

Diffusion et effet de vague

Christian GOURIÉROUX, Irina PEAUCELLE*

RÉSUMÉ. – Nous nous intéressons à des modèles dynamiques permettant d'analyser les taux de détention de certains biens durables, et en particulier de voir comment ces taux réagissent à des variations de prix. La spécificité de cet article est de regarder ce problème en tenant compte de l'hétérogénéité des individus. Ceci permet de voir comment le produit va séquentiellement se diffuser selon le degré de réceptivité des sous-populations. Les divers aspects de modélisations : forme des modèles, introduction de facteurs explicatifs, biais d'agrégation, estimation sont successivement présentés.

Diffusion and Waves Effects

ABSTRACT. – We consider dynamic models for analysing the holding rates of some durable goods, and especially for describing how these rates react to some modifications of prices. The feature of this paper is the introduction of individual heterogeneity. It allows to examine how the good will diffuse among the different subpopulations depending on their receptivity degree. The different modelling aspects are successively presented: model specification, introduction of explanatory factors, aggregation biases, estimation.

* C. GOURIÉROUX : CREST, CEPREMAP ; I. PEAUCELLE : CNRS, CEPREMAP.

1 Introduction

Cet article tire son origine dans la nécessité de disposer de modèles dynamiques maniabiles pour décrire les phénomènes de vagues de remboursements anticipés dans le domaine du crédit hypothécaire (HILGER [1988], FRACHOT-GOURIEROUX [1995]). Les emprunteurs, qui choisissent un crédit à taux fixe, disposent d'une possibilité de rembourser avant le terme figurant dans le contrat (option de remboursement anticipé). En pratique ils le font dans deux cas principaux :

- lorsqu'ils changent de logement, au moment de la revente de celui sur lequel est fondé l'hypothèque,
- en période de baisse des taux, où ils peuvent substituer au crédit initial un nouveau crédit à un taux plus favorable.

C'est ce deuxième aspect qui nous intéresse ici. Si nous considérons un ensemble de crédits de termes longs, disons 30 ans, accordés entre deux dates $t_0 < t_1$, nous pouvons examiner la proportion P_t de ces crédits encore détenus aux dates t postérieures à t_1 . Si le taux d'intérêt diminue dans le temps, ce taux de détention va baisser, mais cette baisse va être complexe, car résultant de la plus ou moins grande sensibilité des crédits du lot. Ainsi un crédit accordé en t_0 et figurant dans le lot en t_1 est plus résistant aux variations de taux postérieures à t_1 qu'un crédit accordé en t_1 ; cet "effet d'usure" ("burn out effect") vient du fait que ce crédit plus ancien a déjà prouvé en subsistant sa résistance à diverses variations de taux. De façon analogue un crédit de montant plus élevé sera plus sensible aux baisses de taux, car moins concerné par les coûts fixes liés à l'exercice de l'option de remboursement anticipé. Cette hétérogénéité des sensibilités va faire qu'une baisse des taux se répercute en séquence sur les diverses catégories de crédits et de détenteurs (ce que nous appelons dans la suite le phénomène de vague).

Cet exemple introductif, et qui servira aussi d'illustration dans le texte lui-même, montre clairement que nous nous intéressons essentiellement à des problèmes de consommation de biens durables et à la façon, dont évolue à court terme celle-ci, lorsqu'il existe un ou plusieurs biens substituables, dont les prix relatifs se modifient (JAIN-RAO [1990]), KAMAKURA-BALASABRAMANIAN [1988]). C'est cette optique, qui est privilégiée dans la suite, même si les modèles de diffusion utilisés sont proches de modèles introduits dans la littérature pour des propos sensiblement différents, comme celui de la prise en compte des innovations technologiques (GRILICHES [1957], MANSFIELD [1961], [1968], DAVIES [1979], des applications commerciales (RAO [1986]) ou des études épidémiologiques (CASTILLO-CHAVEZ [1989], SATTENSPEIL [1990], ANDERSON-MAY [1991], GEOFFARD-PHILIPSON [1993]).

Dans le paragraphe 2, nous présentons un modèle dynamique de détention, fondé sur des modèles logistiques (FELLER [1940]). Nous étudions en détail les évolutions en distinguant le cas de systèmes soumis ou non à des chocs extérieurs.

Le paragraphe 3 est consacré à l'introduction de l'hétérogénéité entre les individus. Nous commençons par expliquer quels biais pourraient résulter d'une analyse directe du taux de détention agrégé, menée comme si la

population était homogène. Ceci nous conduit naturellement à étudier de façon plus précise ce phénomène en expliquant comment classer entre eux les individus selon qu'ils sont plus ou moins sensibles (réceptifs) aux modifications de prix, à décomposer l'effet multiplicateur sur le taux de détention d'une modification de prix, puis finalement à expliciter l'effet de vague.

Le paragraphe 4 est consacré à la mise en œuvre économétrique de tels modèles. Nous discutons les paramétrisations possibles, les façons d'introduire l'aléa dans le modèle, et développons des méthodes d'estimation et de test utiles.

2 Dynamique de détention

Dans ce paragraphe nous commençons par présenter des modèles dynamiques descriptifs adaptés à l'étude de la clientèle d'une institution de crédit donnée, en considérant uniquement le cas d'une clientèle homogène. Ceci permet de bien mettre en évidence divers aspects de la dynamique.

2.1. Description générale

Nous considérons une sous-population d'individus, homogène du point de vue du comportement de détention, et supposons, pour simplifier la présentation, que sa taille est stable dans le temps. Nous notons P_t la proportion de détenteurs du bien à la date t dans cette sous-population et donc $1 - P_t$ la proportion de non détenteurs. Dans notre exemple des remboursements anticipés, la sous-population considérée correspond à une partie homogène de la clientèle potentielle d'une institution de crédit donnée, et le bien correspond à un crédit pris auprès de cette institution. P_t est donc la proportion de cette clientèle potentielle ayant effectivement pris un crédit auprès de cette institution ; $1 - P_t$ correspond aux autres individus, que ceux-ci n'aient demandés aucun crédit, ou en aient obtenus un auprès d'autres institutions. La dynamique de ces proportions résultera de la description des flux entre détenteurs et non détenteurs. Nous introduisons d'abord deux proportions $\Pi_{0,t}$ et $\Pi_{1,t}$ d'individus stables. Parmi les P_t détenteurs, $\Pi_{1,t}$ restent structurellement détenteurs, et seuls $P_t - \Pi_{1,t}$ sont susceptibles d'être mobiles et de passer d'un état de détention à un état de non détention. De même parmi les $1 - P_t$ non détenteurs, $\Pi_{0,t}$ sont structurellement non détenteurs et $1 - P_t - \Pi_{0,t}$ susceptibles d'être mobiles. Les individus stables, correspondant à $\Pi_{1,t}$, sont les détenteurs de crédit auprès de cette institution, qui soit ne demandent aucun remboursement anticipé, soit en demande un et l'obtiennent auprès de cette même institution, restant ainsi effectivement client. Les individus stables correspondant à $\Pi_{0,t}$ sont soit des individus n'ayant aucun besoin de crédit, soit des clients stables (avec ou sans remboursements) d'autres institutions. Il est clair que les seules données d'une institution ne permettent pas de distinguer ces deux

dernières sous-catégories, et ceci explique pourquoi elles sont confondues dans la suite.

De façon analogue, il y a deux sources différentes de mobilité : la première correspondant à une véritable nouvelle demande de crédit (ou à une fin véritable de crédit), la seconde à des transferts des crédits d'une institution à l'autre, c'est-à-dire aux effets de concurrence.

Il faut ensuite expliquer comment s'effectuent les transitions pour les individus susceptibles d'être mobiles. Nous retenons à ce niveau des modèles avec effet de contagion, qui sous les hypothèses les plus simples conduisent à des dynamiques logistiques. Ces modèles sont introduits pour les deux types de mobilité possibles, puis ensuite agrégés pour reconstituer la proportion de détenteurs.

Plus précisément le taux de mobilité parmi les détenteurs susceptibles d'être mobiles est pris proportionnel à la proportion de non détenteurs :

$$(1) \quad \frac{dP_{1,t}}{P_t - \Pi_{1,t}} = a_{1,t}(1 - P_t)dt,$$

où $a_{1,t}$ est le coefficient de diffusion des détenteurs vers les non-détenteurs et $dP_{1,t}$ est le nombre de détenteurs devenant non détenteurs entre t et $t + dt$. De façon symétrique, nous avons :

$$(2) \quad \frac{dP_{0,t}}{1 - P_t - \Pi_{0,t}} = a_{0,t}P_t dt,$$

où $dP_{0,t}$ est le nombre de non détenteurs devenant détenteurs entre t et $t + dt$, et $a_{0,t}$ le coefficient de diffusion correspondant.

Les équations (1) et (2) sont écrites de façon à avoir les interprétations usuelles. Ainsi dans (1), la correction par $\Pi_{1,t}$ est effectuée sur P_t pour avoir un taux de mobilité parmi les mobiles, et en revanche dans la partie droite $1 - P_t$ n'est pas corrigé de $\Pi_{0,t}$, l'effet de contagion étant proportionnel à la proportion globale de non détenteurs, mobiles ou non.

Tenant compte conjointement de ces deux flux, nous en déduisons que :

$$(3) \quad \begin{cases} dP_t = \{a_{0,t}P_t[1 - P_t - \Pi_{0,t}] - a_{1,t}(P_t - \Pi_{1,t})(1 - P_t)\}dt. \\ dP_t = dP_{0,t} - dP_{1,t}, \end{cases}$$

La dynamique de la clientèle effective, c'est-à-dire, la façon dont la proportion P_t évolue dans le temps, comporte deux aspects. Le premier correspond à l'effet de contagion pur, c'est-à-dire à l'évolution qui existerait même si les paramètres $\Pi_{1,t}$, $\Pi_{0,t}$, $a_{1,t}$, $a_{0,t}$ étaient stables dans le temps. Le second est dû au fait que ces divers paramètres sont en fait variables en fonction des conditions du marché. Intuitivement les vitesses $a_{1,t}$, $a_{0,t}$ de diffusion vont dépendre du différentiel existant entre divers taux : taux du crédit initial, taux du crédit de substitution offert par l'institution, taux des crédits de substitution offerts par la concurrence. Ainsi on distingue implicitement une dynamique autonome, "l'effet contagion", et une dynamique fonction de certaines variables exogènes d'environnement. Cette

distinction est évidemment fondamentale pour une bonne compréhension des phénomènes de vagues de remboursements.

L'équation différentielle (3) ne peut à ce niveau être résolue, puisque nous n'avons pas expliqué comment les divers paramètres de comportement $\Pi_{0,t}, \Pi_{1,t}, a_{0,t}, a_{1,t}$ évoluaient avec le temps. Par construction nous savons que ces paramètres sont contraints par :

$$(4) \quad \begin{cases} \Pi_{0,t} \geq 0, & \Pi_{1,t} \geq 0, & \Pi_{0,t} + \Pi_{1,t} \leq 1, \\ a_{0,t} > 0, & a_{1,t} > 0. \end{cases}$$

De ces contraintes nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \text{si } P_t = \Pi_{1,t}, & \quad dP_t > 0, \\ \text{si } P_t = 1 - \Pi_{0,t}, & \quad dP_t < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, si à une date t_0 : $\Pi_{1,t_0} \leq P_{t_0} \leq 1 - \Pi_{0,t_0}$, le même type de contraintes : $\Pi_{1,t} \leq P_t \leq 1 - \Pi_{0,t}$, est satisfait à toutes les dates ultérieures. C'est cependant la seule information sur la dynamique des taux de détentions que nous pouvons déduire des seules contraintes (4). Comment alors spécifier de façon plus précise les divers paramètres ? Comme nous l'avons discuté auparavant, il est naturel dans une première étape de considérer le cas "stationnaire" (ou sans modifications d'environnement), où les divers coefficients sont indépendants du temps. L'étude de ce cas est effectuée dans le sous-paragraphe suivant et conduit à des modèles généralisant de façon directe les modèles logistiques.

Ce cas particulier servira de base pour approcher les solutions lorsque les paramètres dépendent effectivement du temps. En fait en pratique cette dépendance passe essentiellement par l'intermédiaire d'autres variables comme par exemple les rapports du prix du bien considéré aux prix des biens substituables, et nous serons amenés à construire les modèles en distinguant la dynamique des prix de celle de diffusion sous-jacente à l'équation (3).

2.2. Cas stationnaire

L'équation se réduit à :

$$(5) \quad dP_t = \{a_0 P_t [1 - P_t - \Pi_0] - a_1 (P_t - \Pi_1)(1 - P_t)\} dt.$$

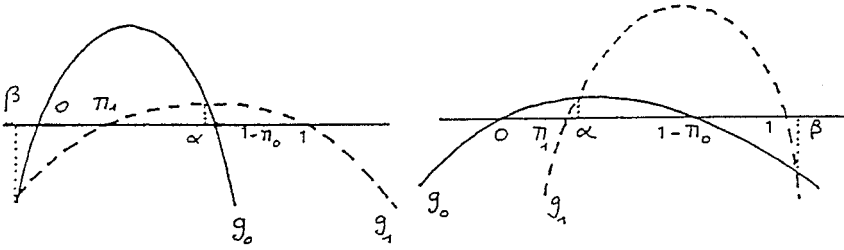
La fonction : $g(P) = a_0 P(1 - P - \Pi_0) - a_1 (P - \Pi_1)(1 - P)$, est un polynôme de degré deux, dont les racines sont obtenues en cherchant les points d'intersection des deux paraboles :

$$\begin{aligned} g_0(P) &= a_0 P(1 - P - \Pi_0), \\ g_1(P) &= a_1 (P - \Pi_1)(1 - P). \end{aligned}$$

Nous voyons que la fonction g admet deux racines réelles et, comme le produit des racines est : $a_1 \Pi_1 [a_1 - a_0]^{-1}$, qu'il y a deux cas à distinguer résumés dans les schémas ci-après :

FIGURE 1

Position des racines



Lorsque $a_1 < a_0$, il y a une racine α comprise entre Π_1 et $1 - \Pi_0$, et une autre racine β négative. Lorsque $a_1 > a_0$, il y a une racine α comprise entre Π_1 et $1 - \Pi_0$, et une autre racine strictement supérieure à un.

On peut d'ailleurs noter que, si b désigne le coefficient du terme de degré un et δ le discriminant du polynôme :

$$g(P) = (a_1 - a_0)P^2 + (a_0 - a_0\Pi_0 - a_1 - a_1\Pi_1)P + a_1\Pi_1,$$

nous avons quelles que soient les positions respectives de a_0 et a_1 :

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{\delta}}{2(a_1 - a_0)}.$$

Nous en déduisons que, si la solution (P_t) de l'équation différentielle (5) converge asymptotiquement vers une limite, celle-ci, devant être comprise entre Π_1 et $1 - \Pi_0$, ne peut être que α (sauf dans le cas dégénéré où β vaudrait 0 ou 1).

L'équation initiale peut maintenant être réécrite :

$$(6) \quad dP_t = (a_1 - a_0)(P_t - \alpha)(P_t - \beta)dt,$$

et peut donc être résolue explicitement. Nous avons :

$$dP_t \left\{ \frac{1}{P_t - \alpha} - \frac{1}{P_t - \beta} \right\} = (\alpha - \beta)(a_1 - a_0)dt,$$

soit en intégrant :

$$(7) \quad \left| \frac{P_t - \alpha}{P_t - \beta} \right| = k \exp(\alpha - \beta)(a_1 - a_0)t, \quad k > 0.$$

Les dynamiques des solutions de cette équation peuvent être distinguées selon les positions de a_1 par rapport à a_0 et de P_t par rapport à α .

$$(8) \quad \text{où : } \gamma = (\beta - \alpha)(a_1 - a_0) = \sqrt{\delta},$$

est un paramètre toujours positif, et où $K = \frac{1}{k}$.

On vérifie bien que la proportion P_t converge asymptotiquement vers la valeur stationnaire α . Par ailleurs la convergence vers cette valeur se

TABLEAU 2

Forme de P_t

	$P_t < \alpha$	$P_t > \alpha$
$a_1 > a_0$ \Downarrow $\beta > 1$	$P_t = \frac{\alpha - \beta k \exp -\gamma t}{1 - k \exp -\gamma t}$ $= \alpha + (\beta - \alpha)(-K \exp \gamma t + 1)^{-1}$	$P_t = \frac{\alpha + \beta k \exp -\gamma t}{1 + k \exp -\gamma t}$ $= \alpha + (\beta - \alpha)(K \exp \gamma t + 1)^{-1}$
$a_1 < a_0$ \Downarrow $\beta < 0$	$P_t = \frac{\alpha + \beta k \exp -\gamma t}{1 + k \exp -\gamma t}$ $= \alpha + (\beta - \alpha)(K \exp \gamma t + 1)^{-1}$	$P_t = \frac{\alpha - \beta k \exp -\gamma t}{1 - k \exp -\gamma t}$ $= \alpha + (\beta - \alpha)(-K \exp \gamma t + 1)^{-1}$

produit soit selon un schéma logistique, soit selon un schéma monotone hyperbolique.

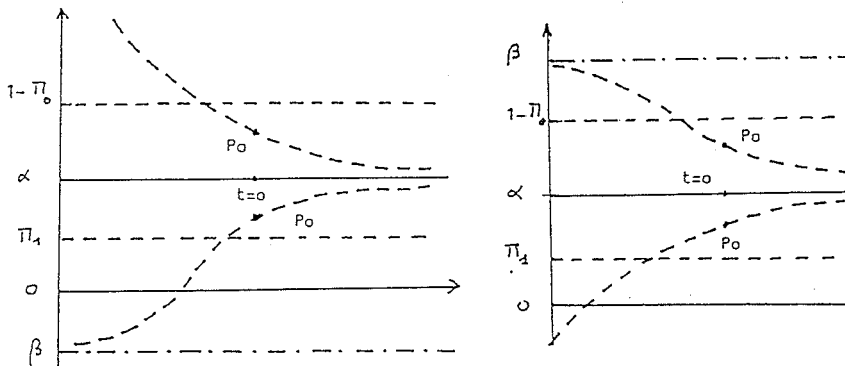
L'existence de l'un ou l'autre de ces schémas dépend des valeurs des paramètres et de la position de la valeur initiale P_0 par rapport à α .

Bien que la dynamique que nous venons d'expliciter soit l'agrégat de divers phénomènes : flux des détenteurs vers les non détenteurs, des non détenteurs vers les détenteurs, stabilité structurelle de certains individus, on voit réapparaître dans certains cas au niveau agrégé des modèles proches de modèles logistiques, qui sont les modèles de base des théories de diffusion. Ceci peut inciter à donner des interprétations directes des paramètres de l'évolution agrégée : γ est la vitesse de diffusion agrégée, α le taux de détention de long terme et β une valeur pivot.

La dynamique précédente peut aussi être exprimée sous forme antorégressive, ce qui est plus adapté à une étude empirique de l'évolution du

FIGURE 3

Évolution des taux de détention



taux de détention sur dates discrètes équiréparties. Ceci permet évidemment d'éliminer la constante d'intégration et donc de revenir aux seuls paramètres initiaux. Cette formulation autorégressive doit être telle que :

$$(9) \quad \left| \frac{P_t - \alpha}{P_t - \beta} \right| = \left| \frac{P_{t-1} - \alpha}{P_{t-1} - \beta} \right| \exp(\alpha - \beta)(a_1 - a_0) \\ = \left| \frac{P_{t-1} - \alpha}{P_{t-1} - \beta} \right| \exp -\gamma,$$

et de plus être telle que l'évolution soit toujours située du même côté du taux limite α , ce qui équivaut à :

$$\text{sng} (P_t - \alpha) = \text{sng} (P_{t-1} - \alpha).$$

Nous en déduisons le schéma d'évolution suivant en notant que $P_t - \beta$ et $P_{t-1} - \beta$ sont toujours de même signe :

$$\frac{P_t - \alpha}{P_t - \beta} = \frac{P_{t-1} - \alpha}{P_{t-1} - \beta} \exp -\gamma, \\ (10) \quad P_t = \frac{\alpha - \beta \frac{P_{t-1} - \alpha}{P_{t-1} - \beta} \exp -\gamma}{1 - \frac{P_{t-1} - \alpha}{P_{t-1} - \beta} \exp -\gamma}.$$

• **Exemple 1 : Absence de catégories structurellement stables**

Supposons $\Pi_1 = 0$. Nous avons deux racines : 0 et $1 - \frac{a_0 \Pi_0}{a_0 - a_1}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Le taux asymptotique } \alpha \text{ vaut } 0, \text{ si } a_1 > a_0(1 - \Pi_0), \\ \text{vaut } 1 - \frac{a_0 \Pi_0}{a_0 - a_1}, \text{ dans le cas contraire.} \end{array} \right.$$

De même si $\Pi_0 = 0$, nous obtenons l'autre cas limite où les racines sont : 1, $\frac{a_1 \Pi_1}{a_0 - a_1}$. Lorsque l'une des proportions Π_0 et Π_1 est petite, les effets logistiques apparaîtront de façon visible sur les dynamiques, alors que dans le cas contraire on peut n'observer que la fin de la dynamique logistique et avoir de ce fait l'impression d'une monotonie.

Lorsque les deux proportions Π_0 et Π_1 sont nulles, les racines sont 0 et 1, et le modèle se réduit à une unique dynamique logistique :

$$(11) \quad dP_t = (a_0 - a_1)P_t(1 - P_t)dt,$$

de vitesse de diffusion agrégée $a_0 - a_1$. Selon les positions respectives de a_0 et a_1 , la convergence a lieu soit vers 0, soit vers 1.

2.3. Cas non stationnaire

Une démarche analogue peut être utilisée, lorsque les divers paramètres sont des fonctions spécifiées du temps. L'équation différentielle devient :

$$(12) \quad dP_t = \{a_0(t)P_t[1 - P_t - \Pi_0(t)] - a_1(t)[P_t - \Pi_1(t)](1 - P_t)\}dt,$$

ou, avec des notations claires :

$$(13) \quad dP_t \left\{ \frac{1}{P_t - \alpha(t)} - \frac{1}{P_t - \beta(t)} \right\} = -\gamma(t)dt.$$

Il n'est pas possible en général de donner une forme explicite de la solution, mais on peut cependant proposer des formes autorégressives approchées. Deux sont envisageables :

Soit $\Gamma(t)$ une fonction primitive de $\gamma(t)$, une première forme approchée est :

$$(14) \quad P_t \simeq \frac{\alpha(t) - \beta(t) \frac{P_{t-1} - \alpha(t-1)}{P_{t-1} - \beta(t-1)} \exp[-\Gamma(t) + \Gamma(t-1)]}{1 - \frac{P_{t-1} - \alpha(t-1)}{P_{t-1} - \beta(t-1)} \exp[-\Gamma(t) + \Gamma(t-1)]},$$

et une seconde :

$$(15) \quad P_t \simeq \frac{\alpha(t-1) - \beta(t-1) \frac{P_{t-1} - \alpha(t-1)}{P_{t-1} - \beta(t-1)} \exp -\gamma(t)}{1 - \frac{P_{t-1} - \alpha(t-1)}{P_{t-1} - \beta(t-1)} \exp -\gamma(t)}.$$

L'utilisation d'une telle formule de récurrence non linéaire nécessite de spécifier les diverses fonctions $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$. Dans l'application au problème des remboursements anticipés, elles seront prises fonction du différentiel de taux, avec des effets de seuil. Ces différentiels pourront être observés dans les études rétrospectives, et simulés pour les scénarios relatifs au futur.

Il est cependant intéressant de bien comprendre avant d'effectuer une telle modélisation, les implications dynamiques de cette dépendance temporelle des coefficients. De façon intuitive la valeur de long terme α étudiée dans le cas stationnaire est maintenant dépendante du temps. La dynamique obtenue va mêler deux aspects : une convergence vers le niveau de long terme (correspondant à l'idée de diffusion), et une dynamique propre de ce dernier niveau. Il sera intéressant de dégager de l'observation de la seule dynamique de P_t ces deux aspects très différents.

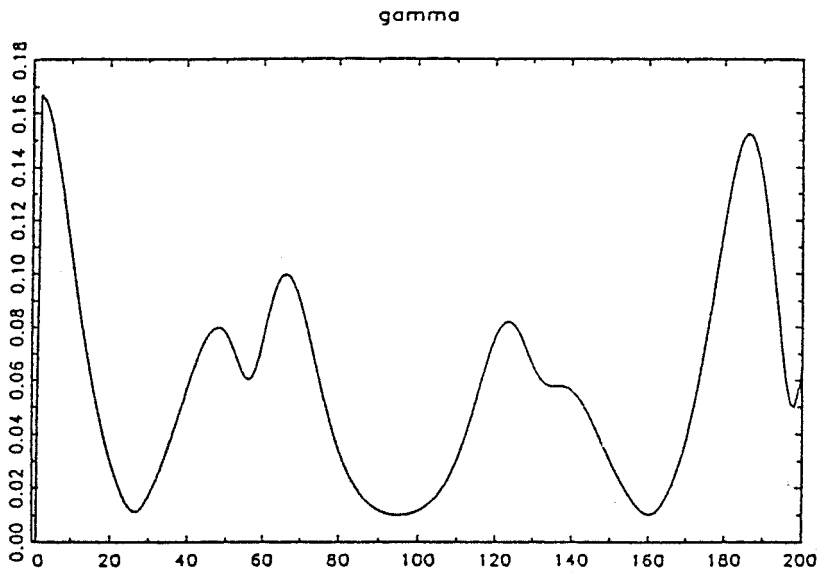
De façon à bien mettre ceci en évidence, nous décrivons ci-dessous le cas de cycles sur la valeur de long terme. Ceci permettra de voir comment l'existence de délais d'ajustement va conduire à observer des phénomènes cycliques assez différents des phénomènes sous-jacents, à la fois par leur amplitude, leur décalage temporel...

• Exemple 2 : Dynamique avec cycles

Afin d'illustrer la dynamique correspondante à l'équation (15), nous considérons ci-dessous deux exemples. Dans le premier nous avons retenu des taux Π_0, Π_1 stables dans le temps : $\Pi_0 = 0.2, \Pi_1 = 0.1$, et des taux de diffusion désagrégés présentant des cycles de périodes différentes : $a_0(t) = 0.1 \exp \cos(t/10), a_1(t) = 0.075 \exp \cos(t/12 + 8)$. Ce choix

FIGURE 4

Évolution du coefficient γ



implique une vitesse de diffusion agrégée γ petite, avec des périodicités résultant des deux introduites précédemment.

De façon similaire le taux de long terme α dépend du temps et les proportions de détenteurs s'ajustent ainsi à la vitesse $\gamma(t)$ sur des taux limites $\alpha(t)$ variant d'une date à l'autre. La figure 5 où le taux P_t est représenté en trait pointillé et le taux limite en trait plein, montre que la série P_t présente des cycles décalés (ceci résultant de l'aspect autorégressif) et est plus lisse que la série des taux limites.

Finalement la figure 6 donne l'évolution de l'autre racine montrant les sauts brusques de valeurs négatives à valeurs supérieures à 1.

• **Exemple 3 : Dynamique avec cycles amortis**

Le second exemple (figure 7) correspond à un cas où le taux limite $\alpha(t)$ présente des cycles amortis et converge asymptotiquement vers une constante. Au début de la période l'effet dominant dans la dynamique est celui de $\alpha(t)$, et on retrouve les cycles lissés de l'exemple précédent. En fin de période, le taux limite se stabilise, l'effet diffusion domine et le taux P_t converge asymptotiquement vers $\alpha(t)$ (contrairement à l'exemple précédent où la non convergence de $\alpha(t)$ interdit celle de P_t).

2.4. Modèles avec variables explicatives temporelles

Les formulations précédentes peuvent être étendues pour prendre en compte l'influence de facteurs évolutifs d'environnement tels des

FIGURE 5

Évolution de $\alpha(t)$ (trait plein) et de P_t (trait pointillé)

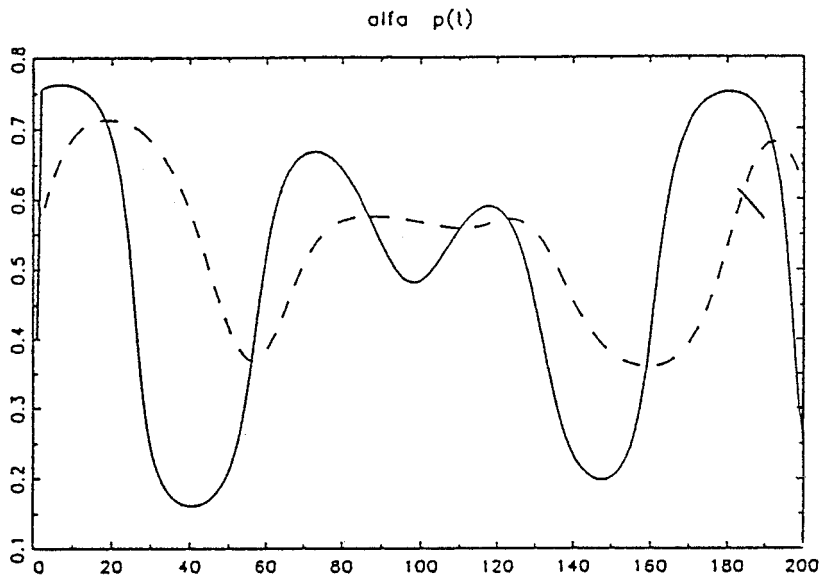


FIGURE 6

Évolution de $\beta(t)$

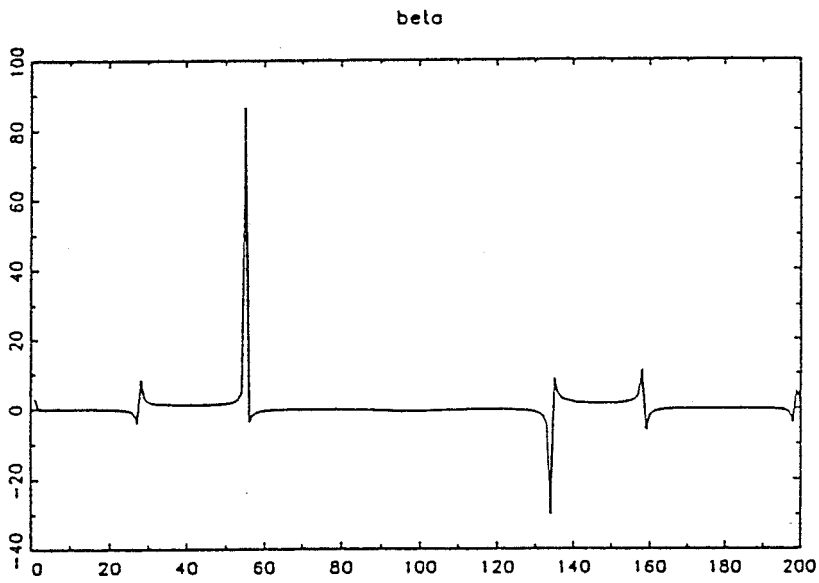
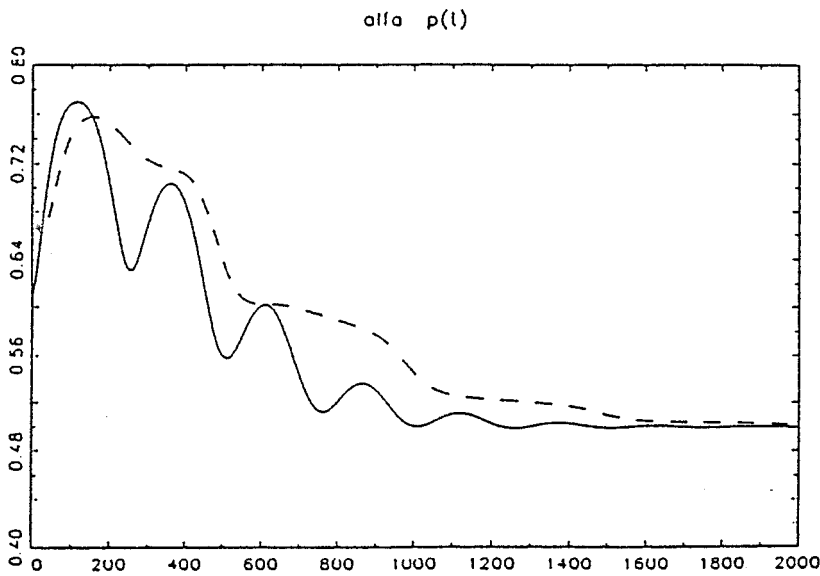


FIGURE 7

Évolution de $\alpha(t)$ (trait plein) et de P_t (trait pointillé)



différentiels de taux. Notons x_t de tels facteurs, et considérons toujours une sous-population homogène au sens où les modifications de comportements de détention résultant de modifications des facteurs d'environnement sont analogues pour les divers individus de la sous-population.

Il est utile à ce niveau d'insister sur la notion d'homogénéité qui est ici retenue. Une classe homogène d'individus (dans l'exemple : des contrats x détenteurs), n'est pas uniquement définie par l'intermédiaire de quelques caractéristiques individuelles comme l'âge, la région d'habitation, ou du contrat : date de début de crédit, durée, montant, taux de celui-ci, mais aussi par des caractéristiques mesurant la sensibilité du détenteur aux variations de taux. On trouvera alors dans les variables servant à la définition des classes des caractéristiques assez particulières comme le fait d'être ou non fonctionnaire (les fonctionnaires étant plus habitués à lire en détail les clauses de bas de page), le fait de posséder ou non un portefeuille d'actifs financiers (révélant un intérêt pour les opportunités d'arbitrage de type financier), le fait d'avoir ou non déjà effectué un remboursement anticipé dans le passé (traduisant le degré d'apprentissage de cette possibilité), le type de banque où l'individu a son compte courant (certaines institutions étant plus combatives que d'autres), et souvent des croisements de ces caractéristiques du détenteur avec certaines caractéristiques du contrat.

Comme d'habitude dans de tels problèmes, où les observations sont ensuite effectuées en temps discret, deux approches de modélisation sont envisageables. La première consiste à écrire entièrement le modèle en temps continu à la fois pour les taux de détention et pour les facteurs. On écrit par exemple :

$$(16) \quad dP_t = \{a_0(t, x_t)P_t[1 - P_t - \Pi_0(t, x_t)] - a_1(t, x_t)[P_t - \Pi_1(t, x_t)](1 - P_t)\}dt,$$

où les fonctions a_0, a_1, Π_0, Π_1 sont spécifiées, et on complète le modèle en se donnant la dynamique du facteur.

Si par exemple celle-ci est du type :

$$(17) \quad x_t = h(t),$$

on voit immédiatement que l'on est ramené au cas étudié en 3. Il suffit pour s'en apercevoir de remplacer x_t par son expression dans l'équation (16).

Cette démarche est cependant peu maniable dès que l'évolution du facteur est modélisée de façon stochastique, et pour les applications économétriques, on préférera une approche directe en temps discret, fondée sur l'équation (14). L'idée est de réécrire cette équation sous forme récursive, en considérant entre t et $t + 1$ le facteur comme fixé à sa valeur de la date t . Plus précisément introduisons une primitive de $\gamma(t, x)$ par rapport à t à x fixé, et notons-la :

$$(18) \quad \Gamma(t, x) = \int^t \gamma(u, x)du.$$

L'équation autorégressive sera donnée par :

$$(19) \quad \begin{cases} \log \left| \frac{P_{t+1} - \alpha(t, x_t)}{P_{t+1} - \beta(t, x_t)} \right| \\ = \log \left| \frac{P_t - \alpha(t, x_t)}{P_t - \beta(t, x_t)} \right| - [\Gamma(t + 1, x_t) - \Gamma(t, x_t)], \\ \text{avec : } \operatorname{sgn} \left| \frac{P_{t+1} - \alpha(t, x_t)}{P_{t+1} - \beta(t, x_t)} \right| = \operatorname{sgn} \left| \frac{P_t - \alpha(t, x_t)}{P_t - \beta(t, x_t)} \right|. \end{cases}$$

Il s'agit d'une introduction du facteur différente de la prise en compte totale de l'évolution correspondant à (17). Elle l'est à deux niveaux : parce que la fonction Γ est calculée sans introduire la dynamique de x (c'est-à-dire n'est pas prise égale à $\int^t \gamma(u, x_u)du$), et parce que les valeurs pivots associées à P_{t+1} sont $\alpha(t, x_t)$, $\beta(t, x_t)$, et non $\alpha(t, x_{t+1})$, $\beta(t, x_{t+1})$. En particulier, si à une date la proportion P_t est comprise entre $\alpha(t, x_t)$ et $\beta(t, x_t)$, elle ne l'est pas nécessairement aux dates suivantes. Dans cette seconde approche les deux types d'ajustements sont consécutifs, il y a d'abord celui des facteurs d'environnement, puis, à facteur donné entre t et $t + 1$, l'effet de diffusion.

L'équation (19) peut être réécrite sous forme explicite :

$$(20) \quad P_{t+1} = \left\{ \alpha(t, x_t) + [2\mathbb{1}_{\frac{P_t - \alpha(t, x_t)}{P_t - \beta(t, x_t)} < 0} - 1]\beta(t, x_t) \right. \\ \left. \times \exp \left\{ -(\Gamma(t + 1, x_t) - \Gamma(t, x_t)) + \left| \frac{P_t - \alpha(t, x_t)}{P_t - \beta(t, x_t)} \right| \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ 1 + [2\mathbb{I}_{\frac{P_t - \alpha(t, x_t)}{P_t - \beta(t, x_t)} < 0} - 1] \right. \\ & \times \exp \left\{ -\Gamma(t+1, x_t) - \Gamma(t, x_t) + \left| \frac{P_t - \alpha(t, x_t)}{P_t - \beta(t, x_t)} \right| \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

où \mathbb{I} désignent les fonctions indicatrices. C'est ce type de formulation qui sera à la base des modélisations dynamiques incluant des facteurs explicatifs purement temporels.

3 Hétérogénéité et vagues de remboursements

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'abord d'introduire des différences de comportements entre diverses sous-populations, et d'examiner l'évolution du taux obtenu en agrégeant les taux sous-population par sous-population. Peu d'articles paraissent avoir été consacrés à ce thème (voir cependant ALLENBY-ROSSI [1991]). Dans un deuxième temps, nous nous intéressons aux multiplicateurs dynamiques associés à une modification du facteur temporel sous-jacent. Par exemple, suite à une baisse des taux d'intérêt, il y aura augmentation des remboursements anticipés au niveau désagrégé et cette augmentation pourra se produire séquentiellement dans les diverses sous-populations, certaines étant plus réceptives que d'autres ou ayant à l'instant du choc un taux de détention plus faible. C'est cette diffusion séquentielle dans les sous-populations, que nous appelons dans la suite phénomène de vague. Nous désignons par $k = 1, \dots, K$ les indices des diverses sous-populations, et par μ_k , $k = 1, \dots, K$ leurs proportions respectives dans la population totale. Pour chaque sous-population, nous supposons que le taux de détention $P_{k,t}$ satisfait une dynamique analogue à celles décrites précédemment avec des paramètres $(\alpha_{0,k}, \alpha_{1,k}, \Pi_0, \Pi_{1,k})$ ou $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$, indexés par la sous-population k et indépendants du temps. C'est le fait que ces paramètres puissent être différents qui traduit le phénomène d'hétérogénéité.

3.1. Modèle agrégé et biais d'agrégation

Une question naturelle est l'étude des liens entre la dynamique du taux de détention sur la population globale, égal à :

$$\bar{P}_t = \sum_{k=1}^K \mu_k P_{k,t},$$

et les dynamiques des taux désagrégés $P_{k,t}$, $k = 1, \dots, K$.

Nous discuterons cette question dans le cas simple, où toutes les évolutions désagrégées seraient logistiques. On aurait alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P_{k,t} = \alpha_k, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} P_{k,t} = \beta_k,$$

$$\frac{dP_{k,t}}{(P_{k,t} - \alpha_k)(P_{k,t} - \beta_k)} = -\frac{\gamma_k}{\alpha_k - \beta_k}.$$

Il est immédiat qu'au niveau agrégé, nous avons également des asymptotes :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{P}_t = \sum_{k=1}^K \mu_k \alpha_k = \bar{\alpha} \quad (\text{par définition}),$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{P}_t = \sum_{k=1}^K \mu_k \beta_k = \bar{\beta} \quad (\text{par définition}).$$

Ceci conduit de façon naturelle à définir un taux de diffusion agrégé par :

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(t) &= \frac{-d\bar{P}_t}{(\bar{P}_t - \bar{\alpha})(\bar{P}_t - \bar{\beta})} (\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \\ &= \frac{-\sum_{k=1}^K \mu_k dP_{k,t} [\sum_{k=1}^K \mu_k (\alpha_k - \beta_k)]}{\sum_{k=1}^K \mu_k (P_{k,t} - \alpha_k) \sum_{k=1}^K \mu_k (P_{k,t} - \beta_k)} \\ &= \frac{[\sum_{k=1}^K \mu_k (P_{k,t} - \alpha_k) (P_{k,t} - \beta_k) \frac{\gamma_k}{\alpha_k - \beta_k}] \sum_{k=1}^K \mu_k (\alpha_k - \beta_k)}{\sum_{k=1}^K \mu_k (P_{k,t} - \alpha_k) \sum_{k=1}^K \mu_k (P_{k,t} - \beta_k)} \\ &= \left\{ \frac{\sum_{k=1}^K \mu_k (P_{k,t} - \alpha_k) (P_{k,t} - \beta_k) \frac{\gamma_k}{\alpha_k - \beta_k}}{\sum_{k=1}^K \mu_k (P_{k,t} - \alpha_k) (P_{k,t} - \beta_k) \frac{1}{\alpha_k - \beta_k}} \right\} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^K \left\{ \mu_k (P_{k,t} - \alpha_k) (P_{k,t} - \beta_k) \frac{1}{\alpha_k - \beta_k} \right\} \sum_{k=1}^K \mu_k (\alpha_k - \beta_k)}{\sum_{k=1}^K \mu_k (P_{k,t} - \alpha_k) \sum_{k=1}^K \mu_k (P_{k,t} - \beta_k)}. \end{aligned}$$

Dans cette expression, le terme entre crochets apparaît comme une moyenne des vitesses de diffusion désagrégées (nous la notons $\gamma^*(t)$), et le second terme s'exprime à l'aide d'espérances relatives à la distribution μ_k , $k = 1, \dots, K$ par :

$$B(t) = \frac{E\left[\frac{(P_t - \alpha)(P_t - \beta)}{\alpha - \beta}\right] E(\alpha - \beta)}{E(P_t - \alpha) E(P_t - \beta)}.$$

Nous avons donc :

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma^*(t) B(t).$$

Il y a clairement un biais d'agrégation au niveau de la vitesse de diffusion. Celui-ci appelle deux remarques :

i) la vitesse de diffusion agrégée $\bar{\gamma}(t)$ dépend effectivement du temps, même si tous les coefficients désagrégés n'en dépendent pas ;

ii) dans le cas limite où α_k et β_k sont indépendants de la sous-population considérée, le terme correctif est :

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{E[(P_t - \alpha)(P_t - \beta)]}{E(P_t - \alpha)E(P_t - \beta)} \\ &= 1 + \frac{\text{Cov}(P_t - \alpha, P_t - \beta)}{E(P_t - \alpha)E(P_t - \beta)} = 1 + \frac{VP_t}{E(P_t - \alpha)E(P_t - \beta)}. \end{aligned}$$

Comme P_t est compris entre α et β dans le cas de dynamiques désagrégées logistiques, nous en déduisons que le terme correctif B est inférieur à 1. Ainsi si tous les taux désagrégés sont égaux à une même valeur γ^* , le taux de diffusion agrégé est dépendant du temps et inférieur à cette valeur commune. L'oubli de l'hétérogénéité (la seule cause d'hétérogénéité subsistant est ici celle des valeurs initiales des taux de détention) conduit à sous-estimer l'importance réelle de la diffusion.

3.2. Plus grande réceptivité

L'introduction d'une différenciation des comportements conduit naturellement à comparer ceux-ci. Pour simplifier la discussion, nous nous plaçons dans le cas, où Π_1 est nul.

Il faut commencer par distinguer deux catégories de sous-populations : celles qui partant d'une détention faible souhaitent l'augmenter, et celles qui souhaitent la diminuer. D'après l'exemple étudié dans le paragraphe 2.2, la première catégorie, que nous appelons "les réceptifs" correspond au cas :

$$(21) \quad a_0(1 - \Pi_0) > a_1 \Leftrightarrow c = \frac{a_0}{a_1} > 1 - \Pi_0.$$

Pour cette catégorie l'évolution du taux de détention partant d'un niveau de détention faible ($P_0 < \alpha$) est telle que :

$$P_t = \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha - P_0}{P_0} \exp -\gamma t}.$$

Considérons alors deux sous-catégories j et k de "réceptifs", c'est-à-dire telles que $c_j > 1 - \Pi_{0,j}$, $c_k > 1 - \Pi_{0,k}$. Nous dirons que la sous-catégorie j est plus réceptive que la sous-catégorie k , si partant d'un même taux de détention faible P_0 , l'augmentation est plus rapide avec j qu'avec k .

Cette condition de plus grande réceptivité s'écrit :

pour toute valeur P_0 assez petite et tout t :

$$P_{j,t} = \frac{\alpha_j}{1 + \left(\frac{\alpha_j}{P_0} - 1\right) \exp -\gamma_j t} \geq P_{k,t} = \frac{\alpha_k}{1 + \left(\frac{\alpha_k}{P_0} - 1\right) \exp -\gamma_k t},$$

ou de façon équivalente, en notant que le taux de détention à une date donnée est alors fonction croissante de α et γ :

$$(22) \quad j \text{ est plus réceptif que } k \Leftrightarrow \alpha_j \geq \alpha_k, \gamma_j \geq \gamma_k.$$

Il faut donc que le taux de détention de long terme et la vitesse de diffusion soient simultanément plus grands.

Comme sous la condition (3.1) : $\alpha = 1 - \frac{\alpha \Pi_0}{c-1}$, $\gamma = c(1 - \Pi_0) - 1$, que ces deux fonctions sont décroissantes du taux Π_0 et croissantes du paramètre c , nous en déduisons que :

$$(23) \quad j \text{ est plus réceptif que } k, \text{ si } \Pi_{0,j} < \Pi_{0,k} \text{ et } c_j > c_k.$$

3.3. Effet multiplicateur

Avant d'étudier l'effet sur une population hétérogène d'une modification d'un facteur temporel influant sur les diverses caractéristiques dynamiques, il faut d'abord considérer le cas d'une population homogène. Nous supposons comme précédemment Π_1 nul, quel que soit le niveau x de ce facteur auxiliaire. Entre t et $t+1$, si le niveau du facteur est x , l'évolution satisfait :

$$P_{t+1}(x) = \frac{\alpha(x)}{1 + \left[\frac{\alpha(x)}{P_t(x)} - 1 \right] \exp -\gamma(x)},$$

ou : $\frac{\alpha(x)}{P_{t+1}(x)} - 1 = \left[\frac{\alpha(x)}{P_t(x)} - 1 \right] \exp -\gamma(x).$

Si le niveau du facteur passe entre t et $t+1$ de x à $x + dx$; la valeur $P_t(x)$ n'est pas modifiée et les autres fonctions le sont de sorte que :

$$(24) \quad \begin{aligned} & \frac{d\alpha(x)}{P_{t+1}(x)} - \frac{\alpha(x)}{P_{t+1}^2(x)} dP_{t+1}(x) \\ &= \frac{d\alpha(x)}{P_t(x)} \exp -\gamma(x) - d\gamma(x) \left[\frac{\alpha(x)}{P_{t+1}(x)} - 1 \right], \\ & d\alpha(x) - \frac{\alpha(x)}{P_{t+1}(x)} dP_{t+1}(x) \\ &= d\alpha(x) \frac{\alpha(x) - P_{t+1}(x)}{\alpha(x) - P_t(x)} - d\gamma(x) [\alpha(x) - P_{t+1}(x)], \\ & \frac{dP_{t+1}(x)}{P_{t+1}(x)} \\ &= \frac{d\alpha(x)}{\alpha(x)} \frac{P_{t+1}(x) - P_t(x)}{\alpha(x) - P_t(x)} + d\gamma(x) \frac{\alpha(x) - P_{t+1}(x)}{\alpha(x)}. \end{aligned}$$

La modification du taux due à celle du facteur résulte de deux effets, le premier du à la modification du taux de détention de long terme, la seconde à celle de la vitesse de diffusion agrégée.

Lorsque le facteur s'interprète comme un taux d'intérêt de la date courante, il est naturel de retenir des formes fonctionnelles des caractéristiques assurant une plus grande réceptivité, lorsque x baisse. α et γ sont alors des fonctions

décroissantes de x . A titre d'exemple, supposons Π_0 indépendant de x et c fonction décroissante de x . Nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[1 - \Pi_0 - \frac{\Pi_0}{c(x) - 1} \right] = \Pi_0 \frac{dc(x)}{dx} \frac{1}{[c(x) - 1]^2} \\ &= -\Pi_0 \frac{dc(x)}{dx} \frac{\alpha^2(x)}{\gamma^2(x)},\end{aligned}$$

$$\frac{d\gamma(x)}{dx} = \frac{d}{dx} (c(x)(1 - \Pi_0) - 1) = (1 - \Pi_0) \frac{dc(x)}{dx},$$

$$\begin{aligned}\frac{dP_{t+1}(x)}{P_{t+1}(x)} &= dc(x) \frac{1}{\alpha(x)} \left\{ \Pi_0 \frac{\alpha^2(x)}{\gamma^2(x)} \frac{P_{t+1}(x) - P_t(x)}{\alpha(x) - P_t(x)} \right. \\ &\quad \left. + (1 - \Pi_0)[\alpha(x) - P_{t+1}(x)] \right\}.\end{aligned}$$

Remplaçant P_{t+1} par son expression en fonction de P_t , on vérifie facilement que le deuxième effet (celui de diffusion) l'emporte en début de phase de diffusion (lorsque P_t est assez petit) et que le premier (celui dû au taux de détention) l'emporte en fin de diffusion (lorsque P_t est assez grand).

3.4. Effet de vague

Plaçons-nous maintenant dans le cadre d'une population hétérogène, où pour chaque sous-population les caractéristiques d'évolution dépendent d'un même facteur temporel x . Supposons que cette variable x soit fixée à une certaine valeur x_0 avant une date t_0 , et qu'après cette date elle passe progressivement à une valeur :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = x_0 + \Delta x_0.$$

Quel est l'effet à moyen terme de cette modification sur le taux de détention dans la sous-population k ?

Notons $P_{k,t}(x_0)$ la suite solution de :

$$P_{k,t+1}(x_0) = \frac{\alpha_k(x_0)}{1 + \left(\frac{\alpha_k(x_0)}{P_{k,t}(x_0)} - 1 \right) \exp -\gamma_k(x_0)},$$

avec la condition initiale :

$$P_{k,t_0}(x_0) = P_{k,t_0}.$$

La suite $(P_{k,t}(x_0), t \text{ variant})$ donne l'évolution du taux de détention en absence de choc sur le facteur exogène. Introduisons aussi la suite $P_{k,t}$ satisfaisant :

$$P_{k,t+1} = \frac{\alpha_k(x_t)}{1 + \left(\frac{\alpha_k(x_t)}{P_{k,t}} - 1 \right) \exp -\gamma_k(x_t)},$$

avec même condition initiale P_{k,t_0} , où α_k, γ_k sont les fonctions spécifiques de la k^e sous-population.

Nous sommes amenés à comparer :

$$\bar{P}_t = \sum_{k=1}^K \mu_k P_{k,t},$$

et :

$$\bar{P}_t(x_0) = \sum_{k=1}^K \mu_k P_{k,t}(x_0),$$

pour évaluer l'effet au niveau agrégé de cette modification du facteur.

L'écart entre ces deux taux de détention agrégés va résulter de quatre effets assez différents :

- i) l'effet de la modification du taux de détention de long terme ;
- ii) l'effet de la modification du taux de diffusion ;
- iii) celui dû au fait que l'accroissement du facteur n'est plus infinitésimal et peut donc conduire certaines catégories à passer brusquement d'une situation où $P_{k,t} > \alpha_k(x_t)$ à une situation où $P_{k,t} < \alpha_k(x_t)$ (ou l'inverse) ;
- iv) celui partiellement discuté en (21) et résultant de l'agrégation.

Il ne paraît pas possible de séparer analytiquement ces effets et nous donnons juste ci-après des exemples d'évolutions obtenus par simulation.

• **Exemple 4 : Une étude par simulation**

Nous avons introduit cinq sous-populations, avec des rapports des coefficients de diffusion du type :

$$c_k(t) = \frac{a_{0,k}(t)}{a_{1,k}(t)} = c_k - 0.1[1 + \exp 0.2(t - 40)]^{-1},$$

où les constantes c_k et les proportions $\Pi_{0,k}$ de structurellement stables sont données par :

k	1	2	3	4	5
c_k	1.36	1.38	1.4	2.1	1.5
$\Pi_{0,k}$	0.2	0.2	0.2	0.48	0.2

Les valeurs initiales des taux de détention dans chaque sous-population ont été fixées à la valeur de long terme associée à la valeur initiale $c_k(0)$ et au taux $\Pi_{0,k}$, ceci sous-population par sous-population. Les deux graphiques ci-après donnent les évolutions des taux de détention désagrégés et de leurs dérivées. On y note de façon claire l'effet de vague. Alors que la modification maximale du facteur est obtenue pour la date $t = 40$, l'effet maximal sur les taux y apparaît décalé avec respectivement les valeurs : 77, 63, 59, 55, 45.

Examiné au niveau agrégé, cette influence du facteur peut être artificiellement gommée, cette possibilité dépendant évidemment des poids affectés à chacune des sous-populations. Avec les poids suivants : 10/53, 1/53, 1/53, 1/53, 40/53, l'évolution du taux agrégé paraît correspondre à une courbe logistique usuelle, avec un point d'inflexion en $t = 45$ (figure 10).

FIGURE 8

Évolutions des taux de détention

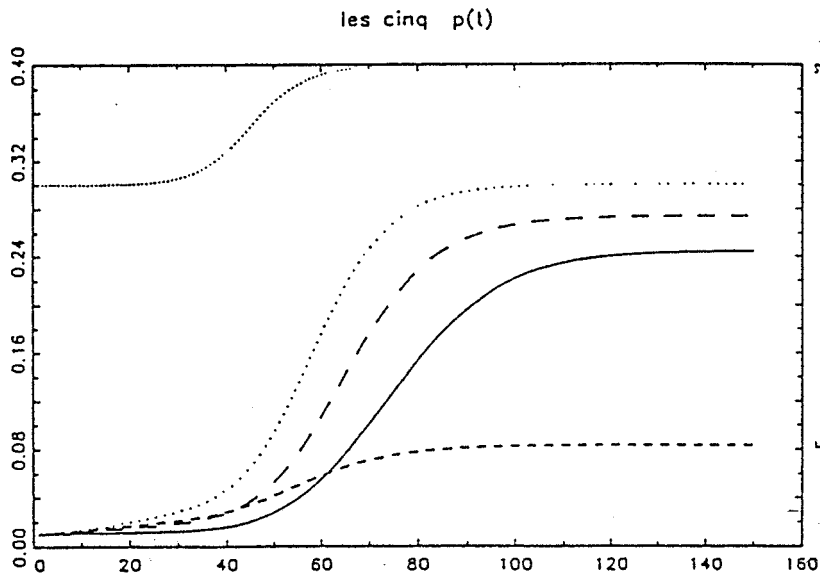


FIGURE 9

Évolutions des dérivées des taux de détention

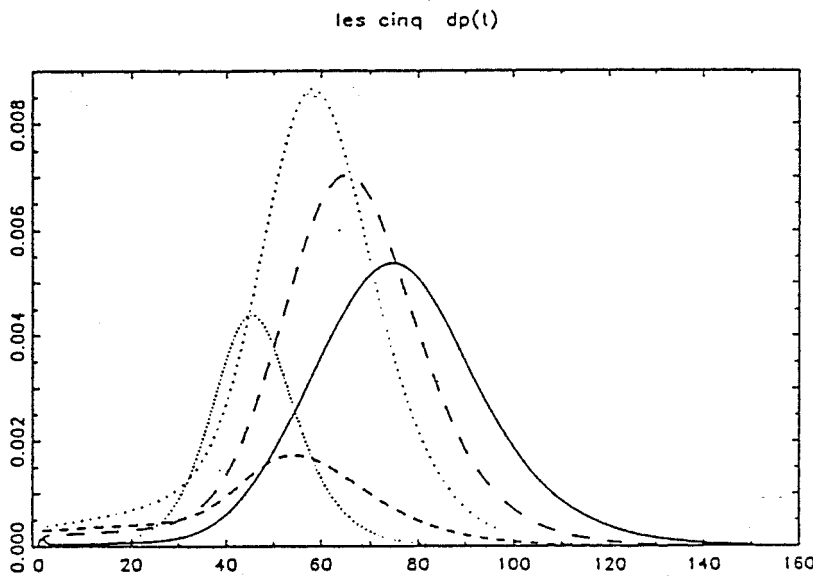


FIGURE 10

Évolution du taux agrégé \bar{P}_t

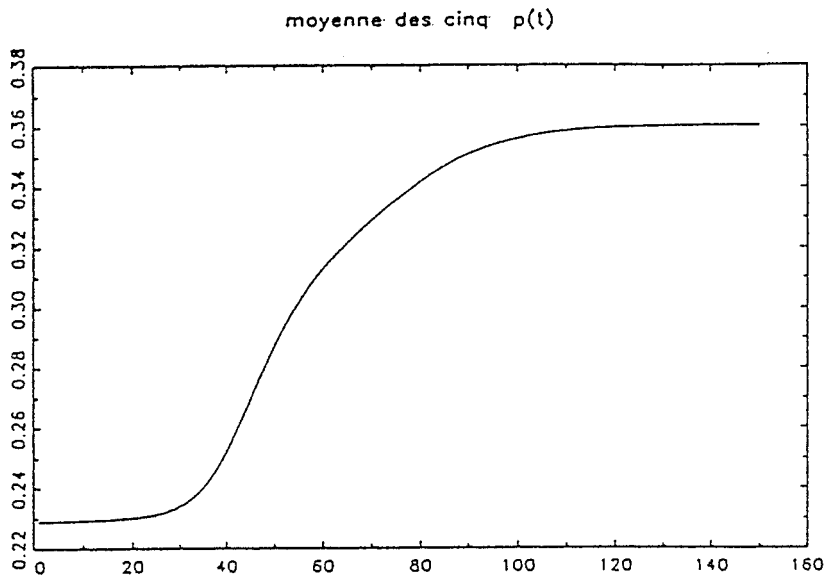
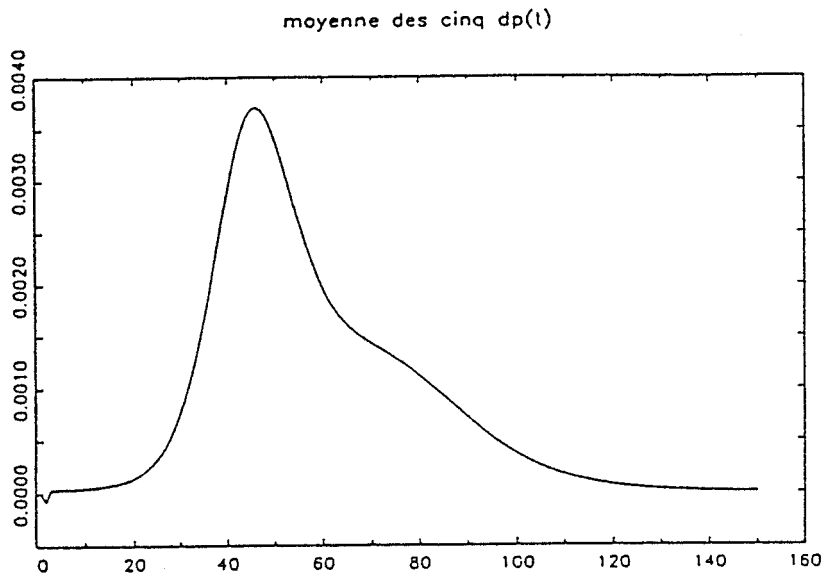


FIGURE 11

Évolution de la dérivée du taux agrégé



Ce n'est qu'en examinant la dérivée correspondante qu'on détecte un possible effet de vague, la courbe (figure 11) présentant un changement d'inflexion autour de $t = 70$, en plus du retournement correspondant à $t = 45$.

Ces graphiques montrent clairement l'intérêt d'études désagrégées permettant de classer les sous-populations en plus ou moins réceptives, et de déduire de la réaction observée de la plus réceptive, les dates et importances des réactions des autres sous-populations. Le paragraphe suivant est donc naturellement consacré à l'estimation de tels modèles de diffusion au niveau désagrégé.

4 Estimation

4.1. Paramétrisation

A partir d'observations sur l'évolution des taux de détention dans diverses sous-populations homogènes $P_{k,t}$, $k = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$ et sur diverses variables explicatives, soit individuelles z_k , $k = 1, \dots, K$, soit temporelles x_t , $t = 1, \dots, T$, on peut essayer d'estimer les paramètres caractérisant les dynamiques de diffusion. Au préalable il faut préciser la façon dont les caractéristiques $a_{0,k}$, $a_{1,k}$, $\Pi_{0,k}$, $\Pi_{1,k}$, dépendent des diverses variables temporelles ou spécifiques des sous-populations, et introduire des termes aléatoires résumant en particulier les variables oubliées. De façon à simplifier la présentation, nous supposons que :

(25) les proportions d'individus foncièrement stables $\Pi_{0,k}$, $\Pi_{1,k}$,
sont indépendantes du temps, avec de plus : $\Pi_{1,k} = 0$, $k = 1, \dots, K$.

La forme paramétrique des coefficients de diffusion est, elle, spécifiée de façon classique sous forme exponentielle pour assurer la positivité. De façon plus précise, nous posons :

$$(26) \quad \begin{cases} a_{0,k}(t) = \exp[c'_0 z_k + d'_{0,k} x_t + \varepsilon_{0,k,t}], \\ a_{1,k}(t) = \exp[c'_1 z_k + d'_{1,k} x_t + \varepsilon_{1,k,t}], \end{cases}$$

où c_0 , c_1 , $d_{0,k}$, $d_{1,k}$, $k = 1, \dots, K$ sont des paramètres inconnus. Les coefficients $d_{0,k}$, $d_{1,k}$ donnent les sensibilités des coefficients de diffusion aux facteurs temporels ; c_0 , c_1 sont relatifs à la part de l'effet d'hétérogénéité pris en compte par les variables z . Finalement $(\varepsilon_{k,t}) = (\varepsilon_{0,k,t}, \varepsilon_{1,k,t})'$ est un processus d'erreur, résumant en particulier l'hétérogénéité résiduelle.

Nous supposons dans la suite que :

les processus $(\varepsilon_{k,t})_{k=1, \dots, K}$ sont des processus gaussiens indépendants, centrés, de même matrice de variance-covariance :

$$(27) \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_{01} \\ \sigma_{01} & \sigma_1^2 \end{pmatrix}.$$

La spécification paramétrique et stochastique est ainsi introduite au niveau des caractéristiques les plus désagrégées $a_{0,k}, a_{1,k}, \Pi_{0,k}, \Pi_{1,k}$. Les évolutions des taux de détention font cependant intervenir directement d'autres caractéristiques $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, dont nous allons maintenant donner les expressions.

Sous la condition $\Pi_{1,k} = 0$, nous avons vu dans l'exemple 1 que les expressions de ces autres caractéristiques dépendent de la condition :

$$(28) \quad a_{1,k} > a_{0,k}(1 - \Pi_{0,k}).$$

Nous notons $\xi_{k,t}$ la variable indicatrice de cette condition. Nous pouvons alors distinguer deux cas :

- Cas : $\xi_{k,t} = 1$:

$$\begin{aligned} \alpha_k(t) &= 0, \\ \beta_k(t) &= 1 - \frac{a_{0,k}(t)\Pi_{0,k}}{a_{0,k}(t) - a_{1,k}(t)}, \\ \gamma_k(t) &= a_{1,k}(t) - a_{0,k}(t)(1 - \Pi_{0,k}). \end{aligned}$$

De façon symétrique :

- Cas : $\xi_{k,t} = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha_k(t) &= 1 - \frac{a_{0,k}(t)\Pi_{0,k}}{a_{0,k}(t) - a_{1,k}(t)}, \\ \beta_k(t) &= 0, \\ \gamma_k(t) &= -a_{1,k}(t) + a_{0,k}(t)(1 - \Pi_{0,k}). \end{aligned}$$

Dans la suite, nous désignons par :

$$\lambda_k(t) = 1 - \frac{a_{0,k}(t)\Pi_{0,k}}{a_{0,k}(t) - a_{1,k}(t)},$$

la racine du polynôme différente de zéro, et notons :

$$\nu_k(t) = a_{1,k}(t) - a_{0,k}(t)(1 - \Pi_{0,k}).$$

Avec ces notations, nous avons :

- Cas : $\xi_{k,t} = 1 \Leftrightarrow \nu_k(t) > 0$:

$$\alpha_k(t) = 0, \quad \beta_k(t) = \lambda_k, \quad \gamma_k(t) = \nu_k(t);$$

- Cas : $\xi_{k,t} = 0 \Leftrightarrow \nu_k(t) < 0$:

$$\alpha_k(t) = \lambda_k(t), \quad \beta_k(t) = 0, \quad \gamma_k(t) = -\nu_k(t).$$

4.2. Évolution des taux de détention

Explicitons alors l'équation réursive (15), en tenant compte des deux régimes possibles pour les coefficients $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ associés aux diverses dates. Nous avons :

$$\begin{aligned}
(29) \quad \frac{P_{k,t}}{\lambda_k(t)} &= \xi_{k,t} \frac{P_{k,t-1}}{\lambda_k(t) - P_{k,t-1}} \exp -\gamma_k(t) \\
&\times \left\{ 1 + \frac{P_{k,t-1}}{\lambda_k(t) - P_{k,t-1}} \exp -\gamma_k(t) \right\}^{-1} \\
&+ (1 - \xi_{k,t}) \left\{ 1 + \frac{\lambda_k(t) - P_{k,t-1}}{P_{k,t-1}} \exp -\gamma_k(t) \right\}^{-1} \\
&= \xi_{k,t} \left\{ 1 + \frac{\lambda_k(t) - P_{k,t-1}}{P_{k,t-1}} \exp -\gamma_k(t) \right\}^{-1} \\
&+ (1 - \xi_{k,t}) \left\{ 1 + \frac{\lambda_k(t) - P_{k,t-1}}{P_{k,t-1}} \exp -\gamma_k(t) \right\}^{-1}, \\
P_{k,t} &= \lambda_k(t) \left\{ 1 + \frac{\lambda_k(t) - P_{k,t-1}}{P_{k,t-1}} \exp \nu_k(t) \right\}^{-1}.
\end{aligned}$$

On remarque alors que la relation qui associe la proportion $P_{k,t}$ aux termes d'erreur $\varepsilon_{0,k,t}$, $\varepsilon_{1,k,t}$ a une forme analytique indépendante du régime considéré. Elle est du type :

$$\begin{aligned}
(30) \quad P_{k,t} &= g(\varepsilon_{0,k,t}; \varepsilon_{1,k,t}; x_t, z_k; P_{k,t-1}; \theta) \\
&= g_t(\varepsilon_{0,k,t}; \varepsilon_{1,k,t}; \theta),
\end{aligned}$$

avec des expressions claires des fonctions g , g_t et en désignant par θ l'ensemble des paramètres : c_0 , c_1 , d_0 , d_1 , σ , $\Pi_{0,k}$.

4.3. Estimation

Si on dispose d'observations des proportions pour diverses sous-populations $k = 1, \dots, K$ et diverses dates $t = 1, \dots, T$, on peut chercher à estimer le vecteur des paramètres par maximum de vraisemblance. Il faut pour cela commencer par déterminer la loi de la variable $P_{k,t}$ sachant qu'elle dépend des deux variables sous-jacentes $\varepsilon_{0,k,t}$, $\varepsilon_{1,k,t}$.

En fait la fonction g_t n'est pas monotone dans ses arguments $\varepsilon_{0,k,t}$, $\varepsilon_{1,k,t}$, et, même si elle l'était, la détermination de la densité (conditionnelle) de $P_{k,t}$ ne pourrait être menée que numériquement. Cette difficulté conduit à estimer les paramètres par des méthodes de type moments simulés (Mc FADDEN [1989], GOURIÉROUX-MONFORT [1993], [1995], DUFFIE-SINGLETON [1993]). Pour cela il faut commencer par reparamétriser la matrice de variance-covariance en se ramenant à des vecteurs gaussiens centrés, réduits :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{0,k,t} \\ \varepsilon_{1,k,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{0,k,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{1,k,t} \end{pmatrix},$$

où : $\begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{0,k,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{1,k,t} \end{pmatrix}$ sont $IIN(0, Id)$,

puis passer à la forme fonctionnelle :

$$(31) \quad P_{k,t} = \tilde{g}(\tilde{\varepsilon}_{0,k,t}, \tilde{\varepsilon}_{1,k,t}; x_t, z_k; P_{k,t-1}; \theta),$$

déduite de (30) par remplacement de ε en fonction de $\tilde{\varepsilon}$. On peut alors simuler des valeurs des erreurs centrées réduites. Nous notons $\tilde{\varepsilon}_{0,k,t}^s, \tilde{\varepsilon}_{1,k,t}^s, t = 1, \dots, T$ de telles valeurs simulées. Nous introduisons alors pour une valeur θ du paramètre les valeurs simulées des observations obtenues en appliquant récursivement la formule :

$$(32) \quad P_{k,t}^s(\theta) = \tilde{g}(\tilde{\varepsilon}_{0,k,t}^s, \tilde{\varepsilon}_{1,k,t}^s; x_t, z_k, P_{k,t-1}^s(\theta); \theta) \quad t = 1, \dots, T,$$

avec comme valeur initiale $P_{k,0}^s = P_{k,0}$, et ceci pour chaque sous-population. Les méthodes de moments simulées consistent à calibrer θ de façon à rapprocher observations $P_{k,t}, k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T$, et simulations $P_{k,t}^s(\theta), k = 1, \dots, K, t = 1, \dots, T$. Nous renvoyons le lecteur à la littérature pour le choix des critères de calibrage et les propriétés asymptotiques des estimateurs ainsi obtenus [GOURIÉROUX-MONFORT (1995)].

5 Conclusion

Les paragraphes précédents avaient deux objectifs étroitement liés :

i) montrer qu'une dynamique observée sur des variables économiques peut résulter de deux effets : des changements continus des objectifs de long terme des agents, et des transitions vers ces buts évolutifs, puis expliquer comment des modélisations adaptées peuvent permettre de séparer ces deux effets ;

ii) montrer que des dynamiques paraissant de type logistique au niveau agrégé peuvent en fait cacher une hétérogénéité sous-jacente importante.

Ce dernier aspect paraît particulièrement important en pratique pour la détection avancée de phénomènes de vagues consécutifs à des chocs exogènes. Un suivi des variables à un niveau agrégé conduit naturellement à repérer trop tard le début de la phase de transition : en effet les individus changeant d'objectifs (les plus réceptifs) sont alors en petit nombre, et ont de ce fait un poids négligeable au niveau agrégé. Une détection rapide ne peut avoir lieu qu'après avoir préalablement mis en évidence des sous-populations avec des degrés de réceptivité plus ou moins importants, puis en faisant un suivi prioritaire sur les catégories les plus réceptives. Dès que la transition est détectée sur celles-ci, on pourra alors prévoir comment elle se propagera sur les autres sous-populations. Parmi les applications importantes de ce type d'approche figure évidemment la détection de la phase de sortie d'une situation de chômage élevé. Une étude temporelle des taux de chômage au niveau global est peu informative, et devrait être remplacée par des analyses dynamiques secteur par secteur, catégorie socio-professionnelle par catégorie socio-professionnelle...

● Références bibliographiques

- ALLENBY, G., ROSSI, P. (1991). – “There is no Aggregation Bias: Why Macro Logit Models Work”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 9, pp. 1-14.
- BASS, F. (1980). – “The Relationship Between Diffusion Rates, Experience Curves, and Demand Elasticities for Consumer Durables Technical Innovation”, *Journal of Business*, 53, pp. 51-67.
- BÖKER, F. (1987). – “A Stochastic First Purchase Diffusion Model: A Counting Process Approach”, *Journal of Marketing Research*, 24, pp. 64-73.
- CASTILLO-CHAVEZ, C. (1989). – “Mathematical and Statistical Approaches to AIDS Epidemiology”, Springer-Verlag.
- DAVIES S. (1979). – “The Diffusion of Process Innovations”, Cambridge Univ. Press.
- DUFFIE, D., SINGLETON, K. (1993). – “Simulated Moments Estimation of Markov Models of Assets Prices”, *Econometrica*, 61, pp. 929-952.
- ELIASSON, G. (1986). – “Micro Heterogeneity of Firms and Stability of Industrial Growth”, dans *The Dynamics of Markets Economies* (eds, R. Day et G. Eliasson), Amsterdam, North-Holland.
- FELLER, W. (1940). – “On the Logistic Law of Growth and Its Empirical Verification in Biology”, *Acta Biotheoretica*, 5, pp. 51-65.
- FRACHOT, A., GOURIEROUX, C. (1995). – “Titrisation et Remboursements Anticipés”, *Economica*.
- GEOFFARD, P.Y., PHILIPSON, T. (1993). – “The Empirical Content of Structural Models of Infections Diseases: The Proportional Hasard Specification”, Delta DP.
- GOURIEROUX, C., MONFORT, A. (1993). – “Simulation Based Inference: A Survey with Special Reference to Panel Data Models”, *Journal of Econometrics*, 59, pp. 5-53.
- GOURIEROUX, C., MONFORT, A. (1995). – “Simulation Based Econometric Methods”, *CORE Lecture Series*, à paraître Oxford Univ. Press.
- GORT, M., KLEPPER, S. (1982). – “Time Paths in the Diffusion of Product Innovations”, *Economic Journal*, 92, pp. 630-653.
- GRILICHES, Z. (1957). – “Hybrid Corn: An Exploration in the Economics of Technological Change”, *Econometrica*, 25, pp. 501-522.
- HILGER, C. (1988). – “Le Marché Hypothécaire en 1987”, *Revue Banque*, 486, pp. 900-905.
- JAIN, D., RAO, R. (1990). – “Effect of Price on the Demand for Durables: Modeling, Estimation and Findings”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, pp. 163-170.
- JENLAND, A. (1981). – “Parsimonious Models of Diffusion of Innovation: Incorporating the Variable of Price”, *DP Univ. of Chicago*, Graduate School of Business.
- KAMAKURA, W., BALASABRAMANIAN, S. (1988). – “Long Term View of the Diffusion of Durables: A Study of the Role of Price and Adoption Influence Processes Via Tests of Nested Models”, *International Journal of Research in Marketing*, 5, pp. 1-13.
- Mc FADDEN, D. (1989). – “A Method of Simulated Moments for Estimation of Discrete Response Models Without Numerical Integration”, *Econometrica*, 57, pp. 995-1026.
- MAJAHAN, V., MASON, C., SRINIVASAN, V. (1986). – “An Evaluation of Estimation Procedures for New Product Diffusion Models”, dans *Innovation Diffusion Models of New Product Acceptance*, Eds, Mahajan, V. et Wind, Y., Cambridge, Ballinger, pp. 203-232.
- MANSFIELD, E. (1961). – “Technical Change and the Rate of Imitation”, *Econometrica*, 29, pp. 741-766.
- MANSFIELD, E. (1968). – “Industrial Research and Technological Innovation”, *Norton*, New York.

- RAO, R. (1986). – “Estimating Continuous Time Advertising Sales Models”, *Marketing Science*, 5, pp. 125-142.
- SATTENSPEIL, L. (1990). – “Modeling the Spread and Persistence of Infection Disease in Human Populations”, *Yearbook of Physical Antropology*, 33, pp. 245-276.
- SCHMITTLEIM, D., MAHAJAN, V. (1982). – “Maximum Likelihood Estimation for an Innovation Diffusion Model of New Product Acceptance”, *Marketing Science*, 1, pp. 57-78.
- SCOTT, A. (1970). – “Active and Nonlinear Wave Propagation in Electronics”, Wiley-Interscience.
- SILVERBERG, G., DOSI, G., ORSENIGO, L. (1988). – “Innovation, Diversity and Diffusion: A Self Organisation Model”, *The Economic Journal*, 98, pp. 1032-1054.
- SRINIVASAN, V., MASON, C. (1986). – “Nonlinear Least Squares Estimation of New Product Diffusion Models”, *Marketing Science*, 5, pp. 169-178.
- WITHAM, G.B. (1974). – “Linear and Nonlinear Waves”, Wiley.