ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 46 — 1997

Une approche générale de l'externalité dans un réseau de communication

Jean-Marc BONNISEAU, Najoua CHABCHOUB*

RÉSUMÉ. – L'existence d'un réseau de communication induit une externalité entre les agents de l'économie. Dans cet article, nous proposons une nouvelle manière de modéliser cette externalité. En effet, plusieurs aspects et caractéristiques du réseau de communication sont pris en compte et ceci d'une façon personalisée alors que, dans les travaux antérieurs, seule la taille du réseau était considérée. Nous définissons la demande globale d'accès au réseau à partir de la disposition à payer la connection et le surplus maximal qu'un agent tire de l'existence du réseau. La notion d'état d'équilibre du réseau est définie comme un point fixe de l'application qui à chaque réseau associe la demande globale d'accès. Après avoir montrer que l'absence de réseau est un état d'équilibre, nous donnons une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un état d'équilibre non vide. Nous étudions ensuite la dynamique du réseau autour d'un équilibre et nous donnons une condition suffisante de stabilité locale.

A General Approach of the Externality in a Communication Network

ABSTRACT. – The existence of a communication network induces an externality among the agents of an economy. In this paper, we study the network externality whithin a new framework which extends models used in the literature. It allows to take into account many features of the interest of the consumers in the network and not only the network size as it was done in previous works. We define the global access demand to the network by using the household disposal to be connected to the network and the maximal surplus provided by the network to the agents. A network state of equilibrium is defined as a fixed-point of the mapping which associates to a network the global access demand. After having shown that the empty state is an equilibrium, we give a necessary and sufficient condition for the existence of a non-empty equilibrium state. We then study the dynamic around an equilibrium state and we give a sufficient condition for local stability.

* J. M. BONNISSEAU : CERMSEM, Université de Paris-1; N. CHABCHOUB : CEME, Université de Paris-1.

1 Introduction

La présence d'un réseau de communication introduit naturellement une externalité entre les agents de l'économie. Plus le nombre de personnes connectées au réseau est grand, plus les membres du réseau tirent de la satisfaction de celui-ci et plus un individu extérieur a intérêt à se connecter car il peut contacter un grand nombre de correspondants. Donc les préférences d'un agent dépendent des décisions de connexion des autres agents ce qui caractérise la notion d'externalité. Celle-ci a une grande influence sur la dynamique de développement d'un réseau car la demande d'accès s'exprime progressivement. Ce phénomène a déjà été largement étudié dans la littérature (*voir*, par exemple, BONNISSEAU [1992], CURIEN [1987], CURIEN, GENSOLLEN [1987], CURIEN, GENSOLLEN [1991], CURIEN, GENSOLLEN [1992], ENCAOUA, MOREAUX [1987], LITTLECHILD [1975], ROHLFS [1974]). L'objectif de cet article est de proposer une aproche générale de l'externalité qui ne se limite pas à prendre en compte seulement la taille du réseau comme critère d'intérêt.

L'étude de ce phénomène est complexe du fait que le choix des agents se fait à la fois pour des quantités de biens ou de services et pour une variable discrète qui est la décision concernant le raccordement. Par ailleurs, la tarification des services de communications est souvent en deux parties avec d'une part le prix d'accès au réseau et d'autre part le prix de l'usage du service. La justification de ce type de tarification provient du fait que le gestionnaire du service doit à la fois assurer le raccordement des usagers et le transfert des communications. En général, les coûts provenant de l'un sont couverts par l'abonnement et ceux provenant de l'autre par le prix de l'usage.

Dans le cadre de notre modélisation générale de l'externalité, nous étudions principalement deux questions déjà étudiées dans des contextes plus simples : l'existence d'un réseau d'équilibre et la stabilité de celui-ci. Un réseau est en équilibre si les agents raccordés souhaitent le rester et ceux qui sont en dehors, ne souhaitent pas rejoindre le réseau. La stabilité de l'équilibre signifie que lorsque un réseau est proche de l'équilibre, l'évolution consistant à chaque période à raccorder et à laisser partir ceux qui le souhaitent, ramène le réseau vers l'état d'équilibre.

L'existence d'un équilibre est essentiel pour le gestionnaire du service car il est impossible de prévoir les investissements nécessaires à la mise en place du réseau si les abonnés changent continuellement. En fait, la question intéressante est l'existence d'un réseau non vide car bien souvent l'absence de réseau correspond à un état d'équilibre mais ce résultat n'est pas suffisant pour l'analyse économique. De même, la stabilité de l'équilibre est essentiel pour le gestionnaire car en son absence, il est peu probable que l'équilibre soit observé et la prévision est impossible car une petite erreur dans l'estimation de la demande conduit à une importante variation dans l'état d'équilibre.

Pour traiter certaines difficultés de l'étude, nous considérons un continuum d'agents. Dans les articles précédents, il est supposé que seule la taille du réseau, c'est-à-dire le nombre de personnes raccordées, entre en ligne de compte pour mesurer l'intérêt d'un agent pour le réseau. Ceci, relié à d'autres hypothèses sur le lien entre niveaux de revenu et disposition à payer pour le réseau, implique que les réseaux sont toujours constitués des agents ayant un revenu supérieur à un certain seuil. Ce type de résultats semble peu réaliste avec l'émergence de réseaux de communication spécialisés dont l'intérêt est constitué plus par la répartition géographique, sociale ou professionnelle des abonnés que par leur taille. Il est également certain que l'intérêt pour un réseau dépend de l'agent considéré.

C'est pourquoi, nous proposons dans cet article de mesurer l'externalité provenant du réseau d'une façon personnalisée et sous une forme assez générale pour pouvoir prendre en compte une grande variété de critères. En fait, la seule hypothèse réellement significative est la croissance ce qui correspond au fait qu'entre deux états du réseau, si l'un est inclus dans l'autre, alors pour chaque agent de l'économie, l'externalité provenant du plus grand des états est plus importante.

Dans notre cadre, nous définissons la disposition à payer l'accès au réseau dont on déduit la fonction individuelle du surplus maximal obtenu en se raccordant au réseau. Un consommateur décide de se raccorder au réseau si son surplus maximal est positif ou nul, c'est-à-dire qu'il existe un niveau d'usage du réseau tel que le consommateur préfère payer l'accès au réseau et l'usage qu'il en fait plutôt que de consacrer l'ensemble de son revenu aux autres biens. Nous pouvons donc définir la demande agrégée d'accès au réseau qui est l'ensemble des agents qui souhaitent se raccorder au réseau ou, de façon équivalente, qui ont un surplus maximal positif. Ceci nous définit donc une application de l'ensemble des parties de l'ensemble des agents dans lui-même qui à chaque réseau, associe la demande agrégée d'accès.

De l'étude précédente, il apparaît clairement que, si le prix de l'accès au réseau est strictement positif, l'absence de réseau est un état d'équilibre. Pour obtenir un réseau d'équilibre non vide, ce qui est le cas intéressant, il est clairement nécessaire de supposer qu'il existe un réseau non vide pour lequel aucun abonné ne souhaite résilier son abonnement. Cette condition généralise la notion de taille critique dans les modèles classiques qui est définie par le fait qu'au delà de cette taille, aucun abonné ne souhaite quitter le réseau. Nous montrons qu'en fait, cette condition est également suffisante. Ceci est une conséquence du théorème de point-fixe de Tarski sur les applications croissantes dans les espaces ordonnés complets. En effet, l'étude de la fonction de surplus maximal montre qu'elle est croisante avec le réseau ce qui implique que la demande agrégée est croissante.

L'existence d'un état d'équilibre non vide dépend de façon cruciale du prix d'accès au réseau. En effet, si celui-ci est nul, tous les agents ont intérêt à demander leur raccordement et le seul équilibre est alors constitué de l'ensemble des agents. Par contre, si le prix d'accès excède le plus haut revenu, personne ne souhaitera se raccorder et il n'existera pas d'équilibre non vide. Il est clair que s'il existe un état d'équilibre non vide pour un certain niveau de prix d'accès, alors il en existe pour tous les prix d'accès inférieurs. Il existe donc un prix limite en deça duquel un état d'équilibre non vide peut se réaliser et au delà duquel seul l'absence de réseau est un équilibre. Bien entendu, ce prix d'accès critique dépend du prix d'usage.

La structure du réseau d'équilibre peut être extrêmement variée car elle dépend essentiellement de l'externalité dont la mesure est personnalisée. Il est donc possible qu'apparaissent des réseaux d'équilibre distincts regroupant une catégorie particulière des agents de l'économie qui partagent une caractéristique sociale, professionnelle ou géographique. Ce résultat s'accorde bien avec l'émergence de réseau spécialisé regroupant seulement une fraction des consommateurs qui ont un besoin de communication particulier.

Pour l'étude de la stabilité des équilibres, le modèle utilisé complique la question car il faut étudier une dynamique qui n'est plus unidimensionnelle mais qui se déroule dans l'ensemble des parties de l'ensemble des agents. Pour cela, nous définissons tout d'abord une notion de proximité qui induit une notion de convergence. Nous considérons que deux réseaux sont proches si le nombre des abonnés appartenant à l'un ou à l'autre mais pas au deux, est petit. Un état d'équilibre est localement stable si lorsque le réseau initial est proche de l'équilibre, la suite des réseaux obtenue par récurrence en considérant à chaque étape la demande agrégée au réseau existant, converge vers l'équilibre. Pour étudier cette dynamique, nous introduisons une hypothèse supplémentaire de continuité sur la mesure individualisée de l'externalité.

Avec ces définition, il apparaît que l'absence de réseau est localement stable si le prix d'accès est strictement positif. Ceci montre que pour arriver à un réseau d'équilibre non vide, il faut amorcer le développement du réseau car l'évolution naturelle ne conduit pas à l'équilibre tant qu'un certain seuil n'est pas dépassé.

Pour l'étude de la stabilité autour d'un réseau d'équilibre non vide, nous considérons le plus petit surplus qu'un agent raccordé tire de l'existence du réseau. Nous montrons qu'un réseau est localement stable si dans un voisinage, le plus petit surplus est décroissant par rapport à l'inclusion. Nous ne supposons pas que ce plus petit surplus est comparable pour deux réseaux qui ne sont pas ordonnés par l'inclusion. Cette remarque est importante car en considérant l'ensemble des parties de l'ensemble des agents, il est clair qu'en général deux réseaux ne sont pas comparables, donc l'hypothèse porte seulement sur un petit ensemble de couple de réseaux. Notre condition correspond à l'hypothèse classique dans le cas d'une évolution uni-dimensionnelle. En effet, elle se traduit dans ce cadre en disant que si le réseau est plus grand que le réseau d'équilibre alors des agents souhaitent le quitter et dans le cas inverse, des agents souhaitent s'abonner. Ce résultat sur la stabilité est essentiel car pour que les équilibres dont l'existence a été démontrée précédemment soient observables, il est nécessaire qu'ils soient au moins localement stables.

Nous pouvons donc conclure de cette étude que même dans un cadre très général pour la modélisation de l'externalité de réseau, l'existence d'un état d'équilibre non vide est assurée sous une hypothèse très faible et l'équilibre est localement stable sous une hypothèse comparable à celle présentée dans des modèles plus simples. Par contre, notre approche permet de prendre en compte des structures de réseau complexes qui certainement correspondent au développement actuel des réseaux de communications avec une ouverture à la concurrence.

L'article est organisé de la façon suivante : dans la deuxième partie, nous fixons le modèle et nos principales hypothèses, la troisième partie est consacrée à l'étude de la demande agrégés de raccordement, l'existence de l'équilibre et la stabilité sont étudiées dans la quatrième partie et nous terminons par une brève conclusion. Certaines démonstrations techniques sont reportées en annexe.

2 Ensemble des agents et réseau

L'ensemble des agents est supposé être l'intervalle [0, 1]. La taille de la population est mesurée par une fonction de densité φ de [0, 1] dans R_+, strictement positive et continue, qui vérifie :

$$\int_{[0,1]} \varphi(u)\,du = 1$$

Pour une partie mesurable A de [0, 1], la taille de A est donnée par :

$$n(A) = \int_A \varphi(u)\,du$$

par exemple, $n([\underline{t}, \overline{t}]) = \int_{\underline{t}}^{\overline{t}} \varphi(u)\,du$ est la taille de la population de l'intervalle $[\underline{t}, \overline{t}]$. Dans le modèle de Curien et Gensollen, le réseau A intervient uniquement par sa taille $n(A)$ indépendamment des invidivus.

Dans la présente étude, pour chaque individu $t \in [0, 1]$, l'intérêt de cet individu pour le réseau est défini par une fonction μ_t sur l'ensemble des parties de [0, 1] à valeur dans R_+ [1]. μ_t est supposé croissante, c'est-à-dire :

$$\forall\, A, B \subseteq [0, 1], \quad \text{si} \quad A \subseteq B \quad \text{alors} \quad \mu_t(A) \leq \mu_t(B)$$

et nous supposons également que $\mu_t(\emptyset) = 0$. L'utilisation d'une fonction μ_t permet de personnaliser l'intérêt pour le réseau et de considérer d'autres paramètres que la taille.

On désigne par r_t le revenu de l'agent t. Pour chaque agent, l'espace des biens comprend la consommation de service de communication et un agrégat correspondant aux autres biens. Donc l'espace des biens est $R_+ \times R_+ = R_+^2$.

Les préférences de l'agent t sont représentées par la fonction d'utilité u_t de R_+^3 dans R. $u_t(c, \delta q, \delta\mu_t(A))$ est le niveau d'utilité de l'agent t lorsque sa consommation dans les biens autres que le service de communication est c, δ est égal à 1 si l'individu est raccordé au réseau et à 0 sinon, la quantité de consommation de service de communication est q et $\mu_t(A)$ est l'intérêt de l'agent pour le réseau A. $u_t(c, q, \mu_t(A))$ représente l'utilité de consommer q en service de communication et c en biens autres lorsque l'agent est raccordé à un réseau $A \subset [0, 1]$, c'est-à-dire lorsque $t \in A$. $u_t(r, 0, 0)$ est l'utilité obtenu si l'agent consacre l'ensemble de ses revenus futurs à la consommation hors du service de communication.

1. μ_t n'est pas une probabilité sur $\mathcal{B}$, l'ensemble des boréliens de [0, 1].

Dans toute la suite, nous supposerons que la fonction d'utilité satisfait aux conditions suivantes.

HYPOTHÈSE : $\forall\, t \in [0,\, 1]$, u_t est continue, croissante par rapport à la consommation en service de communication et par rapport à l'intérêt pour le réseau et strictement croissante par rapport à la consommation en biens autres. Elle est strictement concave par rapport aux deux premières variables. De plus,

(1) $\forall\, q \geq 0,\, \forall\, t \in [0,\, 1],\, \forall\, A \subset [0,\, 1] \;:\; u_t\,(0,\, q,\, \mu_t(A)) \,\equiv u_t\,(0,\, 0,\, 0)$

La dernière partie de l'hypothèse signifie qu'en l'absence de consommation hors du service de communication, chaque individu est indiffèrent devant la consommation du service communication. Nous ne supposons pas qu'à utilité fixe, la connexion au réseau réhausse l'utilité marginale comme dans CURIEN, GENSOLLEN [1991].

3 Condition d'accès au réseau

3.1. Disposition à payer l'accès

La disposition à payer l'accès au réseau par l'agent t est, par définition, le montant monétaire w_t que l'individu est prêt à céder pour accéder au réseau A sans dégrader son utilité. Cette disposition est fonction du revenu r_t, de la consommation en service de communication q et du réseau A. Donc w_t est donnée par l'équation suivante :

(2) $$u_t\,(r_t - w_t\,(r_t,\, q,\, \mu_t\,(A)),\, q,\, \mu_t\,(A)) = u_t\,(r_t,\, 0,\, 0)$$

La proposition suivante est démontrée en appendice :

PROPOSITION 1 : Il existe une fonction disposition à payer l'accès au réseau w_t définie par l'équation (2). Cette fonction est croissante et strictement concave par rapport à la consommation en service de communication. Elle est également croissante par rapport à l'intérêt pour le réseau.

Lorsque $n\,(A) = \mu_t\,(A)$, nous retrouvons les résultats de CURIEN, GENSOLLEN [1991]. Par contre, w_t n'est plus nécessairement croissante avec r_t, car l'hypothèse, qu'à utilité constante, la connexion réhausse l'utilité marginale, a été supprimée.

3.2. Conditions d'accès

Il s'agit de déterminer sous quelles conditions, un individu a intérêt à se racorder au réseau. Ceci dépend du surplus maximal que procure à un individu l'accès au réseau. Nous allons définir cette fonction et montrer qu'elle est croissante par rapport à $\mu_t(A)$, décroissante et convexe par rapport au prix d'usage du service de communication. Enfin une nouvelle formulation de la fonction surplus maximal est introduite.

3.2.1. **Surplus maximal dû à l'accès au réseau**

Dans la suite, nous noterons par $a > 0$ le prix d'accès au réseau et par $b > 0$ le prix d'usage du service de communication. Ces prix sont des prix relatifs par rapport au prix de l'agrégat des biens hors service de communication qui est normalisé à 1. Étant donné un réseau A existant, pour déterminer s'il demande son raccordement, chaque individu maximise son utilisé sous sa contrainte budgétaire, c'est-à-dire qu'il doit résoudre le programme suivant.

$$P_1 : \begin{cases} \max u_t(c, \delta q, \delta\mu_t(A)) \\ c + \delta(a + bq) = r_t \\ c \geq 0,\ q \geq 0,\ \delta \in \{0, 1\} \end{cases}$$

L'agent décide de se raccorder au réseau, si le maximum du problème P_1 est obtenu avec $\delta = 1$, donc si la valeur du problème P_2 ci-dessous est positive ou nulle :

$$P_2 : \begin{cases} \max u_t(c, q, \mu_t(A)) - u_t(r_t, 0, 0) \\ c + bq = r_t - a \\ c \geq 0,\ q \geq 0 \end{cases}$$

Il est clair que si a est égale à zéro, le problème ci-dessus a toujours une valeur positive ou nulle et celle-ci est décroissante en a. Si a est plus grand que r_t, la valeur du problème est par convention $-\infty$ car l'ensemble des contraintes est vide. Donc, il existe pour l'agent t un prix d'accès limite pour lequel il est indifférent entre s'abonner ou non au réseau. Si le prix d'accès est inférieur à ce prix limite, il se raccorde et s'il est supérieur, il ne s'abonne pas.

PROPOSITION 2 : La valeur du problème P_2 est positive ou nulle si et seulement si la valeur du problème P_3 ci-dessous est négative ou nulle :

$$P_2 : \begin{cases} \min c + bq - (r_t - a) \\ u_t(c, q, \mu_t(A)) - u_t(r_t, 0, 0)) = 0 \\ c \geq 0,\ q \geq 0 \end{cases}$$

La preuve de cette proposition est donnée en appendice. La contrainte d'égalité du problème P_3, permet d'exprimer la consommation hors service de communication c, en fonction de la disposition à se raccorder w_t (*voir* équation (2)) :

$$c = r_t - w_t(r_t, q, \mu_t(A))$$

La valeur du problème P_3 est négative ou nulle si et seulement si la condition suivante de raccordement au réseau est satisfaite :

$$(3) \qquad s_t(r_t, a, b, \mu_t(A)) = \max_{(q \geq 0)} \{w_t(r_t, q, \mu_t(A)) - a - bq\} \geq 0$$

$s_t(r_t, a, b, \mu_t(A))$ est le plus grand surplus que l'individu peut retirer du service de communication, en optimisant le niveau q de son usage. D'après l'équation (3), un individu demande son raccordement, s'il existe au moins un niveau d'usage lui procurant un surplus positif (à utilité maintenue constante au cours de la connexion). Nous remarquons que l'équation (3) a toujours une unique solution dans l'intervalle $\left[0, \frac{r_t}{b}\right]$ car w_t est strictement concave et prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, r_t]$. Nous noterons $Q_t(r_t, b, \mu_t(A))$ cette solution. La proposition suivante, dont la démonstration se trouve en appendice, résume les propriétés de la fonction s_t.

PROPOSITION 3 : La fonction surplus maximal $s_t(r_t, a, b, \mu_t(A))$ est croissante par rapport à $\mu_t(A)$, décroissante et convexe par rapport à b. Il existe un seuil $\overline{b}_t(r_t, \mu_t(A))$, qui peut être égal à $+\infty$ tel que

$$Q_t(r_t, b, \mu_t(A)) = 0 \quad si \quad b \geq \overline{b}_t(r_t, \mu_t(A)).$$

Pour tout $b < \overline{b}_t(r_t, \mu_t(A))$ la fonction surplus maximal s_t est différentiable par rapport au prix d'usage du service de communication et sa dérivée est égale à $-Q_t(r_t, b, \mu_t(A))$.

En fait, $\overline{b}(r_t, \mu_t(A))$ est égal à la disposition marginale à payer pour les premières unités de trafic. Ainsi, lorsque le tarif b excède ce seuil, alors l'usage qui maximise le surplus est nul. Ce surplus se réduit à un pur surplus d'accès, soit $w_t(r_t, 0, \mu_t(A)) - a$. Dans ce cas, la décision de raccordement est uniquement fonction de l'intérêt que l'individu attache à la réception de communication, étant donné que $q = 0$, ainsi qu'à l'option de pouvoir en émettre. Nous obtenons ici les mêmes résultats que ceux obtenus dans CURIEN, GENSOLLEN [1991] où $n(t) = \mu_t(A)$. La seule différence est qu'on ne peut pas dire que s_t est croissante par rapport à r_t.

4 Equilibre et stabilité du réseau

La demande globale d'accès au réseau A est définie comme étant l'ensemble $F(A)$ constitué par les individus ayant un surplus maximal, s_t, positif.

(4) $$F(A) = \{t \in [0, 1] | s_t(r_t, a, b, \mu_t(A)) \geq 0\}$$

Par la suite on désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties de [0, 1]. La fonction F est définie de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$.

4.1. Définition de l'équilibre

$A \in \mathcal{P}$ est un équilibre si les individus qui veulent se raccorder au réseau sont ceux qui sont déjà raccordés. Ceci se traduit par :

(5) $$F(A) = A$$

Cette définition d'état d'équilibre diffère de celle utilisée dans des travaux antérieurs où elle est basée sur l'invariance de la taille du réseau. Donc le réseau est en équilibre si le nombre des individus qui entrent dans le réseau est égal à celui de ceux qui le quittent. Si A et $F(A)$ sont des boréliens, ceci se traduit par :

$$\int_{F(A)} \varphi(t)\, dt = \int_{A} \varphi(t)\, dt \tag{6}$$

La définition de l'équilibre adoptée dans notre article est clairement plus restrictive que cette deuxième notion. Notre premier résultat sur l'existence d'un état d'équilibre, consiste à remarquer que l'absence de réseau est un équilibre. En effet, personne n'a envie de payer un prix d'accès à un réseau vide.

PROPOSITION 4 : L'ensemble $\emptyset$ est un état d'équilibre.

Preuve: Si $A = \emptyset$, la disposition à payer l'accès au réseau, w_t, est nulle car w_t est définie par

$$u_t\,(r_t - w_t,\, q,\, \mu_t\,(A)) = \mu_t\,(r_t,\, 0,\, 0)$$

et $\mu_t\,(\emptyset) = 0$ et $q = 0$. L'équation précédente devient :

$$u_t\,(r_t - w_t,\, 0,\, 0) = u_t\,(r_t,\, 0,\, 0)$$

d'où on déduit que $w_t\,(r_t,\, 0, \mu_t\,(\emptyset)) = 0$. Donc :

$$s_t\,(r_t,\, a,\, b,\, \mu_t\,(\emptyset)) = -a < 0$$

Et finalement :

$$F\,(\emptyset) = \{t | s_t\,(r_t,\, a,\, b,\, \mu_t\,(\emptyset)) \geq 0\} = \emptyset \quad \square$$

4.2. **Existence d'un état d'équilibre non vide**

Une condition évidemment nécessaire d'existence d'un équilibre non vide est qu'il existe un réseau pour lequel aucun membre n'a intérêt à résilier son raccordement. Cette condition consiste à supposer l'existence d'au moins un état du réseau pour lequel tous les agents raccordés souhaitent le rester. S'il n'existe pas de réseau vérifiant cette condition, ce réseau n'est pas économiquement viable car il n'est pas souhaité par les agents. Le résultat ci-dessous montre que cette simple condition est aussi suffisante :

THÉORÈME 5 : Il existe un état d'équilibre du réseau non vide si et seulement si il existe $A_0 \in \mathcal{P} \backslash \{\emptyset\}$ tel que $A_0 \subset F\,(A_0)$.

La preuve de ce résultat, donnée en appendice, est basée sur le théorème de point fixe de Tarski dont on peut trouver la preuve dans DUNFORD, SCHWARTZ [1958].

L'existence d'un état du réseau vérifiant l'hypothèse du théorème peut être assuré s'il existe une catégorie de la population ayant un intérêt très important pour le service du réseau, et donc, non seulement les personnes de cette catégorie désirent rester dans le réseau, mais d'autres personnes ont intérêt à entrer.

Si a, le prix d'accès, est égal à zéro, tout individu a intérêt à se raccorder et donc l'équilibre est alors constitué de tous les agents. Par contre si a est très grand, personne n'a intérêt à se raccorder et alors le seul équilibre est l'absence de réseau. Si tous les autres paramètres sont fixés, il existe un prix d'accès limite tel que en dessous, il existe un réseau d'équilibre non vide et au dessus il n'en existe pas. En effet, s'il existe un réseau d'équilibre non vide pour un certain prix d'accès, vu les propriétés de la fonction surplus maximal, il en existe aussi pour tous les prix d'accès inférieurs.

La condition d'existence se ramène dans le cas où l'externalité n'est mesurée que par la taille du réseau, au fait qu'il existe une masse critique au delà de laquelle il n'y a pas de déconnexion. L'exploitant du réseau doit agir de sorte à ce que la « masse critique » soit dépassée et alors le parc ne régresse pas vers l'absence de réseau.

4.3. **Stabilité de l'équilibre**

Pour étudier la stabilité des équilibres, nous allons faire des hypothèses de continuité supplémentaires. Nous supposerons que la fonction d'utilité u_t et le revenu r_t sont continus par rapport à t. Avant d'énoncer notre hypothèse sur les mesures de l'externalité μ_t, nous devons définir une notion de convergence sur $\mathcal{B}$, l'ensemble des boreliens de [0, 1], et donc une notion de proximité. Pour cela, nous définissons la fonction d de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ dans R_+ par :

$$d(A_1, A_2) = n(A_1 \Delta A_2) = \int_{A_1 \Delta A_2} \varphi(u)\, du$$

où $A_1 \Delta A_2 \equiv (A_1 \cup A_2) \backslash (A_1 \cap A_2)$. Donc deux sous-ensembles boreliens de [0, 1] sont proches, si la taille de la population qui appartient uniquement à l'un ou à l'autre des deux sous-ensembles, est petite. Notons que d n'est pas une distance car si deux boreliens A et B diffèrent seulement sur un ensemble fini de points, on a :$d(A, B) = 0$ et $A \neq B$. Nous remarquons que

(7) $$d(A_1, A_2) = n(A_1 \Delta A_2) = n(A_1 \backslash (A_1 \cap A_2)) + n(A_2 \backslash (A_1 \cap A_2))$$

et que :

$$|n(A_1) - n(A_2)| = |n(A_1 \backslash (A_1 \cap A_2)) - n(A_2 \backslash (A_1 \cap A_2))|$$

Donc, nous en déduisons que :

$$|n(A_1) - n(A_2)| \leq n(A_1 \Delta A_2) = d(A_1, A_2)$$

Cette inégalité montre que si deux sous-ensembles sont proches au sens de d alors leurs tailles respectives sont proches.

A l'aide de la fonction d, nous pouvons exprimer notre hypothèse sur les fonctions μ_t pour tout $t \in [0, 1]$:

(8) $$(i)\ \forall A \in \mathcal{P} :\ \mu_t(A) \text{ est continue en } t$$

(9) $$(ii)\ \exists M > 0,$$
$$\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : |\mu_t(A_1) - \mu_t(A_2)| \leq M d(A_1, A_2)$$

En particulier, nous pouvons considérer le cas où il existe une fonction ψ de [0, 1] $\times$ [0, 1] dans R_+, continue et positive telle que pour tout $t \in [0, 1]$ et pour tout $A \in \mathcal{P}$:

$$\mu_t(A) = \inf \left\{ \int_B \psi(t, u) \varphi(u) \, du | A \subset B, \, B \in \mathcal{B} \right\} \tag{10}$$

Si $A \in \mathcal{B}$, alors la formule ci-dessus devient $\mu_t(A) = \int_A \psi(t, u) \varphi(u) \, du$. Cette hypothèse est vérifiée si $\mu_t(A) = n(A)$ en prenant pour ψ la fonction constante égale à 1. Pour un agent t, $\psi(t, u)$ peut être interprété comme l'intérêt marginal que la présence de l'agent u dans le réseau procure à l'agent t. Nous remarquons que la continuité de la fonction ψ entraîne la continuité de la fonction $\mu_t(A)$ par rapport à t, A étant fixé.

Nous montrons maintenant que dans ce cas l'hypothèse (ii) ci-dessus est satisfaite. En effet, ψ est continue sur [0, 1] $\times$ [0, 1], donc elle est majorée. Soit M sa borne supérieure.

$$\begin{aligned}
|\mu_t(A_1) - \mu_t(A_2)| = & \left| \int_{A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)} \psi(t, u) \varphi(u) \, du \right. \\
& \left. \quad - \int_{A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)} \psi(t, u) \varphi(u) \, du \right| \\
& \leq \int_{A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)} \psi(t, u) \varphi(u) \, du \\
& \quad + \int_{A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)} \psi(t, u) \varphi(u) \, du \\
& \leq M n(A_1 \Delta A_2) = M d(A_1, A_2)
\end{aligned}$$

Dans les travaux précédents, l'étude des états d'équilibres et de leur stabilité est différente de la notre. En effet, vu les hypothèses faites, les réseaux étudiés sont de la forme $[t_0, 1]$. Donc la dynamique du réseau devient une dynamique à variable réelle ce qui simplifie l'analyse.

Nos hypothèses entraînent que pour un réseau A fixé, la fonction disposition à payer est continue par rapport à (t, q) et la fonction surplus maximal est continue par rapport à t. Donc, pour tout réseau A, $F(A)$ est un fermé. Car, pour A, a et b fixés, $F(A) = \{t | s_t(r_t, a, b, \mu_t(A)) \geq 0\}$.

Un état d'équilibre A^* vérifie $F(A^*) = A^*$. Donc tous les états d'équilibre sont des fermés. Dans la suite, nous allons donc considérer uniquement les réseaux représentés par des boreliens.

Nous définissons la stabilité locale d'un équilibre de la façon suivante. Un équilibre A^* est localement stable si il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{B} : \, d(A, A^*) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{k \to \infty} d(F^k(A), A^*) = 0 \tag{11}$$

où $F^k(A)) = F(F^{k-1}(A))$. Cette définition correspond à une évolution séquentielle du réseau où, à chaque période, les agents qui veulent se raccorder, et ceux qui veulent quitter le réseau, le font. La stabilité locale se traduit par le fait que si le réseau de départ est proche de l'équilibre, cette évolution ramène le réseau à l'état d'équilibre. Notre premier résultat s'intéresse à l'absence de réseau.

PROPOSITION 5 : L'ensemble vide est un équilibre stable.

Preuve: Remarquons tout d'abord que $-a = s_t(r_t, a, b, \mu_t(\emptyset)) = s_t(r_t, a, b, 0)$. La fonction $(t, i) \to s_t(r_t, a, b, i)$ est continue sur $[0, 1] \times R_+$ et donc uniformément continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$. Donc :

$$\exists \varepsilon \in]0, 1[\quad \text{tel que} \quad \forall i \in [0, \varepsilon[, \quad \forall t \in [0, 1] : \ s_t(r_t, a, b, i) < -\frac{a}{2}$$

Or,

$$\mu_t(A) = \mu_t(A) - \mu_t(\emptyset) \leq Md(A, \emptyset) = Mn(A)$$

Donc, si $d(A, \emptyset) = n(A) < \frac{\varepsilon}{M}$, alors $\mu_t(A) < \varepsilon$. nous en déduisons que pour tout $t \in [0, 1]$, $s_t(r_t, a, b, \mu_t(A)) < 0$, d'où $F(A) = \emptyset$. $\square$

La continuité de la fonction surplus maximal joue un rôle crucial dans le résultat précédent ainsi que le fait que le prix d'accès a soit non nul. L'absence de réseau peut ne pas être un état d'équilibre stable si le surplus maximal pour un petit réseau est très grand pour certains agents. Ceci est en particulier le cas si l'abonnement à un réseau permet d'accéder à un réseau préexistant comme pour l'introduction de la téléphonie mobile qui permet d'avoir accès au réseau classique.

Nous allons maintenant étudier la stabilité d'un état d'équilibre non vide. Nous considérons la fonction χ de $\mathcal{B}$ dans R qui représente le plus petit surplus qu'un agent raccordé au réseau tire de son existence.

$$\chi(A) = \inf_{t \in A} \{s_t(r_t, a, b, \mu_t(A))\}$$

Nous remarquons que si A^* est un état d'équilibre non vide et différent de [0, 1], alors $\chi(A^*) = 0$. En effet, $F(A^*) = A^*$ implique $\chi(A^*) \geq 0$. Si $\chi(A^*) > 0$, la continuité de la fonction surplus maximal implique que $F(A^*)$ est strictement plus grand que A^*. Si $A^* = [0, 1]$, alors $\chi(A^*) \geq 0$.

La proposition suivante nous donne une condition suffisante de stabilité pour un état d'équilibre non vide.

PROPOSITION 6 : Un équilibre A^* non vide est localement stable s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $(A, B) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ vérifiant $d(A, A^*) < \varepsilon$ et $d(B, A^*) < \varepsilon$ alors

(12) $$A \subset B \text{ et } d(A, B) > 0 \text{ implique } \chi(A) > \chi(B)$$

La condition de stabilité exprime le fait que le plus petit surplus qu'un agent raccordé tire du réseau décroit en fonction du réseau au voisinage d'un état d'équilibre stable. Ceci signifie que si de nouveaux agents sont raccordés au réseau, les agents les moins intéressés dans le réseau aggrandi, tirent un surplus plus faible que dans l'état antérieur.

Nous remarquons que si $d(A, B) = 0$, alors l'intérêt de tous les individus pour les réseaux A et B est identique. Lorsque dans la proposition précédente, nous posons la condition $d(A, B) > 0$, ceci traduit l'idée que les deux réseaux sont significativement distincts.

Dans les travaux antérieurs, les individus se portent demandeurs du service téléphonique par ordre décroissant de revenus. Cette hypothèse implique que la fonction surplus maximal est croissante par rapport au revenu, ce qui permet de définir un revenu seuil pour l'accès au réseau et pour lequel le surplus maximal est nul. Pour qu'un état d'équilibre soit stable, il suffit qu'au voisinage de cet état, la fonction de surplus maximal soit décroissante selon la taille de la population $n(A)$ (le surplus maximal de l'abonné marginal passe ainsi du positif au négatif quand l'état d'équilibre stable est franchi de gauche à droite). Donc, la condition de stabilité exprimée dans la proposition 6 généralise celle énoncée dans de précédents articles. Bien entendu, cette condition est seulement suffisante et il est facile de construire un exemple de réseau localement stable pour lequel cette propriété n'est pas satisfaite.

Preuve de la proposition 6: Nous allons distinguer trois cas : $A \subset A^*$, $A \supset A^*$ et A quelconque proche de A^*. Nous remarquons que si $A^* = [0, 1]$, seul le premier est à considérer. Dans les trois cas, on suppose que

$$d\,(A^*,\, A) < \varepsilon \tag{13}$$

• Premier cas : $A \subset A^*$

Vu la croissance de la fonction F, $F\,(A) \subseteq F\,(A^*) = A^*$. De plus la condition de stabilité implique que $\chi\,(A) \geq \chi\,(A^*) = 0$. Donc pour tout $t \in A$, $s_t\,(r_t,\, a,\, b,\, \mu_t\,(A)) \geq 0$, ce qui implique $t \in F\,(A)$. Nous en déduisons que $A \subset F\,(A) \subseteq A^*$ et que $\chi\,(A) \geq \chi\,(F\,(A)) \geq 0$.

En utilisant de nouveau la croissance de la fonction F, nous déduisons que la suite $F^k\,(A)$ est croissante, avec, pour tout k, $F^k\,(A) \subseteq A^*$. La suite $x_k = d\,(F^k\,(A),\, A^*) = n\,(A^* \backslash F^k\,(A))$ est donc décroissante et minorée par 0 et elle converge vers $d\,(B,\, A^*)$ où $B = \cup_k F^k\,(A)$. Si x_k ne tend pas vers 0, alors $B \subset A^*$ et $d\,(B,\, A^*) > 0$ donc $\chi\,(B) > 0$. Étant donné la continuité de la fonction de surplus maximal, il existe donc un agent $t \notin B$ tel que $s_t\,(r_t,\, a,\, b,\, \mu_t\,(B)) > 0$. Comme $\mu_t\,(F^k\,(A))$ converge vers $\mu_t\,(B)$, pour k assez grand, $s_t\,(r_t,\, a,\, b,\, \mu_t\,(F^k\,(A))) > 0$ ce qui implique $t \in F^{k+1}\,(A)$. Ceci est en contradiction avec $t \notin B$ car $F^{k+1}\,(A) \subset B$. Nous pouvons donc conclure que la suite x_k converge vers 0.

• Deuxième cas : $A \supset A^*$

Nous obtenons en utilisant les arguments du cas prcédent $F\,(A) \supseteq F\,(A^*) = A^*$. D'après la condition de stabilité, nous obtenons $\chi\,(A) \leq \chi\,(A^*) = 0$. Nous montrons maintenant par l'absurde que $n\,(F\,(A) \backslash A) = 0$. Si $n\,(F\,(A) \backslash A) > 0$, il existe un sous-ensemble borelien $C \subset F\,(A) \backslash A$ tel quel $0 < n\,(C) < \varepsilon - d\,(A,\, A^*)$. Soit $A' = A \cup C$. Nous remarquons que $d\,(A',\, A^*) < \varepsilon$. Comme $A \subseteq A'$, pour tout $t \in A$,

$$s_t\,(r_t,\, a,\, b,\, \mu_t\,(A')) \geq s_t\,(r_t,\, a,\, b,\, \mu_t\,(A)) \geq \chi\,(A)$$

et, pour tout $t \in C$.

$$s_t\,(r_t,\, a,\, b,\, \mu_t\,(A')) \geq s_t\,(r_t,\, a,\, b,\, \mu_t\,(A)) \geq 0$$

car alors $t \in F(A)$. Comme $\chi(A) \leq 0$, les inégalités ci-dessus nous montrent que $\chi(A') \geq \chi(A)$. Cette inégalité contredit la condition de stabilité qui donne $\chi(A') < \chi(A)$. Donc, $n(F(A) \backslash A) = 0$.

Nous montrons maintenant que $F^2(A) \subset F(A)$. En effet, $F(A) \subset A \cup (F(A) \backslash A)$. Vue que $n(F(A) \backslash A) = 0$, pour tout agent t, $\mu_t(F(A)) \leq \mu_t(A)$. Donc si $t \in F^2(A)$, $0 \leq s_t(r_t, a, b, \mu_t(F(A)) \leq s_t(r_t, a, b, \mu_t(A))$. Nous en déduisons donc que $t \in F(A)$. Par récurrence, nous en déduisons que $A^* \subset F^{k+1}(A) \subset F^k(A)$ pour tout $k \geq 1$.

La suite $x_k = d(F^k(A), A^*) = n(F^k(A) \backslash A^*)$ est donc décroissante et minorée par 0 et elle converge vers $d(B, A^*)$ où $B = \cap_k F^k(A)$. Si x_k ne tend pas vers 0, alors $B \supset A^*$ et $d(B, A^*) > 0$ donc $\chi(B) < 0$. Il existe donc un agent $t \in B$ tel que $s_t(r_t, a, b, \mu_t(B)) < 0$. Comme $\mu_t(F^k(A))$ converge vers $\mu_t(B)$, pour k assez grand, $s_t(r_t, a, b, \mu_t(F^k(A))) < 0$ ce qui implique $t \notin F^{k+1}(A)$. Ceci est en contradiction avec $t \in B$ car $F^{k+1}(A) \supset B$. Nous pouvons donc conclure que la suite x_k converge vers 0.

• Troisième cas : A quelconque proche de A^*

D'après la définition de la distance d,

$$d(A^*, A \cap A^*) = n(A^* \backslash (A \cap A^*)) \leq d(A^*, A) < \varepsilon$$

et

$$d(A^*, A \cup A^*) = n((A \cup A^*) \backslash A^*) \leq d(A^*, A) < \varepsilon$$

Vu que $(A \cap A^*) \subset A^*$ et $A \cup A^* \supset A^*$, en utilisant les résultats des deux cas précédents, nous obtenons :

$$d(F^k(A \cap A^*), A^*) \to 0 \text{ et } d(F^k(A \cup A^*), A^*) \to 0$$

Étant donné que $A \cap A^* \subset A \subset A \cup A^*$ et que F est croissante, nous en déduisons que pour tout k, $F^k(A \cap A^*) \subset F^k(A) \subset F^k(A \cup A^*)$. D'où

$$\begin{aligned} d(F^k(A), A^*) = n(F^k(A) \Delta A^*) \leq d(F^k(A \cap A^*), A^*) \\ + d(F^k(A \cup A^*), A^*) \end{aligned}$$

Donc la limite de $d(F^k(A), A^*)$ lorsque k tend vers l'infini, est nulle. □

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons montré qu'il est possible de considérer une modélisation de l'externalité dans un réseau de communication, qui permet de tenir compte de plusieurs aspects du réseau jouant un rôle dans l'intérêt d'un agent pour le réseau. Ainsi, nous généralisons les travaux précédents, dans lesquels le réseau n'intervient que par sa taille.

Dans le cadre de cette représentation plus réalise du réseau dans la fonction d'utilité individuelle, nous avons établi à quelles conditions il existe des réseaux d'équilibre et à quelles conditions ceux-ci sont stables. La topologie de ces réseaux est diverse car nos hypothèses n'impliquent pas que les agents se raccordent suivant leur niveau de revenu ce qui s'observe dans la réalité.

Il serait maintenant intéressant de plonger ce modèle dans un cadre d'équilibre général pour étudier l'existence d'un équilibre en présence d'un réseau de communication.

Preuve de la proposition 1

Nous montrons d'abord l'existence de w_t. Dans l'hypothèse sur la fonction d'utilité donnée par l'équation (1) et d'après les hypothèses de croissance sur cette fonction d'utilité,

$$u_t\,(0,\, q,\, \mu_t\,(A)) = u_t\,(0,\, 0,\, 0) < u_t\,(r_t,\, 0,\, 0) \le u_t\,(r_t,\, q,\, \mu_t\,(A))$$

Vu la continuité de la fonction d'utilité, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, nous en déduisons qu'il existe $w_t\,(r,\, q,\, \mu_t\,(A)) \in [0,\, r_t]$ tel que $u_t\,(r - w_t,\, q,\, \mu_t\,(A)) = u_t\,(r,\, 0,\, 0)$.

La croissance de la fonction w_t par rapport à la consommation en service de communication et par rapport à l'intérêt pour le réseau est une conséquence immédiate de la croissance de la fonction u_t. Nous montrons maintenant que w_t est strictement concave par rapport à q. Soit q_1 et q_2 deux éléments de R_+ tels que $q_1 \neq q_2$ et soit $\lambda \in]0,\, 1[$. L'équation (2), nous permet d'écrire :

$$(14)\quad u_t\,(r - w_t\,(r,\, \lambda q_1 + \lambda' q_2,\, \mu_t\,(A)),\, \lambda q_1 + \lambda' q_2,\, \mu_t\,(A)) = u_t\,(r,\, 0,\, 0)$$

où $\lambda' = 1 - \lambda$. En utilisant le fait que u_t est strictement concave par rapport à (c, q), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& u_t\,(r - \lambda w_t\,(r,\, q_1,\, \mu_t\,(A)) - \lambda' w_t\,(r,\, q_2,\, \mu_t\,(A)),\, \lambda q_1 + \lambda' q_2,\, \mu_t\,(A)) = \\
&\quad u_t\,(\lambda\,(r - w_t\,(r,\, q_1,\, \mu_t\,(A))) \\
&\qquad + \lambda'\,(r - w_t\,(r,\, q_2,\, \mu_t\,(A))),\, \lambda q_1 + \lambda' q_2,\, \mu_t\,(A)) > \\
&\quad \lambda u_t\,(r - w_t\,(r,\, q_1,\, \mu_t\,(A)),\, q_1,\, \mu_t\,(A)) \\
&\qquad + \lambda' u_t\,(r - w_t\,(r,\, q_2,\, \mu_t\,(A)),\, q_2,\, \mu_t\,(A)) = \\
&\quad \lambda u_t\,(r,\, 0,\, 0) + \lambda' u_t\,(r,\, 0,\, 0) = u_t\,(r,\, 0,\, 0)
\end{aligned}$$

Ce dernier résultat et l'équation (14), nous donne :

$$\begin{aligned}
& u_t\,(r - \lambda w_t\,(r,\, q_1,\, \mu_t\,(A)) - \lambda' w_t\,(r,\, q_2,\, \mu_t\,(A)),\, \lambda q_1 + \lambda' q_2,\, \mu_t\,(A)) > \\
&\quad u_t\,(r - w_t\,(r,\, \lambda q_1 + \lambda' q_2,\, \mu_t\,(A)),\, \lambda q_1 + \lambda' q_2,\, \mu_t\,(A))
\end{aligned}$$

Le fait que la fonction u_t est croissante par rapport à c, nous permet de déduire que :

$$w_t\,(r,\, \lambda q_1 + \lambda' q_2,\, \mu_t\,(A))) > \lambda w_t\,(r,\, q_1, \mu_t\,(A)) + \lambda' w_t\,(r,\, q_2, \mu_t\,(A))$$

ce qui démontrent la stricte concavité de w_t par rapport à q. $\square$

Preuve de la proposition 2

Si la valeur du problème $\mathcal{P}_2$ est positive ou nulle, il existe un couple (c_1, q_1) tel que :

$$\begin{cases} u_t\left(c_1,\, q_1,\, \mu_t\left(A\right)\right) - u_t\left(r_t,\, 0,\, 0\right) \geq 0 \\ c_1 + bq_1 = r_t - a \\ c_1 \geq 0,\, q_1 \geq 0 \end{cases}$$

On sait d'après l'équation (2), qu'il existe c_2 tel que :

$$u_t\left(c_2,\, q_1, \mu_t\left(A\right)\right) = u_t\left(r_t,\, 0,\, 0\right)$$

Comme u_t est croissante par rapport à c, alors $c_2 \leq c_1$. Donc, le couple (c_2, q_1) vérifie :

$$\begin{cases} c_2 + bq_1 - (r_t - a) \leq 0 \\ u_t\left(c_2,\, q_1, \mu_t\left(A\right)\right) - u_t\left(r_t,\, 0,\, 0\right) = 0 \\ c_2 \geq 0,\, q_1 \geq 0 \end{cases}$$

Donc, la valeur du problème $\mathcal{P}_3$ est négative ou nulle.

Réciproquement, si la valeur du problème $\mathcal{P}_3$ est négative ou nulle, il existe un couple (c_1, q_1) tel que :

$$\begin{cases} c_1 + bq_1 - (r_t - a) \leq 0 \\ u_t\left(c_1,\, q_1, \mu_t\left(A\right)\right) - u_t\left(r_t,\, 0,\, 0\right) = 0 \\ c_1 \geq 0,\, q_1 \geq 0 \end{cases}$$

Soit c_2 tel que :

$$c_2 + bq_1 = r_t - a$$

Il est évident que $c_2 \geq c_1$. Et comme u_t est croissante par rapport à c, alors le couple (c_2, q_1) vérifie :

$$\begin{cases} u_t\left(c_2,\, q_1,\, \mu_t\left(A\right)\right) - u_t\left(r_t,\, 0,\, 0\right) \geq 0 \\ c_2 + bq_1 = r_t - a \\ c_2 \geq 0,\, q_1 \geq 0 \end{cases}$$

Donc, la valeur du problème $\mathcal{P}_2$ est positive ou nulle. $\square$

Preuve de la proposition 3

La croissance de s_t par rapport à $\mu_t(A)$ et la décroissance par rapport à b sont des conséquences immédiates de la croissance de w_t par rapport à $\mu_t(A)$ et de la forme de la fonction objectif dans l'équation (3), s_t est convexe par rapport à b car $\forall\, b_1,\, b_2 \in R_+,\ \forall\, \lambda \in [0,\, 1]$,

$$\begin{aligned}
& s_t(r,\, a,\, \lambda b_1 + \lambda' b_2,\, \mu_t(A)) \\
&\quad = \max_{(q\geq 0)} ((\lambda + \lambda')(w_t(r,\, q,\, \mu_t(A)) - a) - (\lambda b_1 + \lambda' b_2)\, q) \\
&\quad\quad \leq \lambda \max_{(q\geq 0)} (w_t(r,\, q,\, \mu_t(A)) - a - b_1 q) \\
&\quad\quad\quad + \lambda' \max_{(q\geq 0)} (w_t(r,\, q,\, \mu_t(A)) - a - b_2 q) \\
&\quad = \lambda s_t(r,\, a,\, b_1,\, \mu_t(A)) + \lambda' s_t(r,\, a,\, b_2,\, \mu_t(A))
\end{aligned}$$

où $\lambda' = 1 - \lambda$.

Comme w_t est strictement concave en q et continue en 0, soit

$$\bar{b}(r,\, \mu_t(A)) = \lim_{q\to 0^+} \frac{w_t(r_t,\, q,\, \mu_t(A)) - w_t(r_t,\, 0,\, \mu_t(A))}{q}$$

Pour tout $q \geq 0$, $w_t(r_t,\, q,\, \mu_t(A)) - w_t(r_t,\, 0,\, \mu_t(A)) \leq \bar{b}(r_t,\, \mu_t(A))\, q$. Donc si $b \geq \bar{b}(r_t,\, \mu_t(A))$,

$$w_t(r_t,\, q,\, \mu_t(A)) - bq - a \leq w_t(r_t,\, 0,\, \mu_t(A)) - a$$

Ceci montre qu'alors $Q_r(r_t,\, b,\, \mu_t(A)) = 0$.

Si $b < \bar{b}(r_t,\, \mu_t(A))$, l'équation (3) a une unique solution positive $Q_t(r_t,\, b,\, \mu_t(A))$. Nous remarquons que

$$s_t(r_t,\, a,\, b,\, \mu_t(A)) = (-w_t)^*(-b) - a$$

où $(-w_t)^*$ est la transformée de Fenchel de la fonction $-w_t$. Les résultats classiques sur la transformée de Fenchel (*voir*, par exemple [9]) impliquent que celle-ci est différentiable et donc, s_t est différentiable par raport à b et sa dérivée est $-Q_t(r_t,\, b,\, \mu_t(A))$. □

Preuve du théorème 4

Rappellons les définitions et résultats suivants.

Définition D.1 $(E, \preceq)$, un système partiellement ordonné, est dit complet si :

(i) $a \preceq b$ et $b \preceq a$ implique $a = b$,

(ii) Tout sous-ensemble non-vide a une borne inférieure et une borne supérieure.

> THÉORÈME D.1 (Tarski) : Soit $(E, \preceq)$ un système partiellement ordonné complet, et soit $f: E \to E$ telle que $x \preceq y$ implique $f(x) \preceq f(y)$. Alors f a un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = x_0$. L'ensemble de tous les points fixes contient sa borne inférieure et sa borne supérieure.

S'il existe un équilibre du réseau A^*, celui-ci vérifie $F(A^*) = A^*$ et donc l'hypothèse du théorème est satisfaite.

Réciproquement, s'il existe un réseau A_0 différent du vide tel que $A_0 \subset F(A_0)$, nous considérons l'ensemble $\mathcal{P}(A_0)$ défini par :

$$\mathcal{P}(A_0) = \{A \in \mathcal{P} | A_0 \subset A\}$$

Il est facile de montrer que cet ensemble muni de la relation d'inclusion est un système partiellement ordonné et complet. Soit F, l'application de $\mathcal{P}$ dans lui-même définie, par :

$$F(A) = \{t | s_t(r_t, a, b, \mu_t(A)) \geq 0\}$$

Soit A_1 et A_2 deux élements de $\mathcal{P}$ tels que $A_1 \subseteq A_2$. Vu les hypothèses faites sur les fonctions μ_t, $\mu_t(A_1) \leq \mu_t(A_2)$. s_t étant croissante par rapport à $\mu_t(A)$, nous en déduisons que $s_t(r, a, b, \mu_t(A_2)) \geq s_t(r, a, b, \mu_t(A_1))$. Si $t \in F(A_1)$, alors $s_t(r, a, b, \mu_t(A_1)) \geq 0$ et donc, $s_t(r, a, b, \mu_t(A_2)) \geq 0$, d'où $t \in F(A_2)$. En conclusion $F(A_1) \subseteq F(A_2)$. Ce dernier résultat montre que pour tout $A \in \mathcal{P}(A_0)$, on a $A_0 \subset F(A_0) \subset F(A)$ donc $F(A) \in \mathcal{P}(A_0)$.

D'après ce qui précède, F restreinte à $\mathcal{P}(A_0)$ vérifie les hypothèses du théorème de Tarski, et donc, il existe $A^* \in \mathcal{P}(A_0)$ tel que $F(A^*) = A^*$. A^* est un état d'équilibre du réseau non-vide. $\square$

Keyswords : externality, individual utility, household disposal, state equilibrium, local stability.

• Références bibliographiques

BONNISSEAU, J. M. (1992). – "Tarification du raccordement et développement d'un réseau", *Communications et Stratégies*, 9, pp. 51-66.

CURIEN, N. (1987). – "L'accès à l'usage téléphoniques : modélisation conjointe et tarification optimale", *Revue Economique*, 38, pp. 375-414.

CURIEN, N., GENSOLLEN, M. (1987). – "Les théories de la demande de raccordement téléphoniques", *Revue Economique*, 38, pp. 197-202.

CURIEN, N., GENSOLLEN, M. (1991). – "Externalité de réseau : son influence sur la croissance et la tarification téléphoniques", *Mélanges Economiques*, Volume en l'honneur d'E. Malinvaud, Economica, Paris, pp. 237-266.

CURIEN, N., GENSOLLEN, M. (1992). – "Economie des télécommunications, ouverture et réglementation, *ENSPTT-Economica*, Paris.

ENCAOUA D., MOREAUX, M. (1987). – "L'analyse théorique des problèmes de tarification et l'allocation des coûts dans les télécommunications", *Revue Economique*, 38, pp. 375-413.

DUNFORD, N., SCHWARTZ, J. T. (1958). – "*Linear operators*", Interscience.

LITTLECHILD, S. C. (1975). – "Two part tariffs and comsumption externalities", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 6, pp. 661-670.

ROCKAFELLAR, R. T. (1970). – "Convex Analysis", Princeton University Press.

ROHLFS, J. H. (1974). – "A Theory of interdependant demand for a communications service", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 5, pp. 16-37.