ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 43 — 1996

Tests d'ajustement à une densité fondés sur un estimateur non paramétrique à noyau pour des observations dépendantes

Carlos TENREIRO*

RÉSUMÉ. – Dans cet article nous proposons des tests d'ajustement à une densité donnée, fondés sur une mesure quadratique d'écart d'un estimateur non paramétrique à noyau. Les résultats établis ici, en utilisant des techniques de U-statistiques dégénérées, sont des généralisations, au cas multivarié et dans un cadre d'indépendance asymptotique, des résultats obtenus par BICKEL et ROSENBLATT [1973]. Une expérience sur données simulées est aussi proposée.

Goodness-of-fit Tests of a Specified Density Function Based on Kernel Density Estimates for Dependent Observations

ABSTRACT. – The aim of this paper is to present goodness-of-fit tests of a specified density function, based on a quadratic measure of deviation of a nonparametric kernel estimator. The results presented here, considering degenerate U-statistics technics, are generalisations, to the multidimensional case in a context of asymptotic independence, of the corresponding ones obtained by BICKEL and ROSENBLATT [1973]. A simulation is also proposed.

* C. TENREIRO : Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Apartado 3008, 3000 Coimbra, Portugal.

Nous tenons à remercier sincèrement Monsieur Christian Gouriéroux pour ses remarques et suggestions, ainsi que les rapporteurs pour leurs commentaires. Ce travail a bénéficié de l'appui de la JNICT et du Gouvernement Français.

1 Introduction

Lorsqu'on teste l'ajustement d'une suite d'observations $X_1, \ldots, X_n$, à une loi fixée au départ, on admet normalement que les variables observées sont indépendantes et identiquement distribuées. Si cette dernière hypothèse est une hypothèse naturelle, celle d'indépendance, étant de même assez restrictive pour certaines applications (cf. GASSER [1975]), ne l'est pas. Le problème de l'affaiblissement de l'hypothèse d'indépendance dans le contexte des tests d'ajustement, a été considéré par divers auteurs. A titre d'exemple on cite les travaux de MOORE [1982] et GLESER et MOORE [1983], où les tests d'ajustement classiques sont étudiés lorsque les observations comportent des effets de dépendance.

En suivant cette ligne, nous nous proposons, dans ce papier, de généraliser, au cas multivarié et dans un cadre d'indépendance asymptotique, les résultats obtenus par BICKEL et ROSENBLATT [1973] (voir aussi TENREIRO [1994] et FAN [1994]). Ces auteurs considèrent le problème de test de l'hypothèse $H_0 : f = f_0$, au niveau asymptotique α, où f_0 est une densité supposée connue et f désigne la densité commune aux variables observées, en introduisant des procédures de test basées sur l'estimateur par noyau f_n de la densité f (cf. ROSENBLATT [1956] et PARZEN [1962]), défini par

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n^d} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right),$$

avec (h_n) une suite de nombres réels strictement positifs, convergeant vers zéro lorsque n tend vers l'infini, K un noyau dans $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire, une application intégrable de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} K(u)du = 1$ et x un point de $\mathbb{R}^d$.

Dans un premier temps il est naturel de construire des statistiques de test à partir de l'écart entre l'estimateur par noyau f_n et sa moyenne sous l'hypothèse nulle, l'estimateur étant asymptotiquement sans biais, ou par l'écart entre f_n et la vraie densité f_0 sous l'hypothèse nulle. Selon cet idée BICKEL et ROSENBLATT [1973] ont introduit des statistiques de test fondées sur les mésures de tels écarts définies par $\sup_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - E_0 f_n(x)|/\sqrt{f_0(x)}$, $\sup_{0\leq x\leq 1} |f_n(x) - f_0(x)|/\sqrt{f_0(x)}$, $\int\{f_n(x) - E_0 f_n(x)\}^2 \pi(x)dx$ et $\int\{f_n(x) - f_0(x)\}^2 \pi(x)dx$, où π est une fonction de poids.

En admettant que $(X_i, i \in \mathbb{Z})$ est un processus stochastique de dimension d, fortement stationnaire, dont la loi marginale est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, nous nous restreignons, dans ce papier, à l'étude de procédures de test fondées sur l'écart

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^d} \{f_n(x) - E_0 f_n(x)\}^2 \pi(x)dx.$$

La construction de tests de niveau asymptotique α et asymptotiquement convergents pour tester H_0 contre H_0^c, où on désigne par H_0^c l'hypothèse alternative $f \neq f_0$, est basée sur la variable aléatoire $nh_n^{d/2}\{I_n - E_0 I_n\}$ dont la loi asymptotique a été obtenue sous H_0 par BICKEL et ROSENBLATT [1973] et HALL [1984] dans le cas indépendant, et par TAKAHATA et YOSHIHARA [1987] (avec $\pi = 1$) dans le cas dépendant. Dans un cadre de dépendance, comme le terme déterministe $E_0 I_n$ ne peut être évalué avec la seule connaissance de f_0, nous introduisons dans la Section 2, des développements asymptotiques de $E_0 I_n$ qui permettront de corriger la statistique naturelle I_n de l'effet de biais asymptotique, et nous conduisent à différentes procédures de test. On considère en particulier ceux fondées sur les statistiques

$$(1) \qquad T_n^1 = nh_n^{d/2}\Big\{I_n - \frac{1}{nh_n^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K^2(u) f_0(x)\pi(x+uh_n)dxdu\Big\}$$

et

$$(2) \qquad T_n^2 = nh_n^{d/2}\Big\{I_n - \frac{1}{nh_n^d}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)\pi(X_i+uh_n)du\Big\},$$

dont les régions critiques on présente dans la Section 3.

En suivant la démarche employée par BICKEL et ROSENBLATT [1973], la puissance locale des procédures de test proposées, est analysée dans la Section 4 en étudiant le comportement asymptotique de chacune des statistiques de test sous une suite de processus stochastiques fortement stationnaires, dont la densité marginale g_n, convergeant vers f_0, est de la forme $g_n(x) = f_0(x) + a_n\gamma(x) + o(a_n)\gamma_n(x)$, pour $x \in \mathbb{R}^d$, où (a_n) est une suite de nombres réels positifs convergeant vers zéro, lorsque n tend vers l'infini.

Nous montrons en particulier que si $h_n = Cn^{-\gamma}$, avec $C > 0$ et $0 < \gamma < \frac{1}{d}$, et $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}h_n^{d/4}}$, le test fondé sur T_n^2 est asymptotiquement strictement sans biais si la fonction de poids π est strictement positive. De plus, la puissance asymptotique correspondante est une fonction croissante de $\int_{\mathbb{R}^d}\gamma^2(x)\pi(x)dx$. Les mêmes résultats sont valables pour le test fondé sur la statistique T_n^1 si $0 < \gamma < \frac{2}{3d}$.

Finalement, une expérience sur données simulées est proposée dans la Section 5.

Toutes les démonstrations sont données dans la Section 6. En particulier, le comportement asymptotique des statistiques de test considérées, est dérivé en employant des techniques de U-statistiques dégénérées décrites en TENREIRO [1995].

2 Développements asymptotiques de EI_n

Les hypothèses introduites dans les points suivants sont désignées par (P) et (N), respectivement, selon qu'elles concernent le processus ou le noyau.

Hypothèses sur le processus (P)

Soit $(X_i, i \in \mathbb{Z})$ un processus stochastique de dimension d, fortement stationnaire de loi marginale absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On note f sa densité. Soit $F_i^j, i, j \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la tribu engendrée par les variables aléatoires $X_i, X_{i+1}, \ldots, X_j$. La dépendance entre le passé $F_{-\infty}^0$ et le futur $F_i^{+\infty}$, peut être mesurée par le nombre (cf. VOLKONSKIĬ et ROZANOV [1959])

$$\beta(i) = E[\sup_{A \in F_i^{+\infty}} \left| P\left(A | F_{-\infty}^0\right) - P(A) \right|]. \tag{3}$$

Nous supposons qu'il existe $C > 0$ et $\rho \in]0,1[$ tels que

$$\beta(i) \leq C\rho^i, \; \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

Pour des exemples de processus qui satisfont cette condition voir BRADLEY [1986] et PHAM et TRAN [1985].

On suppose aussi que les lois des vecteurs (X_i, X_0), $i \geq 1$, admettent des versions des densités $f_{(X_i, X_0)}$ qui satisfont les contraintes

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) < \infty$$

et

$$\sup_{i \in \mathbb{N}^*} \sup_{\substack{x \in \{u \in \mathbb{R}^d | f(u) > 0\} \\ y \in \mathbb{R}^d}} f_i(y|x) < \infty,$$

où $f_i(y|x) = \frac{f_{(X_i, X_0)}(y, x)}{f(x)}$. La première de ces conditions est souvent utilisée dans l'obtention de théorèmes de limite centrale pour l'erreur quadratique intégrée comme on peut le voir dans BICKEL et ROSENBLATT [1973], HALL [1984] et TAKAHATA et YOSHIHARA [1987]. La deuxième condition qui se réduit à la première dans un cadre d'échantillonnage, est par exemple satisfaite dans le cas d'un processus gaussien stationnaire, parce que la variance conditionnelle ne dépend pas de la variable conditionante.

Hypothèses sur le noyau (N)

On suppose que K est un noyau borné sur $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire,

$$\int_{\mathbb{R}^d} K(u) du = 1 \text{ et } \sup_{u \in \mathbb{R}^d} |K(u)| < \infty.$$

On détermine maintenant un développement asymptotique de EI_n (voir la Section 6 pour la preuve).

THÉORÈME 1 : On suppose satisfaites les hypothèses (P) et (N), et soit π une application mesurable et bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. Si $h_n \to 0$, $n \to +\infty$, alors

$$E \int_{\mathbb{R}^d} \{f_n(x) - Ef_n(x)\}^2 \pi(x) dx$$
$$= \frac{1}{nh_n^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u) f(x) \pi(x + uh_n) dx du + o\left(\frac{1}{nh_n^{d/2}}\right).$$

Sous certaines conditions supplémentaires, on peut trouver des développements du terme $\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u) f(x) \pi(x+uh_n) dx du$ qui permettent d'éviter le calcul explicite de cette intégrale double. Notons d'abord que pour $\pi = 1$, nous trouvons simplement

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u) f(x) \pi(x + uh_n) dx du = \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u) du.$$

Dans le cas plus général où π est éventuellement différente de 1, nous pouvons encore écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u) f(x) \pi(x + uh_n) dx du$$
$$= E \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u) \pi(X_0 + uh_n) du$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u) \pi(X_i + uh_n) du + O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

ce qui permet d'énoncer le corollaire suivant

COROLLAIRE 2 : Sous les conditions du Théorème 1, si de plus $nh_n^d \to +\infty, n \to +\infty$, alors

$$E \int_{\mathbb{R}^d} \{f_n(x) - Ef_n(x)\}^2 \pi(x) dx$$
$$= \frac{1}{nh_n^d} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u) \pi(X_i + uh_n) du + o_p\left(\frac{1}{nh_n^{d/2}}\right).$$

Supposons maintenant que f admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre m continues, bornées et intégrables, et que le noyau K satisfait $\int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^m K^2(u) du < \infty$. En admettant que π est presque partout continue (c'est-à-dire, l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure de Lebesgue nulle), un développement de Taylor et l'application du théorème de la convergence dominée nous conduisent à

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)f(x)\pi(x+uh_n)dxdu\\&\quad=\int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)du\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\pi(x)dx+M(f,h_n,m)+o(h_n^m),\end{aligned}$$

où on note $M(f,h_n,0)=0$ et pour $m\geq 1$,

$$\begin{aligned}&M(f,h_n,m)\\&\quad=\sum_{j=1}^m\frac{(-1)^j}{j!}h_n^j\sum_{i_1,\dots,i_j=1}^d\int_{\mathbb{R}^d}K^2(u)u_{i_1}\dots u_{i_j}du\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_j}}(x)\pi(x)dx,\end{aligned}$$

avec $u=(u_1,\dots,u_d)$. Nous avons :

COROLLAIRE 3 : Sous les conditions du Théorème 1, si la densité f admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre m continues, bornées et intégrables, si le noyau K satisfait $\int_{\mathbb{R}^d}\|u\|^m K^2(u)du<\infty$, et si π est presque partout continue, on a, pour $m\geq\frac{d}{2}$

$$\begin{aligned}&E\int_{\mathbb{R}^d}\{f_n(x)-Ef_n(x)\}^2\pi(x)dx\\&\quad=\frac{1}{nh_n^d}\int_{\mathbb{R}^d}K^2(u)du\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\pi(x)dx+\frac{1}{nh_n^d}M(f,h_n,m)\\&\qquad+o\left(\frac{1}{nh_n^{d/2}}\right),\end{aligned}$$

et pour $m>\frac{d}{2}$

$$\begin{aligned}&E\int_{\mathbb{R}^d}\{f_n(x)-Ef_n(x)\}^2\pi(x)dx\\&\quad=\frac{1}{nh_n^d}\int_{\mathbb{R}^d}K^2(u)du\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\pi(x)dx\\&\qquad+\frac{1}{nh_n^d}M(f,h_n,m-1)+o\left(\frac{1}{nh_n^{d/2}}\right).\end{aligned}$$

3 Quelques tests convergents

En plus des hypothèses (P) et (N), nous considérons dans la suite des hypothèses sur la suite h_n et sur la fonction de poids, désignées par (S) et (π), respectivement.

Hypothèses sur la suite h_n (S)

On suppose que

$$h_n \to 0 \text{ et } nh_n^d \to +\infty, \text{ lorsque } n \to +\infty,$$

et qu'il existe $\gamma \in]0,1[$ tel que

$$\limsup_n n^\gamma h_n^d < \infty.$$

Les premières conditions sont classiques dans l'étude des estimateurs par noyau. La dernière condition est peu restrictive et est vérifiée par exemple si $h_n = O(n^{-\delta})$, $0 < \delta < \frac{1}{d}$, dès qu'on choisit $\gamma \in]0, \delta d]$.

Hypothèses sur la fonction de poids π (π)

On suppose que π est une application non négative et presque partout continue satisfaisant $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \pi(x) < \infty$, et $\pi(x) > 0$ pour presque tout x dans le support de f_0.

Dans le résultat suivant nous présentons la région critique d'un test de niveau asymptotique α et asymptotiquement convergent fondé sur la statistique T_n^1 définie par (1). Un tel test est obtenu à partir de l'écart I_n, par la correction donnée dans le Théorème 1 de son biais asymptotique.

On désigne par ϕ la fonction de répartition de la loi normale standard, et par $K * \bar{K}$ le produit de convolution de K par $\bar{K}$, où $\bar{K}$ est le symétrisé du noyau K, défini pour $u \in \mathbb{R}^d$ par $\bar{K}(u) = K(-u)$.

THÉORÈME 4 : On suppose satisfaites les hypothèses (P), (N), (S) et (π). Soit f_0 borné sur $\mathbb{R}^d$. Alors la statistique T_n^1 est asymptotiquement normale sous l'hypothèse nulle, de moyenne zéro et de variance $2\nu^2$ avec

$$\nu^2 = \int_{\mathbb{R}^d} f_0^2(x)\pi^2(x)dx \int_{\mathbb{R}^d} (K * \bar{K})^2(z)dz. \tag{4}$$

On en déduit que

$$\left\{T_n^1 \geq \phi^{-1}(1-\alpha)(2\nu^2)^{1/2}\right\},$$

est la région critique d'un test de niveau asymptotique α. Ce test est asymptotiquement convergent pour tester H_0 contre H_0^c.

Remarquons que le comportement asymptotique de la statistique de test sous H_0 est précisément celui du cas d'échantillonnage. De plus, le même point critique peut être utilisé pour tester une hypothèse de la forme $H_0 : f = f_0(\cdot;\theta)$, où θ est un paramètre vectoriel inconnu de dimension finie, et $f_0(\cdot;\theta), \theta \in \Theta$ une famille paramétrique de densités de probabilité dans $\mathbb{R}^d$. En effet, sous des adéquates conditions de régularité sur la famille paramétrique précédente (cf. BICKEL et ROSENBLATT [1973] p. 1082), on peut le faire en remplaçant dans la statistique de test T_n^1 le paramètre inconnu θ par un estimateur paramétrique convergent sous l'hypothèse nulle. Ces conclusions ne sont plus valables par rapport à une large classe de tests d'ajustement qui inclut les tests de Pearson, Kolmogorov-Smirnov et Cramèr-von Mises, comme on peut le déduire d'après GLESER et MOORE [1983].

Tenant en compte les divers développements du terme $E_0 I_n$ qu'on obtient d'après les Corollaires 2 et 3, nous présentons dans la suite des modifications équivalentes de la statistique T_n^1 sous l'hypothèse nulle. Le théorème précédent reste valable pour ces modifications. Ce sont les cas de la statistique T_n^2 définie par (2), et des statistiques T_n^3 et T_n^4, définies, sous les conditions du Corollaire 3, respectivement par

$$T_n^3 = nh_n^{d/2}\Big\{I_n - \frac{1}{nh_n^d}\int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)du \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\pi(x)dx - \frac{1}{nh_n^d} M(f_0, h_n, m)\Big\},$$

si $m \geq d/2$, et

$$T_n^4 = nh_n^{d/2}\Big\{I_n - \frac{1}{nh_n^d}\int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)du \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\pi(x)dx - \frac{1}{nh_n^d} M(f_0, h_n, m-1)\Big\},$$

si $m > d/2$.

Dans le cas réel $d = 1$, si on prend $m = 1$, T_n^4 est précisément la statistique considérée par BICKEL et ROSENBLATT [1973].

Comme les différences $T_n^1 - T_n^3$ et $T_n^1 - T_n^4$ sont déterministes et négligeables, nous nous restreignons dans le paragraphe suivant à l'étude de la puissance locale des tests asymptotiques définis par les régions critiques $W_n^j = \big\{T_n^j \geq \phi^{-1}(1-\alpha)(2\nu^2)^{1/2}\big\}$, $j = 1, 2$.

4 Puissance locale des tests

De façon à décrire la puissance locale des tests introduits dans la section precédente, nous nous intéressons au comportement asymptotique des statistiques T_n^1 et T_n^2, sous une suite notée $(X_{in}, i \in \mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}^*}$, de processus stochastiques dont la suite de densités marginales correspondante $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (suite d'alternatives locales pour f_0), est de la forme

(5) $$g_n(x) = f_0(x) + a_n\gamma(x) + o(a_n)\gamma_n(x),$$

pour $x \in \mathbb{R}^d$, où

(6) $$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\gamma(x)| < \infty, \ \sup_{n\in\mathbb{N}^*}\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\gamma_n(x)| < \infty,$$

(7) $$\int_{\mathbb{R}^d} |\gamma(x)|dx < \infty,\ \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}^d} |\gamma_n(x)|dx < \infty,$$

et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels positifs convergeant vers zéro, lorsque n tend vers l'infini.

Hypothèses sur la suite d'alternatives locales (AL)

Admettons que $(X_{in}, i\in\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}^*}$, est une suite de processus stochastiques de dimension d, fortement stationnaires dont les coefficients de mélange définis par (3) décroissent vers zéro de façon exponentielle, uniformément par rapport à n. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit g_n définie par (5), la densité marginale du processus $(X_{in}, i\in\mathbb{Z})$, et désignons par $g_{in}(\cdot|x)$, la densité de la loi conditionnelle de $X_{in}|X_{0n}=x$, qu'on suppose satisfaire la contrainte

$$\sup_{n,i\in\mathbb{N}^*} \sup_{\substack{x\in\{u\in\mathbb{R}^d | g_n(u)>0\} \\ y\in\mathbb{R}^d}} g_{in}(y|x) < \infty.$$

Notons que les hypothèses (AL) sont en particulier satisfaites si on considère une suite de processus définis pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $X_{in} = X_i + \delta_n Z_i$, $i \in \mathbb{Z}$, où $(X_i, i\in\mathbb{Z})$ satisfait l'hypothèse (P) avec $f = f_0$, (δ_n) est une suite de nombres réels positifs qui tend vers zéro, lorsque n tend vers l'infini, et $(Z_i, i\in\mathbb{Z})$ est un processus stochastique fortement stationnaire de dimension d, indépendant de $(X_i, i\in\mathbb{Z})$, avec un coefficient de mélange décroissant vers zéro de façon exponentielle. Sous des adéquates conditions de régularité sur f_0 et si Z_0 admet des moments d'ordre 3, on conclut facilement que la suite (a_n) donnée dans (5) est égale à (δ_n) si Z_0 est de moyenne non nulle, et égale à (δ_n^2) si Z_0 est de moyenne nulle.

Nous considérons maintenant l'écart étudié precédemment, en introduisant un double indice n pour insister sur le fait que la loi du processus varie avec n le long d'une alternative locale. Cet écart est

$$I_{nn} = \int_{\mathbb{R}^d} \{f_{nn}(x) - E_0 f_n(x)\}^2 \pi(x)dx,$$

où $f_{nn}(x)$, pour $x\in\mathbb{R}^d$ et $n\in\mathbb{N}^*$, est définie par

$$f_{nn}(x) = \frac{1}{nh_n^d} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_{in}}{h_n}\right).$$

Dans le résultat suivant, nous commençons par mettre en évidence une expression asymptotiquement équivalente de cet écart. ν^2 est défini par la formule (4).

THÉORÈME 5 : On suppose satisfaites les hypothèses (AL), (N), (S) et (π). Soit f_0 bornée sur $\mathbb{R}^d$. On a

$$\begin{aligned} I_{nn} =& \frac{1}{nh_n^{d/2}} \frac{2}{n} \sum_{1 \leq j < i \leq n} \{H_{nn}(X_{in}, X_{jn}) - EH_{nn}(X_{in}, X_{jn})\} \\ &+ a_n^2 \int_{\mathbb{R}^d} \gamma^2(x)\pi(x)dx + \frac{1}{nh_n^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)g_n(x)\pi(x+uh_n)dxdu \\ &+ o_p\big(a_n^2\big) + o_p\bigg(\frac{1}{nh_n^{d/2}}\bigg), \end{aligned}$$

où pour $u, v \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} H_{nn}(u,v) &\\ = \frac{1}{h_n^{3d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} &\bigg\{K\bigg(\frac{x-u}{h_n}\bigg) - EK\bigg(\frac{x-X_{0n}}{h_n}\bigg)\bigg\} \\ \times &\bigg\{K\bigg(\frac{x-v}{h_n}\bigg) - EK\bigg(\frac{x-X_{0n}}{h_n}\bigg)\bigg\}\pi(x)dx. \end{aligned} \tag{8}$$

De plus, la variable $\frac{2}{n} \sum_{1 \leq j < i \leq n} \{H_{nn}(X_{in}, X_{jn}) - EH_{nn}(X_{in}, X_{jn})\}$, converge en loi, lorsque n tend vers l'infini, vers la loi normale de moyenne zéro et de variance $2\nu^2$.

Asymptotiquement équivalents sous l'hypothèse nulle, les estimateurs introduits pour le terme de biais $E_0 I_n$, ne le sont déjà plus sous la suite d'alternatives locales. En effet, l'approximation introduite pour le terme de biais dans le Théorème 1, n'est pas toujours adéquate pour corriger le terme $\frac{1}{nh_n^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)g_n(x)\pi(x+uh_n)dxdu$ intervenant dans le biais de l'écart I_{nn}, lequel ne résulte pas de l'éloignement de l'alternative locale g_n par rapport à f_0. De ce fait, les tests définis par les régions critiques W_n^1 et W_n^2, présentent différentes propriétés de puissance.

En désignant par T_{nn}^1 et T_{nn}^2 les statistiques de test sous la suite d'alternatives locales considérée, nous obtenons, sous les conditions du Théorème 4, les développements

$$\begin{aligned} T_{nn}^2 =& \frac{2}{n} \sum_{1 \leq j < i \leq n} \{H_{nn}(X_{in}, X_{jn}) - EH_{nn}(X_{in}, X_{jn})\} \\ &+ nh_n^{d/2} a_n^2 \int_{\mathbb{R}^d} \gamma^2(x)\pi(x)dx + o_p\big(nh_n^{d/2}a_n^2\big) + o_p(1) \end{aligned}$$

et

$$T_{nn}^1 = T_{nn}^2 + \frac{a_n}{h_n^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)du \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(x)\pi(x)dx + o\bigg(\frac{a_n}{h_n^{d/2}}\bigg) + o_p(1).$$

D'après le développement de T_{nn}^2 et le Théorème 5, nous concluons que pour toute la suite d'alternatives locales (g_n) de la forme (5), et en désignant par P_{g_n} la probabilité prise sous cette suite, la puissance asymptotique du test W_n^2 est donnée par

$$\lim_{n\to+\infty} P_{g_n}\big(W_n^2\big) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } a_n = o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}\,h_n^{d/4}}\Big), \\ \beta(\gamma), & \text{si } a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\,h_n^{d/4}}, \\ 1, & \text{si } \dfrac{1}{\sqrt{n}\,h_n^{d/4}} = o(a_n), \end{cases}$$

où

$$\beta(\gamma) = 1 - \phi\bigg(\phi^{-1}(1-\alpha) - (2\nu^2)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}^d}\gamma^2(x)\pi(x)dx\bigg) \tag{9}$$

est une fonction croissante de $\int_{\mathbb{R}^d}\gamma^2(x)\pi(x)dx$. De plus, si $\pi(x)>0$ pour presque tout $x\in\mathbb{R}^d$, on a $\beta(\gamma)>\alpha$ pour tout γ non nulle. Le test défini par la région critique W_n^2 est donc asymptotiquement strictement sans biais au seuil α (cf. BICKEL et ROSENBLATT [1973], pg. 1082).

Les conclusions précédentes restent valables pour le test défini par la région critique W_n^1, si on admet que $n^{-2/3d} = o(h_n)$. Si on choisit h_n tel que $h_n = O\big(n^{-2/3d}\big)$, le test asymptotique W_n^1 n'est plus strictement sans biais au seuil α. En effet, la statistique de test T_{nn}^1 comporte un biais asymptotique dont le signe est celui de l'intégral $\int_{\mathbb{R}^d}\gamma(x)\pi(x)dx$, c'est-à-dire, il dépend de la position de l'alternative locale considérée. Par conséquent, uniformément sur les alternatives locales considérées, le test W_n^1 n'atteint la puissance asymptotique du test W_n^2 que pour des choix particuliers de la fenêtre h_n.

5 Quelques résultats de simulation

Dans toute cette section l'hypothèse nulle s'écrira

$$H_0 = \{f = f_{N(0,1)}\}$$

où $f_{N(0,1)}$ est la densité de la loi normale centrée et réduite. Les statistiques T_n^1 et T_n^2 dépendent de π, K et $h = h_n$. On prend $\pi = 1$, ce qui conduit à $T_n^1 = T_n^2$, et $K = 1\!\!1_{[-1/2,1/2]}$ (cf. GHOSH et HUANG [1991]). On obtient donc $\int_{\mathbb{R}} K^2(u)du = 1$ et $2\nu^2 = (3\sqrt{\pi})^{-1}$. En désignant par $T_n(h)$ $(= T_n^i/\sqrt{2\nu^2})$ la statistique $\sqrt{3\sqrt{\pi}/2}\big[nh^{1/2}I_n - h^{-1/2}\big]$, nous savons d'après le Théorème 4 que le test qui conduit à rejeter l'hypothèse nulle si $T_n(h)\geq 1.645$, est de niveau asymptotique 0.05 et asymptotiquement convergent pour tester H_0 contre H_0^c. En tenant compte du fait que $T_n(h)$ n'est qu'asymptotiquement normale sous H_0, et de façon à pouvoir contrôler le niveau effectif du test, nous allons remplacer dans la procédure de test précédente le quantile d'ordre 0.95 de sa distribution asymptotique sous H_0, par la valeur estimée $d_n(h)$ du quantile d'ordre 0.95 de la distribution de $T_n(h)$ sous H_0, obtenue d'après 1000 répétitions de cette variable. Ceci conduit à rejeter l'hypothèse H_0 si $T_n(h) \geq d_n(h)$.

Dans un cadre d'échantillonnage cette démarche peut être facilemente mise en marche puisque on peut simuler sous H_0. Pour des différentes valeurs de n et h, les valeurs estimées $d_n(h)$ sont données dans le tableau 1. Remarquons que pour les valeurs de h considérées, l'utilisation du quantile d'ordre 0.95 de la distribution asymptotique de la statistique $T_n(h)$ sous H_0 impliquerait un rejet anormal de l'hypothèse nulle elle étant vraie.

TABLEAU 1

Quantile empirique d'ordre 0.95 de $T_n(h)$ ***sous*** H_0**.**

$n\backslash h$	0.1	0.5	1.0	5.0	10.0
50	1.605	1.292	0.978	-0.306	-0.370
100	1.509	1.377	0.931	-0.304	-0.370

Dans un cadre de dépendance, la même démarche ne pourra être envisagée que dans des cas particuliers. C'est par exemple le cas où on sait que le processus des observations satisfait une représentation autorégressive d'ordre 1, $X_n = \alpha X_{n-1} + \epsilon_n$, $n \in \mathbb{Z}$, où $|\alpha| < 1$ est supposé connu et (ϵ_n) est un bruit blanc indépendant avec $E\epsilon_n = 0$ et $V\epsilon_n = 1 - \alpha^2$, et on admet que (ϵ_n) est, sous l'hypothèse nulle, un bruit blanc gaussien. Dans ce cas on peut simuler sous H_0 et donc obtenir $d_n(h)$.

Bien que la distribution asymptotique de la statistique de test sous H_0 soit, comme nous l'avons remarqué à la suite du Théorème 4, celle du cas d'indépendance, l'utilisation, pour n fini, du quantile empirique de $T_n(h)$ donné dans le tableau 1, lorsqu'il y a des effets de dépendance entre les variables observées, n'est pas toujours une bonne solution. En admettant que le processus observé satisfait la représentation autorégressive d'ordre 1 précédente, où on considère deux valeurs pour α, -0.5 et 0.5, on présente dans les tableaux suivants le niveau empirique du test de région critique $T_n(h) \geq d_n(h)$ ($d_n(h)$ est donné dans tableau 1), calculé d'après 1000 répétitions de la variable $T_n(h)$ sous H_0.

TABLEAU 2

Niveau empirique du test de région critique $T_n(h) \geq d_n(h)$ ***pour*** $\alpha = -0.5$ ***où*** $d_n(h)$ ***est donné dans tableau 1.***

$n\backslash h$	0.1	0.5	1.0	5.0	10.0
50	0.049	0.047	0.042	0.012	0.010
100	0.040	0.036	0.040	0.006	0.012

TABLEAU 3

Niveau empirique du test de région critique $T_n(h) \geq d_n(h)$ pour $\alpha = 0.5$ où $d_n(h)$ est donné dans tableau 1.

$n\backslash h$	0.1	0.5	1.0	5.0	10.0
50	0.077	0.146	0.194	0.250	0.250
100	0.100	0.116	0.180	0.236	0.290

En dépit des résultats obtenus dans le cas $\alpha = -0.5$ pour $h = 0.1, 0.5$ et 1.0, où le niveau empirique est proche de 0.05, on voit que si $\alpha = 0.5$ et pour toutes les valeurs de h considérées, l'utilisation du quantile empirique de $T_n(h)$ du cas d'indépendance, conduit au rejet anormal de l'hypothèse nulle elle étant vraie (voir aussi MOORE [1982] et GLESER et MOORE [1983]).

En nous restreignant au cas réel d'indépendance d'observations, nous nous proposons maintenant d'évaluer la puissance empirique de la procédure de test proposée. D'abord, on le fera dans les deux cas suivants :

I) $X_1, \ldots, X_n$ est un n-échantillon d'une loi $N(m, 1)$, et on veut tester l'hypothèse nulle $m = 0$ contre $m \neq 0$;

II) $X_1, \ldots, X_n$ est un n-échantillon d'une loi $N(0, \sigma^2)$, et on veut tester l'hypothèse nulle $\sigma^2 = 1$ contre $\sigma^2 \neq 1$.

Les tests de niveau 0.05 proposés généralement pour tester les hypothèses précédentes, conduisent au rejet de l'hypothèse nulle lorsque $\sqrt{n}\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| \geq 1.96$ dans le cas I), et lorsque $\left|\sqrt{2\sum_{i=1}^n X_i^2} - \sqrt{2n-1}\right| \geq 1.96$ dans le cas II).

Pour des différentes valeurs de m et σ^2, il a été tiré 1000 échantillons pour le calcul de la puissance empirique. Les résultats obtenus pour un niveau à 5% et des échantillons de taille 50 et 100 sont par la suite présentés. Dans la dernière cologne de chaqu'un des tableaux on trouve la puissance du test paramétrique correspondant.

D'après les tableaux ci-après on conclut d'abord que la puissance empirique augmente avec n, et d'une façon générale, avec la distance, au sens L_2, de la densité de probabilité de l'alternative considérée par rapport à la densité sous H_0 (cette conclusion est d'accord avec la forme (9) obtenue pour la puissance asymptotique). En effet, $\left\|f_{N(m,1)} - f_{N(0,1)}\right\|_2^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \exp(-\frac{m^2}{4})\right)$ et $\left\|f_{N(0,\sigma^2)} - f_{N(0,1)}\right\|_2^2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sigma^2}}\right)$. Deuxièmement, on peut remarquer que la puissance varie avec h. Dans l'exemple I) la plus grande puissance empirique, qui est en effet très proche de la puissance paramétrique, est obtenue pour des grandes valeurs de h, tandis que dans l'exemple II) nous trouvons pour $h = 1$ et $\sigma = 0.8$ ou 0.7, des valeurs de puissance significativement supérieures à celles obtenues pour $h = 5$ et $h = 10$.

Jusqu'à maintenant nous avons évalué la puissance empirique du test qui conduit à rejeter H_0 si $T_n(h) \geq d_n(h)$, en ne considérant que des alternatives normales. Voulant aussi le faire pour des alternatives non nécessairement normales, nous considérons dans la suite des variables aléatoires obtenues,

Tableau 4

Puissance empirique pour I) avec $n = 50$

$m\backslash h$	0.1	0.5	1.0	5.0	10.0	P
0.1	0.056	0.065	0.066	0.097	0.104	0.109
0.2	0.060	0.096	0.116	0.272	0.282	0.292
0.3	0.096	0.212	0.274	0.533	0.546	0.564
0.5	0.225	0.534	0.649	0.930	0.931	0.942

Tableau 5

Puissance empirique pour I) avec $n = 100$.

$m\backslash h$	0.1	0.5	1.0	5.0	10.0	P
0.1	0.063	0.065	0.096	0.168	0.172	0.170
0.2	0.113	0.141	0.248	0.473	0.463	0.516
0.3	0.168	0.354	0.537	0.824	0.842	0.851
0.5	0.459	0.873	0.953	0.998	0.998	0.999

Tableau 6

Puissance empirique pour II) avec $n = 50$.

$\sigma\backslash h$	0.1	0.5	1.0	5.0	10.0	P
1.1	0.056	0.071	0.066	0.102	0.080	0.195
1.2	0.056	0.102	0.141	0.189	0.191	0.510
0.8	0.110	0.159	0.205	0.078	0.087	0.515
0.7	0.174	0.418	0.514	0.209	0.265	0.928

Tableau 7

Puissance empirique pour II) avec $n = 100$.

$\sigma\backslash h$	0.1	0.5	1.0	5.0	10.0	P
1.1	0.063	0.081	0.102	0.103	0.123	0.311
1.2	0.096	0.168	0.312	0.307	0.291	0.763
0.8	0.154	0.285	0.445	0.191	0.244	0.858
0.7	0.459	0.775	0.909	0.742	0.768	≈ 1

par centrage et rédution, d'après les variables indiquées dans les tableaux suivants. Les résultats qui y sont présentés sont obtenus pour un niveau à 5% et des échantillons de taille 50 et 100.

TABLEAU 8

Puissance empirique avec $n = 50$.

$f\backslash h$	0.1	0.5	1.0	5.0	10.0
Uniforme	0.279	0.440	0.445	0.150	0.157
$\chi^2(2)$	0.851	0.958	0.958	0.551	0.627
$\chi^2(3)$	0.459	0.790	0.776	0.343	0.376
Student(3)	0.519	0.863	0.948	0.749	0.779
Student(5)	0.111	0.207	0.251	0.092	0.112

TABLEAU 9

Puissance empirique avec $n = 100$.

$f\backslash h$	0.1	0.5	1.0	5.0	10.0
Uniforme	0.560	0.772	0.756	0.272	0.308
$\chi^2(2)$	0.996	1.000	0.998	0.970	0.980
$\chi^2(3)$	0.894	0.980	0.982	0.742	0.786
Student(3)	0.894	1.000	1.000	0.998	0.998
Student(5)	0.198	0.400	0.584	0.292	0.312

6 Démonstrations

Démonstration du Théorème 1 : Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$f_n(x) - Ef_n(x) = \frac{1}{nh_n^d} \sum_{i=1}^{n} \left\{ K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) - EK\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \right\}.$$

Définissant, pour $u, v \in \mathbb{R}^d$,

(10) $$\begin{aligned} &H_n(u,v) \\ &\quad = \frac{1}{h_n^{3d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ K\left(\frac{x-u}{h_n}\right) - EK\left(\frac{x-X_0}{h_n}\right) \right\} \\ &\qquad \times \left\{ K\left(\frac{x-v}{h_n}\right) - EK\left(\frac{x-X_0}{h_n}\right) \right\} \pi(x)dx, \end{aligned}$$

et en utilisant la stationnarité de $(X_i, i \in \mathbb{Z})$ et la symétrie de la fonction H_n, on a

$$\begin{aligned} &E \int_{\mathbb{R}^d} \{f_n(x) - Ef_n(x)\}^2 \pi(x)dx \\ &\quad = \frac{1}{nh_n^{d/2}} E[H_n(X_0, X_0)] + \frac{2}{n^2 h_n^{d/2}} \sum_{1 \le j < i \le n} E[H_n(X_i, X_j)]. \end{aligned}$$

Chacun de ces termes est analysé dans la suite.

• Développement asymptotique de $E[H_n(X_0, X_0)]$

On a

$$\begin{aligned}
&E[H_n(X_0, X_0)]\\
&\quad = \frac{1}{h_n^{3d/2}} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K^2\Big(\frac{x-y}{h_n}\Big) f(y)dy\pi(x)dx\\
&\qquad - \frac{1}{h_n^{3d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} E^2 K\Big(\frac{x-X_0}{h_n}\Big)\pi(x)dx\\
&\quad = \frac{1}{h_n^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)f(y)\pi(y+uh_n)dydu + O\big(h_n^{d/2}\big),
\end{aligned}$$

puisque, en désignant par $K * \bar{K}$ le produit de convolution de K par $\bar{K}$ où pour $u \in \mathbb{R}^d$, $\bar{K}(u) = K(-u)$ désigne le symétrisé du noyau K, on a

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} E^2 K\Big(\frac{x-X_0}{h_n}\Big)\pi(x)dx\right| \leq h_n^{2d} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\pi(x)| \sup_{x\in\mathbb{R}^d} f(x) \int_{\mathbb{R}^d} |K*\bar{K}|(u)du.$$

Il reste maintenant à analyser le terme de covariance $\frac{2}{n^2 h_n^{d/2}} \sum_{1\leq j<i\leq n} E[H_n(X_i, X_j)]$, et à montrer que ce terme est d'ordre inférieur à $\frac{1}{nh_n^{d/2}}$. Si jamais les variables $X_i, i \in \mathbb{Z}$, sont indépendantes, ce terme est identiquement nul. L'idée de la démonstration est alors d'examiner l'écart entre ce cas et celui de la dépendance. Pour cela nous utiliserons le Lemme 1 de YOSHIHARA [1976]. Notons $\overline{X}_0$ une copie de X_0 qui lui est indépendante, et établissons la majoration utile de

$$u_n(r) = \max\Big\{\max_{1\leq i\leq n} \|H_n(X_i, X_0)\|_r, \|H_n(X_0, \overline{X}_0)\|_r\Big\},$$

pour $r \geq 1$, le terme apparaissant dans le lemme de Yoshishara.

• Majoration de $u_n(r)$

D'après la définition de $H_n(\cdot,\cdot)$, et les majorations obtenues dans le point précédent, nous avons uniformément par rapport à $u, v \in \mathbb{R}^d$

$$H_n(u,v) = \frac{1}{h_n^{3d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} K\Big(\frac{x-u}{h_n}\Big) K\Big(\frac{x-v}{h_n}\Big)\pi(x)dx + O\big(h_n^{d/2}\big).$$

Il est donc évident que pour $r \geq 1$ et $i \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
&h_n^{3d/2}\|H_n(X_i, X_0)\|_r\\
&\quad \leq E^{\frac{1}{r}}\left|\int_{\mathbb{R}^d} K\Big(\frac{x-X_i}{h_n}\Big) K\Big(\frac{x-X_0}{h_n}\Big)\pi(x)dx\right|^r + O\big(h_n^{2d}\big),
\end{aligned}$$

où

$$E\left|\int_{\mathbb{R}^d} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)K\left(\frac{x-X_0}{h_n}\right)\pi(x)dx\right|^r$$
$$=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} K\left(\frac{x-v}{h_n}\right)K\left(\frac{x-u}{h_n}\right)\pi(x)dx\right|^r f_i(v|u)f(u)dvdu$$
$$\leq \left(h_n^d\right)^{r+1}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\pi(x)|^r \sup_i \sup_{x,y} f_i(y|x)\int_{\mathbb{R}^d}\left(|K|*|\bar{K}|\right)^r(z)dz.$$

Nous en déduisons que $h_n^{3d/2}\|H_n(X_i,X_0)\|_r \leq C\left(h_n^d\right)^{1+\frac{1}{r}}$, avec $C>0$. Une majoration du même ordre peut être obtenue pour $h_n^{3d/2}\|H_n(X_0,\overline{X}_0)\|_r$ si on remplace dans les développements précédents $f_i(v|u)$ par $f(v)$. Ceci permet de conclure que pour $r\geq 1$, il existe $C>0$ tel que

$$u_n(r)\leq C\left(h_n^d\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}}.$$

• Ordre du terme de covariance

D'après le Lemme 1 de Yoshihara [1976] et l'inégalité précédente, nous concluons que pour $r>1$

$$\left|nh_n^{d/2}\frac{1}{n^2h_n^{d/2}}\sum_{1\leq j<i\leq n}E[H_n(X_i,X_j)]\right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n-1}\left|E[H_n(X_i,X_0)]\right| = \sum_{i=1}^{n-1}\left|E[H_n(X_i,X_0)]-E[H_n(X_0,\overline{X}_0)]\right|$$
$$\leq 4\sum_{i=1}^{n-1}\beta^{\frac{r-1}{r}}(i)u_n(r)\leq 4C\left(h_n^d\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n-1}\beta^{\frac{r-1}{r}}(i).$$

Comme d'après l'hypothèse de décroissance exponentielle des coefficients de mélange, la somme $\sum_{i=1}^{n-1}\beta^{\frac{r-1}{r}}(i)$ est convergente, nous en déduisons que le majorant est négligeable dès que $r<2$. □

Démonstration du Théorème 4 : Dans les points suivants on établit la normalité asymptotique de T_n^1 et la convergence asymptotique du test proposé.

• Normalité asymptotique de T_n^1

D'après le Théorème 4, T_n^1 est asymptotiquement équivalent à $nh_n^{d/2}\{I_n-E_0I_n\}$, dont la normalité asymptotique a été établie dans Tenreiro [1995]. En effet, d'après l'égalité

$$nh_n^{d/2}\{I_n-E_0I_n\}=\frac{2}{n}\sum_{1\leq j<i\leq n}\{H_n(X_i,X_j)-E_0H_n(X_i,X_j)\}+o_p(1),$$

où $H_n(\cdot,\cdot)$ est défini par (10) sous l'hypothèse nulle, on conclut que T_n^1 est asymptotiquement équivalent à une U-statistique dégénérée d'ordre 2 dont la convergence vers la loi normale de moyenne zéro et de variance $2\nu^2$, découle, tenant compte des hypothèses (P), (N), (S) et (π), d'après le Théorème 2.3 de TENREIRO [1995].

• Convergence asymptotique du test

On suppose maintenant que f_1 est la densité marginale du processus $(X_i, i \in \mathbb{Z})$. Nous avons

$$\begin{aligned} I_n =& 2\int_{\mathbb{R}^d}\{f_n(x)-E_1f_n(x)\}\{E_1f_n(x)-E_0f_n(x)\}\pi(x)dx \\ &+\int_{\mathbb{R}^d}\{f_n(x)-E_1f_n(x)\}^2\pi(x)dx \\ &+\int_{\mathbb{R}^d}\{E_1f_n(x)-E_0f_n(x)\}^2\pi(x)dx, \end{aligned}$$

où d'après le Théorème 1, les deux premiers termes convergent en probabilité vers zéro, lorsque n tend vers l'infini. Pour le dernier terme on a

$$\int_{\mathbb{R}^d}\{E_1f_n(x)-E_0f_n(x)\}^2\pi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d}\{f_1(x)-f_0(x)\}^2\pi(x)dx + o(1).$$

Si $f_1 \neq f_0$,

$$\begin{aligned} \frac{T_n^1}{nh_n^{d/2}} &= I_n - \frac{1}{nh_n^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}K^2(u)f_0(x-uh_n)\pi(x)dxdu \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\{f_1(x)-f_0(x)\}^2\pi(x)dx + o_p(1), \end{aligned}$$

et donc, T_n^1 converge en probabilité vers $+\infty$, si $n \to +\infty$, puisque d'après l'hypothèse (π), π est strictement positive dans le support de f_0. Ceci entraîne la convergence du test. $\square$

Démonstration du Théorème 5 : Considérons la décomposition suivante

$$\begin{aligned} I_{nn} =& \int_{\mathbb{R}^d}\{f_{nn}(x)-Ef_{nn}(x)\}^2\pi(x)dx \\ &- E\int_{\mathbb{R}^d}\{f_{nn}(x)-Ef_{nn}(x)\}^2\pi(x)dx \\ &+ E\int_{\mathbb{R}^d}\{f_{nn}(x)-Ef_{nn}(x)\}^2\pi(x)dx \\ &+ 2\int_{\mathbb{R}^d}\{f_{nn}(x)-Ef_{nn}(x)\}\{Ef_{nn}(x)-E_0f_n(x)\}\pi(x)dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d}\{Ef_{nn}(x)-E_0f_n(x)\}^2\pi(x)dx \\ =& \frac{1}{nh_n^{d/2}}U_{nn} + E_{nn}^1 + 2E_{nn}^2 + E_{nn}^3. \end{aligned}$$

Nous analysons dans la suite chacun de ces termes.

- **Etude de la variable U_{nn}**

La variable aléatoire U_{nn} est asymptotiquement équivalente à une U-statistique dégénérée d'ordre 2. En effet,

$$U_{nn} = \frac{2}{n} \sum_{1 \leq j < i \leq n} \{H_{nn}(X_{in}, X_{jn}) - EH_{nn}(X_{in}, X_{jn})\} + o_p(1),$$

où H_{nn} est défini par (8). De façon analogue à la démonstration du Théorème 4, on déduit que cette U-statistique est asymptotiquement normale de moyenne zéro et de variance $2\nu^2$. L'introduction d'alternatives locales ne change pas l'approche.

- **Etude de la variable E^1_{nn}**

De façon analogue à la démonstration du Théorème 1, on a

$$E^1_{nn} = \frac{1}{nh_n^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u) g_n(x) \pi(x + uh_n) dx du + o\left(\frac{1}{nh_n^{d/2}}\right).$$

- **Etude de la variable E^2_{nn}**

On a

$$\frac{\sqrt{n}}{a_n} E^2_{nn} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_n^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{K\left(\frac{x - X_{in}}{h_n}\right) - EK\left(\frac{x - X_{0n}}{h_n}\right)\right\} p_n(x) \pi(x) dx,$$

où $p_n(x) = a_n^{-1}\{Ef_{nn}(x) - E_0 f_n(x)\} = \frac{1}{h_n^d} \int_{\mathbb{R}^d} K\left(\frac{x-y}{h_n}\right)\big(\gamma(y) + o(1)\gamma_n(y)\big) dy$. D'après les conditions (6) sur γ et γ_n, on conclut facilement que $E\left[\frac{\sqrt{n}}{a_n} E^2_{nn}\right]^2 = O(1)$, ce qui permet d'obtenir

$$E^2_{nn} = O_p\left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right).$$

- **Etude de la variable E^3_{nn}**

D'après les conditions (5), (6) et (7), on a

$$E^3_{nn} = \int_{\mathbb{R}^d} \{Ef_{nn}(x) - E_0 f_n(x)\}^2 \pi(x) dx = a_n^2 \int_{\mathbb{R}^d} \gamma^2(x) \pi(x) dx + o\big(a_n^2\big).$$

D'après les points précédents, on déduit finalement le résultat énoncé. □

• Références bibliographiques

Altman, N. S. (1990). – "Kernel Smoothing of Data with Correlated Errors", *J. Amer. Statist. Assoc.*, 85, pp. 749-759.

Bickel, P. J., Rosenblatt, M. (1973). – "On Some Global Measures of the Deviations of Density Function Estimates", *Ann. Statist.*, 1, pp. 1071-1095.

Bosq, D. (1983). – "Lois limites et efficacité asymptotique des tests hilbertiens de dimension finie sous des hypothèses adjacentes", *Statist. Analyse de données*, 8, pp. 1-40.

Bradley, R. C. (1986). – "Basic Properties of Strong Mixing Conditions". *In: Dependence in Probability and Statistics, a survey of recent results*, ed. Eberlein E. et Taqqu M., pp. 165-192.

Fan, Y. (1994). – "Testing the Goodness of Fit of a Parametric Density Function by Kernel Method", *Econometric Theory*, 10, pp. 316-356.

Gasser, T. (1975). – "Goodness-of-Fit Tests for Correlated Data", *Biometrika*, 62, pp. 563-570.

Ghosh, B. K., Huang, W.-M. (1991). – "The Power and Optimal Kernel of the Bickel-Rosenblatt Test for Goodness of Fit", *Ann. Statist.*, 19, pp. 999-1009.

Gleser, L. J., Moore, D. S. (1983). – "The Effect of Dependence on Chi-Squared and Empiric Distribution Tests of Fit", *Ann. Statist.*, 11, pp. 1100-1108.

Hall, P. (1984). – "Central Limit Theorem for Integrated Square Error Properties of Multivariate Nonparametric Density Estimators", *J. Multivariate Anal.*, 14, pp. 1-16.

Moore, D. S. (1982). – "The Effect of Dependence on Chi-Squared Tests of Fit", *Ann. Statist.*, 10, pp. 1163-1171.

Pham, T. D., Tran, L. T. (1985). – "Some Mixing Properties of Time Series Models", *Stoch. Proc. Appl.*, 19, pp. 297-303.

Parzen, E. (1962). – "On Estimation of a Probability Density Function and Mode", *Ann. Math. Statist.*, 33, pp. 1065-1076.

Rosenblatt, M. (1956). – "Remarks on Some Non-Parametric Estimates of a Density Function", *Ann. Math. Statist.*, 27, pp. 832-837.

Takahata, H., Yoshihara, K. (1987). – "Central Limit Theorems for Integrated Square Error of Nonparametric Density Estimators Based on Absolutely Regular Random Sequences", *Yokohama Math. J.*, 35, pp. 95-111.

Tenreiro, C. (1994). – "O Teste de Ajustamento de Bickel-Rosenblatt Generalizado a Processos Misturadores", *In: A Estatística e o Futuro, e o Futuro da Estatística (Actes du I Congrès Annuel de la Société Portugaise de Statistique, 1993, Vimeiro)*, ed. Pestana, D. et al., Edições Salamandra, Lisboa, pp. 89-98.

Tenreiro, C. (1995). – "Loi asymptotique des erreurs quadratiques intégrées des estimateurs à noyau de la densité et de la régression, sous des conditions de dépendance", *Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra*, Pré-publicação 95/04.

Volkonskiĭ, V. A., Rozanov, Yu. A. (1959). – "Some Limit Theorems for Random Functions", *Theory Probab. Appl.*, 4, pp. 178-197.

Yoshihara, K. (1976). – "Limiting Behavior of U-Statistics for Stationary, Absolutely Regular Processes", *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 35, pp. 237-252.