli cacheté avec attribution au moins disant s'expriment sous forme d'une fonction croissante telle que chaque offreur soumet un prix b_i égal à la somme de son coût de production c_i et d'un mark-up stratégique, le prix proposé par chacun étant en fait égal à l'évaluation du second coût le plus bas conditionnée par le fait que son coût est le plus faible. Un résultat important de ce modèle est le théorème d'équivalence du coût (ou du revenu) [2] qui établit que les quatre enchères usuelles (enchères orales anglaise et hollandaise, appels d'offres écrit au premier et second prix) conduisent au même prix d'achat escompté.

Ce modèle repose sur une hypothèse d'homogénéité de la population des offreurs : ils ont tous la même attitude vis-à-vis du risque et leurs informations privées (ici le coût de production) sont toutes tirées de la même distribution de probabilité. En fait, dans la pratique, les offreurs sont hétérogènes. Dans ce cas, une des propriétés du modèle de référence, à savoir l'existence d'une solution analytique au système d'équations différentielles, n'est plus vérifiée en général. Cela est vrai lorsque l'hétérogénéité concerne l'attitude vis-à-vis du risque. La dérivation explicite des stratégies optimales n'est alors possible que pour des valeurs des offres supérieures à un seuil minimal [3]. Il en est de même lorsque l'hypothèse d'une distribution de probabilité identique doit être rejetée. Dans ce cas d'enchère asymétrique, une intégration numérique des équations différentielles peut être nécessaire [4].

L'hypothèse d'asymétrie semble la plus plausible dans de nombreux marchés régis par enchères. L'existence de contraintes budgétaires différentes d'un agent à l'autre en est une forme connue sous le nom de « facteur Getty » à propos des enchères d'œuvres d'art. Le fait que les concurrents en lice pour l'attribution d'un contrat public aient accès à des technologies différentes ou aient des coûts d'opportunité différents en est une autre. Dans ces deux cas, chaque agent i tire son information privée d'une distribution F_i. Un cas intermédiaire fréquent dans les achats publics est celui où l'on peut distinguer a priori des groupes d'offreurs, chaque membre d'un groupe ayant un coût issu d'une loi unique mais la loi variant

1. *Cf.* Mc Afee and Mc Millan (1987).
2. Vickrey (1961), Riley and Samuelson (1981).
3. *Cf.* J. Cox, V. L. Smith and J. M. Walker (1982).
4. *Cf.* J. J. Laffont (1995).

d'un groupe à l'autre. Ainsi il est courant que l'on puisse distinguer pour l'attribution d'un contrat les firmes nationales et étrangères ou encore les grandes entreprises et les P.M.E. C'est l'hypothèse que nous retiendrons dans cet article en considérant une procédure d'achat opposant dans le cadre d'un appel d'offres au premier prix deux groupes d'entreprises dont les informations privées (le coût marginal de production) sont tirées de deux distributions de probabilité différentes F_1 et F_2.

Ce problème a été abordé dans le cas du duopole et de lois uniformes par VICKREY [1961] qui montra que le théorème d'équivalence du revenu n'était plus valide et par GRIESMER, LEVITAN et SHUBIK [1967]. Plus récemment R. C. MARSCHALL, M. J. MEURER, J.-F. RICHARD et W. STROMQUIST [1991] ont conidéré que les membres de deux groupes formaient une coalition ramenant ainsi le problème à un problème de duopole. Dans ce même cadre d'un modèle à deux agents, M. PLUM [1992] a démontré que les équilibres de Nash sont des stratégies continûment différentiables et monotones strictement croissantes nécessitant la résolution d'un problème de valeurs aux bornes d'un système d'équations différentielles singulières. Enfin E. MASKIN et J. RILEY [1986] ont obtenu des résultats généraux concernant la comparaison des mécanismes d'enchères. Si ces auteurs montrent l'existence de stratégies d'équilibre, ils n'en fournissent toutefois pas de caractérisation.

Dans cet article, nous abandonnons l'hypothèse du duopole pour retenir le cas de deux groupes de n entreprises dont les coûts sont issus de deux distributions uniformes différentes. Nous montrons que l'existence d'une offre minimale commune qui permet de définir explicitement les stratégies des duopoleurs n'est plus nécessairement vérifiée lorsque plus de deux agents sont en cause. En l'absence d'une telle offre, le domaine sur lequel sont définies les stratégies comporte deux parties, l'une sur laquelle les agents de deux groupes transmettent des offres, l'autre sur laquelle seuls certains des agents participent. Nous mettons en évidence les conditions d'existence de cette offre minimale commune à partir des paramètres du problème (nombre d'agents, supports de F_i) et déterminons les stratégies d'équilibre dans les deux situations. Lorsqu'il existe une offre minimale commune (petit nombre de firmes, faible asymétrie) nous généralisons les résultats de GRIESMER, LEVITAN et SHUBIK en montrant que les entreprises du groupe qui a en moyenne le coût le plus bas adoptent des stratégies concaves moins agressives que les stratégies convexes des entreprises a priori moins compétitives. Nous montrons que ces stratégies peuvent s'écrire sous la forme d'une somme de la stratégie symétrique et d'un mark-up dû à l'asymétrie (positif ou négatif suivant le groupe). Dans le cas où il n'existe pas d'offre minimale commune, nous montrons que les stratégies possèdent les mêmes propriétés que dans le cas précédent sur le domaine commun alors que sur le domaine sur lequel seuls les plus compétitifs jouent, la stratégie optimale équivaut à une stratégie symétrique avec valeur de réserve. Enfin nous montrons que, dans ce contexte, l'appel d'offres au second prix est préférable à l'appel d'offres au premier prix. Pour mettre en évidence ces résultats, la Section 2 présente le modèle, la Section 3 les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité des stratégies, et les Sections 4 et 5 la caractérisation des stratégies en présence ou en l'absence d'une offre minimale commune. Dans la Section 6, les implications des résultats obtenus sont mises en évidence.

2 Le modèle

On considère un appel d'offres au premier prix pour l'attribution d'un marché dans lequel l'entreprise la moins offrante est retenue pour fournir la prestation demandée à un prix égal à son offre, les autres entreprises ne fournissant ni ne recevant rien. Deux groupes d'entreprises sont en concurrence, les groupes I et II, comprenant respectivement n_1 et n_2 entreprises. On considérera dans cet article $n_1 = n_2 = n$. Les coûts des entreprises correspondent par ailleurs à des réalisations indépendantes de variables aléatoires suivant une loi uniforme de fonction de répartition $F_1(\cdot)$ sur le compact $[c_1^-, c^+]$ pour les entreprises du groupe I et de fonction de répartition $F_2(\cdot)$ sur le compact $[c_2^-, c^+]$ pour les entreprises du groupe II, avec $c_1^- < c_2^-$, $l_1 = c^+ - c_1^- > l_2 = c^+ - c_2^-$. Le coût de chaque entreprise est une information privée. Les lois F_1 et F_2, les supports et le nombre d'entreprises sont connaissance commune.

Ces hypothèses traduisent le fait que les croyances des offreurs du groupe I concernant les coûts des offreurs du groupe II sont plus optimistes que celles des firmes du groupe II concernant les coûts des firmes du groupe I au sens de la dominance stochastique de premier ordre $(F_2(c) \leq F_1(c))$. Elles traduisent aussi le fait que les offreurs du groupe I pensent que les autres offreurs du groupe I ont des coûts plus bas que les offreurs du groupe II et que les offreurs du groupe II pensent que les autres offreurs du groupe II ont des coûts plus élevés que les offreurs du groupe I. Ces hypothèses impliquent, d'autre part, qu'en moyenne le coût des offreurs de I est inférieur au coût des offreurs de II (et la variance plus élevée), que $F_2(c)/F_1(c)$ est croissant en c et que $(1 - F_i(c))/f_i(c)$ est décroissant en c.

Dans ce contexte d'asymétrie d'information, on recherche des stratégies pures d'équilibre associant une offre unique de chaque entreprise à son coût et maximisant son espérance de profit lorsque ses adversaires utilisent eux-mêmes leur stratégie d'équilibre. Comme $l_1 > l_2$, les stratégies des deux groupes vont différer. Soient $b_1(\cdot)$ et $b_2(\cdot)$ les stratégies d'équilibre des firmes des groupes I et II respectivement. Comme les agents d'un même groupe sont ex-ante identiques, il est naturel de rechercher des équilibres symétriques à l'intérieur de chaque groupe [5]. Supposons $b_1(\cdot)$ et $b_2(\cdot)$ strictement croissantes et différentiables. Notons $\phi_i \equiv b_i^{-1}$. Par ailleurs, nous ne considérons que les offres sérieuses (au sens de GRIEMER, LEVITAN et SHUBIK [1987]) rapportant un profit non négatif en cas de victoire.

Compte tenu des règles de l'appel d'offres, le profit d'une entreprise du groupe I ayant un coût c_1 et faisant une offre b, conditionné par le fait de gagner s'écrit, lorsque ses adversaires utilisent leur stratégie d'équilibre

5. Comme l'ont montré E. MASKIN et J. RILEY (1984), il est possible qu'il existe des stratégies asymétriques dans un groupe d'agents a priori identiques mais les seuls équilibres sont des équilibres symétriques quand les supports sont bornés.

$\mathrm{b}_1(\cdot)$ et $\mathrm{b}_2(\cdot)$:

$$(1) \qquad E(\Pi(c_1)) = (b - c_1)(1 - F_1(\phi_1(b)))^{n-1}(1 - F_2(\phi_2(b)))^n$$

De même, pour une entreprise quelconque du groupe II ayant un coût c_2 et faisant une offre b, on a :

$$(2) \qquad E(\Pi(c_2)) = (b - c_2)(1 - F_2(\phi_2(b)))^{n-1}(1 - F_1(\phi_1(b)))^n$$

$\mathrm{b}_1(\cdot)$ et $\mathrm{b}_2(\cdot)$ sont stratégies d'équilibre bayésien si b maximise (1) et est tel que $\mathrm{b} = \mathrm{b}_1(\mathrm{c}_1)\,\forall\, c_1 \in [c_1^-,\, c^+]$ et si b maximise (2) et est tel que $\mathrm{b} = \mathrm{b}_2(\mathrm{c}_2)\,\forall\, c_2 \in [c_2^-,\, c^+]$.

Les conditions de premier ordre s'écrivent :

$$(3) \qquad \frac{d}{db}\left[b(1 - F_1(\phi_1(b)))^{n-1} \cdot (1 - F_2(\phi_2(b)))^n\right] - \phi_1(b) \cdot \frac{d}{db}\left[(1 - F_1(\phi_1(b)))^{n-1} \cdot (1 - F_2(\phi_2(b)))^n\right] = 0$$

$$(4) \qquad \frac{d}{db}\left[b(1 - F_2(\phi_2(b)))^{n-1} \cdot (1 - F_1(\phi_1(b)))^n\right] - \phi_2(b) \cdot \frac{d}{db}\left[(1 - F_2(\phi_2(b)))^{n-1} \cdot (1 - F_1(\phi_1(b)))^n\right] = 0$$

Il s'agit donc de déterminer $\phi_1(\cdot)$ et $\phi_2(\cdot)$ solutions de ce système d'équations différentielles sous deux conditions :

i) $\phi_1(c^+) = \phi_2(c^+) = c^+$ qui implique que l'entreprise la moins compétitive de chaque groupe transmet une offre égale à son coût et donc réalise un profit nul en cas de victoire.

ii) $\exists c^* \in [c_1^-,\, c_2^-]$ tel que $\phi_1(\underline{b}) = c^*$ et $\phi_2(\underline{b}) = c_2^-$, $\underline{b}$ étant la borne inférieure du domaine de définition des offres des entreprises du groupe II.

Pour montrer i), notons $\overline{b}_i = b_i(c^+)$, avec $\overline{b}_i \geq c^+$. On ne peut avoir $\overline{b}_1 \neq \overline{b}_2$. En effet, supposons $\overline{b}_i > \overline{b}_j$, $\forall\, i \in \{1,\, 2\}$, $\forall\, j \in \{1,\, 2\}$, $i \neq j$. L'espérance de gain d'un agent du groupe i dont le coût est c^+ est nulle lorsqu'il fait une offre égale à $\overline{b}_i$. Il en est de même lorsqu'il transmet n'importe quelle offre appartenant à $[\overline{b}_i,\, \overline{b}_j[$. Par conséquent, $\overline{b}_1 = \overline{b}_2$. Si $\overline{b}_1 = \overline{b}_2 > c^+$, un agent du groupe i qui fait une offre $\overline{b}_i$ a toujours une espérance de profit nulle mais s'il réduit unilatéralement son offre pour offrir $\overline{b}_i - \varepsilon$, il obtient une espérance de profit positive, ce qui est en contradiction avec le fait que $\overline{b}_i$ est stratégie d'équilibre. Par conséquence, $\overline{b}_1 = \overline{b}_2 = c^+$, qui s'écrit encore $\phi_1(c^+) = \phi_2(c^+) = c^+$.

La condition ii) considère la possibilité que les domaines de définition des offres des deux groupes d'entreprises diffèrent. Notons $\underline{b}_1 = b_1(c_1^-)$ et $\underline{b}_2 = b_2(c_2^-)$ les bornes inférieures des domaines de définition des offres des deux groupes d'entreprises. Dans le cas d'un duopole, $\mathrm{n} = 1$, on a $c^* = c_1^-$ et $\underline{b} = \underline{b}_1 = \underline{b}_2$: les domaines de définition des offres sont identiques. L'agent 1 dont le coût est c_1^- n'a jamais intérêt à faire une offre inférieure à $\underline{b}_2$ et l'agent 2 dont le coût est c_2^- n'a jamais intérêt à faire une offre inférieure à $\underline{b}_1$. Considérons pour le montrer l'entreprise du groupe I dont le coût est c_1^- et supposons $\underline{b}_1 < \underline{b}_2$. Sa probabilité de gagner avec une offre $\underline{b}_1$ est égale à 1 mais l'entreprise peut augmenter son profit en augmentant son offre jusqu'au niveau $\underline{b}_2$ sans réduire cette probabilité. Le même raisonnement s'appliquant pour l'entreprise du groupe II en suposant $\underline{b}_1 > \underline{b}_2$, on en déduit $\underline{b}_1 = \underline{b}_2 = \underline{b} \cdot \underline{b}$ est alors *l'offre minimale commune*.

Lorsque $\mathrm{n} > 1$, on ne peut exclure la possibilité de domaines de définition différents et il faut donc considérer le cas où $\underline{b}_1 = b_1\left(c_1^-\right) < \underline{b} = b_1\left(c_1^*\right) = b_2\left(c_2^-\right)$ car le raisonnement utilisé lorsque $\mathrm{n} = 1$ ne s'applique plus nécessairement. Supposons $\underline{b}_1 < \underline{b}_2$ [6] et considérons le cas d'une entreprise quelconque du groupe I dont le coût est c_1^-. Avec une offre $\underline{b}_1$, sa probabilité de gagner est égale à 1. Si elle cherche à augmenter unilatéralement son offre par rapport à $\underline{b}_1$ en transmettant par exemple $\underline{b}_1 < b < \underline{b}_2$, son profit en cas de victoire augmente, mais sa probabilité de gagner qui est maintenant $\left(1 - F_1\left(b_1^{-1}\left(b\right)\right)\right)^{n-1}$ devient inférieure à 1 et est décroissante en b. L'hypothèse $\underline{b}_1 < \underline{b}_2$ ne peut donc être rejetée comme dans le cas où $\mathrm{n} = 1$: il n'existe donc pas nécessairement une offre minimale commune. Si $\underline{b}_1 < \underline{b}_2$, alors il existe une valeur $c^* \in \left[c_1^-, c_2^-\right]$ telle $\phi_1\left(\underline{b}\right) = c^*$ et $\phi_2\left(\underline{b}\right) = c_2^-$. c* est la plus petite valeur des coûts du groupe I pour laquelle il existe une offre commune aux deux groupes et dépend de la maximisation des profits (1) et (2). Notons $l^* = c^+ - c^*$.

Dès lors il convient de retenir deux cas :

• Si $c^* = c_1^-$ les stratégies d'équilibre sont des fonctions $\mathrm{b}_1\left(\cdot\right)$ et $\mathrm{b}_2\left(\cdot\right)$ telles que $b_1\left(\cdot\right) : \left[c_i^-, c^+\right] \rightarrow \left[\underline{b}, c^+\right]$ et $b_2\left(\cdot\right) : \left[c_2^-, c^+\right] \rightarrow \left[\underline{b}, c^+\right]$

• Si $c^* \in \left]c_1^-, c_2^-\right[$, la stratégie d'équilibre $b_1\left(\cdot\right)$ des agents du groupe I a deux composantes, l'une définie de $\left[c_1^-, c^*\right]$ sur $\left[\underline{b}_1, \underline{b}_2\right]$ et l'autre définie de $\left[c^*, c^+\right]$ sur $\left[\underline{b}_2, c^+\right]$, alors que la stratégie d'équilibre $b_2\left(\cdot\right)$ des agents du groupe II est définie de $\left[c_2^-, c^+\right]$ sur $\left[\underline{b}_2, c^+\right]$.

3 Conditions d'optimalité des stratégies

Les stratégies d'équilibre bayésien étant solution de (3) et (4), considérons successivement les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité avant de mettre en évidence les propriétés de ces stratégies.

6. On ne considérera pas le cas où $\underline{b}_1 > \underline{b}_2$ dont on peut montrer qu'il est incompatible avec l'existence de stratégies d'équilibre.

3.1. Conditions nécessaires

Compte tenu des hypothèses, les conditions de premier ordre s'écrivent : $\forall i \in \{1, 2\}, \forall j \in \{1, 2\}, i \neq j$

$$(5) \qquad \frac{d}{db}\left[b\left(\frac{c^{+}-\phi_i(b)}{l_i}\right)^{n-1}\left(\frac{c^{+}-\phi_j(b)}{l_j}\right)^{n}\right] - \phi_i(b)\cdot\frac{d}{db}\left[\left(\frac{c^{+}-\phi_i(b)}{l_i}\right)^{n-1}\left(\frac{c^{+}-\phi_j(b)}{l_j}\right)^{n}\right] = 0$$

Après réarrangement pour $b \neq c^{+}$, on notant $\phi_i \equiv \phi_i(b)$, *s'il existe une offre minimale commune* $\underline{b}$, les stratégies sont définies par les équations différentielles (6) :

$$(6) \quad (n-1)\frac{\phi_i'}{c^{+}-\phi_i} + n\frac{\phi_j'}{c^{+}-\phi_j} = \frac{1}{b-\phi_i}\ \forall (i, j) \in \{1, 2\}^2, \quad i \neq j$$

avec les conditions aux bornes $\phi_i(c^{+}) = c^{+}$, $\underline{b}$ se déduisant de $\phi_i(\underline{b}) = c_i^{-}\ \forall\, i \in \{1, 2\}$.

En l'absence d'une offre minimale commune, pour $\underline{b}_1 < \underline{b}_2$ et pour tout b tel que $b_1(c_1^{-}) < b < b_2(c_2^{-})$, la probabilité de gagner contre les entreprises du groupe II est égale à 1. Les conditions nécessaires sont alors définies par :

$$(7) \qquad (n-1)\cdot\frac{\phi_1'}{c^{+}-\phi_1} = \frac{1}{b-\phi_1}$$

avec $\phi_1(\underline{b}_2) = c^{*}$, $\underline{b}_1$ se déduisant de $\phi_1(\underline{b}_1) = c_1^{-}$.

3.2. Conditions suffisantes

Pour que $\mathrm{b_i}(\mathrm{c_i})$ soit stratégie optimale, il faut que le profit conditionnel de l'agent i qui choisit $\mathrm{b_i}(\mathrm{c_i})$ lorsque son coût est $\mathrm{c_i}$ soit supérieur ou égal au profit conditionnel qu'il obtiendrait en faisant une offre différente. Dans le cas où les domaines de définition des offres sont identiques et égaux à $[\underline{b}, c^{+}]$, on doit donc vérifier pour tout $c_i \in [c_i^{-}, c^{+}]$ et pout tout $\tilde{b} \in [\underline{b}, c^{+}]$

$$(b_i(c_i) - c_i)(1 - F_j(b_j^{-1} b_i(c_i))))^{n} \cdot (1 - F_i(b_i^{-1} b_i(c_i))))^{n-1} \geq (\tilde{b} - c_i)(1 - F_j(b_j^{-1}(\tilde{b})))^{n} \cdot (1 - F_i(b_i^{-1}(\tilde{b})))^{n-1}$$

d'où compte tenu de nos hypothèse, $\forall i, \forall j \neq i$:

$$(8) \qquad (b_i - \phi_i(b_i))\left(\frac{c^{+}-\phi_i(b_i)}{l_i}\right)^{n-1}\left(\frac{c^{+}-\phi_j(b_i)}{l_j}\right)^{n} \geq (\tilde{b}_i - \phi_i(b_i))\left(\frac{c^{+}-\phi_i(\tilde{b}_i)}{l_i}\right)^{n-1}\left(\frac{c^{+}-\phi_j(\tilde{b}_i)}{l_j}\right)^{n}$$

Dans le cas où les domaines de définition diffèrent, toute offre $\tilde{b}_i \in [\underline{b}_1, \underline{b}_2]$ permet à l'agent i de gagner avec une probabilité égale à 1 contre les agents du groupe II et l'équation (8) doit être modifiée en conséquence. La démonstration des conditions suffisantes est présentée en annexe 1. Lorsque $b_1 \in [\underline{b}_1, \underline{b}_2], \forall \tilde{b}_1$, les conditions nécessaires sont aussi suffisantes. Il en est de même pour $b_1 \in [\underline{b}_2, c^+], \forall \tilde{b}_1$ et pour b_2 et $\tilde{b}_2 \in [\underline{b}_2, c^+]$. De plus, pour les agents du groupe II, dans le cas où $\tilde{b}_2 \in [\underline{b}_2, c^+]$ et $\tilde{b}_2 \in [\underline{b}_1, \underline{b}_2]$, la condition (9) doit être vérifiée (*cf.* équation A.1.3. de l'annexe 1). Cette condition traduit le fait qu'un agent du groupe II obtient un profit plus grand en utilisant la stratégie d'équilibre lorsque son coût est c_2^- qu'en faisant une offre inférieure à $\underline{b}_2$:

$$(9) \qquad b - nc_2^- + (n-1)\,\phi_1(b) \leq 0 \quad \forall\, b \in [\underline{b}_1, \underline{b}_2]$$

d'où :

PROPOSITION 1 : Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité des stratégies des deux groupes d'agents lorsque les distributions sont uniformes sont définies par (6), (7) et (9).

3.3. **Croissance des stratégies**

Nous avons supposé les stratégies strictement croissantes. Il reste à montrer à quelles conditions les solutions de (6), (7) et (9) le sont.

Sur la *partie commune du domaine de définition* des offres, c'est-à-dire sur $]\underline{b}, c^+[$ ou sur $]\underline{b}_2, c^+[$, on déduit du système (6) :

$$(10) \qquad \begin{cases} \phi_1' = \left(\frac{c^+ - \phi_1}{2n-1}\right)\left(\frac{1-n}{b-\phi_1} + \frac{n}{b-\phi_2}\right) \\ \phi_2' = \left(\frac{c^+ - \phi_2}{2n-1}\right)\left(\frac{n}{b-\phi_1} + \frac{1-n}{b-\phi_2}\right) \end{cases}$$

Les *stratégies des agents du groupe I sont donc strictement croissantes* si $\phi_1' > 0$ d'où $(1-n)(b-\phi_2) + n(b-\phi_1) > 0$ soit :

$$(11) \qquad b - \phi_2 + n(\phi_2 - \phi_1) > 0$$

De même, les *stratégies des agents du groupe II sont strictement croissantes* si :

$$(12) \qquad b - \phi_1 + n(\phi_1 - \phi_2) > 0$$

Les offres des agents du groupe I définies sur $]\underline{b}_1, \underline{b}_2[$ sont, compte tenu de (7), strictement croissantes si :

$$(13) \qquad \frac{1}{n-1}\,\frac{c^+ - \phi_1}{b - \phi_1} > 0$$

ce qui est vrai compte tenu des hypothèses.

Une condition d'existence de l'offre minimale commune peut être déduite de (11) et (12). En $b = \underline{b} = \underline{b}_2$, on doit avoir :

$$\underline{b} \geq \max[c_1^- - n\,(c_1^- - c_2^-);\ c_2^- - n\,(c_2^- - c_1^-)],$$

soit pour $c_1^- < c_2^-$,

$$\underline{b} \geq nc_2^- + (1-n)\,c_1^- \tag{14}$$

3.4. **Agressivité des stratégies**

Compte tenu de (6), on peut montrer que les agents du groupe I ont des stratégies moins agressives que celles des agents du groupe II : $b_1\,(c) > b_2\,(c)$ pour tout c appartenant à $[c_2^-,\, c^+]$. Pour cela on utilise le lemme suivant :

Lemme [7] :

Soient $g\,(\cdot)$ et $h\,(\cdot)$ deux fonctions différentiables. Si $g\,(\underline{x}) \geq h\,(\underline{x})$ et $g\,(x) < h\,(x) \Rightarrow g'\,(x) \geq h'\,(x)$ alors $g\,(x) \geq h\,(x)\,\forall\, x \geq \underline{x}$.

Considérons $g\,(\cdot) \equiv \phi_2\,(\cdot)$ et $h\,(\cdot) \equiv \phi_1\,(\cdot)$. D'après (6) :

$$\frac{\phi_1'}{\phi_2'} = \frac{c^+ - \phi_1}{c^+ - \phi_2} \cdot \frac{n\,(\phi_2 - \phi_1) + b - \phi_2}{n\,(\phi_1 - \phi_2) + b - \phi_1} \tag{15}$$

Compte tenu de (10) , si $\phi_2 < \phi_1$, $\phi_2' > \phi_1'$. Par ailleurs, $c_1^- < c^* < c_2^-$. Par conséquent, d'après le lemme 1, $\phi_2\,(b) > \phi_1\,(b)$ pour tout $b > \underline{b}$. Ce résultat reste vrai pour tout $b > \underline{b}_2$ en l'absence d'offre minimale commune d'où [8] :

PROPOSITION 2 : Lorsqu'elles sont définies sur $[\underline{b},\, c^+]$ ou $[\underline{b}_2,\, c^+]$, les stratégies des agents du groupe I sont moins agressives que celles des agents du groupe II.

4 Détermination des stratégies en présence d'une offre minimale commune

Les stratégies optimales sont solution du système (5). Après transformation de ce système (*cf.* annexe 2), on obtient :

7. Cf. P. MILGROM et R. WEBER (1981).
8. La proposition 2 est un cas particulier du lemme 3.1 de MASKIN et RILEY (1986).

$$(16) \qquad \frac{c^+ - b}{c^+ - \phi_2} + \frac{c^+ - b}{c^+ - \phi_1} = \frac{1}{D} \quad \text{avec} \quad D = \frac{n}{2n-1}$$

A partir de (16), on peut mettre en évidence les conditions d'existence d'une offre minimale commune, caractériser les stratégies optimales et établir leurs propriétés.

4.1. **Existence d'une offre minimale commune**

S'il existe une offre minimale commune, pour $\mathrm{b} = \underline{b}$, $\phi_i(\underline{b}) = c_i^-$, $\forall\, i \in \{1, 2\}$, et (16) s'écrit :

$$(17) \qquad \underline{b} = c^+ - \frac{2n-1}{n} \cdot \frac{l_1\, l_2}{l_1 + l_2}$$

Cette offre minimale commune $\underline{b}$ doit satisfaire deux conditions :

i) $\underline{b} \geq c_2^-$: le profit en cas de victoire est non négatif

ii) $\underline{b} \geq nc_2^- + (1-n)\, c_1^-$: $\underline{b}$ doit être associée à une offre croissante (*cf.* condition (14)).

Par suite, $\underline{b} \geq \max[c_2^-, nc_2^- + (1-n)\, c_1^-] = nc_2^- + (1-n)\, c_1^-$ pour $c_2^- > c_1^-$. Il en résulte que l'existence de $\underline{b}$ est conditionnée par le nombre d'entreprises et les domaines de définition des coûts de production. Compte tenu de (17), on peut énoncer la proposition 3 :

PROPOSITION 3 : L'offre minimale commune $\underline{b}$ existe si $n^2\, l_2^2 - (n-1)\, l_1\, l_2 + (n - n^2)\, l_1^2 \geq 0$, soit si:

$$(18) \qquad l_1 > l_2 \geq l_1 \left[\frac{(n-1) + \sqrt{(n-1)\,(4n^3 + n - 1)}}{2n^2}\right]$$

L'existence de l'offre minimale commune dépend du degré d'asymétrie $1 - l_2/l_1$ et du nombre d'agents. Compte tenu de la proposition 3, il existe une relation inverse entre ces paramètres : plus le nombre d'agents est élevé, plus le degré d'asymétrie doit être faible pour qu'il y ait une offre commune. Ainsi pour $\mathrm{n} = 2$, l_2/l_1 doit être supérieur à 0,845 et pour $\mathrm{n} = 5$ supérieur à 0,977. En dehors de la situation de duopole, l'existence de cette offre $\underline{b}$ est donc conditionnée par une faible asymétrie.

4.2. **Détermination des stratégies**

Lorsqu'il existe une offre minimale commune, la résolution du système d'équations (6) (*cf.* annexe 2), permet d'obtenir une relation implicite entre c_i et $b_i = b\,(c_i)\, \forall\, c_i \in [c_i^-, c_i^+]$, d'où la proposition suivante :

PROPOSITION 4 : Pour tout agent appartenant au groupe i, $i=1,2$, lorsque la condition (18) d'existence d'une offre minimale commune est satisfaite, l'offre optimale $b_i = b(c_i)\ \forall\, c_i \in [c_i^-,\, c_i^+]$ est déterminée par :

$$\text{(19)} \quad \left[\frac{c^+ - c_i}{c^+ - b_i} - \frac{n}{2n-1}\right]^{2n^2-2n} \left[\frac{c^+ - c_i}{c^+ - b_i} - \frac{2n}{2n-1}\right] = \alpha_i \, \frac{[c^+ - c_i]^{(2n-1)^2}}{(c^+ - b_i)^{1-2n}}$$

avec

$$\text{(20)} \quad \begin{aligned} b(c^+) &= c^+ \\ b(c_i^-) &= c^+ - \frac{2n-1}{n}\,\frac{l_1\,l_2}{l_1+l_2} \\ \alpha_1 = -\alpha_2 &= \left[\frac{n}{(2n-1)\,l_1\,l_2}\right]^{2n^2} [l_1+l_2]^{2n-1}\,[l_1-l_2] \end{aligned}$$

Preuve : *cf.* annexe 2.

Les stratégies optimales définies par la proposition 4 sont strictement croissantes. On peut également montrer qu'elles sont uniques :

PROPOSITION 5 : Quand il existe une offre minimale commune satisfaisant la condition (17), les stratégies optimales sont uniques.

Preuve : *cf.* annexe 3.

4.3. **Résolution numérique et approximation des stratégies d'équilibre**

(19) peut être résolue numériquement. Toutefois, en modifiant cette équation, on peut déterminer une forme générale des stratégies d'équilibre bayésien. Pour celà, posons :

$$b_i(c) = c^+ - \frac{c^+ - c}{2D}\, d_i(c) \text{ avec } b_i(c^+) = c^+ \text{ et } D = \frac{n}{2n-1}$$

d'où l'on déduit :

$$d_i(c) = \frac{2D\,(c^+ - b)}{c^+ - c}$$

En substituant la valeur de $d_i(c)$ dans (19), on obtient après regroupement des termes :

$$\text{(21)} \quad 2^{2n} \cdot (2-d_i)^{2n(n-1)}\,(1-d_i) = \alpha_i\,(c^+ - c)^{2n(2n-1)}\, d_i^{2n^2}\, D^{-2n^2}$$

Quand c tend vers c^+, d_i tend vers 1 et :

$$1 - d_i \approx \frac{\alpha_i\,(c^+ - c)^{2n\,(2n-1)}}{2^{2n}\,D^{2n^2}}$$

Posons :

$$a_i = \frac{\alpha_i}{2^{2n}\,D^{2n^2}} = \left[\frac{1}{l_1\,l_2}\right]^{2n^2} \left[\frac{l_1 + l_2}{2}\right]^{2n-1} \left[\frac{l_i - l_j}{2}\right] \tag{22}$$

Par suite, quand c tend vers c^+, $1 - d_i \approx a_i\,(c^+ - c)^{2n\,(2n-1)}$. D'où si l'on pose $d_i = 1 - a_i\,(c^+ - c)^{2n\,(2n-1)} \cdot w_i\,((c^+ - c)^{2n\,(2n-1)}$ avec $w_i > 0$, en substituant dans (21) on obtient :

$$\begin{aligned} &w_i\,(\cdot)\,[1 + a_i \cdot (c^+ - c)^{4n^2-2n}\,w_i\,(\cdot)]^{2n^2-n} \\ &\quad = [1 - a_i \cdot (c^+ - c)^{4n^2-2n}\,w_i\,(\cdot)]^{2n^2} \end{aligned} \tag{23}$$

En revenant à la formulation de $b_i\,(c)$, on peut donc établir la proposition suivante :

PROPOSITION 6 : Quand il existe une offre minimale commune, la stratégie optimale d'une entreprise du groupe i s'écrit :

$$b_i\,(c) = \frac{c^+}{2n} + \frac{(2n-1)}{2n}\,c + \frac{(2n-1)}{2n}\,a_i\,[c^+ - c]^{4n^2-2n+1}\,w_i\,(\cdot) \tag{24}$$

a_i étant définie par (22) et $w_i\,(\cdot)$ solution de (23).

La stratégie d'équilibre bayésien des deux groupes d'agents est donc une offre b(c) égale à la somme de trois termes. Les deux premiers correspondent à la stratégie symétrique quand 2 n entreprises ayant des croyances uniformes identiques sont en concurrence pour l'attribution du contrat. Le troisième terme apparaît comme un terme correcteur différent pour les deux groupes d'agents et exprimant un *mark-up dû à l'asymétrie*. Comme $a_1 > 0$, les entreprises du groupe I ayant en moyenne un coût de production plus bas surévaluent leur offre d'un montant plus élevé dans le cas asymétrique que dans le cas symétrique. Elles ont donc des *stratégies moins agressives* que les stratégies d'équilibre symétrique. A l'inverse, les stratégies des entreprises du groupe II, en moyenne moins compétitives, adoptent des *stratégies plus agressives* que leurs stratégies d'équilibre symétrique en réduisant leur mark-up stratégique [9].

On peut d'autre part vérifier que les stratégies des agents a priori les moins compétitifs sont concaves alors que les stratégies des agents a priori les plus compétitifs sont convexes alors que dans le cas symétrique elles sont linéaires. Enfin on vérifie que lorsque l_2 converge vers l_1, a_i tend vers 0 et w_i vers 1 : les deux stratégies convergent vers la stratégie symétrique.

---

9. Ce qui est conforme à la proposition 2.

4.4. **Application : duopole de Bertrand avec quantité fixe**

Un cas particulier permettant une résolution analytique du système d'équations différentielles est celui du duopole de Bertrand avec quantité fixe. Si $n = 1$, $\underline{b}_1 = \underline{b}_2 \cdot \forall\, i \in [1,\, 2]$, (19) devient :

$$(2b_i - c^+ - c_i) = \alpha_i\,(c^+ - b_i)^2\,(c^+ - c_i)$$

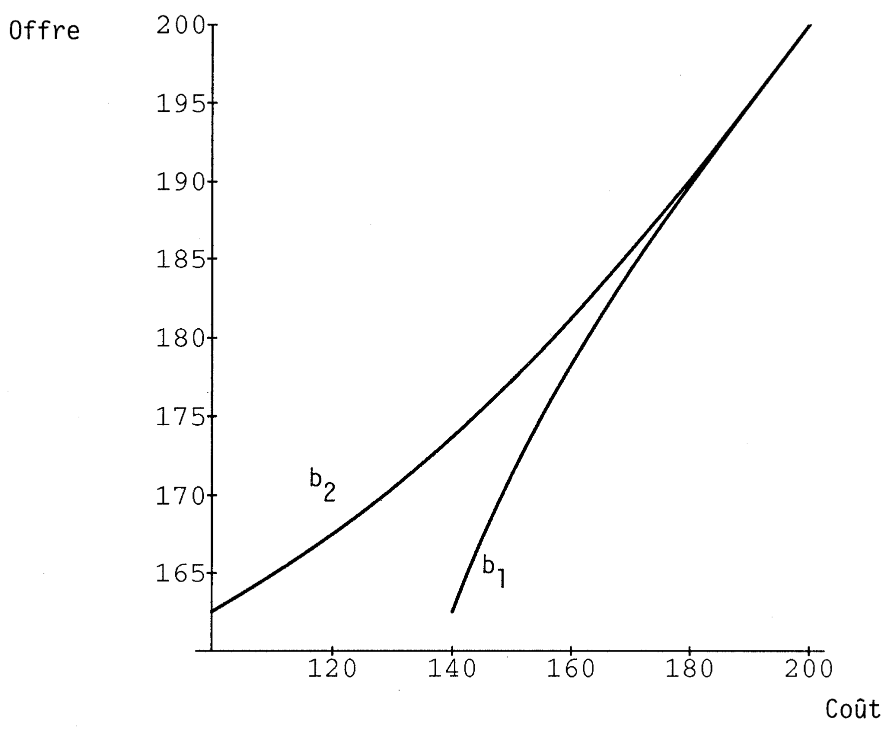
la constante d'intégration étant définie par (20). Les stratégies optimales des offreurs 1 et 2 dans le cas du duopole asymétrique de Bertrand avec quantité fixe s'écrivent :

$$b_1 = c^+ - \frac{\sqrt{1 + \alpha\,(c^+ - c_1)^2} - 1}{\alpha\,(c^+ - c_1)}$$

$$b_2 = c^+ - \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha\,(c^+ - c_2)^2}}{\alpha\,(c^+ - c_2)}$$

avec $0 \leq \alpha = (l_1^2 - l_2^2)/l_1^2\, l_2^2 \leq 1$

Ces stratégies sont équivalentes à celles qu'ont déterminées GRIESMER, LEVITAN et SHUBIK [1967] ou MASKIN et RILEY [1986] dans le cas d'une vente. Le graphique 1 les représente lorsque $l_1 = 100$, $l_2 = 60$ et $c^+ = 200$.



GRAPHIQUE 1

Stratégies d'équilibre bayésien
$n = 1$, $l_1 = 100$, $l_2 = 60$

5 Caractérisation des stratégies optimales en l'absence d'une offre minimale commune

Quand $\underline{b}_1 \neq \underline{b}_2$, les stratégies optimales sont caractérisées par (6) pour tout b supérieur à $\underline{b}_2$ et par (7) et (9) pour les offres comprises entre $\underline{b}_1$ et $\underline{b}_2$. Par ailleurs, les conditions de croissance des stratégies sont définies par (12) et (13) pour b supérieur à $\underline{b}_2$. Compte tenu de ces relations, on peut déterminer la première offre commune $\underline{b}_2$ et caractériser les stratégies optimales des agents du groupe I pour $b < \underline{b}_2$ et de l'ensemble des agents pour $b \geq \underline{b}_2$.

5.1. Détermination de la première offre commune

Par définition, $\underline{b}_2$ est la première offre commune. D'après (9), en $b = \underline{b}_2$, on a $\underline{b}_2 - nc_2^- + (n-1)\, c^* \leq 0$. D'autre part, la condition de croissance (11) donne en $b = \underline{b}_2$, $\underline{b}_2 - nc_2^- + (n-1)\, c^* \geq 0$. $\underline{b}_2$ est donc solution de :

$$\underline{b}_2 - nc_2^- + (n-1)\, c^* = 0 \tag{25}$$

Par ailleurs, la résolution de (6) pour $b \in]\underline{b}_2,\, c^+]$ donne :

$$\underline{b}_2 = c^+ - \frac{2n-1}{n} \cdot \frac{l^*\, l_2}{(l^* + l_2)} \tag{26}$$

d'où compte-tenu de (25) et (26) :

$$l^* = l_2 \left[\frac{(n-1) - \sqrt{(n-1)\,(4n^3 + n - 1)}}{2\,(n - n^2)} \right] \tag{26'}$$

et

$$\underline{b}_2 = c^+ - l_2 \left[\frac{2n^2 + n - 1 - \sqrt{(n-1)\,(4n^3 + n - 1)}}{2n} \right] \tag{27}$$

5.2. Stratégies optimales sur $[\underline{b}_2,\, c^+]$

Dans ce domaine, les stratégies solution de (19) sont définies par l'équation (24) dans laquelle l_1 est remplacée par l^* dans la définition des paramètres a_1 et a_2. Ces stratégies possèdent les mêmes propriétés que les stratégies (24) sur $[\underline{b}_2,\, c^+]$: $b_1\,(c)$ est croissante et convexe alors que $b_2\,(c)$ est croissante et concave.

5.3. **Stratégies optimales sur** $[\underline{b}_1, \underline{b}_2]$

Quand $b \leq \underline{b}_2$, seuls les agents du groupe I sont susceptibles d'effectuer des offres lorsque leur coût est inférieur à c*. La stratégie optimale est alors solution de (7) et est définie par (*cf.* annexe 4) :

$$(28)\;\; b_1\,(c) = \frac{c^+}{n} + \frac{n-1}{n}\,c + \frac{l^{*^n}}{(c^+ - c)^{n-1}} \cdot \frac{n\,(l^* - l_2) - l^*}{n\,(l^* + l_2)}\; \forall c \in [c_i^-,\, c^*]$$

Cette stratégie correspond à la stratégie optimale symétrique d'une enchère à n agents avec une valeur de réserve $\underline{b}_2$. La première offre commune associée au passage d'un appel d'offres à n agents à un appel d'offres à 2n agents joue ainsi le même rôle que la valeur de réserve en incitant les offreurs du groupe I à réduire leurs soumissions. On peut donc énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 7 : En l'absence d'une offre minimale commune, les entreprises des deux groupes ont des stratégies caractérisées par (19) et (20) sur l'intervalle où elles participent toutes à l'appel d'offres (avec $l_1 = l^*$ en (20)). Dans l'intervalle où les firmes du groupe I sont les seules à participer, la stratégie est définie par (28).

Comme $db_1/dc_1 > 0$ et $d^2b_1/dc_1^2 < 0$ la stratégie optimale des agents du groupe I est concave quand $c_1 < c^*$. Ces offreurs ont donc des stratégies concaves puis convexes alors que les entreprises du groupe II ont une stratégie toujours concave. Remarquons, par ailleurs, que $b_1(c)$ est toujours supérieure à la stratégie d'équilibre symétrique quand 2n entreprises ont des coûts appartenant à $[c_1^-,\, c^+]$ et inférieure à la stratégie d'équilibre symétrique quand n firmes ont des coûts appartenant à $[c_1^-,\, c^+]$.

Il importe enfin de souligner une conséquence de l'absence d'offre minimale commune : si les agents du groupe II ont, dans tous les cas, une stratégie optimale croissante et *concave*, les agents du groupe 1 ont une stratégie croissante *concave puis convexe* quand $\underline{b}_1 \neq \underline{b}_2$ alors qu'ils ont une stratégie croissante toujours convexe quand $\underline{b}_1 = \underline{b}_2$.

5.4. **Application**

Considérons à nouveau le cas où $l_1 = 100$, $l_2 = 60$ et $\mathrm{n} = 2$: alors $\mathrm{c}^* = 128,83$, $\underline{b}_2 = b_1\,(c^*) = 151,16$ et $\underline{b}_1 = 140,57$. Le tableau 2 indique les offres d'équilibre des deux groupes représentées par le graphique 2. Dans ce tableau, pour $b \geq \underline{b}_2$, les stratégies sont déterminées par résolution numérique de (19) alors que pour $b \geq \underline{b}_2$, l'expression analytique (28) est retenue.

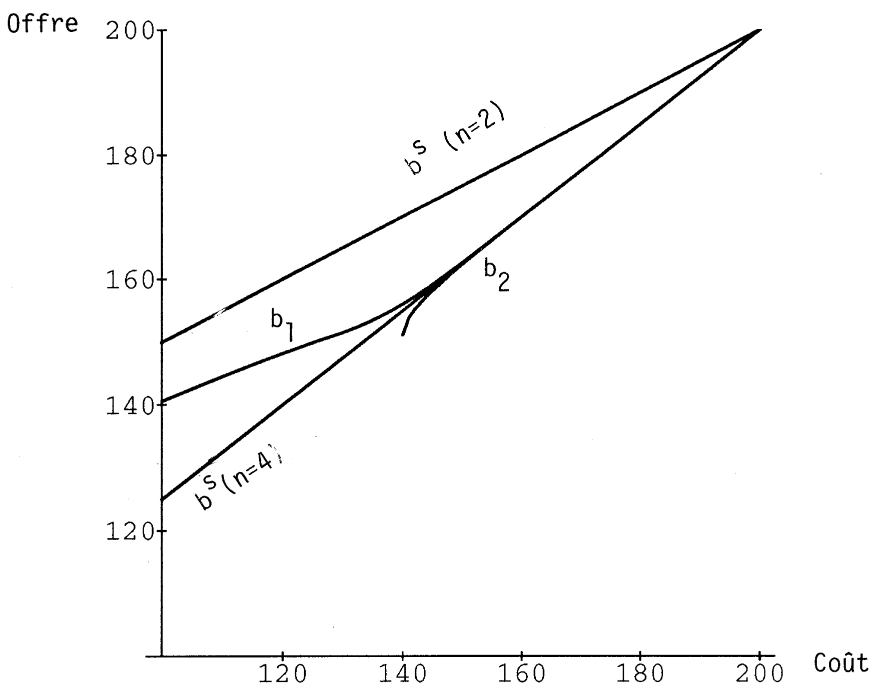
TABLEAU 1

Stratégies otimales $n = 2$***,*** $l_1 = 100$***,*** $l_2 = 60$***.***

c	b_1	b_2	Offre symétrtique	
			$n = 4$	$n = 2$
100	140,572		125	150
105	142,576		128,75	152,5
110	144,524		132,5	155
115	146,408		136,25	157,5
120	148,215		140	160
125	149,929		143,75	162,5
128,832	151,168		146,624	164,416
130	151,548		147,5	165
132	152,265		149	166
134	153,07		150,5	167
136	153,968		152	168
138	154,962		153,5	169
140	156,053	151,168	155	170
142	157,233	155,225	156,5	171
144	158,494	157,306	158	172
146	159,822	159,01	159,5	173
148	161,204	160,76	161	174
150	162,625	162,363	162,5	175
152	164,075	163,921	164	176
154	165,543	165,455	165,5	177
156	167,025	166,975	167	178
158	168,513	168,486	168,5	179
160	170,007	169,992	170	180
170	177,501	177,499	177,5	185
180	185	185	185	190
190	192,5	192,5	192,5	195
200	200	200	200	200

6 Généralisations et conclusions

Les résultats précédents montrent l'importance de l'hypothèse d'homogénéité des offreurs dans la théorie des enchères. La remarquable simplicité du modèle symétrique à valeurs privées indépendantes disparaît, en effet, dès que l'on introduit une petite dose d'hétérogénéité. Alors que dans le cas symétrique, la stratégie d'équilibre consiste à ajouter au coût de production un mark-up stratégique lié à l'évaluation de la seconde offre conditionnée par le fait d'être le vainqueur, en asymétrie, les agents doivent corriger ce mark-up, en plus ou moins pour tenir compte des différences des croyances. Malheureusement, en raison de l'absence de solution analytique au système d'équations différentielles caractérisant les stratégies, il n'est en général pas possible de spécifier de façon simple ce mark-up. Nous avons pu cependant montrer que dans le cas de deux groupes d'agents ayant des croyances représentées par des lois uniformes



GRAPHIQUE 2

Stratégies optimales (b_1, b_2) ***pour*** $\mathrm{n} = 2$, $l_1 = 100$, $l_2 = 60$
Stratégies symétriques $(\mathrm{b}^{\mathrm{S}})$ ***pour*** $\mathrm{n} = 2$, $\mathrm{n} = 4$ ***et*** $l_1 = l_2 = 100$

différentes, il était possible de fournir une approximation des stratégies d'équilibre asymétrique dont la stratégie symétrique est un cas particulier. Toutefois le terme correcteur doit faire l'objet d'un calcul numérique et ne peut recevoir une interprétation économique simple.

Par ailleurs, l'analyse montre qu'un problème essentiel résultant de l'asymétrie est le fait que les stratégies ne sont plus nécessairement définies sur les mêmes domaines, l'existence d'une offre minimale commune (caractéristique du duopole asymétrique) n'étant vérifiée que dans des cas particuliers (asymétrie de plus en plus faible quand le nombre d'entreprises augmente). En l'absence de cette offre commune, les agents appartenant au groupe a priori plus compétitif sont seuls à participer lorsque leur coût est inférieur à un seuil c^* déterminé de manière endogène. Or compte tenu de (26′), quand n augmente l^* tend vers l_2. Le seuil c^* converge vers la borne inférieure des coûts des agents du groupe II. Par ailleurs, on peut vérifier que le mark-up dû à l'asymétrie défini par (22), (23) et (24) tend vers zéro quand n augmente. Il est, d'autre part, décroissant avec la valeur du coût. Par suite, les stratégies optimales peuvent être approximées par la stratégie symétrique d'un appel d'offres à n agents avec valeur de réserve $\underline{b}_2$ sur le domaine où les agents du groupe I sont les seuls participants et la stratégie symétrique d'un appel d'offre à 2n agents au-delà de $\underline{b}_2$. Lorsque ces deux régimes sont identifiés, les résultats du modèle symétrique constituent une bonne approximation des stratégies optimales. Ce modèle retrouve donc sa portée empirique quand le nombre d'agents dans chaque groupe augmente.

Si l'impact de l'asymétrie n'est important dans notre contexte qu'en duopole, il n'en est pas de même dans des contextes plus généraux d'asymétrie. Ainsi si l'on suppose que n offreurs i ont leurs croyances définies par des lois $F_i(\cdot)$ sur des supports $[c_i^-, c^+]$, la résolution du système d'équations différentielles caractérisant les stratégies optimales implique que n entreprises font des offres sur un domaine $[\underline{b}_n, c^+]$, (n–1) sur $[\underline{b}_{n-1}, \underline{b}_n[$, $(n-2)$ sur $[\underline{b}_{n-2}, \underline{b}_{n-1}] \ldots$ et une seule sur $[\underline{b}_1, \underline{b}_2]$. Dans cette situation, qui correspond à la notion de « facteur Getty » ou à des coûts d'opportunité variant d'un agent à l'autre, le modèle symétrique ne fournit plus nécessairement une bonne approximation des stratégies optimales.

Enfin, on peut vérifier l'invalidation du théorème de l'équivalence du coût caractéristique du modèle symétrique à valeurs privées. Compte tenu de la spécification des stratégies d'équilibre, la comparaison des enchères ne peut s'effectuer qu'à partir d'un calcul numérique. Cependant dans le cas du duopole et de lois uniformes, on peut retrouver le résultat de VICKREY [1961] et de MASKIN et RILEY [1986] de supériorité de l'appel d'offres au premier prix [10]. En effet, compte tenu de la proposition 6, l'espérance mathématique du prix de passation s'écrit quand l'acheteur utilise un appel d'offres au premier prix :

$$\overline{p}_1 = \int_{\underline{b}}^{c^+} b\,(1 - F_2\,(\phi_2\,(b)))\,g_1\,(b)\,db + \int_{\underline{b}}^{c^+} b\,(1 - F_1\,(\phi_1\,(b)))\,g_2\,(b)\,db$$

en notant $g_i\,(b)$ la fonction de densité du prix payé d'où :

$$\begin{aligned}\overline{p}_1 = c^+ &- \frac{l_1\,l_2}{l_1 + l_2} - \frac{l_1^2\,l_2^2}{(l_1^2 - l_2^2)^{3/2}} \\ &\times \left(-\ln\left|\frac{(l_1^2 - l_2^2)^{1/2} + l_1 + l_2}{(l_1^2 - l_2^2)^{1/2} - l_1 - l_2}\right| + 2\,\mathrm{Arc\;tg}\,\frac{(l_1^2 - l_2^2)^{1/2}}{l_1 + l_2}\right)\end{aligned}$$

Si un appel d'offres au second prix est utilisé, la stratégie dominante consistant, comme dans le cas symétrique, à annoncer son coût, le prix escompté s'écrit :

$$\overline{p}_2 = \int_{c_2^-}^{c^+} x \cdot [F_1\,(x) \cdot F_2'\,(x) + F_2\,(x) \cdot F_1'\,(x)]\,dx = c^+ + \frac{l_2^2}{6\,l_1} - \frac{l_2}{2}$$

On vérifie aisément que lorsque $l_1 > l_2$, le prix moyen de passation dans un appel d'offres au premier prix est inférieur au prix moyen de passation dans un appel d'offres au second prix. Remarquons cependant que conformément à l'analyse de l'enchère optimale (MYERSON [1981]), ces deux procédures sont dominées par un mécanisme discriminatoire qui pénalise l'entreprise a priori la plus compétitive.

---

10. Ce résultat a été démontré sous ces hypothèses restrictives par MASKIN et RILEY, hypothèses satisfaites par des lois uniformes (*Cf.* Maskin et Riley (1986), proposition 3.6).

ANNEXE 1

CONDITIONS SUFFISANTES

Pour analyser les conditions suffisantes [11], il convient de distinguer deux cas, en fonction de l'existence ou non d'une offre minimale commune.

A 1.1. **Existence d'une offre minimale commune :** $\underline{b}_1 = \underline{b}_2 = \underline{b}$

$\forall\, i \in \{1, 2\}$, $\forall\, j \in \{1, 2\}$, $j \neq i$, on doit vérifier :

$$(\text{A1.1}) \qquad (b - \phi_i(b)) \left(\frac{c^+ - \phi_i(b)}{l_i}\right)^{n-1} \left(\frac{c^+ - \phi_j(b)}{l_j}\right)^n \geq (\tilde{b} - \phi_i(b)) \left(\frac{c^+ - \phi_i(\tilde{b})}{l_i}\right)^{n-1} \left(\frac{c^+ - \phi_j(b)}{l_j}\right)^n$$

La relation (A 1.1.) doit être vérifiée pour $b \in [\underline{b}, c^+]$ et $\tilde{b} \in [\underline{b}, c^+]$. Notons $B(\tilde{b})$ le terme de droite de l'inégalité. On a alors :

$$\frac{dB(\tilde{b})}{d\tilde{b}} = \left(\frac{c^+ - \phi_i(\tilde{b})}{l_i}\right)^{n-1} \left(\frac{c^+ - \phi_j(\tilde{b})}{l_j}\right)^n \times \left[1 - (\tilde{b} - \phi_i(b)) \left[(n-1)\frac{\phi_i'(\tilde{b})}{c^+ - \phi_i(\tilde{b})} + n\,\frac{\phi_j'(\tilde{b})}{c^+ - \phi_j(\tilde{b})}\right]\right]$$

qui s'écrit, si les conditions nécessaires (6) sont vérifiées, pour $\tilde{b} \in [\underline{b}, c^+]$:

$$\frac{dB(\tilde{b})}{d\tilde{b}} = \left(\frac{c^+ - \phi_i(\tilde{b})}{l_i}\right)^{n-1} \left(\frac{c^+ - \phi_j(\tilde{b})}{l_j}\right)^n \left[1 - \frac{\tilde{b} - \phi_i(b)}{\tilde{b} - \phi_i(\tilde{b})}\right]$$

Comme ϕ_i est croissant, $\dfrac{dB}{d\tilde{b}} \gtreqqless 0$ pour $\tilde{b} \lesseqqgtr b$ et $B(\tilde{b})$ atteint donc un maximum pour $\tilde{b} = b$.

La relation (A 1.1.) est vérifiée pour $\tilde{b} = \underline{b}$. Par conséquent, on a :

$$\underline{b} - \phi_1(b) \leq (b - \phi_i(b)) \left(\frac{c^+ - \phi_i(b)}{l_i}\right)^{n-1} \left(\frac{c^+ - \phi_j(b)}{l_j}\right)^n$$

Les conditions (6) sont donc nécessaires et suffisantes.

---

11. La démonstration reprend la méthode de MASKIN et RILEY [1984].

A 1.2. **Absence d'une offre minimale commune :** $\underline{b}_1 < \underline{b}_2$

Considérons d'abord le cas de l'agent 1. Deux cas doivent être considérés : $b \in [\underline{b}_2, c^+]$ et $b \in [\underline{b}_1, \underline{b}_2]$.

a) Pour $b \in [\underline{b}_2, c^+]$, on a à nouveau deux possibilités :

i) $\tilde{b} \in [\underline{b}_2, c^+]$,

ii) $\tilde{b} \in [\underline{b}_1, \underline{b}_2]$.

Le cas i) est identique au cas étudié dans A.1.1. Concernant ii), on doit vérifier :

$$\begin{aligned}&(b-\phi_1(b))\left(\frac{c^+-\phi_1(b)}{l_1}\right)^{2n-1}\left(\frac{c^+-\phi_2(b)}{l_2}\right)^{n}\\&\geq(\tilde{b}-\phi_1(b))\left(\frac{c^+-\phi_1(\tilde{b})}{l_1}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

D'après i) et en notant A le terme de gauche de l'inégalité, on a :

$$A \geq (\underline{b}_2-\phi_1(b))\left(\frac{c^+-\phi_1(\underline{b}_2)}{l_1}\right)^{n-1}$$

Il suffit donc de démontrer que $(\tilde{b}-\phi_1(b))\left(\frac{c^+-\phi_1(\tilde{b})}{l_1}\right)^{n-1}$ est croissant en $\tilde{b}$. En notant $B(\tilde{b})$ cette expression, on a :

$$\frac{dB(\tilde{b})}{d\tilde{b}}=\left(\frac{c^+-\phi_1(\tilde{b})}{l_1}\right)^{n-1}\left[1-\frac{(n-1)\,\phi_1'(\tilde{b})}{c^+-\phi_1(\tilde{b})}\cdot(\tilde{b}-\phi_1(b))\right]$$

Si la condition (7) est vérifiée, pour $\tilde{b} \in [\underline{b}_1, \underline{b}_2]$, on a :

$$\frac{dB(\tilde{b})}{d\tilde{b}}=\left(\frac{c^+-\phi_1(\tilde{b})}{l_1}\right)^{n-1}\left[1-\frac{\tilde{b}-\phi_1(b)}{\tilde{b}-\phi_1(\tilde{b})}\right]$$

Comme ϕ_1 est croissant, $\phi_1(b) > \phi_1(\tilde{b})$, et $\frac{dB(\tilde{b})}{d\tilde{b}} > 0$ et ii) est vérifié. On en déduit :

$$A \geq (\underline{b}_2-\phi_1(b))\left(\frac{c^+-\phi_1(\underline{b}_2)}{l_1}\right)^{n-1} \geq \underline{b}_1-\phi_1(b)$$

Donc les conditions (6) et (7) sont nécessaires et suffisantes dans le cas ii)

b) Pour $b \in [\underline{b}_1, \underline{b}_2]$, on doit à nouveau considérer :

i) $\tilde{b} \in [\underline{b}_1, \underline{b}_2]$,

ii) $\tilde{b} \in [\underline{b}_2, c^+]$.

Pour i), on doit vérifier :

$$(b-\phi_1(b))\left(\frac{c^+-\phi_1(b)}{l_1}\right)^{n-1} \geq (\tilde{b}-\phi_1(b))\left(\frac{c^+-\phi_1(\tilde{b})}{l_1}\right)^{n-1}$$

D'après la démonstration du cas a) ii), pour $b \in [\underline{b}_1, \underline{b}_2]$ et $\tilde{b} \in [\underline{b}_1, \underline{b}_2]$ $\frac{dB(\tilde{b})}{d\tilde{b}} \gtreqless 0$ pour $\tilde{b} \lesseqgtr b \cdot B(\tilde{b})$ atteint donc un maximum pour $\tilde{b} = b$ si la condition (7) est satisfaite.

Pour le cas ii), on doit vérifier que :

$$
\begin{aligned}
&(b - \phi_1(b)) \left(\frac{c^+ - \phi_1(b)}{l_1} \right)^{n-1} \\
&\qquad \geq (\tilde{b} - \phi_1(b)) \left(\frac{c^+ - \phi_1(\tilde{b})}{l_1} \right)^{n-1} \left(\frac{c^+ - \phi_2(\tilde{b})}{l_2} \right)^{n} = B(\tilde{b})
\end{aligned}
$$

Or, d'après le résultat du paragraphe A.1.1., $\frac{dB(\tilde{b})}{d\tilde{b}} < 0$ pour $\tilde{b} > b$. Par suite $(\underline{b}_2 - \phi_1(b)) \left(\frac{c^+ - \phi_1(\underline{b}_2)}{l_1} \right)^{n-1} \geq B(\tilde{b})$ pour $\tilde{b} \geq \underline{b}_2$.

Par ailleurs $(\tilde{b} - \phi_1(b)) \left(\frac{c^+ - \phi_1(\tilde{b})}{l_1} \right)^{n-1}$ est décroissant en $\tilde{b}$ pour $\tilde{b} > b$. Il en résulte donc :

$$
\begin{aligned}
&(b - \phi_1(b)) \left(\frac{c^+ - \phi_1(b)}{l_1} \right)^{n-1} \\
&\qquad \geq (\underline{b}_2 - \phi_1(b)) \left(\frac{c^+ - \phi_1(\underline{b}_2)}{l_1} \right)^{n-1} \geq B(\tilde{b}) \text{ pour } \tilde{b} \in [\underline{b}_2, c^+].
\end{aligned}
$$

Par suite, l'espérance de gain des agents du groupe I est maximisée si et seulement si les conditions (6) et (7) sont satisfaites.

Considérons maintenant le cas de l'agent 2. On doit à nouveau vérifier la relation (A 1.1.) pour $b \in [\underline{b}_2, c^+]$ et pour $\tilde{b} \in [\underline{b}_2, c^+]$, pour i= 2 et j= 1. La démonstration de ce cas est analogue à celle du paragraphe A.1.1. Pour le cas où $\tilde{b} \in [\underline{b}_1, \underline{b}_2]$, on doit vérifier :

$$
\text{(A.1.2.)} \qquad
\begin{aligned}
&(b - \phi_2(b)) \left(\frac{c^+ - \phi_1(b)}{l_1} \right)^{n} \left(\frac{c^+ - \phi_2(b)}{l_2} \right)^{n-1} \\
&\qquad \geq (\tilde{b} - \phi_2(b)) \left(\frac{c^+ - \phi_1(\tilde{b})}{l_1} \right)^{n}
\end{aligned}
$$

Notons A et B deux membres de cette inégalité. Si $\phi_2(\cdot)$ est stratégie d'équilibre, compte-tenu des conditions nécessaires :

$$
A \geq (\underline{b}_2 - \phi_2(b)) \left(\frac{c^+ - \phi_1(\underline{b}_2)}{l_1} \right)^{n}
$$

Il suffit donc de montrer que B est croissant en $\tilde{b}$ pour que (A.1.2) soit vérifié. Or :

$$
\frac{dB}{d\tilde{b}} = \left(\frac{c^+ - \phi_1(\tilde{b})}{l_1} \right)^{n} \left[1 - \frac{n\phi_1'(\tilde{b})}{c^+ - \phi_1(\tilde{b})} (\tilde{b} - \phi_2(b)) \right]
$$

Si ϕ_1 est stratégie d'équilibre sur $[\underline{b}_1, \underline{b}_2]$ $\frac{n\phi_1'(\tilde{b})}{c^+ - \phi_1(\tilde{b})} = \frac{n}{n-1} \frac{1}{\tilde{b} - \phi_1(\tilde{b})}$ d'où

$$\frac{dB}{d\tilde{b}} = \left(\frac{c^+ - \phi_1(\tilde{b})}{l_1}\right)^n \left[1 - \frac{n}{n-1}\,\frac{\tilde{b} - \phi_2(b)}{\tilde{b} - \phi_1(\tilde{b})}\right]$$

Comme $\tilde{b} - \phi_1(\tilde{b}) > 0$ par hypothèse, lorsque $\tilde{b} - \phi_2(b) > 0$ cette dérivée est positive si :

$$\frac{n}{n-1}\,\frac{\tilde{b} - \phi_2(b)}{\tilde{b} - \phi_1(\tilde{b})} \leq 1$$

d'où $\tilde{b} + (n-1)\,\phi_1(\tilde{b}) - n\,\phi_2(b) \leq 0$ pour $b \in [\underline{b}_2,\, c^+]$, $\tilde{b} \in [\underline{b}_1,\, \underline{b}_2]$

Cette relation doit être vraie, en particulier, au niveau de la première offre commune, c'est-à-dire pour $\mathrm{b} = \underline{b}_2$ d'où :

(A.1.3) $$\tilde{b} + (n-1)\,\phi_1(\tilde{b}) - n\,c_2^- \leq 0 \quad \forall\, \tilde{b} \in [\underline{b}_1,\, \underline{b}_2]$$

Par suite (A.1.2) est vérifiée si (A.1.3) est satisfaite. La condition (A.1.3) s'ajoute donc aux conditions (6) et (7) pour la détermination des stratégies optimales.

ANNEXE 2

RÉSOLUTION DU SYSTÈME

Les stratégies optimales sont soluton du système (5). Pour le résoudre, utilisons le changement de variables suivant :

$$U_i(x) = \frac{c^+ - \phi_1(c^+ - x)}{x} \text{ avec } x = c^+ - b$$

Le système s'écrit alors pour i et $j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$:

$$\text{[S1]} \qquad \frac{d}{dx}(x^{2n} U_i^{n-1} U_j^n) = x U_i \frac{d}{dx}(x^{2n-1} U_i^{n-1} U_j^n)$$

En posant $U = U_i^{n-1} U_j^n$, le système devient :

$$2n x^{2n-1} U = x U_i \frac{d}{dx}(x^{2n-1} U) - x^{2n} \frac{dU}{dx}$$

d'où

$$x^{2n-1} U = (x U_i - x) \frac{d}{dx}(x^{2n-1} \cdot U)$$

Par suite :

$$\frac{1}{x(U_i - 1)} = Ln(x^{2-1} \cdot U)' = (2n-1)\frac{x^{2n-2}}{x^{2n-1}} + (n-1)\frac{U_i'}{U_i} + n\frac{U_j'}{U_j}$$

On obtient donc le système [S2] :

$$\text{[S2]} \quad \begin{cases} (n-1)\dfrac{U_1'}{U_1} + n\dfrac{U_2'}{U_2} = \dfrac{1}{x} \cdot \left[\dfrac{1}{U_1 - 1} - (2n-1)\right] & \text{(A 2.1.)} \\ (n-1)\dfrac{U_2'}{U_2} + n\dfrac{U_1'}{U_1} = \dfrac{1}{x} \cdot \left[\dfrac{1}{U_2 - 1} - (2n-1)\right] & \text{(A 2.2.)} \end{cases}$$

avec $U_i(x) \geq 1$ par définition et compte-tenu de (A.2.1.) et (A.2.2.) $U_i(0) = \frac{2n}{2n-1} = 2D$ avec $D = \frac{n}{2n-1}$. En revenant au système [S 1] et en posant $t = x^2 U_1 U_2$, on obtient, en remplaçant U_1 par $\frac{t}{x^2 U_2}$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 t^{n-1} U_2) = xU_1 \frac{d}{dx}(x t^{n-1} U_2) = \frac{(xU_1)^n}{n} \cdot \frac{d}{dx}(xU_2)^n + t\frac{d}{dx}t^{n-1}$$

De même, en remplaçant U_2 par $\frac{t}{x^2 U_1}$, on obtient :

$$\frac{d}{dx}(x^2 t^{n-1} U_1) = \frac{(xU_2)^n}{n} \cdot \frac{d}{dx}(xU_1)^n + t\frac{d}{dx}t^{n-1}$$

En ajoutant les deux égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^2 t^{n-1}(U_1 + U_2) &= \frac{(xU_1)^n}{n} \cdot \frac{d}{dx}(xU_2)^n + \frac{(xU_2)^n}{n} \cdot \frac{d}{dx}(xU_1)^n \\ &\quad + 2t \cdot \frac{d\,t^{n-1}}{dx} \\ &= \frac{d\,t^n}{dx} \cdot \left(\frac{2n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient :

$$x^2\, t^{n-1}\,(U_1+U_2) = t^n \cdot \frac{2n-1}{n} + K$$

Pour $x = 0$, c'est-à-dire en $c = c^+$, $K = 0$. En divisant par t^n, on obtient :

$$\frac{x^2}{t}\,(U_1+U_2) = \frac{2n-1}{n}$$

soit :

$$\frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_1} = \frac{2n-1}{n} = \frac{1}{D}$$

On peut alors écrire U_2 en fonction de U_1 :

$$\frac{1}{U_2 - 1} = \frac{U_1 - D}{D - U_1\,(1-D)}$$

En exprimant $\frac{U_2'}{U_2}$ en fonction de $\frac{U_1'}{U_1}$, U_1 et U_2 dans (A 2.2.) et en remplaçant dans (A. 2.1.), on obtient, en utilisant l'égalité précédente :

(A2.3.) $$\frac{U_1'}{U_1} = \frac{1}{x}\left[D \cdot \frac{U_1 - D}{D - U_1\,(1-D)} - (1-D)\cdot\frac{1}{U_1 - 1} - 1\right]$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$U_1'\left[\frac{2D\,(1-D)}{U_1 - D} - \frac{1}{U_1} + \frac{(2D-1)^2}{U_1 - 2D}\right] = \frac{2D}{x}$$

On obtient de même :

$$U_2'\left[\frac{2D\,(1-D)}{U_2 - D} - \frac{1}{U_2} + \frac{(2D-1)^2}{U_2 - 2D}\right] = \frac{2D}{x}$$

avec $U_i\,(0) = 2D$ et $U_i\,(\underline{x}) = \frac{l_i}{c^+ - \underline{b}} = D\left[1 + \frac{l_i}{l_j}\right]$

Comme par hypothèse $l_1 > l_2$, on a $U_1\,(\underline{x}) > 2D > U_2\,(\underline{x})$ et dans [A 2.3.], seul le terme $U_i - 2D$ change de signe selon l'indice [12] : $U_1 - 2D > 0$ et $U_2 - 2D < 0$.

On obtient alors après intégration :

$$\frac{(U_i - D)^{2n\,(n-1)} \cdot (U_i - 2D)}{U_i^{(2n-1)^2}} = \alpha_i\, x^{2n\,(2n-1)} \quad \forall\, i = 1, 2$$

α_1 et α_2 étant déterminé en utilisant $U_i\,(\underline{x}) = \frac{l_i}{\underline{x}}$ d'où (20).

12. Comme $U_i \geq 1 > D$, $U_i'\,(x) < 0$ pour $1 < U_i < 2D$ et $U_i'\,(x) > 0$ pour $2D > U_i > D/(1-D)$ d'où $U_1\,(x) > 2D$ et $U_2\,(x) < 2D$.

ANNEXE 3

UNICITÉ DES SOLUTIONS

Ecrivons (19) sous la forme :

$$(\text{A3.1.})\quad \left[1-\frac{D}{U_i}\right]^{2n\,(n-1)}\left[1-\frac{2D}{U_i}\right]=(-1)^{i-1}\cdot\alpha\cdot x^{2n\,(2n-1)}\,U_i^{2n\,(n-1)}$$

Posons $\frac{2D}{U_i} = 1 + (-1)^i\,\nu\,(x)$ et $a = \alpha \cdot D^{2n\,(n-1)}\,2^{4n\,(n-1)}$. (A 3.1.) s'écrit alors :

$$(1-\nu^2\,(x))^{2n\,(n-1)}\,\nu\,(x) = a\cdot x^{2n\,(2n-1)}$$

Notons p (v) le premier membre de cette égalité et $p^{-1}\left(a\cdot x^{2n\,(n-1)}\right) = \nu \underset{\text{def}}{=} f\left(a\cdot x^{2n\,(n-1)}\right)$

La dérivée de p (v) s'annule pour $v = 1$ et $v = 1/(2\text{n}-1)$, lorsque l'on considère $v > 0$ (soit pour $l_1 > l_2$). Elle est négative pour $\nu \in \left]\frac{1}{2n-1},\, 1\right[$ et positive pour $\nu > 1$ et $\nu \in \left]0,\ \frac{1}{2n-1}\right[$. De plus $p(1) = 0$ et $p\left(\frac{1}{2n-1}\right) = \left(\frac{1}{2n-1}\right)\left(\frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2}\right)^{2n\,(n-1)}$. Comme v (x) est une fonction de x, $x \in [0,\ \underline{x}]$ et comme $v(0) = 0$ et $\nu\,(\underline{x}) = (l_1 - l_2)/(l_1 + l_2)$ par définition, la solution de (A 3.1.) est unique pour $\nu \in [0,\ \nu\,(\underline{x})]$ si $\nu\,(\underline{x}) \leq 1/(2n-1)$ soit si $l_2 \geq l_1\,(n-1)/n$, condition satisfaite par l'offre minimale commune.

DÉTERMINATIONS DES STRATÉGIES OPTIMALES SUR $[\underline{b}_1, \underline{b}_2]$

Les stratégies optimales sur $[\underline{b}_1, \underline{b}_2]$ sont soluton de :

$$(n-1)\frac{\phi_1'}{c^+ - \phi_1} = \frac{1}{b - \phi_1} \tag{A4.1.}$$

avec $\phi_1(\underline{b}_2) = c^*$ et $\phi_1(\underline{b}_1) = c_1^-$.

D'après (A 4.1.), $(n-1)\phi_1'(b-\phi_1) - (c^* - \phi_1) = 0$. En multipliant par $(c^+ - \phi_1)^{n-2}$, on obtient :

$$(n-1)\phi_1' \, b \cdot (c^+ - \phi_1)^{n-2} - (c^+ - \phi_1)^{n-1} - (n-1)\phi_1' (c^+ - \phi_1)^{n-2}\phi_1 = 0$$

qui s'intègre en :

$$b(c^+ - \phi_1)^{n-1} = (c^+ - \phi_1)^{n-1}\phi_1 + \frac{1}{n}(c^+ - \phi_1)^n + K.$$

Comme $\phi_1(\underline{b}_2) = c^*$, on déduit, en utilisant (26) :

$$K = \frac{l^{*n}}{n}\left(\frac{(n-1)\,l^* - nl_2}{l^* + l_2}\right)$$

d'où :

$$b_1(c_1) = c_1\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{c^+}{n} + \frac{l^{*n}}{(c^* - c)^{\,n-1}} \cdot \frac{n\,(l^* - l_2) - l^*}{n\,(l^* + l_2)}.$$

• Références bibliographiques

Cox, J., Smith, V. L., Walker, J. M. (1982). – "Auction Market Theory of Heterogeneous Bidders", *Economics Letters*, vol. 9, n° 4, pp. 319-325.

Griesmer, J. H., Levitan, R. E., Shubik, M. (1967). – "Toward a Study of Bidding Processes, part IV, Games with Unknown Costs", *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 14, pp. 415-433.

Laffont, J. J. (1995). – "La nouvelle économie de la réglementation dix ans après", *Revue d'économie industrielle*, numéro hors série, pp. 331-366.

Marshall, R. C., Meurer, M. J., Richard, J. M., Stromquist, W. (1991). – "Numerical Analysis of Asymmetric First Price Auctions", *mimeo*, Duke University.

Maskin, E., Riley, J. (1986). – "Asymetric Auctions", *mimeo*, Harvard University and UCLA.

Maskin, E., Riley, J. (1984). – "Optimal Auctions with Risk Averse Buyers", *Econometrica*, vol. 52, n° 6, pp. 1473-1518.

Mc Afee, R. P., Mc Millan, J. (1987). – "Auctions and Biddings", *Journal of Economic Litterature*, vol. XXV, pp. 699-738.

Milgrom, P., Weber, R. (1982). – "A Theory of Auctions and Competitive Bidding", *Econometrica*, vol. 50, pp. 1089-1122.

MYERSON, R. B. (1981). – “Optimal Auction Design”, *Mathematics of Operations Research*, vol. 6, n° 1, pp. 58-63.

PLUM, M. (1992). – “Characterization and Computation of Nash Equilibria for Auctions with Incomplete Information”, *International Journal of Game Theory*, vol. 20, pp. 393-418.

RILEY, J., SAMUELSON, W. (1981). – “Optimal Auctions”, *American Economic Review*, vol. 71, pp. 381-392.

VICKREY, W. (1961). – “Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders”, *Journal of Finance*, vol. 16, p. 8-37.