ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 46 — 1997

Estimation des modèles de données de panel avec régresseurs temporels

Rachid BOUMAHDI, Alban THOMAS*

RÉSUMÉ. – Cet article présente un modèle en panel avec erreurs composées, dans lequel les régresseurs peuvent varier dans le temps, selon les individus, ou les deux. Certains de ces régresseurs sont supposés endogènes. L'objectif est ici d'étendre les méthodes d'estimation des modèles à un seul effet au modèle à deux effets. Les propriétés des estimateurs par variables instrumentales sont étudiées au moyen d'une procédure de simulation à la Monte-Carlo.

Estimation of Panel Data Models With Time-Varying Regressors

ABSTRACT. – This paper presents a model for panel data, where regressors may vary across time, across individuals, or both. Some of the regressors are assumed to be endogenous. The objective is here to extend estimation methods for models with a single random effect to the two-effects case. The properties of the IV estimators proposed are investigated using a Monte-Carlo simulation procedure.

---

* R. BOUMAHDI : GREMAQ, LIRHE; A. THOMAS : INRA-ERNA. Cette recherche a été financée par le Groupe Inter-Agences de l'Eau, convention 2/25/94. Nous remercions J. CREMER, J.P. FLORENS, P. SEVESTRE et un rapporteur anonyme pour leurs commentaires sur une version antérieure de cet article.

1 Introduction et motivations

La littérature de ces dernières années sur les modèles avec données de panel a permis de traiter le problème de l'estimation lorsque les régresseurs sont endogènes. Les extensions principales concernent le traitement des variables invariantes dans le temps et le développement de procédures d'estimation efficaces en fonction des différentes spécifications possibles des modèles.

Parallèlement, les méthodes d'estimation des modèles à erreurs composées avec deux effets (individuel et temporel, Two-Way Error Component Models) se sont développées et traitent à présent également du problème des observations manquantes (WANSBEEK et KAPTEYN [1989]). Du fait de la structure traditionnelle des échantillons de données de panel, où typiquement la dimension longitudinale est faible par rapport à la dimension transversale, les modèles avec variables explicatives invariantes dans le temps constituent la majeure partie des applications dans la littérature.

Il n'existe pas à notre connaissance de travaux appliqués dans lesquels figurent des régresseurs éventuellement endogènes, invariant selon les individus (variant uniquement dans le temps). Or, ce type de modèles vient à l'esprit dès que l'on cherche à expliquer les réactions d'agents économiques confrontés à des variables telles que le taux de chômage, l'indice de production industrielle, les prix sur un marché, etc (voir REVANKAR [1992]). Il est alors évident que l'introduction d'une telle variable appelle une spécification plus riche du modèle, admettant un effet temporel aléatoire.

Par analogie avec les modèles de rendements de l'éducation dans lesquels l'aptitude est représentée par un effet aléatoire individuel corrélé avec l'éducation mais indépendant du temps (voir BOUMAHDI et THOMAS [1992]), on peut considérer que chaque période possède une caractéristique propre qui affecte tous les individus indépendamment de leur spécificité.

L'objectif de cet article est d'étendre l'approche de HAUSMAN et TAYLOR [1981], AMEMIYA et MACURDY [1986], BREUSCH, MIZON et SCHMIDT [1989] (respectivement HT, AM et BMS ci-après) au cas des modèles à deux effets aléatoires. Les variables considérées seront répertoriées selon leur variation par rapport aux individus, au temps ou les deux. Les sources de corrélation de certaines d'entre-elles avec les effets seront donc plus nombreuses. Dans la section 2, nous présentons le modèle et les notations retenues. Les estimateurs utilisés dans la pratique sont explicités dans la section 3. La section 4 traite de l'estimation efficace par variable instrumentale (IV) du modèle lorsque certains régresseurs sont corrélés avec les effets. Cette section propose des instruments légitimes, de façon analogue à HT, AM et BMS, et contient une discussion sur leurs performances. On montre en particulier que les estimateurs IV sont identiques aux estimateurs GMM (Méthode des Moments Généralisés) lorsque l'on adopte une forme particulière pour les instruments. La section 5 est consacrée aux cas particuliers concernant l'identification des paramètres. Afin d'évaluer le biais et la variance de nos estimateurs, nous utilisons une approche de simulation à la Monte-Carlo. Les propriétés de convergence et d'efficacité dépendent d'une grande dimension des échantillons en panel (dans notre cas, le nombre de périodes doit être également important). Comme un grand nombre de périodes d'observation est assez rare dans les données de panel, nous analysons le comportement des estimateurs en petit échantillon. Nous étudions enfin le cas particulier de notre modèle, où seuls des régresseurs variant dans les deux directions sont présents. Il est possible de comparer les performances de nos estimateurs, par rapport aux procédures usuelles pour lesquelles les instruments de HT, AM et BMS n'incorporent que des moyennes temporelles dans la liste des instruments. La section 6 détaille la procédure de simulation et les résultats obtenus. Les remarques de conclusion figurent à la section 7.

2 Modèle et notations

On présente dans cette section le modèle à erreurs composées qui servira de base à la discussion sur l'estimation et les tests des sections suivantes. Les notations employées sont un peu différentes de BALTAGI [1980], HSIAO [1986] ou MÁTYÁS [1992].

On considère l'équation suivante :

(1) $$Y_{it} = X_{it}\beta + Z_i\gamma + W_t\delta + \alpha_i + \lambda_t + \varepsilon_{it} \qquad i = 1, \dots, N; \quad t = 1, \dots, T$$

où Z_i est indépendant du temps, W_t indépendant de l'individu. Les effets α_i et λ_t sont supposés de moyenne nulle et de variance σ^2_α et σ^2_λ respectivement. On suppose de plus

$$E(\varepsilon_{it}) = 0 \qquad E(\varepsilon_{it}\varepsilon is) = \sigma^2_\varepsilon, \quad t = s \qquad E(\varepsilon_{it}\varepsilon is) = 0 \quad \text{sinon}$$

$$E(\alpha_i\alpha_j) = 0 \quad i \neq j \qquad E(\lambda_t\lambda_s) = 0 \quad t \neq s$$

$$E(\alpha_i\varepsilon_{it}) = E(\lambda_t\varepsilon_{it}) = 0 \quad \forall i, t.$$

Introduisons quelques notations :

$$B = I_N \otimes \frac{1}{T} e_T e'_T \qquad \bar{B} = \frac{1}{N} e_N e'_N \otimes I_T$$

$$Q = I_{NT} - B - \bar{B} + J \qquad J = \frac{1}{NT} e_{NT} e'_{NT} = B\bar{B}$$

où I_m est la matrice identité de dimension $m \times m$, e_m est un vecteur de 1 de dimension $m \times 1$. Avec ces notations, la matrice de variance-covariance de $(\alpha + \lambda + \varepsilon)$ s'écrit :

$$\Omega = \sigma^2_\varepsilon I_{NT} + T\sigma^2_\alpha B + N\sigma^2_\lambda \bar{B}$$

Il est facile de montrer que

$$\Omega^{-1} = \theta_1^2 B + \theta_2^2 \bar{B} - (\theta_1^2 + \theta_2^2 - \theta^2) J + Q$$

$$\Omega^{-1/2} = \theta_1 B + \theta_2 \bar{B} - (\theta + \theta_1 + \theta_2) J + Q$$

(voir TROGNON [1992] et HSIAO [1986]), où

$$\theta_1^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 + T\sigma_\alpha^2}, \qquad \theta_2^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 + N\sigma_\lambda^2}, \qquad \theta^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 + T\sigma_\alpha^2 + N\sigma_\lambda^2}$$

Sous une forme plus compacte, le modèle (1) s'écrit

(2) $$Y = X\beta + Z\gamma + W\delta + \alpha + \lambda + \varepsilon$$

où $Y = [Y_{11}, \ldots, Y_{1T}, \ldots, Y_{it}, \ldots, Y_{iT}, \ldots, Y_{NT}]'$, X est une matrice de dimension $NT \times K$, Z est $NT \times G$ et W est $NT \times H$.

3 Définition des estimateurs

On présente ici une série d'estimateurs utilisés dans la construction des tests de spécification [1]. Dans ce qui suit, on supposera les variables centrées par rapport à la moyenne sur la population (application de l'opérateur $I_{NT} - J$).

Le choix d'un estimateur particulier dépend essentiellement des hypothèses de corrélation entre les variables explicatives et les effets α et λ. Tout d'abord, dans le cas où toutes les variables explicatives sont corrélées avec les effets, la méthode d'estimation couramment utilisée consiste à appliquer les Moindres Carrés Ordinaires sur l'équation (2) transformée par l'opérateur Q (transformation Within). Dans ce cas, les effets sont traités comme fixes et seul β est identifié :

(3) $$\hat{\beta}_Q = (X'QX)^{-1} X'QY$$

A l'opposé, si α et λ sont supposés aléatoires et non corrélés avec les régresseurs, on a l'estimateur des Moindres Carrés Généralisés (GLS) :

(4) $$\hat{\eta}_{GLS} = (\Phi'\Omega^{-1}\Phi)^{-1} \Phi'\Omega^{-1} Y$$

où $\eta' = (\beta', \gamma', \delta'), \Phi' = (X', Z', W')$. Tous les paramètres sont identifiés et cet estimateur est BLUE (Best Linear Unbiased Estimator).

1. On ne traitera pas ici de l'estimateur du Maximum de Vraisemblance, qui permet l'estimation simultanée des paramètres structurels de l'équation (1) et des composantes de la variance (voir MÁTYÁS [1992]).

Sous l'hypothèse d'exogénéité de tous les régresseurs, la procédure GLS fournit des estimateurs efficaces de tous les paramètres, η. Si les composantes de Φ sont corrélées avec les effets, seul l'estimateur $\hat{\beta}_Q$ est convergent.

Cette remarque permet de bâtir des tests d'exogénéité à la Hausman (HAUSMAN [1978]) fondés sur la différence entre deux estimateurs : l'un convergent sous les deux hypothèses mais non efficace, et l'autre convergent et efficace sous l'hypothèse d'exogénéité mais non convergent si cette hypothèse est en défaut. L'intérêt est que les paramètres γ et δ n'ont pas à être estimés; le test peut se baser uniquement sur les estimations de β car sa distribution asymptotique est différente sous les hypothèses alternatives (voir KANG [1985]).

Dans la mesure où les variables du modèle varient dans les deux directions (individuelle et temporelle), la convergence des estimateurs proposés repose sur la condition : N et $T \rightarrow \infty$.

4 Estimation efficace par variables instrumentales

L'inconvénient des estimateurs proposés dans la section précédente est qu'ils ne permettent pas de prendre en compte la corrélation d'une partie seulement des régresseurs avec les effets. Or, l'hypothèse d'exogénéité de certaines variables explicatives est très souvent requise. Dans cette section, on va supposer que certains des régresseurs sont corrélés avec les effets, les autres restant exogènes.

On partitionne les matrices de régresseurs comme suit :

$$X = [X_1 : X_2] \qquad Z = [Z_1 : Z_2] \qquad W = [W_1 : W_2]$$

de dimension $NT \times (k_1 + k_2)$, $NT \times (g_1 + g_2)$ et $NT \times (h_1 + h_2)$ respectivement.

On suppose que certains régresseurs sont corrélés avec les effets, de la façon suivante :

- X_2 est corrélé avec α ou λ ou les deux
- Z_2 est corrélé avec α
- W_2 est corrélé avec λ.

Les conditions d'exogénéité sont donc :

$$(5) \qquad \begin{aligned} plim\frac{1}{N}X_1'\alpha = 0, \quad plim\frac{1}{T}X_1'\lambda = 0, \\ plim\frac{1}{N}Z_1'\alpha = 0, \quad plim\frac{1}{T}W_1'\lambda = 0. \end{aligned}$$

L'estimation du modèle (2) sous ces hypothèses nécessite l'emploi de la procédure IV (Instrumental Variables, équivalente aux Doubles Moindres

Carrés, 2SLS) qui suppose l'existence d'une forme réduite du modèle dans laquelle figurent les variables exogènes utilisables comme instruments. Là encore, la condition N et $T \to \infty$ doit être vérifiée.

Soit A une matrice d'instruments légitime, P_A la matrice de projection associée : $P_A = A(A'A)^{-1}A'$. L'estimateur IV est donné par

$$\hat{\eta}_{IV} = (\Phi'\Omega^{-1/2}P_A\Omega^{-1/2}\Phi)^{-1}(\Phi'\Omega^{-1/2}P_A\Omega^{-1/2}Y)$$

Les variables Y et Φ sont prémultipliées par $\Omega^{-1/2}$ pour tenir compte de la structure de variance-covariance des erreurs composées (hétéroscédasticités et/ou auto-corrélation). La matrice de variance-covariance est remplacée, si elle inconnue, par une estimation convergente, voir l'annexe 1. La prémultiplication par P_A revient à remplacer un régresseur particulier par sa valeur estimée obtenue par régression linéaire sur les composantes de A.

La difficulté de la procédure IV consiste à trouver des instruments A indépendants des effets α et λ, en nombre suffisant pour identifier tous les paramètres structurels (condition d'ordre pour l'identification).

Les matrices d'instruments peuvent être constituées à partir de deux types de variables :

- opérateurs orthogonaux aux effets,
- variables exogènes (non corrélées avec α et λ).

Considérons tout d'abord les résultats de HT, AM et BMS, développés dans le cadre de modèles à un seul effet (effet individuel). On notera Q_v l'opérateur $I_{NT} - I_N \otimes \frac{1}{T}e_Te_T' = I_{NT} - B$ qui effectue le centrage par rapport aux moyennes individuelles. HT proposent d'utiliser comme premier instrument l'opérateur Q_v, en vertu de la propriété $Q_v\alpha = 0$, ce qui revient à l'estimateur des effets fixes (Within). Pour identifier l'ensemble des paramètres, les auteurs incorporent comme instruments supplémentaires les régresseurs exogènes, X_1 et Z_1. La matrice d'instruments est alors :

$$A^{HT} = [Q_vX, BX_1, Z_1]$$

et la condition d'ordre pour l'identification est $k_1 \geq g_2$. HT forment par conséquent deux instruments à partir des variables exogènes X_1 : moyennes individuelles et écarts par rapport à ces dernières.

L'estimateur de HT requiert des conditions minimales d'exogénéité sur les variables, et en conséquence il peut ne pas être le plus efficace si les conditions d'exogénéité peuvent être rendues plus restrictives.

AM proposent d'ajouter dans la liste des instruments la matrice X_1^* définie comme suit :

$$X_1^* = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1T} & (i=1,t=1) \\ X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1T} & (i=1,t=2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2T} & (i=2,t=1) \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2T} & (i=2,t=2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{N1} & X_{N2} & \dots & X_{NT} & (i=N,t=1) \\ X_{N1} & X_{N2} & \dots & X_{NT} & (i=N,t=2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{N1} & X_{N2} & \dots & X_{NT} & (i=N,t=T) \end{bmatrix}$$

qui possède les propriétés : $Q_v X_1^* = 0$ et $BX_1^* = X_1^*$. Leur matrice d'instruments est

$$A^{\mathrm{AM}} = [Q_v X, X_1^*, Z_1]$$

Un estimateur équivalent est obtenu en utilisant

$$A^{\mathrm{AM}} = [Q_v X, (Q_v X_1)^*, BX_1, Z_1]$$

(voir BMS).

Les auteurs suggèrent que leur estimateur est au-moins aussi efficace que celui de HT si les effets ne sont pas corrélés avec les régresseurs à chaque période. AM et BMS notent qu'il est difficile d'envisager une situation dans laquelle l'hypothèse de HT serait vraie (indépendance des moyennes), et non celle de AM.

La condition d'ordre pour l'estimateur de AM est $Tk_1 \geq g_2$: ajouter $(Q_v X_1)^*$ par rapport à HT ne procure que (T-1) instruments supplémentaires, la matrice A^{AM} n'étant pas de rang plein.

BMS dérivent un estimateur potentiellement plus performant, fondé sur une hypothèse d'exogénéité plus stricte encore; si les colonnes de X_2 ne sont corrélées avec les effets que par une composante indépendante du temps, la matrice d'instruments suivante est justifiée :

$$A^{\mathrm{BMS}} = [Q_v X, BX_1, (Q_v X)^*, Z_1]$$

La condition d'ordre est $Tk_1 + (T-1)k_2 \geq g_2$.

Avant de proposer des instruments équivalents dans le cas de deux effets, plusieurs remarques s'imposent.

Tout d'abord, l'hypothèse d'exogénéité sur X_1 dans (5) est plus forte que dans le cas considéré par HT, car elle revient à supposer de plus que les moyennes temporelles de X_1 ne sont pas corrélées avec les effets (plus précisément, avec λ).

Ensuite, cette hypothèse peut être relâchée dans le sens d'une corrélation avec uniquement l'un des deux effets (individuel ou temporel); on revient par exemple au cas considéré par HT, AM et BMS si une composante de X_2 n'est corrélée qu'avec α.

Enfin, BMS supposent que les composantes de X_2 sont corrélées avec l'effet individuel α via un terme indépendant du temps. Si cette hypothèse est mise en défaut, alors $(QX_2)^*$ est corrélé avec α et la matrice d'instruments de BMS n'est pas légitime. Cependant, dans notre contexte, l'utilisation de l'opérateur Q au lieu de Q_v va filtrer également la composante dépendante du temps dans X_2, ce qui permet de justifier *a priori* les instruments de BMS.

Considérons à présent les instruments correspondants à ceux des auteurs précités, pour notre modèle à deux effets.

Que peut-on utiliser comme instruments dans le cas présent ? Nous disposons tout d'abord de la matrice Q, puis des variables exogènes X_1, Z_1 et W_1. L'utilisation de Z_1 et W_1 est directe, en revanche celle de X_1 dépendra de l'hypothèse d'exogénéité entre X_1 et α d'une part et X_1 et λ d'autre part. Si l'hypothèse (5) est vraie, alors on peut utiliser BX_1

(moyennes individuelles de X_1) et $\bar{B}X_1$ (moyennes temporelles de X_1) comme instruments. Enfin, la matrice d'instruments peut prendre la forme : $A_1 = (Q, B(X_1, Z_1), \bar{B}(X_1, W_1))$.

Comme dans le cas du seul effet individuel, on peut montrer qu'il existe plusieurs façons d'écrire les matrices de projection des instruments.

PROPOSITION 1 : Les estimateurs par variables instrumentales de HT basés sur les matrices d'instruments :

$$A_1^{HT} = (Q, B(X_1, Z_1),\ \bar{B}(X_1, W_1))$$
$$A_2^{HT} = (QX, B(X_1, Z_1),\ X_1,\ W_1)$$
$$A_3^{HT} = (QX, X_1, Z_1, \bar{B}(X_1, W_1))$$
$$A_4^{HT} = (QX, B(X_1, Z_1), \bar{B}(X_1,\ W_1))$$

sont identiques.

Preuve: Soit $P_{A_j^{HT}} = A_j^{HT}(A_j^{HT'}A_j^{HT})^{-1}A_j^{HT'}$. Il est très facile de montrer que $P_{A_2^{HT}} = P_{A_3^{HT}} = P_{A_4^{HT}}$ car A_2^{HT}, A_3^{HT} et A_4^{HT} contiennent les mêmes espaces colonne. En revanche, les espaces colonne de A_1^{HT} et A_2^{HT}, A_1^{HT} et A_3^{HT}, A_1^{HT} et A_4^{HT} sont différents. Cependant, pour le modèle

$$\Omega^{-\frac{1}{2}}Y = \Omega^{\frac{-1}{2}}X\beta + \Omega^{-\frac{1}{2}}Z\gamma + \Omega^{-\frac{1}{2}}W\delta + \Omega^{-\frac{1}{2}}(\alpha + \lambda + \epsilon)$$

la projection sur A_1^{HT} ou A_2^{HT}, A_1^{HT} ou A_3^{HT}, A_1^{HT} ou A_4^{HT} conduit au même estimateur.

Notons tout d'abord que la matrice A_1^{HT} n'est pas de rang plein et par voie de conséquence $(A_1^{HT'}A_1^{HT})^{-1}$ ne peut pas être utilisée dans le calcul de $P_{A_1^{HT}}$. Cependant, si on note $A_1^{HT} = (Q, S_1, S_2)$ où $S_1 = (BX_1, Z_1)$ et $S_2 = (\bar{B}X_1, W_1)$, alors on peut écrire $P_{A_1^{HT}}$ sous la forme :

$$P_{A_1^{HT}} = Q + BS_1(S_1'BS_1)^{-1}S_1'B + \bar{B}S_2(S_2'\bar{B}S_2)^{-1}S_2'\bar{B}$$

Il est très facile de vérifier que :

$$P_{A_2^{HT}}\Omega^{-\frac{1}{2}}X = P_{A_1^{HT}}\Omega^{\frac{-1}{2}}X = P_{A_3^{HT}}\Omega^{-\frac{1}{2}}X = P_{A_4^{HT}}\Omega^{-\frac{1}{2}}X;$$

$$P_{A_2^{HT}}\Omega^{-\frac{1}{2}}Z = P_{A_1^{HT}}\Omega^{\frac{-1}{2}}Z = P_{A_3^{HT}}\Omega^{-\frac{1}{2}}Z = P_{A_4^{HT}}\Omega^{-\frac{1}{2}}Z;$$

$$P_{A_2^{HT}}\Omega^{-\frac{1}{2}}W = P_{A_1^{HT}}\Omega^{\frac{-1}{2}}W = P_{A_3^{HT}}\Omega^{-\frac{1}{2}}W = P_{A_4^{HT}}\Omega^{-\frac{1}{2}}W.$$

QED

L'intérêt de cette proposition est double. D'une part, elle permet de calculer directement la condition d'ordre pour l'identification. En effet,

$$2k_1 + k_2 + k_1 + g_1 + h_1 \geq k_1 + k_2 + g_1 + g_2 + h_1 + h_2$$

implique que la condition d'identification est :

$$2k_1 \geq g_2 + h_2$$

D'autre part, elle permet de comparer nos instruments avec ceux de HT, AM et BMS. HT utilisent chaque composante de X_1 comme deux instruments, alors que dans notre cas, elle est utilisée comme trois instruments : $QX_1, BX_1, \bar{B}X_1$. Cette différence s'explique par le fait que nous disposons par rapport à HT d'une condition d'exogénéité supplémentaire, celle entre X_1 et λ.

La structure de A_1 repose sur l'hypothèse (5). Selon cette dernière, les moyennes individuelle et temporelle des composantes de X_1 sont indépendantes de α et λ respectivement. Si on suit l'argument de AM, l'hypothèse (5) peut être relâchée en faveur d'une hypothèse d'exogénéité plus forte, à savoir que X_{1it} est indépendant de α_i et λ_t pour $i = 1, 2, \ldots, N; t = 1, 2, \ldots, T$. La transposition à notre cas de l'estimateur de AM donne :

$$A^{AM} = [QX, BX_1, \bar{B}X_1, (QX_1)^*, Z_1, W_1]$$

Dans le cas présent, chaque composante de X_1 est utilisée comme $T+1$ instruments et la condition d'identification est donnée par :

$$(T+1)k_1 \geq g_2 + h_2$$

Enfin, l'estimateur correspondant à celui de BMS est obtenu en utilisant

$$A^{BMS} = [QX, BX_1, \bar{B}X_1, (QX)^*, Z_1, W_1]$$

La condition d'ordre pour l'identification du vecteur de paramètres η est $2k_1 + (T-1)(k_1 + k_2) \geq g_2 + h_2$. Comme la matrice Q élimine les composantes individuelles et temporelles, la condition d'exogénéité au sens de BMS est justifiée, alors qu'elle ne l'était pas obligatoirement dans le cas considéré par ces auteurs (voir CORNWELL et RUPERT [1988]). L'hypothèse d'exogénéité dans notre cas devient minimale : les écarts de X_2 par rapport aux deux moyennes doivent être indépendantes de α et de λ.

On peut énoncer enfin la proposition générale suivante, montrant l'équivalence entre les estimateurs IV et GMM (Méthode des Moments Généralisés).

PROPOSITION 2 : Soit A^0 une matrice d'instruments de la forme $(QG_1, BG_2, \bar{B}G_3)$, où G_1, G_2 et G_3 possèdent éventuellement des composantes communes, et $P_{A^0} = A^0(A^{0\prime}A^0)^{-1}A^{0\prime}$ la matrice de projection associée.

L'estimateur IV utilisant A^0 comme instrument est équivalent à celui des Moments Généralisés (GMM).

Preuve : Cette preuve est analogue à celle développée par CORNWELL *et al.* [1992] dans le cas d'un seul effet. Comme les variables sont centrées par rapport à la moyenne sur la population et que les quatre opérateurs Q, B, $\bar{B}$ et J sont orthogonaux, la multiplication d'une composante quelconque S par la matrice de variance-covariance Ω est :

$$\Omega S = \sigma_\varepsilon^2 (QS + \theta_1^{-2} BS + \theta_2^{-2} \bar{B}S)$$

en vertu de $B\bar{B}S = 0$.

Les opérateurs étant mutuellement orthogonaux, on a

$$P_{A^0} = P_{QG_1} + P_{BG_2} + P_{\bar{B}G_3}$$

L'estimateur IV s'écrit :

$$\hat{\eta}_{IV} = (\Phi'\Omega^{-1/2}P_{A^0}\Omega^{-1/2}\Phi)^{-1}(\Phi'\Omega^{-1/2}P_{A^0}\Omega^{-1/2}Y) \tag{6}$$

qui correspond à la minimisation du critère

$$\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}(Y - \Phi\eta)'\Omega^{-1/2}P_{A^0}\Omega^{-1/2}(Y - \Phi\eta) \tag{7}$$

L'estimateur GMM est basé sur la condition d'orthogonalité

$$A^{0'}(Y - \Phi\eta) = 0 \tag{8}$$

et est défini comme la solution de

$$\min\,(Y - \Phi\eta)'A^0(A^{0'}\Omega A^0)^{-1}A^{0'}(Y - \Phi\eta) \tag{9}$$

Or, on a

$$A^0(A^{0'}\Omega A^0)^{-1}A^{0'} = (QG_1, BG_2, \bar{B}G_3)\left[A^{0'}\Omega A^0\right]^{-1}\begin{pmatrix} G_1'Q' \\ G_2'B' \\ G_3'\bar{B}' \end{pmatrix}$$

$$= (QG_1, BG_2, \bar{B}G_3)$$
$$\times \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 G_1'QG_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2\theta_1^{-2}G_2'BG_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2\theta_2^{-2}G_3'\bar{B}'G_3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} G_1'Q' \\ G_2'B' \\ G_3'\bar{B}' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}(P_{QG_1} + \theta_1^2 P_{BG_2} + \theta_2^2 P_{\bar{B}G_3}) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\Omega^{-1/2}P_{A^0}\Omega^{-1/2}$$

Par conséquent, l'estimateur des moments généralisés coïncide avec celui des variables instrumentales.

QED

Remarquons que les instruments de HT, AM et BMS peuvent s'écrire sous la forme $[QX, BG, \bar{B}\bar{G}]$, où $G = (X_1 : Z_1)$ et $\bar{G} = (X_1 : W_1)$ (par le fait que $BZ_1 = Z_1$ et $\bar{B}W_1 = W_1$). Par conséquent, la proposition 2 est valable pour tous les estimateurs définis plus haut (HT, AM et BMS).

Alors que la procédure IV requiert l'estimation préalable de $\Omega^{-1/2}$ à partir du vecteur $(\theta, \theta_1, \theta_2)$, l'estimateur GMM peut être obtenu par une procédure simple en deux étapes, voir par exemple ARELLANO et BOND [1991].

5 Cas particuliers

On présente ici une généralisation d'un résultat de HT à un modèle à deux effets. L'identification de l'ensemble des paramètres du modèle dépend de la dimension de X_1, Z_2 et W_2. La condition d'identification dans le cas de HT est :

$$2k_1 \geq g_2 + h_2$$

Suivant HT, on peut distinguer trois cas :

(1) *Sous-identification*: $2k_1 < g_2 + h_2$. Dans ce cas, on ne peut identifier que le vecteur de paramètres β qui peut être estimé par :

$$\hat{\beta}_Q = (X'QX)^{-1}X'QY$$

les autres régresseurs étant éliminés par l'opérateur Q.

(2) *Sur-identification*: $2k_1 > g_2 + h_2$. Tous les paramètres sont identifiés et peuvent être calculés par la méthode de la variable instrumentale (IV).

(3) *Juste-identification*: $2k_1 = g_2 + h_2$. On va montrer que dans ce cas, l'estimateur de la variable instrumentale et l'estimateur "Within" [2] de γ et δ coïncident. Les estimateurs "Within" de γ et δ sont définis de la façon suivante. Soit

$$\begin{aligned} M_1 &= BY - BX\hat{\beta}_Q = (B - BX(X'QX)^{-1}X'Q)Y \\ &= Z\gamma + \alpha + (B - BX(X'QX)^{-1}X'Q)\varepsilon \end{aligned} \tag{10}$$

Si l'on traite les trois derniers termes comme des perturbations de moyenne nulle, alors il suffit de trouver des instruments pour Z_2 et estimer γ par la méthode IV. Comme $2k_1 = g_2 + h_2 = g_2$ ($h_2 = 0$ dans (10)), il existe suffisamment d'instruments pour estimer γ. L'estimateur de γ est de la forme :

$$\hat{\gamma}_Q = (Z'P_AZ)^{-1}Z'P_AM_1$$

où $A = (X_1, Z_1)$. On peut obtenir le même estimateur en utilisant en plus de X_1 et Z_1 le vecteur des variables exogènes W_1. Un estimateur "Within" de δ peut être construit de la même manière :

$$\hat{\delta}_Q = (W'P_AW)^{-1}W'P_AM_2$$

où

$$\begin{aligned} M_2 &= \bar{B}Y - \bar{B}X\hat{\beta}_Q = (\bar{B} - \bar{B}X(X'QX)^{-1}X'Q)Y \\ &= W\delta + \lambda + (\bar{B} - \bar{B}X(X'QX)^{-1}X'Q)\varepsilon \end{aligned} \tag{11}$$

Là aussi deux formes différentes de A peuvent être utilisées, à savoir $A = (X_1, W_1)$ ou $A = (X_1, Z_1, W_1)$.

2. Cette appelation provient du fait que l'estimateur est construit à partir de l'estimateur Within $\hat{\beta}_Q$, dans M_1 et M_2, voir ci-dessous.

PROPOSITION 3 : Si le modèle est juste-identifié, alors les estimateurs "Within" et IV de β, γ et δ coïncident.

Preuve: La démonstration de cette proposition est directe. Il suffit de simplifier l'écriture de l'estimateur IV de β, γ et δ en tenant compte de la condition $2k_1 = g_2 + h_2$.

6 Étude des propriétés des estimateurs par simulation

Comme précisé dans les sections précédentes, les bonnes propriétés de nos estimateurs dépendent de la dimension de l'échantillon, dans les deux dimensions : temporelle et individuelle. Dans la pratique, cependant, il est assez rare de disposer de données de panel contenant de nombreuses périodes successives d'observation des individus. Afin d'évaluer les performances de nos estimateurs en "petit échantillon", nous simulons le modèle (2) de la section 2 par une procédure de Monte-Carlo. L'objectif est d'évaluer les propriétés des estimateurs proposés dans des conditions plus proches de celles rencontrées dans la réalité. Le modèle contient trois variables explicatives variant dans les deux dimensions (X_{11} et X_{12} exogènes, X_2 endogène), deux variables spécifiques à l'individu i (Z_1 exogène et Z_2 endogène) et deux variables temporelles (W_1 exogène et W_2 endogène).

La procédure de simulation est la suivante. Dans un premier temps, nous engendrons les variables exogènes du modèle comme suit :

$$X_{11it} = \log\left(1 + \Gamma_{it}/10 + \frac{1}{2}\epsilon_{it}\right);$$

$$X_{12it} = (1 + \Gamma_{it}/2 + \psi_{it})^{1/2}$$

où Γ_{it} est une suite arithmétique de raison 1 : $\Gamma = [1, 2, 3, \ldots, NT-1, NT]'$.

$$z_{1i} = I(\eta_i \leq 0.4)$$

$$w_{10} = \frac{1}{2} \qquad w_{1t} = 0.8w_{1,t-1} + \frac{1}{2}U_t$$

où I est la fonction indicatrice, ϵ_{it} et ψ_{it} sont tirés à partir d'une distribution Normale standard $N(0,1)$, η_i et U_t sont tirés d'une loi Uniforme $U(0,1)$. Les valeurs des variables exogènes sont fixées pour l'ensemble des simulations.

Pour chaque étape du processus de simulation, les variables endogènes sont engendrées à partir des exogènes :

$$X_{2it} = 1 + 0.2BX_{11it} + 0.5BX_{12it} + 0.4\bar{B}X_{1it} + 0.2Z_{1i} + 0.4W_{1t} + \frac{1}{2}v_{1it}$$

$$Z_{2i} = 0.2 + 0.2BX_{11it} + 0.4BX_{12it} + BZ_{1i} + Z_{1i} + 0.2v_{2i} \otimes e_T$$

$$W_{2t} = 1.5 + 0.3\bar{B}X_{11it} + \bar{B}X_{12it} + 0.3W_{1t} + 0.2e_N \otimes v_{3t}$$

où v_1, v_2 et v_3 sont des tirages aléatoires issus de la loi Normale standard $N(0,1)$, de dimension $NT \times 1$, $N \times 1$ et $T \times 1$ respectivement.

On génère finalement le modèle comme suit :

(12) $Y = 1 + 7X_{11} + 6X_{12} + 5X_2 + 3Z_1 + 6Z_2 + 4W_1 + 8W_2 + \alpha + \lambda + \varepsilon$

où α est $N(0, \sigma_\alpha = 0.9)$, λ est $N(0, \sigma_\lambda = 1)$ et ε est $N(0, \sigma_\varepsilon = 0.5)$.

TABLEAU 1

Écarts absolus d'efficacité des estimateurs HT, AM et BMS

N=100						
Variable	HT vs.AM			AM vs.BMS		
	T=15	T=20	T=25	T=15	T=20	T=25
X_{11}	0.0040	0.0045	0.0085	0.0016	0.0020	0.0037
X_{12}	0.0245	0.0156	0.0119	0.0096	0.0070	0.0053
X_2	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Z_1	0.0004	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
Z_2	0.0937	0.0576	0.0419	0.0371	0.0256	0.0188
W_1	0.0145	0.0040	0.0036	0.0052	0.0017	0.0015
W_2	0.0534	0.0324	0.0239	0.0209	0.0144	0.0107
% rejets H_0	13.33	8.00	2.33	33.33	13.00	7.00
N=150						
X_{11}	0.0037	0.0073	0.0020	0.0015	0.0031	0.0008
X_{12}	0.0205	0.0094	0.0093	0.0087	0.0040	0.0040
X_2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Z_1	0.0002	0.0001	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000
Z_2	0.0745	0.0332	0.0331	0.0313	0.0143	0.0146
W_1	0.0112	0.0115	0.0081	0.0044	0.0046	0.0035
W_2	0.0411	0.0187	0.0181	0.0172	0.0079	0.0079
% rejets H_0	12.00	3.67	2.00	24.67	6.00	4.33
N=200						
X_{11}	0.0024	0.0017	0.0017	0.0012	0.0009	0.0009
X_{12}	0.0067	0.0039	0.0039	0.0031	0.0018	0.0018
X_2	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Z_1	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Z_2	0.0243	0.0140	0.0140	0.0113	0.0066	0.0066
W_1	0.0070	0.0029	0.0029	0.0030	0.0013	0.0013
W_2	0.0133	0.0075	0.0075	0.0062	0.0036	0.0036
% rejets H_0	6.00	1.33	1.00	15.00	4.67	3.33

Les valeurs représentées sont les différences entre les écarts-type empiriques estimés, pour HT et AM d'une part, AM et BMS d'autre part, sur les 300 simulations. Les pourcentages de rejets de l'hypothèse H_0 sont calculés pour un seuil de 5 %; les trois premières valeurs correspondent au test de validité des instruments de AM vs. HT, les trois dernières au test de validité des instruments de BMS vs. AM.

Les estimateurs de HT, AM et BMS sont calculés pour chaque jeu de tirages aléatoires des variables v_1, v_2, v_3, α, λ et ε.

Pour étudier les propriétés des estimateurs en fonction de la dimension de l'échantillon (à la fois individuelle et temporelle), les simulations sont conduites pour plusieurs tailles de N et de T. Neuf cas sont considérés, en combinant les dimensions suivantes :

- N = 100, 150, 200.
- T = 15, 20, 25.

L'annexe 2 présente les résultats des simulations, pour quatre estimateurs : GLS, HT, AM et BMS. Les moments empiriques sont calculés à partir de 300 simulations pour chaque cas.

Le tableau 1 présente les différences d'efficacité de nos estimateurs, pour différentes valeurs de N et de T. Les valeurs numériques dans le tableau représentent les écarts absolus entre les écarts-type empiriques. Pour chaque simulation, deux statistiques de test à la Hausman sont calculées, correspondant aux hypothèses nulles : H_0 : Les instruments de AM sont légitimes; H_0 : Les instruments de BMS sont légitimes. Le nombre de rejets des hypothèses nulles au seuil de 5 % est calculé sur les 300 simulations. Rappelons que la légitimité des instruments de HT peut être testée en calculant le test d'Hausman basé sur la différence entre deux estimateurs : l'estimateur Within et l'estimateur de HT. Pour les instruments de AM et BMS, on utilise la même statistique basée sur la différence entre les estimateurs de HT et AM, AM et BMS respectivement.

La mesure d'efficacité d'un estimateur, dans notre contexte, dépend du nombre d'instruments. Par conséquent, la question cruciale est de savoir comment évolue cette efficacité en passant d'un estimateur à un autre, en fonction de T et de N.

D'une manière générale, les estimateurs de BMS sont plus efficaces que ceux de AM, qui sont de leur côté plus efficaces que les estimateurs de HT. Cette croissance d'efficacité s'explique par les instruments supplémentaires utilisés à chaque fois. L'utilisation de ces instruments est confortée par le test d'Hausman. En effet, la valeur de la statistique du χ^2 permet d'accepter l'hypothèse d'exogénéité des instruments de HT, AM et BMS. L'analyse des différents tableaux montre que la différence d'efficacité entre les trois estimateurs varie en fonction de T et N.

Pour N fixé et $T \to \infty$ ($N = 100$, $T = 15$, 20, 25), la différence d'efficacité pour $\hat{\delta}_{2IV}$, coefficient de W_{2t} (on peut remarquer la même chose pour le coefficient de W_{1t}) entre HT et AM passe de 0.0534 à 0.0239 pour $T = 15, 25$. La différence peut être expliquée par le nombre d'instruments utilisés dans l'estimateur AM (39 instruments) et pour HT (9 instruments), alors que la décroissance de cette efficacité est due à la dimension temporelle, qui passe de $T = 15$ à $T = 25$.

Cette différence est moins importante en comparant AM et BMS (elle passe de 0.0209 à 0.0107). Ceci peut être expliqué aussi par le nombre d'instruments supplémentaires utilisés dans l'estimation de BMS (14 instruments) qui est supérieur au nombre d'instruments supplémentaires utilisés dans AM par rapport à HT (30 instruments).

Pour T fixé et $N \to \infty$ ($T = 15, N = 100, 150, 200$, voir la deuxième colonne du tableau 1), on constate la même décroissance de la différence d'efficacité, elle passe de 0.0534 à 0.0133 pour le paramètre associé à W_{2t}

et de 0.0145 à 0.007 pour celui associé à W_{1t}. En ce qui concerne les variables constantes et variant dans le temps (Z_i et W_t), on constate là aussi que la différence d'efficacité entre les trois estimateurs décroît si N ou T tend vers l'infini.

Enfin, nous avons examiné l'efficacité des trois estimateurs dans le cas du modèle de Mundlak de la forme [3] :

$$Y_{it} = \beta X_{it} + \alpha_i + \lambda_t + \varepsilon_{it}$$

Si certaines composantes seulement de X_{it} sont corrélées avec les effets, alors l'estimateur par variables instrumentales est plus efficace que l'estimateur Within. Nos estimateurs sont construits dans ce cas en utilisant comme instruments les écarts à la moyenne par rapport aux deux dimensions (opérateur Q), ainsi que les deux moyennes (individuelle et temporelle) pour chaque régresseur exogène dans X_{it}.

Afin de comparer les performances de nos estimateurs par variables instrumentales avec les procédures traditionnelles de HT, AM et BMS, dans lesquelles les moyennes individuelles des régresseurs X_{it} sont utilisées comme instruments, nous utilisons la même technique de simulation que celle décrite plus haut, en ne conservant que X_{11}, X_{12} et X_2 comme régresseurs. Les estimateurs de HT, AM et BMS sont calculés pour chaque jeu de simulations avec deux matrices d'instruments, selon que les moyennes individuelles sont utilisées ou non. Le premier cas (Type I) représente le cas usuel décrit dans HT, AM et BMS, à la différence près que l'opérateur Q effectue le centrage des observations par rapport aux moyennes individuelle et temporelle simultanément. Dans le second cas (Type II), les instruments des estimateurs usuels sont complétés par les moyennes temporelles, comme décrit plus haut (opérateur $\overline{B}$).

Le tableau 2 présente les résultats d'estimation du modèle, pour les deux types de variables instrumentales (Type I et Type II). A chaque simulation, le test de spécification de Hausman est calculé, basé sur la différence entre l'estimateur traditionnel (Type I) et notre estimateur (Type II) pour la procédure de HT. L'hypothèse nulle H_0 testée est celle d'exogénéité de nos instruments supplémentaires, à savoir $\bar{B}X_{11}$ et $\bar{B}X_{12}$. Par conséquent, si cette hypothèse est rejetée pour l'estimateur de HT, elle l'est *a fortiori* pour les méthodes de AM et BMS, car ces méthodes ajoutent, par rapport au cas de HT, les mêmes instruments dans les deux cas (Type I et Type II). Il est donc inutile de calculer le test de spécification pour AM et BMS.

Les résultats empiriques dans le tableau 2 montrent que d'une part, il est possible d'utiliser comme instruments supplémentaires $\bar{B}X_{11}$ et $\bar{B}X_{12}$ (voir la statistique du χ^2) et, d'autre part, l'estimateur du Type II est plus efficace que l'estimateur du Type I. Cependant, comme dans le tableau 1, cette différence d'efficacité décroît en fonction de N et T. En effet, pour $N = 100$, $T = 15$ par exemple, l'écart-type du paramètre correspondant

3. Ici, on considère le même modèle que celui de la section 2 avec la restriction $\gamma = 0$ et $\delta = 0$ tout en maintenant les mêmes hypothèses sur le vecteur X_{it}.

Tableau 2

Simulation du modèle de Mundlak

N=100						
	T=15		T=20		T=25	
Variable	Type I	Type II	Type I	Type II	Type I	Type II
X_{11}	7.1114	7.0943	7.0860	7.0753	7.1195	7.1091
	(0.5142)	(0.5043)	(0.4205)	(0.4159)	(0.4399)	(0.4351)
X_{12}	5.9957	5.9959	6.0017	6.0015	5.9981	5.9979
	(0.1170)	(0.1157)	(0.0984)	(0.0971)	(0.0872)	(0.0867)
X_2	5.0100	5.0112	5.0088	5.0097	5.0075	5.0083
	(0.0505)	(0.0501)	(0.0430)	(0.0428)	(0.0382)	(0.0379)
χ^2 min.	0.0000		0.0003		0.0000	
χ^2 max.	2.8090		2.5653		2.7141	
% rejets	0.0		0.0		0.0	
N=150						
	T=15		T=20		T=25	
Variable	Type I	Type II	Type I	Type II	Type I	Type II
X_{11}	7.1488	7.1263	7.0947	7.0841	7.0739	7.0665
	(0.5737)	(0.5571)	(0.3779)	(0.3714)	(0.2978)	(0.2945)
X_{12}	5.9876	5.9889	5.9990	5.9989	6.0019	6.0016
	(0.1065)	(0.1055)	(0.0731)	(0.0723)	(0.0596)	(0.0589)
X_2	5.0064	5.0075	5.0059	5.0066	5.0073	5.0079
	(0.0419)	(0.0415)	(0.0354)	(0.0351)	(0.0309)	(0.0307)
χ^2 min.	0.0004		0.0001		0.0002	
χ^2 max.	2.4005		1.4401		2.4905	
% rejets	0.0		0.0		0.0	
N=200						
	T=15		T=20		T=25	
Variable	Type I	TypeII	Type I	Type II	Type I	Type II
X_{11}	7.1295	7.1094	7.1477	7.1258	7.1246	7.1121
	(0.5030)	(0.4881)	(0.4519)	(0.4402)	(0.3915)	(0.3848)
X_{12}	5.9897	5.9907	5.9918	5.9924	5.9957	5.9959
	(0.0867)	(0.0859)	(0.0681)	(0.0677)	(0.0584)	(0.0582)
X_2	5.0044	5.0043	5.0055	5.0097	5.0034	5.0041
	(0.0364)	(0.0361)	(0.0310)	(0.0307)	(0.0274)	(0.0272)
χ^2 min.	0.0001		0.0001		0.0001	
χ^2 max.	2.5658		2.8311		1.6514	
% rejets	0.0		0.0		0.0	

Les écarts-type estimés sont entre parenthèses. χ^2 min. et χ^2 max. : minimum et maximum de la statistique de test de Hausman, sur les 300 simulations. % rejets : associé à l'hypothèse nulle H_0 d'exogénéité des instruments supplémentaires du Type II.

X_2 passe de 0.0505 à 0.0501, alors que pour $N = 100, T = 25$ il passe de 0.0382 à 0.0379.

7 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article un modèle avec régresseurs variant dans le temps, selon les individus ou les deux, et dont certains peuvent être endogènes. Bien que ce type de modèles soit moins fréquent, il permet cependant d'incorporer des variables explicatives de type macroéconomique (taux de chômage, indice de prix ou de production, etc.) et d'évaluer leur impact sur la variable endogène étudiée. L'estimation de ce modèle par variable instrumentale montre que la supériorité (en efficacité) entre les différentes méthodes, observée dans le cas d'un modèle à un seul effet, est aussi vraie pour un modèle à deux effets, mais diminue si N ou T tend vers l'infini. L'extension de la méthode de la variable instrumentale pour estimer un modèle du type Mundlak montre que l'utilisation de la moyenne temporelle des variables X_{it} comme instrument supplémentaire nous a permis d'obtenir un estimateur plus efficace par rapport aux estimateurs traditionnels de la variable instrumentale.

Estimation des composantes de Ω

Pour calculer l'estimateur des Moindres Carrés Généralisés (GLS), la connaissance de la matrice Ω (ou, de façon équivalente, des paramètres θ), est nécessaire. Si tel n'est pas le cas, Ω peut être remplacée par une estimation convergente préalable (procédure Feasible GLS, voir par exemple MÁTYÁS [1992]).

Il existe plusieurs méthodes de calcul de la matrice de variance-covariance Ω. Les travaux pionniers en la matière (WALLACE et HUSSAIN [1969]) préconisaient l'utilisation des résidus OLS d'une première régression, pour obtenir des estimations convergentes des variances σ_ε^2, σ_α^2 et σ_λ^2 comme suit :

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\hat{u}'Q\hat{u}}{(N-1)(T-1)-K-1}$$

$$T\hat{\sigma}_\alpha^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\hat{u}'B\hat{u}}{N-K}$$

$$N\hat{\sigma}_\lambda^2 + \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\hat{u}'\bar{B}\hat{u}}{T-K}$$

Pour obtenir des estimations plus efficaces, certains auteurs préconisent l'utilisation des résidus de la régression Between (AMEMIYA [1971]) [4]. Il n'est cependant pas évident que des estimations plus efficaces de Ω conduisent à des estimateurs $\hat{\eta}$ plus efficaces (voir TAYLOR [1980]). Bien entendu, si les effets sont corrélés avec certains régresseurs, les estimations des composantes de la variance ne sont pas convergentes. Une estimation par variables instrumentales est alors nécessaire, elle procède de la façon suivante.

On utilise les équations (10) et (11) pour calculer les estimateurs $\hat{\gamma}_Q$ et $\hat{\delta}_Q$. A partir de ces derniers, on forme les vecteurs

$$\hat{u}_Q = QY - QX\hat{\beta}_Q$$

$$\hat{u}_I = BY - BX\hat{\beta}_Q - Z\hat{\gamma}_Q$$

$$\hat{u}_T = \bar{B}Y - \bar{B}X\hat{\beta}_Q - W\hat{\delta}_Q$$

Ces trois vecteurs d'erreurs servent enfin à calculer les variances σ_ε^2, σ_α^2 et σ_λ^2 en résolvant le système suivant :

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\hat{u}_Q'\hat{u}_Q}{(N-1)(T-1)-K-1}$$

4. Voir également BOLDUC et LAFERRIÈRE [1990] pour une méthode alternative d'estimation.

$$T\hat{\sigma}_{\alpha}^{2}+\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}=\frac{\hat{u}_{I}'\hat{u}_{I}}{N-K}$$

et

$$N\hat{\sigma}_{\lambda}^{2}+\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}=\frac{\hat{u}_{T}'\hat{u}_{T}}{T-K}$$

Résultats d'estimation

TABLEAU 3

Paramètres estimés avec N=100, T=15, 20

Variable	Vraie valeur	GLS	HT	AM	BMS
N=100, T=15					
X_{11}	7.0000	6.7733	6.9099	6.8493	6.8309
		(0.5579)	(0.5682)	(0.5642)	(0.5626)
X_{12}	6.0000	6.2180	5.9331	6.0591	6.0969
		(0.3140)	(0.3791)	(0.3546)	(0.3450)
X_2	5.0000	5.0149	5.0127	5.0138	5.0142
		(0.0538)	(0.0539)	(0.0538)	(0.0538)
Z_1	3.0000	3.0447	3.0466	3.0411	3.0420
		(0.8212)	(0.8221)	(0.8217)	(0.8216)
Z_2	6.0000	5.2710	6.2814	5.8332	5.6990
		(1.0584)	(1.3112)	(1.2175)	(1.1804)
W_1	4.0000	3.2503	4.2412	3.8107	3.6683
		(4.2968)	(4.3364)	(4.3219)	(4.3167)
W_2	8.0000	8.4850	7.8686	8.1419	8.2241
		(0.6843)	(0.8277)	(0.7743)	(0.7534)
N=100, T=20					
X_{11}	7.0000	6.8343	6.9347	6.8794	6.8626
		(0.5393)	(0.5495)	(0.5450)	(0.5430)
X_{12}	6.0000	6.1760	6.0215	6.1060	6.1332
		(0.2876)	(0.3234)	(0.3078)	(0.3008)
X_2	5.0000	4.9917	4.9906	4.9913	4.9915
		(0.0461)	(0.0461)	(0.0461)	(0.0461)
Z_1	3.0000	2.9669	2.9603	2.9600	2.9628
		(0.8919)	(0.8922)	(0.8921)	(0.8920)
Z_2	6.0000	5.3623	5.8799	5.5930	5.5032
		(0.9571)	(1.0903)	(1.0327)	(1.0071)
W_1	4.0000	3.6885	4.0041	3.8307	3.7690
		(2.9993)	(3.0096)	(3.0056)	(3.0039)
W_2	8.0000	8.4227	8.1229	8.2897	8.3417
		(0.5826)	(0.6578)	(0.6254)	(0.6110)

Les écarts-type estimés sont entre parenthèses.

TABLEAU 4

Paramètres estimés avec N = 100, T = 25

Variable	Vraie valeur	GLS	HT	AM	BMS
X_{11}	7.0000	7.2012 (0.6302)	7.3067 (0.6466)	7.2373 (0.6381)	7.2080 (0.6344)
X_{12}	6.0000	5.9871 (0.2752)	5.8950 (0.2982)	5.9557 (0.2863)	5.9804 (0.2810)
X_2	5.0000	5.0045 (0.0411)	5.0037 (0.0411)	5.0043 (0.0411)	5.0045 (0.0411)
Z_1	3.0000	2.9439 (0.9373)	2.9474 (0.9375)	2.9449 (0.9374)	2.9435 (0.9374)
Z_2	6.0000	5.9660 (0.8724)	6.2615 (0.9541)	6.0644 (0.9122)	5.9848 (0.8934)
W_1	4.0000	3.8529 (3.8457)	4.0808 (3.8540)	3.9289 (3.8504)	3.8719 (3.8489)
W_2	8.0000	8.0353 (0.5325)	7.8635 (0.5793)	7.9785 (0.5554)	8.0249 (0.5447)

TABLEAU 5

Paramètres estimés avec N = 150, T = 15, 20

Variable	Vraie valeur	GLS	HT	AM	BMS
N=150, T=15					
X_{11}	7.0000	6.7551	6.8713	6.8197	6.7979
		(0.5713)	(0.5840)	(0.5803)	(0.5788)
X_{12}	6.0000	6.1393	5.8961	6.0057	6.0505
		(0.3110)	(0.3868)	(0.3663)	(0.3576)
X_2	5.0000	4.9927	4.9911	4.9916	4.9919
		(0.0438)	(0.0438)	(0.0438)	(0.0438)
Z_1	3.0000	2.9935	2.9966	2.9976	2.9941
		(0.7520)	(0.7526)	(0.7524)	(0.7523)
Z_2	6.0000	5.5633	6.4019	6.0217	5.8659
		(1.0371)	(1.3147)	(1.2402)	(1.2089)
W_1	4.0000	3.0121	4.0049	3.5702	3.4134
		(5.7436)	(5.7834)	(5.7722)	(5.7678)
W_2	8.0000	8.3260	7.8336	8.0569	8.1479
		(0.6428)	(0.7948)	(0.7537)	(0.7365)
N=150, T=20					
X_{11}	7.0000	6.6496	6.7132	6.6778	6.6667
		(0.5394)	(0.5499)	(0.5466)	(0.5452)
X_{12}	6.0000	6.2250	6.1337	6.1816	6.1974
		(0.2726)	(0.3029)	(0.2937)	(0.2897)
X_2	5.0000	5.0090	5.0084	5.0087	5.0088
		(0.0377)	(0.0377)	(0.0377)	(0.0377)
Z_1	3.0000	2.9039	2.9044	2.9022	2.9029
		(0.8786)	(0.8789)	(0.8788)	(0.8787)
Z_2	6.0000	5.2901	5.5903	5.4307	5.3780
		(0.8965)	(1.0047)	(0.9721)	(0.9578)
W_1	4.0000	3.8177	4.0230	3.9221	3.8862
		(3.3492)	(3.3564)	(3.3544)	(3.3535)
W_2	8.0000	8.4307	8.2610	8.3516	8.3815
		(0.5316)	(0.5911)	(0.5732)	(0.5653)

TABLEAU 6

Paramètres estimés avec N = 150, T = 25

Variable	Vraie valeur	GLS	HT	AM	BMS
X_{11}	7.0000	6.6561 (0.5751)	6.7343 (0.5950)	6.7019 (0.5877)	6.6862 (0.5846)
X_{12}	6.0000	6.1925 (0.2807)	6.1162 (0.3063)	6.1464 (0.2969)	6.1619 (0.2929)
X_2	5.0000	4.9959 (0.0335)	4.9956 (0.0335)	4.9957 (0.0335)	4.9958 (0.0335)
Z_1	3.0000	2.8609 (1.0045)	2.8577 (1.0046)	2.8586 (1.0045)	2.8599 (1.0045)
Z_2	6.0000	5.4011 (0.9037)	5.6565 (0.9952)	5.5547 (0.9620)	5.5029 (0.9477)
W_1	4.0000	3.5998 (7.2616)	4.3445 (7.2967)	4.0656 (7.2852)	3.9165 (7.2806)
W_2	8.0000	8.3808 (0.5790)	8.2220 (0.6305)	8.2852 (0.6118)	8.3173 (0.6039)

TABLEAU 7

Paramètres estimés avec N = 200, T = 15, 20

Variable	Vraie valeur	GLS	HT	AM	BMS
N=200, T=15					
X_{11}	7.0000	6.8260 (0.5339)	6.9448 (0.5437)	6.9206 (0.5417)	6.9012 (0.5409)
X_{12}	6.0000	6.0542 (0.2687)	5.8415 (0.3160)	5.8845 (0.3067)	5.9184 (0.3027)
X_2	5.0000	4.9869 (0.0380)	4.9854 (0.0380)	4.9857 (0.0380)	4.9859 (0.0380)
Z_1	3.0000	2.8653 (0.7205)	2.8640 (0.7207)	2.8643 (0.7207)	2.8643 (0.7207)
Z_2	6.0000	5.8356 (0.8921)	6.5699 (1.0637)	6.4214 (1.0306)	6.3039 (1.0160)
W_1	4.0000	2.9863 (7.7946)	4.3017 (7.8358)	4.0400 (7.8277)	3.8424 (7.8242)
W_2	8.0000	8.1694 (0.5528)	7.7413 (0.6457)	7.8277 (0.6276)	7.8961 (0.6197)
N=200, T=20					
X_{11}	7.0000	6.7336 (0.5149)	6.8122 (0.5252)	6.7922 (0.5228)	6.7831 (0.5216)
X_{12}	6.0000	6.1197 (0.2649)	6.0099 (0.2940)	6.0383 (0.2873)	6.0503 (0.2842)
X_2	5.0000	4.9795 (0.0325)	4.9790 (0.0326)	4.9792 (0.0325)	4.9792 (0.0325)
Z_1	3.0000	3.0420 (0.8576)	3.0431 (0.8578)	3.0440 (0.8577)	3.0435 (0.8577)
Z_2	6.0000	5.6179 (0.8787)	5.9963 (0.9847)	5.8977 (0.9604)	5.8566 (0.9491)
W_1	4.0000	3.5549 (5.8082)	4.2364 (5.8397)	4.0554 (5.8327)	3.9836 (5.8297)
W_2	8.0000	8.2777 (0.5610)	8.0507 (0.6190)	8.1100 (0.6057)	8.1346 (0.5995)

TABLEAU 8

Paramètres estimés avec N = 200, T = 25

Variable	Vraie valeur	GLS	HT	AM	BMS
X_{11}	7.0000	7.1116 (0.3625)	7.1503 (0.3691)	7.1349 (0.3674)	7.1282 (0.3665)
X_{12}	6.0000	5.9950 (0.2310)	5.9452 (0.2459)	5.9649 (0.2420)	5.9735 (0.2402)
X_2	5.0000	4.9971 (0.0290)	4.9968 (0.0290)	4.9969 (0.0290)	4.9970 (0.0290)
Z_1	3.0000	2.9896 (0.9474)	2.9884 (0.9474)	2.9890 (0.9474)	2.9891 (0.9474)
Z_2	6.0000	5.9588 (0.7695)	6.1259 (0.8232)	6.0592 (0.8092)	6.0303 (0.8026)
W_1	4.0000	3.9087 (5.6352)	4.1991 (5.6475)	4.0879 (5.6446)	4.0411 (5.6433)
W_2	8.0000	8.0489 (0.4641)	7.9531 (0.4930)	7.9914 (0.4855)	8.0079 (0.4819)

• Références bibliographiques

AMEMIYA, T. (1971). – “The Estimation of Variances in a Variance-Components Model”, *International Economic Review*, 12, pp. 1-13.

AMEMIYA, T., MACURDY, T.E. (1986). – “Instrumental-Variable Estimation of an Error-Component Model”, *Econometrica*, 54, pp. 869-880.

ARELLANO, M., BOND, S. (1991). – “Some Tests of Specification for Panel Data: Monte Carlo Evidence and an application to Employment Equations”, *Review of Economic Studies*, 58, pp. 277-297.

BALTAGI, B.H. (1980). – “On Seemingly Unrelated Regressions with Error Components”, *Econometrica*, 48, pp. 1547-1551.

BALTAGI, B.H. (1992). – “Specification Issues”, in *The Econometrics of Panel Data*, pp. 196-205, Mátyás et Sevestre Eds., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

BOLDUC, D., LAFERRIÈRE, R. (1990). – “Regression-Based Variance Estimators for the Error Component Model”, *Document de travail 9018,* Université de Laval.

BOUMAHDI, R., THOMAS, A. (1992). – “Estimation des Modèles à deux Régimes avec des Données de Panel”, *Annales d’Economie et de Statistique*, 28, pp. 125-142.

BREUSCH, T.S., MIZON, G.E., SCHMIDT, P. (1989). – “Efficient Estimation using Panel Data”, *Econometrica*, 57, pp. 695-700.

CORNWELL, C., SCHMIDT, P., WYHOWSKI, D. (1992). – “Simultaneous Equations and Panel Data”, *Journal of Econometrics*, 51, pp. 151-181.

CORNWELL, C., RUPERT, P. (1988). – “Efficient Estimation with Panel Data : An Empirical Comparison of Instrumental Variables Estimators”, *Journal of Applied Econometrics*, 3, pp. 149-155.

HAUSMAN, J.A. (1978). – “Specification Tests in Econometrics”, *Econometrica*, 46, pp. 1251-1272.

HAUSMAN, J.A., TAYLOR, W.E. (1981). – “Panel Data and Unobservable Individual Effects”, *Econometrica*, 49, pp. 1377-1398.

HSIAO, C. (1986), *Analysis of Panel Data*, Cambridge University Press, Cambridge.

KANG, S. (1985). – “A Note on the Equivalence of Specification Tests in the Two-Factor Multivariate Variance Components Model”, *Journal of Econometrics*, 28, pp. 193-203.

MÁTYÁS, L. (1992). – “Error Components Models”, in *The Econometrics of Panel Data*, pp. 46-71, Mátyás et Sevestre Eds., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

MOULTON, B.R. (1987). – “Diagnostic for Group Effects in Regression Analysis”, *Journal of Business and Economics Statistics*, 5, pp. 275-282.

REVANKAR, N.S. (1992). – “Exact Equivalence of Instrumental Variable Estimators in an Error Component Structural System”, in *Panel Data Analysis*, Raj, B. et Baltagi, B.H. Eds., Studies in Empirical Economics, Springer Verlag, Heidelberg.

TAYLOR, W.E. (1980). – “Small Sample Considerations in Estimation from Panel Data”, *Journal of Econometrics*, 13, pp. 203-223.

TROGNON, A. (1992). – “Appendix : Matrix Algebra for Linear Models”, in *The Econometrics of Panel Data*, pp. 206-209, Mátyás et Sevestre Eds., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

WALLACE, T.D., HUSSAIN, A. (1969). – “The Use of Error Components Models in Combining Cross Section with Time Series Data”, *Econometrica*, 37, pp. 55-72.

WANSBEEK, T., KAPTEYN A. (1989). – “Estimation of the Error-Components Model with Incomplete Panels”, *Journal of Econometrics*, 41, pp. 341-361.