ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 46 — 1997

Analyse de la relation entre primes de terme et prime de change dans un cadre d'équilibre international

Hubert de LA BRUSLERIE, Jean MATHIS *

RÉSUMÉ. – Cet article prend en considération l'existence de deux types de primes de risque : une prime de terme sur les marchés de taux d'intérêt et une prime de change liée à un contexte d'équilibre international. On met en évidence une relation théorique triangulaire entre primes de terme, d'une part, et prime de change d'autre part, qui caractérise l'intégration financière des marchés de capitaux. Cette relation est empiriquement testée avec succès.

Term Premiums and Exchange Rate Premium: An Analysis in a Capital Market Equilibrium Framework

ABSTRACT. – The idea of this article is to take in account both the existence of a domestic interest rate risk and an exchange rate risk. In an international context, we can show that the exchange rates premium is linked in a triangular relation with the two domestic term premiums. This equilibrium relation is sucessfully tested and includes the perfect substitution hypothesis as a special case.

---

* H. de La Bruslerie : Université Paris-I Sorbonne, CREFIB ; J. Mathis : Université Paris-IX Dauphine, CEREG. Les auteurs remercient les arbitres pour leurs suggestions et remarques.

1 Introduction

Le problème de l'intégration financière est généralement analysé en rapport avec la substituabilité des actifs au niveau international. Deux actifs sont substituables si des risques identiques leur sont attachés, c'est-à-dire, compte tenu de la définition du risque en finance, si l'un et l'autre apportent au risque global d'un portefeuille, quelle que soit sa composition, la même contribution.

A l'équilibre des marchés, la substituabilité conduit à l'égalité des taux de rendement anticipés des actifs, à condition qu'il y ait également possibilité d'arbitrage. Ce résultat s'obtient indépendamment de toute hypothèse quant au degré d'aversion au risque des investisseurs. L'égalité des taux de rendement en numéraire de deux actifs quelconques est une forme extrême d'intégration liée à une hypothèse forte de neutralité au risque.

La seule hypothèse de mobilité conduit à une forme plus faible de l'intégration correspondant à la valorisation internationale du prix du risque par les modèles d'évaluation financière. Développés à partir de la théorie du portefeuille, ils ont été étendus à l'international dans les années 1970. L'évaluation des actifs financiers risqués dans le cadre du CAPM (Capital Asset Pricing Model) a donné naissance à l'IAPM (International Asset Pricing Model). Celui-ci intègre l'ensemble des actifs financiers mondiaux dans une évaluation globale qui tient compte de l'existence d'un risque de marché, d'un risque d'inflation et d'un risque de change. Les travaux de SOLNIK [1974] ou ceux de ADLER et DUMAS [1983] ont abouti, sous l'hypothèse d'intégration des marchés financiers internationaux, à exprimer le rendement d'équilibre d'un actif financier à partir du taux d'intérêt sans risque de la monnaie de l'investisseur, augmenté d'une prime de risque complexe qui tient compte d'éléments très divers et bien connus en finance : les aversions nationales par rapport au risque, une prime de risque d'inflation, une prime de risque en monnaie nationale, une prime de conversion de change et une prime de risque économique de change (MATHIS, 1991).

En ne faisant référence qu'à des actifs non risqués dans leur pays, par exemple des Bons du Trésor, et en faisant abstraction du risque d'inflation, la formulation du rendement d'équilibre se simplifie. Dans un contexte international, il existe cependant une prime dans la mesure où, par rapport à une monnaie de référence donnée, les Bons du Trésor étrangers supportent toujours un risque de change. Une prime non nulle entre le rendement de deux actifs non risqués libellés en monnaies différentes, mais convertis dans une même devise de référence, conduit à l'opposé de ce que prévoit la théorie de la parité non couverte des taux d'intérêt. Un biais systématique entre taux de change à terme et taux de change comptant futur s'explique ainsi par la possibilité d'une prime de change qui rémunérerait le risque pris par un agent qui prendrait des positions non couvertes sur deux monnaies différentes.

Les taux d'intérêt sans risque qui sont retenus dans l'analyse du CAPM ou de l'IAPM sont supposés correspondre exactement à l'horizon de placement des investisseurs. La conséquence de ce choix est double : d'une part, l'hypothèse implicite est faite que les investisseurs partagent le même horizon unique, d'autre part, il n'existe pas de risque de taux d'intérêt puisque les agents égalisent maturité de l'actif sans risque et horizon. Il s'ensuit que, même dans le cas de modèles qui ont été dérivés en temps continu, leur spécification exacte est indissociable de la définition d'une période unitaire de référence.

Au niveau international, il convient d'intégrer l'existence d'un équilibre pluritemporel qui s'exprime dans chaque pays par une structure des taux d'intérêt purs. Le seul risque pour l'investisseur domestique qui ne détiendrait que des actifs de son pays, est celui présenté par un actif pur, tel une obligation à coupon nul sans risque de défaut, dont l'échéance ne correspond pas à son horizon d'investissement. Les théories de la structure par terme des taux d'intérêt centrent leur propos sur le signe et la modélisation d'une prime de terme liée à la détention d'actifs d'échéance risquée par rapport à l'horizon de référence. Sans chercher à reprendre ce débat, il s'agit de prendre acte, au niveau international, de l'existence d'une prime de risque domestique particulière qui est alors une prime de risque de taux d'intérêt. La démarche vise ici à introduire des actifs financiers qui présentent à la fois un risque de change et un risque de taux d'intérêt. L'objet de cet article est de montrer qu'une intégration internationale des marchés de taux d'intérêt doit se traduire par le respect de certaines conditions liant les structures de taux d'intérêt domestiques et étrangères, plus particulièrement les primes de terme d'actifs ayant des maturités différentes. La prime de change entre deux devises apparaît alors liée par une relation d'équilibre aux primes de terme exigées au sein de chacun des marchés domestiques.

Divers travaux rendent compte de tests de la non égalité des primes de terme en différentes devises (par exemple, pour ne considérer que le plus récent, JOHNSON, 1993). C'est ainsi que GIOVANNINI et JORION [1987] considèrent que « l'existence d'un lien entre taux d'intérêt nominaux et moments conditionnels du second ordre peut expliquer avec pertinence les variations connues dans la littérature de la prime de risque sur le marché des changes ». Ces travaux ne proposent néanmoins pas de formalisation explicite de la relation entre primes de terme et primes de change.

L'objet de l'analyse qui suit concerne donc l'intégration des risques de taux et de change. Elle ne s'intéresse pas à une forme d'intégration plus large qui porterait sur les risques de taux, de change et industriels (par exemple, sous forme d'actions). Mis à part le souci de limiter l'ampleur des données à traiter, il y a là une raison de fond. On admet souvent qu'il n'y a qu'une faible corrélation entre les taux de rendement des actions (évaluées dans leurs monnaies) et les taux de change. Par contre, il existe de fortes corrélations entre taux d'intérêt et taux de change. L'hypothèse simplificatrice souvent posée est que la corrélation est nulle entre actions et taux de change. On peut alors montrer que, du point de vue de l'évaluation, les actifs internationaux sont séparables en deux groupes : actions et actifs de taux.

La première partie présente un modèle général d'évaluation des actifs internationaux de taux. Elle met en évidence l'existence d'une relation entre primes de terme et prime de change. Cette hypothèse est prolongée dans un cadre de substitutabilité parfaite conduisant à une structure par terme des primes de change associée à la structure par terme des taux. La deuxième partie propose une série de tests empiriques destinés à mettre en évidence l'intégration des risques de taux et de change.

2. La relation primes de terme-prime de change dans un cadre d'équilibre international

L'évaluation des actifs consiste à rechercher une relation qui, à l'équilibre des marchés, relie les taux de rendement anticipés aux caractéristiques statistiques des taux de rendement, aux offres des différents actifs, ainsi qu'aux caractéristiques des investisseurs (aversions pour le risque).

L'évaluation des actifs dans un cadre international est compliquée par le fait que les investisseurs des différents pays évaluent leurs richesses chacun dans le pouvoir d'achat de sa monnaie. Un certain nombre d'hypothèses, de nature technique, permettent de simplifier les calculs. Elles sont présentées dans un premier paragraphe.

L'analyse de la relation entre primes de terme et prime de change suppose qu'il y ait au moins deux pays et deux actifs par pays (un actif long et un actif court), soit quatre actifs. Cette configuration minimale est traitée dans un deuxième paragraphe, la généralisation à de multiples actifs faisant l'objet d'un troisième. Le dernier paragraphe présente une discussion du modèle dans le cadre de la problématique de l'intégration financière.

2.1. Hypothèses

Les choix techniques nécessaires portent sur le temps (discret ou continu), l'inflation (aléatoire ou non aléatoire) et la définition du taux de rendement.

Le choix entre temps discret et temps continu dépend des situations que l'on cherche à analyser. On cherche ici à distinguer différentes échéances, en particulier différentes maturités de titres portant intérêt et différents horizons des investisseurs. De ce fait, le temps discret est mieux adapté.

L'évaluation des actifs internationaux est considérablement simplifiée si l'on suppose que l'inflation évaluée en monnaie locale est non aléatoire. L'interprétation des résultats n'est cependant pas fondamentalement différente.

Le taux de rendement est défini en taux de composition continue :

$$Y_i = Y_{i0} \exp\left(dY_i/Y_i\right) \quad \text{ou} \quad dY_i/Y_i = \ln\left(Y_i/Y_{i0}\right)$$

où Y_i note le cours d'un actif i, 0 la date 0 et l'absence de notation, la date 1.

En finance internationale, cette présentation simplifie grandement les calculs et évite le paradoxe de Siegel dans la mesure où le taux de rendement d'un actif évalué en monnaie 1 est égal à la somme de son taux de rendement en monnaie 2 et du taux d'évolution du change de la monnaie 2 contre la monnaie 1 (à condition de définir le taux d'évolution du change en composition continue). Il découle de ceci un résultat important : la différence entre deux taux de rendement est indépendante de la monnaie d'évaluation des deux actifs concernés. En particulier :

1. Si les taux de rendement de deux actifs sont identiques évalués en une monnaie, ils le restent évalués dans n'importe quelle monnaie ;

2. Les primes de risque (telles que les primes de terme) sont indépendantes de la monnaie d'évaluation.

Enfin, il faut rappeler que l'on se situe dans le cadre général d'un modèle de formation rationnelle des anticipations.

2.2. **Présentation simplifiée à quatre actifs**

On considérera deux pays i et j, le pays i étant celui du numéraire. On distinguera quatre actifs dans le modèle, deux de courte maturité $(a,\ b)$ et deux de longue maturité $(c,\ d)$. Sans perte de généralité, on supposera que la courte maturité est de 1 an, la longue étant de 2 ans. L'horizon d'investissement est supposé égal à 1 an.

La monnaie d'évaluation est notée entre parenthèses. En l'absence de celles-ci, l'évaluation est en numéraire. Les actifs, les portefeuilles et le change reçoivent les mêmes notations que leur rendement anticipé.

a : $r_i^{i\,(i)}$ taux de rendement en numéraire d'un zéro coupon du pays i à échéance de 1 an. Ce titre est sans risque sur l'horizon.

b : $r_1^{j\,(i)}\,(= r_1^{j\,(j)} + \theta_1^j)$, rendement d'un zéro coupon du pays j à 1 an. Ce titre est sans risque dans sa devise. En numéraire, il ne supporte que le risque de change. Le taux $r_1^{j\,(j)}$ est le rendement en devise locale, θ_1^j étant le mouvement de change $\ln{(e_1/e_0)}$ de la devise j par rapport à la devise i.

c : $\mu_{2,1}^{i\,(i)}$ rendement d'un zéro coupon du pays i à échéance de 2 ans. Cet actif est risqué car il est détenu 1 an.

d : $\mu_{2,1}^{j\,(i)}\,(= \mu_{2,1}^{j\,(j)} + \theta_1^j)$, rendement d'un zéro coupon du pays j à échéance de 2 ans. Cet actif est risqué car il est détenu 1 an. Il est, de plus, exposé au risque de change.

Dans le cas de l'évaluation en numéraire, le risque de change (auquel se réduit le risque d'inflation) n'existe que pour les seuls actifs b et d du pays j. On note s_{jk} (respectivement $s_{jk\,(k)}$) la covariance entre le taux de change de la monnaie j en numéraire i et le taux de rendement de l'actif k exprimé en numéraire (resp. en monnaie k), c_{jj} est la variance du taux de change, σ_{ab} (resp. $\sigma_{a\,(a)\,b\,(b)}$) la covariance entre les taux de rendement des actifs a et b en numéraire (en monnaies locales).

$$\sigma_{aa} = 0 \qquad \sigma_{bb} = c_{jj}$$
$$\sigma_{bd} = s_{jd} \qquad \sigma_{bc} = s_{jc}$$

L'évaluation, c'est-à-dire le taux de rendement excédentaire anticipé à l'équilibre du marché s'obtient par agrégation des équilibres des investisseurs. De façon générale, le rendement excédentaire de l'actif i en monnaie de référence est fonction de :

– la covariance entre l'actif i et la moyenne des taux de change pondérée par la part de la richesse de chaque investisseur dans la richesse mondiale,

– la covariance entre l'actif i et le portefeuille du marché mondial.

Si l'on désigne par α_M la moyenne des tolérances au risque des investisseurs pondérés par leurs parts dans la richesse mondiale, soit pour $N+1$ actif et $L+1$ monnaies (la dernière étant le numéraire), le rendement anticipé de l'actif i s'écrit :

$$(1)\quad \mu_i = r_{L+1} + \left(-\frac{1}{a_M}\right) \times \left(\sum_{l=1}^{L+1} W^l \cdot s_{li}\right) \Big/ \sum_{l=1}^{L+1} W^l + \frac{1}{a_M} \times \sum_{k=1}^{N+1} w_k^M \, \sigma_{ik}$$

Le premier des deux termes en $(1/\alpha_M)$ à droite du signe égal est la moyenne des covariances du taux de rendement de l'actif i avec les taux de change des différents investisseurs, $W^l/\Sigma_l W^l$ étant la part de la richesse des investisseurs du pays l dans la richesse mondiale. Une formulation équivalente mais plus simple peut être obtenue à condition de définir les actifs protégés contre le risque de change par adossement d'un portefeuille d'actifs courts, les poids de ceux-ci étant calculés de sorte que l'actif protégé ainsi constitué soit de covariance nulle avec tous les taux de change.

Le résultat obtenu est alors particulièrement simple : le taux de rendement anticipé d'un actif protégé contre le risque de change est égal à $(1/\alpha_M)$ fois la covariance entre l'actif protégé et le portefeuille du marché. Ce résultat étend celui qui vaut en économie fermée. Dans ce cas, l'adossement à un ensemble de bons du Trésor est remplacé par l'adossement à l'actif sans risque.

Dans le cas particulier auquel on s'intéresse ici, il faut donc constituer 2 portefeuilles P_1 et P_2 exempts du risque de change en vendant l'actif sans risque de la devise risquée j parfaitement représentatif du risque de change dans une proportion v_{ij} pour P_1 (resp. v_{jj} pour P_2), et l'actif sans risque de la devise i à titre de complément pour obtenir un adossement complet (un pour un). Leur rendement anticipé est alors :

$$P_1 = \mu_{2,1}^{i\,(i)} - v_{ij}\, r_1^{j\,(i)} - (1 - v_{ij})\, r_1^{i\,(i)}$$
$$P_2 = \mu_{2,1}^{j\,(i)} - v_{jj}\, r_1^{j\,(i)} - (1 - v_{jj})\, r_1^{i\,(i)}$$

Le portefeuille P_1 est sans risque de change si [1]

$$\text{cov}\,(P_1,\, \theta_1^j) = \text{cov}\,(\mu_{2,1}^{i\,(i)} - v_{ij}\, r_1^{j\,(i)},\, \theta_1^j) = s_{jc} - v_{ij} \,.\, c_{jj} = 0$$

d'où

$$(2)\qquad v_{ij} = s_{jc}/c_{jj}$$

1. Sauf confusion possible, la même notation représente une variable aléatoire et son anticipation ; ainsi θ note, selon les cas, le taux de croissance du change ou son anticipation.

Symétriquement, on aura :

(3) $$v_{jj} = s_{jd}/c_{jj}$$

Les rendements des portefeuilles P_1 et P_2 s'obtiennent par application du résultat d'évaluation valable pour des actifs protégés. La spécification obtenue tient compte de ce que le terme de covariance entre les portefeuilles et l'actif a est nul puisque ce dernier est sans risque, et que le terme de covariance avec l'actif b est nul puisque celui-ci ne supporte que le taux de change, le portefeuille annulant ce risque par construction. En remplaçant à l'aide de (1) :

$$\begin{aligned} P_1 \,:\, & \mu_{2,1}^{i\,(i)} - v_{ij}\, r_1^{j\,(i)} \\ & = (1 - v_{ij})\, r_1^{i\,(i)} + (1/\alpha_M)\, [w_c\, (\sigma_{cc} - v_{ij}\, .\, s_{jc}) + w_d\, (\sigma_{cd} - v_{ij}\, .\, s_{jd})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 \,:\, & \mu_{2,1}^{j\,(i)} - v_{jj}\, r_1^{j\,(i)} \\ & = (1 - v_{jj})\, r_1^{i\,(i)} + (1/\alpha_M)\, [w_c\, (\sigma_{cd} - v_{jj}\, .\, s_{jc}) + w_d\, (\sigma_{dd} - v_{jj}\, .\, s_{jd})] \end{aligned}$$

où après réarrangements :

(4) $$\begin{aligned} \mu_{2,1}^{i\,(i)} - \, r_1^{i\,(i)} &= v_{ij}\, (r_1^{j\,(i)} - r_1^{i\,(i)}) \\ & +(1/\alpha_M)\, [w_c\, (\sigma_{cc} - v_{ij}\, .\, s_{jc}) + w_d\, (\sigma_{cd} - v_{ij}\, .\, s_{jd})] \end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned} \mu_{2,1}^{j\,(i)} - \, r_1^{j\,(i)} &= \, -(1 - v_{jj})\, (r_1^{j\,(i)} - r_1^{i\,(i)}) \\ & +(1/\alpha_M)\, [w_c\, (\sigma_{cd} - v_{jj}\, .\, s_{jc}) + w_d\, (\sigma_{dd} - v_{jj}\, .\, s_{jd})] \end{aligned}$$

La différence (5)-(4) donne :

(6) $$\begin{aligned} & (\mu_{2,1}^{j\,(i)} - \, r_1^{j\,(i)}) - (\mu_{2,1}^{i\,(i)} - \, r_1^{(i)i}) \\ & \quad = \, -(1 + v_{ij} - v_{jj})\, .\, (r_1^{j\,(i)} - r_1^{i\,(i)}) + (1/\alpha_M)\, [\ldots] \end{aligned}$$

L'expression à partir des taux de rendement évalués en devises locales fait apparaître, à droite du signe égal, le taux de croissance moyen anticipé du change. En exprimant en devise locale à partir des définitions de a, b, c et d :

$$\begin{aligned} & (\mu_{2,1}^{j\,(j)} - \, r_1^{j\,(j)}) - (\mu_{2,1}^{i\,(i)} - \, r_1^{(i)i}) \\ & \quad = \, -(1 + v_{ij} - v_{jj})\, .\, (r_1^{j\,(j)} + \theta_1^j - r_1^{i\,(i)}) \\ & \qquad + (1/\alpha_M)\, [w_c\, (\sigma_{cd} - v_{jj}\, .\, s_{jc} - \sigma_{cc} - v_{ij}\, .\, s_{jc}) \\ & \qquad\qquad + w_d\, (\sigma_{dd} - v_{jj}\, .\, s_{jd} - \sigma_{cd} - v_{ij}\, .\, s_{jd})] \end{aligned}$$

On aboutit à une expression générale en remarquant que :

(7) $$p_1^{j\,(i)} = r_1^{j\,(j)} + \theta_1^j - r_1^{i\,(i)}$$

où $p_1^{j\,(i)}$ est l'expression de la prime de change de la devise j calculée en numéraire i pour une durée d'un an.

La rentabilité anticipée en t sur un horizon de placement de h (ici 1 an) d'un titre risqué de maturité n (ici 2 ans) fait référence à la prime de terme :

$$(8) \qquad {}_t\mu_{n,\,h}^{i\,(i)} = {}_t r_h^{i\,(i)} + \Phi^i\,(t,\ n,\ h)$$

${}_t\mu_{n,\,h}^{i\,(i)}$: rentabilité anticipée en t exprimée dans sa devise d'un zéro coupon libellé dans la monnaie i, de maturité n, sur un horizon de h périodes.

${}_t r_h^{i\,(i)}$: taux d'intérêt pur, à la date t, sur l'horizon qui est le taux sans risque sur la durée h pour la devise i.

$\Phi^i\,(t,\ n,\ h)$: prime de terme exigée sur le marché des taux d'intérêt d'un actif risqué.

Il est à noter que la prime de terme est indicée par i et non pas par $i\,(i)$. En effet, comme cela a déjà été mentionné, les primes, comme toutes les différences de taux de rendement, sont neutres vis-à-vis du choix du numéraire. Dans le cas présent, ceci provient tout simplement de ce que l'évaluation en monnaie j au lieu de la monnaie i conduirait à retrancher le taux de croissance moyen du change aussi bien à droite qu'à gauche du signe égal.

L'égalité (6) s'écrit encore :

$$(9) \qquad \Phi^j\,(t,\ 2,\ 1) - \Phi^i\,(t,\ 2,\ 1) = -A.\,p_1^{j\,(i)} + B$$

La différence de deux primes de terme dans chacune des deux devises est proportionnelle à la prime de change sur l'horizon d'investissement, augmentée d'un terme constant. Ce terme B prend en compte la tolérance moyenne au risque et les caractéristiques propres aux deux titres risqués considérés (actifs c et d).

La relation d'équilibre international des primes de terme est valable quelle que soit la maturité n du zéro coupon représentatif des actifs risqués. Le raisonnement effectué ci-dessus avec $n = 2$ est valable pour toutes autres valeurs n des actifs c et d. Les coefficients qui permettent d'annuler le risque de change des portefeuilles ne sont plus les mêmes que précédemment, mais sont indicés par n :

$$v_{ij\,(n)} = s_{jc\,(n)}/c_{jj} \qquad \text{et} \qquad v_{j\,j\,(n)} = s_{jd\,(n)}/c_{jj}$$

L'égalité (6) s'exprime de façon plus générale :

$$\begin{aligned}(10)\quad & (\mu_{n,1}^{j\,(i)} - r_1^{j\,(i)}) - (\mu_{n,1}^{i\,(i)} - r_1^{(i)i}) \\ & \quad = -(1 + v_{ij\,(n)} - v_{jj\,(n)})\,.\,(r_1^{j\,(i)} - r_1^{i\,(i)}) \\ & \qquad + (1/\alpha_M)\,[w_c\,(\sigma_{c\,(n)\,d\,(n)} - v_{jj\,(n)}\,.\,s_{jc\,(n)} \\ & \qquad\qquad - \sigma_{c\,(n)c\,(n)} + v_{ij\,(n)}\,.\,s_{jc\,(n)}) \\ & \qquad + w_d\,(\sigma_{d\,(n)\,d\,(n)} - v_{jj\,(n)}\,.\,s_{jd\,(n)} - \sigma_{c\,(n)\,d\,(n)} - v_{ij\,(n)}\,.\,s_{jd\,(n)})]\end{aligned}$$

Les termes $\sigma_{c\,(n)\,d\,(n)}$ sont différents de ceux de la relation (6) car la variance ou la covariance d'un zéro coupon de maturité n n'est pas identique à celle d'un titre de maturité plus courte. Les termes A et B apparaissent dépendants des caractéristiques de maturité des titres c et d ainsi que de l'horizon de détention. On peut de la même manière généraliser sur un horizon de détention h :

(11) $$\Phi^j(t,\,n,\,h) - \Phi^i(t,\,n,\,h) = -A(n,\,h)\,.\,p_h^{j\,(i)} + B(n,\,h)$$

Le terme $A(n,\,h)$ apparaît comme une différence de ratios de couverture liés aux covariances entres les actifs risqués et le change. Le terme $B(n,h)$ est représentatif du risque attaché aux actifs de taux long hors risque de change puisqu'il fait intervenir la covariance du taux de rendement des actifs protégés contre le risque de change avec le portefeuille du marché.

2.3. **Généralisation à de multiples actifs**

Si, à partir de (11), on considère deux maturités risquées n et m dans l'expression d'un équilibre international, il faut introduire deux nouveaux actifs risqués qui seront représentatifs de la maturité m :

e : $\mu_{m,1}^{i\,(i)}$ rendement d'un zéro coupon du pays i à échéance de m années. Cet actif est risqué car il est détenu sur un horizon de 1 an.

f : $\mu_{m,1}^{j\,(i)}\,(= \mu_{m,1}^{j\,(j)} + \theta_1^j)$, rendement d'un zéro coupon du pays j, risqué car il est exposé à un risque d'échéance et à un risque de change.

Dans un univers à 6 actifs, la formule donnant les différences de primes de terme est une généralisation de l'équation (6) où interviennent les termes w_e et w_f :

(12) $$\begin{aligned}
&(\mu_{n,1}^{j\,(i)} - r_1^{j\,(i)}) - (\mu_{n,1}^{i\,(i)} - r_1^{(i)i}) \\
&\quad = -(1 + v_{ij\,(n)} - v_{jj\,(n)})\,.\,(r_1^{j\,(i)} - r_1^{i\,(i)}) \\
&\qquad + (1/\alpha_M)\,[w_c\,(\sigma_{d\,(n)\,c\,(n)} - \sigma_{c\,(n)c\,(n)} \\
&\qquad\quad - (v_{jj\,(n)} - v_{ij\,(n)})\,.\,s_{jc\,(n)}) \\
&\qquad\qquad + w_d\,(\sigma_{d\,(n)\,d\,(n)} - \sigma_{c\,(n)d\,(n)} \\
&\qquad\qquad\quad - (v_{jj\,(n)} - v_{ij\,(n)})\,.\,s_{jd\,(n)}) \\
&\qquad\qquad + w_e\,(\sigma_{d\,(n)\,e\,(m)} - \sigma_{c\,(n)e\,(m)} \\
&\qquad\qquad\quad - (v_{jj\,(n)} - v_{ij\,(n)})\,.\,s_{je\,(m)}) \\
&\qquad\qquad + w_f\,(\sigma_{d\,(n)\,f\,(m)} - \sigma_{c\,(n)f\,(m)} \\
&\qquad\qquad\quad - (v_{jj\,(n)} - v_{ij\,(n)})\,.\,s_{jf\,(m)})]
\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

(13) $$\Phi^j(t,\,n,\,1) - \Phi^i(t,\,n,\,1) = -A(n,\,1)\,.\,p_1^{j\,(i)} + B(n,\,U,\,1)$$

Le terme $B(\cdot)$ est fonction des caractéristiques des actifs risqués de maturité n détenus jusqu'à l'horizon h (ici égal à 1) ainsi que des caractéristiques de l'ensemble des actifs composant l'univers de placement U en actifs risqués, ici réduit à 4 titres. De manière symétrique, on obtient une relation équivalente à (12) pour les différences de primes de terme des actifs de maturité m. En formant la différence entre les relations (12) pour les maturités n et m, on a :

$$(14)\quad (\mu_{n,1}^{j\,(i)} - \mu_{n,1}^{i\,(i)}) - (\mu_{m,1}^{j\,(i)} - \mu_{m,1}^{i\,(i)})$$
$$= (\,-v_{ij\,(n)} + v_{jj\,(n)} + v_{ij\,(m)} - v_{jj\,(m)}\,.\,(r_1^{j\,(i)} - r_1^{i\,(i)})$$
$$+ (1/\alpha_M)\,[w_c\,(\sigma_{c\,(n)\,d\,(n)} - \sigma_{c\,(n)c\,(n)} - \sigma_{c\,(n)\,f\,(m)} + \sigma_{c\,(n)e\,(m)}$$
$$- (-v_{ij\,(n)} + v_{jj\,(n)} + v_{ij\,(m)} - v_{jj\,(m)})\,.\,s_{jc\,(n)})$$
$$+ w_d\,(\sigma_{d\,(n)\,d\,(n)} - \sigma_{d\,(n)c\,(n)} - \sigma_{d\,(n)\,f\,(m)} + \sigma_{d\,(n)e\,(m)}$$
$$- (-v_{ij\,(n)} + v_{jj\,(n)} + v_{ij\,(m)} - v_{jj\,(m)})\,.\,s_{jd\,(n)})$$
$$+ w_e\,(\sigma_{e\,(m)\,d\,(n)} - \sigma_{e\,(m)c\,(n)} - \sigma_{e\,(m)\,f\,(m)} + \sigma_{e\,(m)e\,(m)})$$
$$- (-v_{ij\,(n)} + v_{jj\,(n)} + v_{ij\,(m)} - v_{jj\,(m)})\,.\,s_{je\,(m)})$$
$$+ w_f\,(\sigma_{f\,(m)\,d\,(n)} - \sigma_{f\,(m)c\,(n)} - \sigma_{f\,(m)\,f\,(m)} + \sigma_{f\,(m)e\,(m)}$$
$$- (-v_{ij\,(n)} + v_{jj\,(n)} + v_{ij\,(m)} - v_{jj\,(m)})\,.\,s_{jf\,(m)})]$$

Selon que les taux de rendement sont exprimés en numéraire ou en monnaie locale on obtient une expression des différences de rendement terme à terme (pour un horizon $h = 1$) :

$$(15)\quad (\mu_{n,1}^{j\,(i)} - \mu_{n,1}^{i\,(i)}) - (\mu_{m,1}^{j\,(i)} - \mu_{m,1}^{i\,(i)})$$
$$= (\mu_{n,1}^{j\,(j)} - \mu_{n,1}^{i\,(i)}) - (\mu_{m,1}^{j\,(j)} - \mu_{m,1}^{i\,(i)})$$
$$= -[A\,(n,\,1) - A\,(m,\,1)]\,.\,p_1^{j\,(i)} + B\,(n,\,U,\,1) - B\,(m,\,U,\,1)$$

$A\,(n,\,1)$ et $A\,(m,\,1)$ sont de même nature que précédemment mais, se référant à des actifs de maturités différentes, ils ne sont pas identiques. En revanche, les termes $B\,(n,\,U,\,1)$ et $B\,(m,\,U,\,1)$ n'ont rien à voir avec les $B\,(n)$ et $B\,(m)$ de l'équation (11) car l'univers de placement s'est enrichi de nouveaux actifs risqués dans leur monnaie.

La relation liant les primes de terme et la prime de change peut être facilement généralisée en considérant un univers composé de $Q + 2$ actifs, dont Q sont des zéro-coupons risqués en terme de taux d'intérêt de maturités diverses, les deux actifs non risqués étant ceux dont la maturité est égale à l'horizon d'investissement dans chacun des pays i et j.

L'équation donnant la différence de prime de risque conserve une forme semblable à (12), seul le dernier terme change car il devient une somme sur Q actifs obligataires risqués.

$$(16)\quad (\mu_{n,1}^{j\,(i)} - r_1^{j\,(i)}) - (\mu_{n,1}^{i\,(i)} - r_1^{(i)i})$$
$$= -(1 + v_{ij\,(n)} - v_{jj\,(n)})\,.\,(r_1^{j\,(i)} - r_1^{i\,(i)})$$
$$+ (1/\alpha_M)\,[\Sigma^Q\,w_q\,(\sigma_{q\,(q)\,d\,(n)}$$
$$- \sigma_{q\,(q)c\,(n)} - (v_{jj\,(n)} - v_{ij\,(n)})\,.\,s_{jq\,(q)})]$$

Soit, en généralisant car la relation est vérifiée quel que soit l'horizon de détention h :

$$(17)\quad \Phi^j\,(t,\,n,\,h) - \Phi^i\,(t,\,n,\,h) = -A\,(n,\,h)\,.\,p_h^{j\,(i)} + B\,(n,\,Q,\,h)$$

La formulation des différences de rendement de terme n et de terme m est identique à (15), à cela près que les valeurs $B\,(n,\,Q,\,1)$ et $B\,(m,\,Q,\,1)$ dépendent de la maturité et de l'univers total de placement considéré Q.

Le terme $A\,(\,.\,)$ représente un écart de taux de couverture contre le risque de change de 2 actifs risqués en terme de taux d'intérêt $(n$ et $m > h)$. Calculé à partir de la différence de covariance, le terme $A\,(\,.\,)$ peut prendre aussi bien des valeurs positives que négatives. Le terme $B\,(\,.\,)$ dépend de la structure de l'offre de titres (poids w_q) et des covariances des actifs protégés avec les autres actifs risqués. Il dépend aussi de l'aversion moyenne au risque. Le signe et l'ordre de grandeur de $B\,(\,.\,)$ sont *a priori* indéterminés. Les covariances pouvant varier dans le temps de même que α_M, ces deux coefficients peuvent être instables. La pertinence du modèle d'équilibre entre primes de terme et de change conduit simplement à poser que les termes $A\,(\,.\,)$ et $B\,(\,.\,)$ sont non nuls.

2.4. **Interprétation dans un cadre d'intégration financière internationale**

L'intégration des marchés financiers est souvent reliée à l'hypothèse de substituabilité parfaite entre actifs libellés en devises différentes. Si les rendements espérés des actifs exprimés en une même devise de référence sont identiques, on concluera à l'identité des primes de risque au niveau international, situation caractéristique d'une intégration financière parfaite (BORDES [1988]). La relation (17) caractérise une intégration plus riche qu'une simple égalisation des prix du risque, puisqu'interviennent des coefficients linéaires entre primes de terme et prime de change dans le cadre d'un modèle d'évaluation international des actifs risqués. Il s'agit dans cette partie d'explorer les conditions de simplification de la relation (17) sous la forme d'une égalité directe des primes de termes exprimées dans la même devise de référence. Plus précisément, il s'agit d'analyser les conditions d'égalisation des coefficients A et B respectivement à 1 et 0, correspondant à une substitution parfaite des actifs risqués au niveau international.

2.4.1. **Substituabilité parfaite**

La substituabilité parfaite consiste à poser que la rentabilité espérée exprimée en monnaie de référence doit être identique pour deux actifs risqués de pays différents et de même maturité. Elle correspond à une hypothèse de compensation internationale des primes de risque qui se justifie par le fait que, à l'équilibre, toutes les sources de risque ont été rémunérées par des primes de risque adéquates. Une intégration financière parfaite signifie donc que, quel que soit le choix de la maturité ou de l'horizon de placement, la rémunération du risque encouru pour une position donnée est la même en monnaie de référence ou sur la devise, compte tenu de la valorisation internationale du risque de change et du risque de taux d'intérêt.

En comparant avec la relation (17), l'hypothèse de substituabilité parfaite (c'est-à-dire, exprimée en numéraire, $\mu^{j\,(i)} = \mu^{i\,(i)}$) conduit à l'égalisation à 1 du coefficient $A(\,.\,)$ et à 0 de $B(\,.\,)$. Cela s'explique économiquement par le fait qu'il est inutile de couvrir un investissement étranger dans le cadre d'un portefeuille, les ratios de couverture v_{ij} devenant nuls. On a :

$$\Phi^i(t,\,n,\,h) - \Phi^j(t,\,n,\,h) = {}_t p_h^{j\,(i)} \tag{18}$$

La relation (18) est une relation qui permet de tester l'existence d'une intégration financière par substitution parfaite entre les marchés de taux d'intérêt en devises différentes. Elle souligne le fait qu'une hypothèse de substitution parfaite implique un mécanisme de stricte compensation entre primes de terme en devise locale et prime de change. Les primes de terme locales peuvent être différentes entre pays, au niveau international la prime de change jouera alors un rôle égalisateur qui aboutira à une identité des primes de risque rapportées à une devise donnée.

2.4.2. **Incidence de la maturité**

Il s'agit ici d'analyser dans quelle mesure la maturité n exerce une influence sur le coefficient $A(\,.\,)$ reliant les primes de terme et de change. En exprimant dans la relation (16) les covariances des ratios de couverture par rapport à la monnaie locale, on obtient (pour $h = 1$, sans perte de généralité) :

$$\begin{aligned}(\mu_{n,1}^{j\,(i)} - r_1^{j\,(i)}) &- (\mu_{n,1}^{i\,(i)} - r_1^{(i)i}) \\ &= -(1 + s_{jc\,(n)}/c_{jj} - s_{jd\,(n)\,(j)}/c_{jj} - c_{jj}/c_{jj}))\,.\,(r_1^{j\,(i)} - r_1^{i\,(i)}) \\ &\quad + (1/\alpha_M)\,[\Sigma^Q\, w_q\,(\ldots)]\end{aligned} \tag{19}$$

En réécrivant les covariances à partir des chocs instantanés de taux d'intérêt $\delta r\,(.,\ .)$, on a :

$$\sigma_{c\,(n)\,q\,(q)} = n\,.\,q\,.\,\sigma_{\delta r\,(i,n)\,.\,\delta r\,(i,q)} \qquad \text{et} \qquad s_{jc\,(n)} = -\,n\,.s_{j\,.\,\delta r\,(i,n)}$$

$\delta r\,(i,\,n)$: mouvement du taux d'intérêt d'échéance n dans la monnaie i

Le membre gauche de (19) devient :

$$\begin{aligned}&-(-n\,.\,s_{j\delta r\,(i,n)}/c_{jj} + n\,.\,s_{j\,\delta r\,(j,n)}/c_{jj})\,.\,(r_1^{j\,(i)} - r_1^{i\,(i)}) \\ &+ (1/\alpha_M)\,[\Sigma^Q\, w_q\,(\ldots)]\end{aligned}$$

D'où

$$A\,(n,\,1) = n\,.\,(-s_{j\delta r\,(i,n)} + s_{j\delta r\,(j,n)})/c_{jj}$$

Si les chocs de taux d'intérêt s'expriment sous forme de fonctions séparables à partir du choc sur les taux courts :

$$\delta r\,(i,\,n) = f\,(n)\,.\,\delta r\,(i,\,1) \qquad \text{et} \qquad \delta r\,(j,\,n) = f\,(n)\,.\,\delta r\,(j,\,1)$$

alors :

(20) $$A(n,\,1) = n\,.\,f\,(n)\,.\,(-s_{j\delta r\,(i,\,1)} + s_{j\delta r\,(j,\,1)})/c_{jj}$$

On suppose de plus que $f\,(\,.\,)$ est une fonction positive de n [2]. Alors $A\,(\,.\,)$ est du signe de $(s_{j\delta r\,(j,\,1)} - s_{j\delta r\,(i,\,1)})$ qui est une différence de covariance avec les taux courts, indépendante de n. Sous hypothèse de séparabilité, on montre ainsi que le signe de $A\,(\,.\,)$ reste le même quelque soit la maturité n.

En supposant, de plus, que $f\,(n)$ décroît avec n, mais moins vite que n, alors $A(n,\,h)$ est, en valeur absolue, une fonction croissante de n. Cette hypothèse correspond au cas réaliste de chocs de taux d'ampleur décroissante avec la maturité. Le cas particulier des mouvements de taux parallèles dans la même devise (c'est-à-dire $f\,(n) = 1$) conduit aussi à une relation croissante entre $A\,(\,.\,)$ et la maturité.

Sous le jeu d'hypothèses standards effectuées ci-dessus, on doit donc s'attendre à des coefficients $A\,(\,.\,)$ qui augmentent en valeur absolue avec la maturité des actifs risqués.

2.4.3. **Conditions d'intégration par égalité stricte des primes de terme et de la prime de change**

Même si les conditions particulières liées à la substituabilité parfaite ne sont pas remplies, l'intégration financière internationale suppose l'existence générale d'une relation linéaire entre primes de terme et prime de change.

Il s'agit ici d'explorer sous quelles conditions "techniques" concernant les structures par terme des taux d'intérêt il y a égalisation stricte ($A = 1$ et $B = 0$) entre primes de terme et prime de change. En reprenant (19), on fait référence aux covariances en monnaie locale pour exprimer le terme $B\,(\,.\,)$ du membre de droite. On utilise pour cela les relations suivantes en distinguant selon que l'actif q appartient à i, pays du numéraire (cas de l'actif c), ou à un pays étranger j (cas de l'actif d) :

• q appartient à i (par ex. $q = c$)

$$\sigma_{q\,(q)\,d\,(n)} = \sigma_{q\,(q)\,d\,(n)\;(j)} + s_{jd\,(n)\;(j)}$$

• q appartient à j (par ex. $q = d$)

$$\sigma_{q\,(q)\,d\,(n)} = \sigma_{q\,(q)\,(j)\,d\,(n)\;(j)} + s_{jq\,(n)\;(j)} + s_{jq\,(q)\,(j)} + c_{jj}$$

$$\sigma_{q\,(q)\,c\,(n)} = \sigma_{q\,(q)\,(j)\;c\,(n)} + s_{jq\,(q)\;(j)}$$

2. Cela signifie que les mouvements de taux se font dans le même sens le long de la courbe des taux, mais avec des amplitudes différentes. On écarte donc la possibilité de mouvements opposés entre les taux longs et courts.

En remplaçant, l'expression entre crochets de (19) devient :

$$\Sigma^{Q/i}\, w_q\,(\sigma_{q\,(q)\,d\,(n)\,(j)} + s_{\,jd\,(n)\,(j)} - \sigma_{q\,(q)\,c\,(n)}$$
$$\quad - s_{\,jd\,(n)\,(j)}/c_{jj} + c_{jj}/c_{jj} - s_{\,jc\,(n)}/c_{jj})\,.\,s_{\,jq\,(q)} +$$
$$\Sigma^{Q/j}\, w_q\,(\sigma_{q\,(q)\,(j)\,d\,(n)\,(j)} + s_{\,jd\,(n)\,(j)} + s_{\,jq\,(q)\,(j)} + c_{jj} - \sigma_{q\,(q)\,(j)\,c\,(n)} - s_{\,jq\,(q)\,(j)}$$
$$\quad - s_{\,jd\,(n)\,(j)}/c_{jj} + c_{jj}/c_{jj} - s_{\,jc\,(n)}/c_{jj})\,.(\,s_{\,jq\,(q)\,(j)} + c_{jj})$$

D'où (pour $h = 1$) :

$$
\begin{aligned}
(21)\qquad & (\mu_{n,1}^{j\,(j)} - r_1^{j\,(j)}) - (\mu_{n,1}^{i\,(i)} - r_1^{i\,(i)}) \\
&= -(-n\,.\,s_{j\delta r\,(i,\,n)}/c_{jj} + n\,.\,s_{j\,\delta r\,(j,\,n)}/c_{jj})\,.\,(r_1^{j\,(i)} - r_1^{i\,(i)}) \\
&+ (1/\alpha_M)\,\Sigma^{Q/i}\, w_q\,[n\,.\,q\,\sigma_{\delta r\,(i,\,q)\,.\,\delta r\,(j,\,n)} - n.\,s_{j\delta r\,(j,\,n)} - n\,.\,q\,\sigma_{\delta r\,(i,\,q)\,.\,\delta r\,(i,\,n)} \\
&\qquad\qquad - (-n\,.\,s_{j\delta r\,(j,\,n)}/c_{jj} + 1 + n\,.\,s_{j\,\delta r\,(i,\,n)}/c_{jj}) \\
&\qquad\qquad .\,(-q)\,.\,s_{j\,\delta r\,(i,\,q)})] \\
&+ (1/\alpha_M)\,\Sigma^{Q/j}\, w_q\,[n\,.\,q\,\sigma_{\delta r\,(j,\,q)\,.\,\delta r\,(j,\,n)} - n.\,s_{j\delta r\,(j,\,n)} \\
&\qquad\qquad + c_{jj} - n\,.\,q\,\sigma_{\delta r\,(j,\,q)\,.\,\delta r\,(i,\,n)} \\
&\qquad\qquad - (-n\,.\,s_{j\delta r\,(j,\,n)}/c_{jj} + 1 + n\,.\,s_{j\,\delta r\,(i,\,n)}/c_{jj}) \\
&\qquad\qquad .\,(-q\,.\,s_{j\,\delta r\,(j,\,q)} + c_{jj})]
\end{aligned}
$$

• Cas de mouvements parallèles et identiques de taux

En supposant que les mouvements de taux soient tous parallèles et identiques quelle que soit la maturité des actifs et les pays, on a alors $\delta r\,(i,\,n) = \delta r$ quels que soient i et n.

Le membre de droite de (21) devient :

$$
\begin{aligned}
(22)\quad & + (1/\alpha_M)\,\Sigma^{Q/i}\, w_q\,[-ns_{j\delta r} - (1)\,(-q)\,.\,s_{j\delta r})] \\
& + (1/\alpha_M)\,\Sigma^{Q/j}\, w_q\,[-ns_{j\delta r} + c_{jj} - (1)\,(-q\,.\,s_{j\delta r} + c_{jj})] \\
& \quad = (1/\alpha_M)\,[(-n\,.\,s_{j\delta r})\,.\,(\Sigma\, w_q) + s_{j\delta r}\,(\Sigma^{Q/i}\, q\,.\,w_q + \Sigma^{Q/j}\, q\,.\,w_q)]
\end{aligned}
$$

On remarque la disparition du terme $A\,(\,.\,)$ faisant intervenir la prime de change. En revanche, il subsiste un terme fixe $B\,(\,.\,)$ égal à l'expression ci-dessus. Ce terme dépend de n, maturité de l'actif risqué. En considérant des actifs risqués de maturité n et m différentes et en formant la différence :

$$
\begin{aligned}
(23)\quad & (\mu_{m,1}^{j\,(j)} - \mu_{n,1}^{i\,(i)}) - (\mu_{n,1}^{j\,(j)} - \mu_{m,1}^{i\,(i)}) \\
& \quad = B\,(m,\,Q,\,1) - B\,(n,\,Q,\,1) = (n-m)\,.\,(1/\alpha_M)\,.\,(\Sigma\, w_q)
\end{aligned}
$$

Le terme $\Sigma\, w_q$ n'est pas égal à l'unité car il exclut les 2 actifs sans risque sur l'horizon d'investissement. L'expression (23) montre que, dans un cadre général, l'hypothèse de mouvements parallèles des taux d'intérêt n'aboutit pas à une égalité stricte entre primes de terme et prime de change, bien que cette dernière disparaisse de la relation.

• Cas d'indépendance des taux de rendement et des taux de change

Supposons maintenant que les taux de rendement des actifs et les taux de change ne soient pas corrélés $(s = 0)$. Les termes v_{ij} sont nuls alors que les termes v_{jj} sont égaux à 1, ce qui conduit bien à des coefficients $A\,(\,.\,)$ eux-mêmes égaux à 0.

La condition d'intégration internationale devient proche de celle obtenue en cas de mouvements parallèles des taux :

$$\begin{aligned}(\mu_{m,1}^{j\,(j)} - \mu_{m,1}^{i\,(i)}) - (\mu_{n,1}^{j\,(j)} - \mu_{n,1}^{i\,(i)}) \\ = B\,(m,\, Q,\, 1) - B\,(n,\, Q,\, 1)\end{aligned} \tag{24}$$

Ici encore, on n'aboutit pas à une relation d'égalisation par compensation directe entre primes de terme et prime de change puisque les coefficients $B\,(\,.\,)$ sont non nuls.

2.4.4. Mise en évidence d'une structure par terme des primes de change

Si l'on se situe dans un cadre d'investissement multi-temporel, on peut introduire une certaine dynamique qui aboutit à la mise en évidence de la non-stabilité des primes de change. Ce processus est nécessaire pour garantir le respect pluri-temporel de l'intégration financière telle que définie précédemment. En acceptant l'hypothèse que les variances et les covariances des rendements sont stables, les coefficients $A\,(\,.\,)$ et $B\,(\,.\,)$ sont constants. En adaptant la relation (17) dans un cadre d'anticipations rationnelles, en faisant référence aux prévisions en $t = 0$ pour $t = 1$ (pour $h = 1$) :

$$E_0\,[\Phi^i\,(1,\, n,\, 1) - \Phi^j\,(1,\, n,\, 1)] = A\,(\,.\,)\,.\,E_0\,[{}_1p_1^{j\,(i)}] + B\,(\,.\,) \tag{25}$$

On remarquera en particulier que ${}_0p_1$ et $E_0\,({}_1p_1)$ sont différents car les membres de gauche de (17) et de (25) ne sont pas identiques. La prime de change, pour un horizon donné, n'apparaît pas stable dans le temps. Les taux d'intérêt futurs anticipés en $t = 0$ pour $t = 1$ permettent d'anticiper la valeur future de la prime de change.

L'hypothèse d'anticipations rationnelles permet d'étendre le résultat précédent dans un cadre multi-périodique. On montre alors que l'instabilité de la prime de change est liée elle-même à l'incertitude concernant l'évolution de la structure par terme des taux domestiques.

3 Test de l'intégration internationale des primes de terme

3.1. Présentation du test et données

La relation exacte entre primes de terme et prime de change s'obtient par étude de (17). L'étude du cas général montre que l'on doit s'attendre à trouver un terme à côté de la prime de change qui vient exprimer la tolérance moyenne par rapport au risque, la structure des covariances entre change et taux de rendement et les poids relatifs des actifs offerts sur le marché. Ce terme résiduel n'est pas forcément constant puisque ces paramètres peuvent évoluer dans le temps.

Le test empirique aura pour objet de proposer une estimation économétrique de (17) de manière à répondre à la question d'un équilibre international entre primes de termes et prime de change. L'acceptation du test signifiera l'existence d'une intégration en ce qui concerne la valorisation internationale d'un risque temporel. Le rejet ne signifiera pas forcément le rejet d'une intégration internationale. Il pourrait très bien être dû à l'absence d'intégration sur les marchés domestiques des taux d'intérêt. L'hypothèse d'une segmentation entre taux d'intérêt de maturités différentes, en une même devise, suffit à entraîner l'impossibilité d'une intégration internationale multi-temporelle.

La méthode suivie consistera à considérer les couples composés des taux de rentabilité ex post d'actifs en dollars US et en chacune des devises suivantes :

– Deutsche mark

– Livre sterling

– Dollar canadien

– Yen

– Franc français

On dispose des estimations des structures par termes des taux d'intérêt purs calculées en coupes instantanées pour chaque devise. L'objectif de l'algorithme d'optimisation est la meilleure restitution du prix d'obligations d'État considérées comme représentatives d'actifs sans risque de défaut. La forme exacte retenue est celle qui minimise la variance des écarts de restitution des prix d'un échantillon de 10 à 80 obligations selon les devises. Ces taux purs sont tirés d'ajustements économétriques hebdomadaires de courbes de taux de rendement actuariels par rapport à la duration des obligations d'État libellées dans les 6 devises précitées, calculés à partir de la base de données obligataires de la Banque Arabe et Internationale d'investissement [3]. La période d'observation des structures de taux s'étend sur près de 7 années, du 1er décembre 1986 au 15 novembre 1993, soit 364 estimations de taux purs par devise.

Le choix de la périodicité des investissements étant ouvert, on a retenu 3 horizons de placement différents sur lesquels les tests ont été effectués dans les mêmes conditions. Ces horizons ont été de 3, 6 et 12 mois. Les maturités des coupons zéro servant de supports aux investissements ont été fixées à 2, 6 et 10 ans à la date de constitution de l'investissement. Ce choix est possible grâce à la connaissance de la fonction d'actualisation à chaque période.

Le calcul des primes de terme ex post est assez simple à partir des prix des obligations. Ces prix sont eux-mêmes tirés des taux d'intérêts purs constatés. La prime de terme ex post s'obtient en considérant le taux de rendement correspondant à l'horizon d'investissement h :

$$\Phi\,(t,\, n,\, h) = {}_t\mu_{n,\,h} - {}_tr_h$$

(n : 2, 6 ou 10 ans; h : 3, 6 ou 12 mois).

L'utilisation de rentabilité et de prime de terme ex post plutôt qu'ex ante telles qu'elles sont spécifiées dans la partie théorique, se justifie par le cadre général d'anticipations rationnelles. Le modèle (17) correspond à l'expression d'une relation linéaire entre deux primes de terme exprimées chacune dans leur monnaie et la prime de change ${}_tp_h^{i/\$}$ entre la devise et le dollar. Cette prime se définit ex post par l'expression $(r_h^j + \theta_h^j - r_h^i)$ qui représente l'écart entre la différence des deux taux d'intérêt sur l'horizon et l'évolution du taux de change de la devise en pourcentage. Le modèle à estimer est de la forme :

$$[\Phi^i\,(\,.\,) - \Phi^{\$}\,(\,.\,)] = b_0 + b_1\,.\,{}_tp_h^{i/\$} + \varepsilon_t \tag{26}$$

Les deux taux d'intérêt sans risque sur l'horizon h ayant été estimés à partir de fonctions d'actualisation, on se trouve en présence de régresseurs stochastiques. Les deux méthodologies étant différentes (l'une fondée sur des coupes instantanées, l'autre sur des séries temporelles), on peut raisonnablement penser que les variables p et ε sont indépendantes. On sait alors que les estimateurs restent sans biais. Il est cependant difficile de prendre en compte l'incidence de régresseurs stochastiques au niveau des coefficients b_0 et b_1 et de leurs intervalles de confiance, car les régresseurs ne sont pas le résultat d'un modèle linéaire simple estimé en amont. Les r^i et $r^{\$}$ proviennent eux-mêmes d'une estimation antérieure fondée sur des prix obligataires qui ne sont pas linéaires en taux d'intérêt. On continuera à utiliser les tests usuels devant la difficulté à intégrer ce phénomène.

Des valeurs b_0 et b_1 significativement différentes de zéro établiront l'existence d'une compensation entre primes de terme libellées en deux

3. La méthode utilisée est décrite dans La Bruslerie (1995).

devises et la prime de change. Une relation significative correspond à l'existence d'un mécanisme d'intégration triangulaire entre taux d'intérêt et taux de change correspondant à la modélisation proposée en 1re partie.

Une étude préliminaire des données a montré l'existence d'une forte auto-corrélation des résidus. Celle-ci est usuelle dans l'utilisation de séries temporelles de haute fréquence. L'horizon de calcul des variables, par exemple 3 mois, est supérieur à la fréquence hebdomadaire des observations. Les périodes de calcul des données se chevauchent pendant un temps qui est fonction de l'horizon de calcul des variables. Ainsi, une erreur dans l'ajustement sur 3 mois est souvent très proche de signe et d'ampleur de l'erreur calculée la semaine suivante. Sur 13 semaines d'horizon, ces deux observations partagent 12 semaines de réalisation en commun. Les erreurs suivent donc un processus de moyenne mobile d'ordre 12. Le nombre de régressions testées est de 45 (5 couples devises/USD $\times$ 3 horizons $\times$ 3 maturités).

Un ajustement a d'abord été effectué en utilisant un modèle MCO corrigé pour tenir compte d'une auto-corrélation par la méthode de White. Il subsiste malgré cela une forte auto-corrélation cumulée des résidus telle que mesurée par le coefficient Q de Ljung-Box qui s'avère significatif sur chacune des 45 régressions.

Une nouvelle spécification a été testée de manière à prendre en compte explicitement sous la forme d'un modèle ARCH (Auto-Regressive Conditional Heteroscedasticity), l'existence d'une dépendance temporelle des résidus où ceux-ci sont liés à leur variance conditionnelle. Cette modélisation se justifie par le fait que les tests empiriques de modèles d'évaluation d'actifs qui font l'hypothèse de moments de second ordre constants apparaissent être mal spécifiés. De nombreux travaux sur les taux de change, à la fois spot et forward, soulignent que ceux-ci sont non stationnaires (par exemple, BAILLIE et BOLLERSLEV [1989] ou BARNHART et SZAKMARY [1991]). Par ailleurs, l'existence d'une relation entre rendement des actifs risqués et variance conditionnelle a été modélisée et testée empiriquement par ENGLE, LILIEN et ROBINS [1987] dans le domaine des taux d'intérêt. Plus récemment, BOLLERSLEV, ENGLE et WOOLDRIDGE [1988] ont testé un modèle d'équilibre multimarchés (marché monétaire, obligations et actions) en recourant à une modélisation de la prime de risque à l'aide d'une matrice de variance-covariance conditionnelle dans le cadre d'un modèle GARCH.

Le recours alternatif à la spécification d'une non-stationnarité conditionnelle à l'aide de la méthode des moments généralisés est aussi envisageable. Celle-ci s'accompagne d'une modélisation de la formation des anticipations de rendement à l'aide de variables latentes (par exemple, HANSEN et HODRICK [1980] ou HODRICK et SRIVASTAVA [1986]. GIOVANNINI et JORION [1987] ont montré, en appliquant cette méthodologie à la prime de risque sur le marché des change que l'hypothèse de constance des moments de second ordre joue un rôle central. En comparant deux modèles, l'un faisant référence à des moments d'ordre deux constants, l'autre à des moments variables, ces auteurs ont mis en évidence la plus grande pertinence de la seconde formulation dans l'estimation des rendements d'équilibre sur les marchés internationaux. Ils suggèrent d'ailleurs, en conclusion, la possibilité d'utiliser une modélisation de type ARCH pour prendre en compte le caractère conditionnel de la variance (cf. p. 120).

On a donc retenu une spécification ARCH(p) par laquelle le processus suivi par la variance conditionnelle, h_t^2, est auto-régressif d'ordre p.

$$h_t^2 = a_0 + a_1 \,.\, \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + a_p \,.\, \varepsilon_{t-p}^2 \tag{27}$$

Le recours à une formulation auto-régressive conditionnelle pose le problème de la pertinence de la formalisation (27) et de l'ordre p [4]. ENGLE [1984] a montré que la forme d'hétéroscédasticité peut être mise en évidence par le test du multiplicateur de Lagrange (test LM). L'hypothèse d'une homoscédasticité de la variance revient à tester la nullité des coefficients $a_1, \ldots, a_p$ en utilisant la statistique

$$LM = T \,.\, R^2$$

où T est le nombre d'observations et R^2 le coefficient de détermination résultant de la régression du carré des résidus sur le vecteur des variables explicatives de la variance, c'est-à-dire les valeurs retardées du carré des résidus. La statistique LM suit une loi de chi-deux à p degrés de liberté où p est le nombre de variables explicatives, correspondant au nombre de retard. Le tableau 1 présente les résultats obtenus.

La modélisation ARCH de l'auto-corrélation des résidus est apparue pertinente dans tous les cas de figure. L'ordre optimal de retards indiqué est celui qui rend maximum la statistique LM sur les 13 premiers retards. L'ordre 1 du processus auto-régressif apparaît le plus souvent suffisant. L'estimation ARCH(p) consiste à déterminer simultanément à l'aide d'une méthode de maximisation de la fonction de vraisemblance les équations (26) et (27). Les valeurs estimées b_0 et b_1 feront alors l'objet d'un test simple de significativité.

On a aussi exploré une modélisation ARCH-Mean de la forme :

$$[\Phi^i\,(\,.\,) - \Phi^{\$}\,(\,.\,)] = b_0 + b_1 \,.\, {}_t p_h^{i/\$} + b_2 \,.\, h_t + \varepsilon_t \tag{28}$$

Celle-ci teste un possible effet direct de l'existence d'un effet de la variance conditionnelle au niveau du terme $B\,(\,.\,)$ du modèle. Le sens économique associé à cette variable est que la volatilité peut avoir une incidence sur le niveau de la prime de risque, ainsi que l'ont mis en évidence ENGLE-LILIEN-ROBINS [1987]. Le test sur b_2 permettra de comparer laquelle des deux spécifications (26) et (28) domine l'autre. Le modèle (26) étant supposé se suffire à lui-même en cas de moments d'ordre deux stationnaires.

Certaines précautions doivent être prises dans l'estimation des modèles ARCH et ARCH-M : la somme des coefficients a_i doit être strictement

4. D'autres spécifications hétéroscédastiques auraient pu être envisagées. La modélisation ARCH offre l'avantage de la simplicité surtout lorsque on manque *a priori* d'idée sur la forme du processus suivi. Elle peut cependant conduire à un grand nombre de retards dans l'équation de la variance conditionnelle. Le recours à une modélisation GARCH est aussi mentionné dans la littérature. D'autres spécifications non linéaires tel les GARCH à seuil où les GARCH exponentiels sont aussi imaginables.

TABLEAU 1

Hétéroscédasticité des résidus

	Horizon	3 mois	Horizon	6 mois	Horizon	12 mois
Devise/USD	p	LM	p	LM	p	LM
DEM 2 ans	10	267.27	1	270.26	1	288.27
DEM 6 ans	7	269.89	3	269.08	1	283.95
DEM 10 ans	7	251.89	1	215.79	1	237.26
GBP 2 ans	9	300.10	1	300.36	1	287.57
GBP 6 ans	1	290.09	1	303.14	1	280.05
GBP 10 ans	1	269.49	1	294.10	1	263.08
CAN 2 ans	9	223.31	1	273.01	1	271.02
CAN 6 ans	3	242.96	3	258.17	1	251.45
CAN 10 ans	13	233.33	7	239.96	1	230.48
YEN 2 ans	7	286.68	1	276.53	1	279.66
YEN 6 ans	7	308.39	1	298.38	1	250.97
YEN 10 ans	7	310.73	1	298.87	1	235.81
FFR 2 ans	9	225.54	12	224.56	1	232.56
FFR 6 ans	9	251.68	11	213.69	1	220.40
FFR 10 ans	9	231.33	5	177.18	10	214.90

p : nombre de retards significatifs ; test LM significatif dans tous les cas.

inférieure à 1 de manière à garantir que le processus suivi par la variance est stationnaire. Dans l'estimation, le nombre maximum de coefficients de retard p a été plafonné à 10 ; cette limitation concerne seulement 3 régressions.

3.2. **Résultats**

Les tableaux 2.1 à 2.3 présentent les résultats de l'estimation ARCH. La modélisation auto-régressive de la variance conditionnelle respecte la condition de stationnarité : la somme des a_i reste pratiquement toujours inférieure à l'unité. L'hypothèse centrale testée est la non nullité des coefficients b_0 et b_1, c'est-à-dire la pertinence d'une relation complexe liant primes de risque et de change. A titre complémentaire on vérifiera si b_1 est égal à -1 (cas particulier de la substituabilité parfaite des actifs).

L'estimation ARCH donne des résultats globaux qui soutiennent la relation (26) et valident l'idée d'une relation entre primes de terme et prime de change. Sur 45 régressions, les coefficients constants b_0 apparaissent significativement non nuls, au seuil de 95 %, 43 fois. Ils sont largement négatifs (39 fois contre 4 coefficients positifs). Dans la mesure où le coefficient b_0 correspond à un terme qui recouvre une somme de nombreuses covariances, on ne peut exclure aucun signe *a priori*.

Les coefficients b_1 sont significativement non nuls 37 fois sur 45. Leur signe est très variable puisqu'ils sont significativement négatifs 23 fois et positifs 14 fois. Ce coefficient correspond à une différence de covariances

TABLEAU 2.1

Estimation ARCH sur horizon 3 mois.

Devise/USD	b_0	$t\,(b_0)$	b_1	$t\,(b_1)$	$\Sigma\,(a_i)$
DEM 2 ans	– .499 × 10 – 2	13.11*	– .642 × 10 – 2	1.01	0.906
DEM 6 ans	– .170 × 10 – 1	16.60*	– .132	8.47*	0.864
DEM 10 ans	– .182 × 10 – 1	10.17*	– .280	9.87*	0.835
GBP 2 ans	– .418 × 10 – 2	11.19*	– .298 × 10 – 1	6.52*	0.960
GBP 6 ans	– .365 × 10 – 2	3.06*	– .118 × 10 – 1	0.76	0.976
GBP 10 ans	– .343 × 10 – 2	1.87	.610 × 10 – 2	0.27	0.947
CAN 2 ans	– .361 × 10 – 2	13.95*	.835 × 10 – 1	8.13*	1.004
CAN 6 ans	– .558 × 10 – 2	7.64*	.150	5.28*	0.949
CAN 10 ans	– .374 × 10 – 2	3.30*	.796 × 10 – 1	1.93	0.900
YEN 2 ans	– .486 × 10 – 2	12.69*	– .100 × 10 – 1	1.64	0.873
YEN 6 ans	– .119 × 10 – 1	15.23*	– .570 × 10 – 1	4.45*	0.960
YEN 10 ans	– .180 × 10 – 1	15.54*	– .486 × 10 – 1	1.99*	1.001
FFR 2 ans	– .203 × 10 – 2	7.33*	– .737 × 10 – 1	18.46*	1.113
FFR 6 ans	– .322 × 10 – 2	2.74*	.243	14.13*	0.769
FFR 10 ans	– .696 × 10 – 2	3.51*	– .303	10.19*	0.809

Équation (26) ; N = 351 – ordre p, cf. tableau 1 ; * : coef. sign. non nul au seuil de 5 %.

TABLEAU 2.2.

Estimation ARCH sur horizon 6 mois.

Devise/USD	b_0	$t\,(b_0)$	b_1	$t\,(b_1)$	$\Sigma\,(a_i)$
DEM 2 ans	– .527 × 10 – 2	13.91*	– .684 × 10 – 1	13.76*	0.965
DEM 6 ans	– .152 × 10 – 1	15.25*	– .181	14.83*	0.879
DEM 10 ans	– .146 × 10 – 2	0.79	– .347	17.78*	0.883
GBP 2 ans	– .467 × 10 – 2	11.90*	– .173 × 10 – 2	0.49	0.972
GBP 6 ans	– .316 × 10 – 2	2.09*	– .733 × 10 – 1	5.58*	0.905
GBP 10 ans	– .147 × 10 – 1	6.21*	.578	2.49*	0.889
CAN 2 ans	– .575 × 10 – 2	22.71*	.952 × 10 – 1	14.29*	1.010
CAN 6 ans	– .983 × 10 – 2	14.84*	.177	10.02*	0.961
CAN 10 ans	– .613 × 10 – 2	3.79*	.380 × 10 – 1	0.91	0.796
YEN 2 ans	– .869 × 10 – 2	22.93*	.277 × 10 – 1	7.22*	0.968
YEN 6 ans	– .757 × 10 – 2	6.22*	– .421 × 10 – 1	3.13*	0.972
YEN 10 ans	– .275 × 10 – 1	12.03*	.114	4.07*	0.891
FFR 2 ans	– .852 × 10 – 2	16.77*	– .525 × 10 – 1	9.79*	0.909
FFR 6 ans	.363 × 10 – 2	2.89*	– .369	30.08*	0.894
FFR 10 ans	.226 × 10 – 1	10.86*	– .573	24.81*	0.925

Équation (26) ; N = 338 – ordre p, cf. tableau 1.

de rendement dont le signe est *a priori* indéterminé. On sait seulement qu'il doit être négatif si les covariances sont nulles. Le nombre plus

TABLEAU 2.3.

Estimation ARCH sur horizon 12 mois.

Devise/USD	b_0	$t(b_0)$	b_1	$t(b_1)$	$\Sigma(a_i)$
DEM 2 ans	– .154 × 10 – 1	70.2*	– .112 × 10 – 1	5.76*	1.039
DEM 6 ans	– .295 × 10 – 1	21.99*	– .186	16.08*	0.972
DEM 10 ans	– .211 × 10 – 1	8.74*	– .189	10.21*	0.896
GBP 2 ans	– .130 × 10 – 1	21.69*	– .928 × 10 – 2	2.25*	1.052
GBP 6 ans	– .204 × 10 – 1	10.6*	– .934 × 10 – 1	6.43*	0.928
GBP 10 ans	– .241 × 10 – 1	7.28*	– .151 × 10 – 1	0.63	0.914
CAN 2 ans	– .390 × 10 – 2	19.61*	.116 × 10 – 1	4.42*	0.936
CAN 6 ans	– .179 × 10 – 1	24.38*	.140	14.24*	0.992
CAN 10 ans	– .231 × 10 – 1	16.10*	.222	10.74*	0.930
YEN 2 ans	– .123 × 10 – 1	38.44*	.698 × 10 – 1	29.96*	0.964
YEN 6 ans	– .429 × 10 – 1	33.05*	.139	12.66*	0.935
YEN 10 ans	– .451 × 10 – 1	19.44*	.521	25.54*	0.931
FFR 2 ans	– .741 × 10 – 2	15.17*	– .322 × 10 – 1	9.25*	1.018
FFR 6 ans	– .201 × 10 – 1	17.31*	– .122	15.63*	0.955
FFR 10 ans	.684 × 10 – 2	3.28*	– .331	20.02*	0.677

Équation (26) ; N = 312 – ordre p, cf. tableau 1.

élevé de coefficients significativement négatifs serait donc cohérent avec des covariances faibles. Des coefficients positifs impliquent des covariances de signe opposé qui compensent le terme -1 dans l'expression $A(\,.\,)$. Les coefficients b_1 apparaissent différents de -1 dans tous les cas, ce qui tend à rejeter l'idée de covariances nulles et/ou l'hypothèse d'une intégration internationale par compensation parfaite discutée en première partie. Ces résultats sont cohérents avec la modélisation d'une relation complexe et riche entre primes de terme et prime de change qui tient compte d'une aversion pour le risque et de l'existence de coefficients de couverture contre le risque de change. De même, le fait que la valeur estimée des coefficients b_1 soit souvent de même signe pour une devise donnée, apparaît comme une illustration de mouvements de taux d'intérêts qui s'effectuent souvent dans le même sens le long des courbes de taux.

L'annexe 1 donne une illustration de la pertinence de la modélisation ARCH de la variance conditionnelle. L'auto-corrélation des résidus apparaît effectivement très forte comme dans le cas des MCO. Le test d'autocorrélation cumulée Q de Llung-Box est significativement positif dans tous les cas. La modélisation ARCH est validée par la présence de coefficients a_1 dans l'équation (27) qui sont significatifs dans chacun des cas (y compris quand p l'ordre du processus auto-régressif est supérieur à 1). Les séries des résidus semblent normales : le test de kurtose vérifiant la présence de queues de distributions épaisses, est rejeté dans la majorité des cas.

La modélisation ARCH-Mean apparaît un peu moins pertinente que la précédente [5]. L'étude du caractère significatif de la variable b_2 confirme ce résultat : celle-ci n'est significativement non nulle que dans 17 régressions sur 45. Cette variable agit négativement dans 16 cas et positivement dans 1 cas. Les résultats concernant b_0 et b_1 sont cohérents avec ceux obtenus dans le test de modélisation ARCH. Le tableau 3 présente une synthèse des résultats et met en évidence le caractère moins performant de la modélisation ARCH-Mean. Le coefficient b_0 est significativement non nul 26 fois, le coefficient b_1 31 fois sur 45 (négatif 17 fois et positif 14 fois). Dans tous les cas, il est statistiquement différent de -1.

Une analyse du coefficient b_2 montre que lorsque celui-ci apparaît pertinent dans l'explication de la différence des primes de terme, cela ne s'effectue pas aux dépens du rôle de la variable prime de change qui conserve un b_1 significatif. La cohérence interne de la modélisation n'est pas remise en cause par la pertinence de b_2. En revanche, la constante b_0 s'efface alors devant l'inclusion dans le modèle d'un terme représentant la variance conditionnelle. Il existe un déterminant propre dans la différence entre primes de terme nationales. Cependant, pour des horizons de 6 ou 12 mois, cet élément peut être instable. L'explication de cette variabilité endogène peut être due à l'instabilité des covariances au cours du temps et/ou à l'évolution de la tolérance moyenne pour le risque. L'allongement de la période d'étude, ainsi que celui de l'horizon, rendent plus apparent le phénomène ARCH influençant le différentiel de prime de terme entre deux devises.

TABLEAU 3

Synthèse des résultats

Estimation	ARCH	ARCH-Mean
Nombre de coefficients b_0 non nuls [a]	43	26
(dont sign. positifs/négatifs)	(4/39)	(6/20)
Nombre de coefficients b_1 non nuls [a]	37	31
(dont sign. positifs/négatifs	(14/23)	(14/17)
(dont sign. Horizon 6 mois) [b]	(14)	(10)
(dont sign. Horizon 12 mois) [b]	(15)	(13)
Nombre de coefficients b_2 non nuls [a]		17
(dont sign. positifs/négatifs)		(1/16)
(dont sign. Horizon 6 mois) [b]		(8)
(dont sign. Horizon 12 mois) [b]		(7)

(Nombre de coefficients significatifs au seuil de 5 %, [a] : sur un total de 45 régressions, [b] : sur 15 régressions.

5. Les résultats du modèle ARCH-Mean sont disponibles auprès des auteurs.

La prise en considération d'horizons de détention multiples à 3, 6 et 12 mois enrichit l'analyse. Un horizon court à 3 mois atténue l'identification d'une relation entre primes de terme et prime de change. En revanche, des horizons de 6 ou 12 mois donnent des résultats très nets en faveur d'un coefficient b_1 significatif. Celui-ci est même non nul 15 fois sur 15 sur 12 mois dans le cadre d'un modèle ARCH. On rappelle ici que le choix arbitraire d'un horizon de détention trop court, hebdomadaire ou mensuel, a pu conduire certains auteurs (FRANKEL et LEVICH, [1975]) à des résultats qui mettaient en cause l'existence d'une prime de change. La manifestation de celle-ci, au-delà d'un aléa lié à son observation ex post, reliée à des évolutions des primes de terme, est plus franche sur des périodes plus longues.

3.3. Incidence de la maturité des actifs domestiques

Une hypothèse complémentaire peut être formulée au vu des résultats de l'estimation précédente. Les coefficients b_1 semblent augmenter en valeur absolue avec la maturité des primes de terme considérées. L'idée associée est que la prime de change joue un rôle d'autant plus important pour expliquer les différentes de primes de terme entre deux devises que les maturités des actifs domestiques considérés sont longues et s'éloignent de l'horizon de prise de positions conformément à la relation (20). L'équation (29) permet de tester cette hypothèse en formant la différence des écarts de primes de terme pour deux maturités m et n (avec $m > n$). En effet, les coefficients b_1 du modèle (26) peuvent être de signes négatifs ou positifs, or ce qui importe est ici de vérifier l'augmentation de la valeur absolue de $b_1(m)$ par rapport à $b_1(n)$.

(29) $$[\Phi^i(m) - \Phi^\$(m)] - [\Phi^i(n) - \Phi^\$(n)] = c_0 + c_1 \cdot {}_t p_h^{i/\$}$$

Le test de l'accroissement est effectué en prenant en compte un effet ARCH (cf équation (27)). Le coefficient c_0 représente la différence de deux termes constants $B(m, Q)$ et $B(n, Q)$; son analyse ne présente pas grand intérêt. En revanche, le nombre de fois où c_1 sera significativement non nul permettra de valider l'hypothèse d'une relation croissante avec la maturité, jointe à l'hypothèse préalable que $b_1(m)$ et $b_1(n)$ sont de même signe. Les maturités m et n retenues ont été respectivement de 10, 6 et 2 ans. On a testé pour chaque devise trois jeux de différences de maturités : 6 ans moins 2 ans, 10 ans moins 6 ans et 10 ans moins 2 ans. Les résultats individuels pour l'estimation ARCH figurent dans le tableau 4

L'hypothèse d'une relation de compensation des primes de terme et de la prime de change qui soit croissante avec la maturité ne doit pas seulement s'appréhender par la significativité du coefficient c_1. Le test doit faire référence au signe des coefficients estimés $b_1(m)$ et $b_1(n)$. Si $b_1(m)$ et $b_1(n)$ sont significativement positifs, un coefficient c_1 significativement

Tableau 4

Estimation ARCH Equation (29).

Devise/USD	Horizon	3 mois	Horizon	6 mois	Horizon	12 mois
	c_1	$t(c_1)$	c_1	$t(c_1)$	c_1	$t(c_1)$
DEM 6/2y	– 0.821× 10 – 1	– 7.43 [b]	– 0.136	– 16.21 [b]	– 0.143	– 15.49 [b]
DEM 10/6y	– 0.606 × 10 – 1	– 3.99 [b]	– 0.685 × 10 – 1	– 13.38 [b]	– 0.101	– 7.40 [b]
DEM 10/2y	– 0.234	– 10.92 [b]	– 0.288	– 17.51 [b]	– 0.230	– 10.77 [b]
GBP 6/2y	– 0.462 × 10 – 2	– 5.18	– 0.291 × 10 – 1	– 3.11 [b]	– 0.666	– 6.51 [b]
GBP 10/6y	0.842 × 10 – 1	6.06	0.103	7.27	0.318	32.33
GBP 10/2y	0.106	4.80	0.132	6.38 [a]	0.876 × 10 – 1	
CAN 6/2y	0.953 × 10 – 1	4.34 [a]	0.583 × 10 – 1	2.98 [a]	0.119	12.22 [a]
CAN 10/6y	– 0.551 × 10 – 1	– 1.92	– 0.372 × 10 – 1	– 1.60	0.384 × 10 – 1	3.59 [a]
CAN 10/2y	0.276×10^{-1}	0.57	0.434 × 10 – 1	1.33	0.190	9.98 [a]
YEN 6/2y	-0.193×10^{-1}	– 1.98 [b]	0.217 × 10 – 2	0.19	0.891 × 10 – 1	10.41 [a]
YEN 10/6y	0.689 × 10 – 1	5.22	0.651 × 10 – 1	5.91	0.265	28.53 [a]
YEN 10/2y	– 0.315 × 10 – 1	– 1.32 [b]	0.622 × 10 – 1	2.55 [a]	0.474	28.14 [a]
FFR 6/2y	– 0.164	– 13.34	– 0.256	– 30.18 [b]	– 0.143	– 16.77 [b]
FFR 10/6y	– 0.787 × 10 – 1	– 5.97	– 0.198	– 15.41 [b]	– 0.173	– 18.82 [b]
FFR 10/2y	– 0.228	– 9.14 [b]	– 0.476	– 21.40 [b]	– 0.285	– 23.71 [b]

Horizons de 3, 6, 12 mois ; a : validation $b_1(m)$, $b_1(n)$ et c_1 signif. positifs ; b : validation $b_1(m)$, $b_1(n)$ et c_1 signif. négatifs.

positif montre une incidence positive de la maturité (cas a). Inversement, il faut que $b_1(m)$ et $b_1(n)$ soient significativement négatifs et que c_1 soit négatif pour qu'il y ait cohérence et valider l'hypothèse d'un coefficient b_1 qui augmente en valeur absolue avec la maturité (cas b) [6]. Des coefficients b_1 de signes significatifs opposés ou un coefficient c_1 non différent de zéro ne permettent pas de valider l'hypothèse de croissance avec la maturité.

La relation (29) est vérifiée 30 fois sur 45 couples de maturité. Ce résultat est à rapprocher des 37 coefficients b_1 établissant une relation significative entre primes de terme et de change. Ces coefficients b_1 étant apparus plus souvent négatifs que positifs, il est normal que le cas b (croissance en valeur absolue négative) soit plus fréquent (validé 20 fois pour 10 validations du cas a). La croissance de $A(n)$ avec la maturité est particulièrement apparente si l'on considère les deux maturités extrêmes 2 ans-10 ans (c_1 significatif 12 fois sur 15). La valeur absolue du coefficient qui lie les primes de terme et la prime de change tend à augmenter avec la maturité de l'actif risqué. Ce constat est cohérent avec un environnement de marché caractérisé par des mouvements positivement corrélés le long de la courbe des taux d'intérêt.

6. Par extension, on a considéré comme validé et assimilé au cas a (resp. b) le cas de figure où $b_1(m)$ est significativement positif (négatif), $b_1(n)$ est nul et c_1 est significativement positif (négatif).

La validation fréquente de (29) est en faveur de l'existence d'une relation de compensation entre primes de terme et de change. Elle reconnaît la complexité de cette relation qui ne peut s'approximer par une compensation directe et simple des premières avec la seconde, et qui dépend de paramètres $A(\,.\,)$ et $B(\,.\,)$ variables selon la maturité des actifs considérés. Le fait que cette relation de compensation avec la prime de change soit d'autant plus marquée avec la maturité et avec l'horizon montre la pertinence d'une analyse qui prend en compte des actifs de maturité supérieure à l'horizon d'investissement, présentant de ce fait un risque domestique spécifique. Les tests simples de la Parité des Taux d'Intérêt négligent ce phénomène lorsqu'ils se limitent à prendre des rentabilités d'actifs domestiques qui ont même échéance. Ils apparaissent ainsi comme incomplets.

TABLEAU 5

Synthèse des résultats Equation (29)

	Horizon 3 mois	Horizon 6 mois	Horizon 12 mois
Nombre de coefficients b_1 significatifs	10	13	14
Nombre de coefficients c_1 significatifs et cohérents (cas a/cas b)	7 1/6	10 3/7	13 6/7

Nombre de coefficients c_1 significatifs au seuil de 5 % sur un total de 15 régressions ARCH par horizon.

4 Conclusion

L'intégration internationale des marchés financiers renvoie à une prise en compte des conditions locales de valorisation du risque sur les marchés de taux d'intérêt domestique. L'existence d'une relation d'équilibre entre les primes de terme et la prime de change est l'expression d'une intégration internationale des marchés de taux d'intérêt. Une parfaite relation de compensation, qui correspondrait à une covariance nulle entre taux de rendement et taux de change, est aussi rejetée. Le modèle validé retient l'idée d'une intégration triangulaire où des primes de risque sont exigées sur chacun des deux marchés de taux d'intérêt en devise et sur le marché des change. Cette relation de compensation internationale apparaît assez complexe puisqu'on a mis en évidence son caractère différencié selon les maturités des actifs détenus sur un horizon d'investissement donné dans un peu moins de la moitié des cas. Le caractère multi-temporel du risque de taux d'intérêt en deux devises différentes paraît ainsi devoir être pris en compte dans l'analyse de l'intégration financière internationale.

Les modèles financiers d'analyse de l'intégration reposent sur l'existence d'un rendement d'équilibre international qui inclut une ou plusieurs primes de risque et l'existence de portefeuilles optimaux liés à la diversification internationale d'actifs financiers. La relation d'évaluation de la prime de risque de change en une monnaie peut être écrite de façon à séparer le risque de change des autres risques. La première composante dépend de la covariance du rendement de l'actif long considéré avec le taux d'évolution du change. La deuxième composante est représentative du risque attaché à l'actif considéré hors risque de change puisque faisant intervenir la covariance de l'actif protégé contre le risque de change avec le portefeuille de marché.

L'écart d'équilibre entre primes de terme d'actifs de même maturité, mais libellés en devises différentes, dépend d'une prime de change qui est elle-même le résultat de différences de covariances. Plusieurs hypothèses peuvent être faites sur ces covariances, qui conduisent alors à des formulations simplifiées. Ainsi, en cas de mouvements parallèles et identiques des taux, le coefficient affectant la prime de change devient nul. Enfin, les différences entre primes de terme peuvent être analysées en fonction de la maturité des actifs concernés. Celle-ci influence aussi bien le coefficient de la prime de change que la prime de risque hors change d'une manière complexe dans le cas général. Cependant, sous des hypothèses vraisemblables, on montre que les deux composantes de l'écart de primes de terme sont fonction croissante de la maturité.

Au total, la relation entre primes de terme et prime de change à laquelle on aboutit correspond à une intégration des marchés au sens où le risque temporel (lié à l'aléa des évolutions de taux) et le risque spatial (lié à l'aléa des évolutions de change) sont interdépendants. L'intégration financière internationale se caractérise par une relation complexe de compensation entre les rendements d'actifs risqués libellés en devises différentes. Ce mécanisme repose sur le cumul de deux effets. D'une part, une relation triangulaire implique la prime de change. S'y ajoute, d'autre part, une prime de risque hors change qui souligne les lacunes d'une approche simpliste en terme de Parité des Taux d'Intérêt et montre la spécificité des marchés d'actifs de taux à long terme.

Résultats spécification ARCH-Horizon 12 mois.

Devise/USD	ρ_1	ρ_2	ρ_3	$t(a_1)$	Kurtose p-val
DEM 2 ans	0.973	0.945	0.920	4.70*	0.02*
DEM 6 ans	0.948	0.900	0.851	4.31*	0.00*
DEM 10 ans	0.928	0.867	0.815	4.62*	0.38
GBP 2 ans	0.972	0.940	0.912	3.41*	0.04*
GBP 6 ans	0.952	0.909	0.866	3.64*	0.05
GBP 10 ans	0.941	0.898	0.854	4.02*	0.09
CAN 2 ans	0.959	0.920	0.882	4.26	0.89
CAN 6 ans	0.946	0.904	0.853	4.56*	0.11
CAN 10 ans	0.933	0.887	0.834	4.63*	0.10
Devise/USD	ρ_1	ρ_2	ρ_3	$t(a_1)$	Kurtose p-val
YEN 2 ans	0.975	0.951	0.931	3.99*	0.83
YEN 6 ans	0.954	0.913	0.876	4.31*	0.12
YEN 10 ans	0.951	0.915	0.875	4.1*	0.88
FFR 2 ans	0.979	0.959	0.937	3.93*	0.00*
FFR 6 ans	0.968	0.939	0.914	4.33*	0.01*
FFR 10 ans	0.924	0.862	0.817	4.15*	0.18

*(Autocorrélation d'ordre 1, 2 et 3 des résidus Eq. (26), t-test du coefficient a_1 Eq. (29), * : signe non nul à 5 % ; p-value du test de kurtose des résidus Eq. (26) ; * : acceptation à 5 %).*

• Références bibliographiques

ADLER, M., DUMAS, B. (1983). – "International Portfolio Choice and Corporation Finance: a Synthesis", *The Journal of Finance*, pp. 925-984.

ARTUS, P. (1987). – "Structure par terme des taux: Théorie et estimation dans le cas français", *Cahiers économiques et monétaires de la Banque de France*, n° 27.

ARTUS, P. (1988). – "Efficience et cloisonnement du marché des changes et des marchés financiers en France", *Cahiers économiques et monétaires*, n° 31.

BAILLIE, R., BOLLERSLEV, T. (1989). – "Common Stochastic Trends in a System of Exchange Rates", *Journal of Finance*, pp. 167-181.

BARNHART, S., SZAKMARY, A. (1991). – "Testing the Unbiased Forward Rate Hypothesis: Evidence on Unit Root, Co-integration, and Stochastic Coefficients", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, pp. 245-267.

BOLLERSLEV, T., ENGLE, R., WOOLDRIDGE, J. (1988). – "A Capital Asset Pricing Model with Time-vaying Covariances", *Journal of Political Economy*, vol. 96, n° 1, pp. 116-131.

BORDES, Ch. (1988). – "Interprétation théorique du mouvement d'intégration des marchés de capitaux", *Cahiers Économiques et Monétaires de la Banque de France*, n° 31, pp. 5-47.

ENGLE, LILIEN, ROBINS (1987). – “Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model”, *Econometrica*, pp. 391-407.

FAMA, E. (1984). – “Forward and Spot Exchange Rates”, *Journal of Monetary Economics*, vol. 14, pp. 319-338.

FRANKEL, J., LEVICH, R. M. (1975). – “Covered Interest Arbitrage: Unexploited Profits?”, *Journal of Political Economy*, pp. 325-338.

GIOVANNINI, A, JORION, P. (1987). – “Interest Rates and Risk Premia in the Foreign Exchange and the Stock Market”, *Journal of International Money and Finance*, pp. 107-123.

HANSEN, L., HODRICK, R. (1980). – “Forward Exchange Rate as Optimal Predictor of Future Spot Rates: An Econometric Analysis”, *Journal of Political Economy*, vol. 88, n° 51, pp. 829-853.

HODRICK, R., SRIVASTAVA, S. (1986). – “The Covariation of Risk Premiums and Expected Future Spot Exchange Rates”, *Journal of International Money and Finance*, vol. 5, pp. 5-21.

JOHNSON, D. (1993). – “International Interest Rate Linkages in the Term Structure”, *Journal of Money, Credit and Banking*, pp. 755-770.

LA BRUSLERIE, H. de (1987). – “Le statut théorique de la prime de risque dans la structure à terme des taux”, *Sciences de Gestion*, n° 11, pp. 5-42.

LA BRUSLERIE, H. de (1995). – “La révélation de la structure des taux d’intérêt à partir des taux de rendement actuariels”, *Journal de la Société de Statistiques de Paris*, n° 3.

LA BRUSLERIE, H. de, MATHIS J. (1993). – “L’intégration des marchés financiers internationaux”, in “Mondialisation et régionalisation”, MUCCHIELLI, J. L., CÉLIMÈNE, F. éditeurs, *Economica*, pp. 207-230.

MATHIS, J. (1991). – “Finance internationale”, *Ed. ESKA*.

SERCU, P. (1980). – “A Generalization of the International Asset Pricing Model”, *Revue Finance*, pp. 97-135.

SOLNIK, B. (1974). – “An Equilibrium Model of the International Capital Market”, *Journal of Economic Theory*, pp. 500-524.

SOLNIK, B. (1974). – “The International Pricing of Risk: An Empirical Investigation of the World Market Structure”, *Journal of Finance*, n° 29, pp. 48-54.

STEHLE, R. (1977). – “An Empirical Test of the Alternative Hypotheses of National and International Pricing of Risky Assets”, *Journal of Finance*, n° 32, pp. 493-502.

STULZ, R. M. (1981). – “A Model of International Asset Pricing”, *Journal of Financial Economics*, pp. 383-406.

WHITE, H. (1980). – “A Heteroscedasticity-consistant Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroscedasticity”, *Econometrica*, pp. 817-838.