ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 40 — 1995

Modèles factoriels de la structure par termes des taux d'intérêt : théorie et application économétrique

Antoine FRACHOT, Jean-Philippe LESNE*

RÉSUMÉ. – La plupart des modèles de taux d'intérêt font l'hypothèse de structure factorielle où les taux d'intérêt dépendent linéairement de certains facteurs. Nous dérivons ici les conséquences d'une telle hypothèse dans le cadre des modèles d'arbitrage à la HEATH, JARROW et MORTON [1992], notamment dans le cas où les volatilités sont stochastiques. Cette approche permet de généraliser un grand nombre de modèles de taux déjà proposés. Enfin, nous proposons une méthodologie économétrique pour estimer le cas particulier du Modèle Linéaire Gaussien.

Factor Models of the Term Structure of Interest Rates: Theory and Econometric Applications

ABSTRACT. – Most models of the term structure show a factor structure, where interest rates depend linearly on some factors. We derive in a HEATH, JARROW and MORTON [1992] type framework what the main consequences of this assumption are, especially when volatilities are stochastic. We show that such a framework is able to encompass most of previous models. Secondly, we propose an econometric methodology to estimate the special case of the Linear Gaussian Model.

---

* A. FRACHOT : Banque de France, DEER-Centre de Recherche; J.-Ph. LESNE : Banque de France, ESSEC et THEMA, Université de Cergy-Pontoise. Nous remercions Darrell Duffie, Henri Pagès et Eric Renault pour leurs commentaires et suggestions.

1 Introduction

La modélisation de la courbe des taux d'intérêt est depuis quelques années un domaine particulièrement actif de la théorie de la finance : plusieurs modèles généraux ont été proposés pour décrire les mouvements de la structure par terme des taux dans un cadre excluant les opportunités d'arbitrage, par exemple celui de HEATH, JARROW et MORTON [1992]. L'un des avantages majeurs de ces modèles est qu'ils ne nécessitent pas l'introduction explicite de prime de risque, dans la mesure où la dynamique des taux est formalisée sous la probabilité « risque-neutre », sous laquelle sont également calculées les espérances de gains actualisés donnant la valeur des actifs contingents à la courbe des taux.

Puisque sous la probabilité risque-neutre les termes de dérive de tous les actifs sont égaux au taux instantané, ces modèles sont totalement paramétrés par les fonctions de volatilité, qui doivent satisfaire des conditions peu restrictives (de régularité par exemple); ceci conduit à une classe de fonctions de volatilité admissibles beaucoup trop large pour les applications économétriques. Il est dans ce cas nécessaire de spécifier davantage la volatilité, de manière à en trouver un paramétrage assez réduit, tout en retraçant correctement les principales caractéristiques de la courbe des taux. Une voie consiste à introduire une hypothèse supplémentaire de structure factorielle; comme l'ont montré un certain nombre d'études empiriques (par exemple LITTERMAN et SCHEINKMAN [1988]), les mouvements de la courbe des taux semblent gouvernés par un petit nombre de « facteurs » aléatoires; du point de vue théorique, cela revient à dire que les taux (ou les prix) des bons zéro-coupon sont des fonctions déterministes de la durée de vie résiduelle du bon et de ces variables d'état, qui incorporent donc toute l'incertitude présente dans la dynamique des taux. Plusieurs modèles théoriques ont été proposés, dans lesquels ces variables d'état sont un taux court, un taux long ou encore l'écart entre ces deux taux (voir par exemple VASICEK [1977] ou BRENNAN et SCHWARTZ [1979]).

Supposer l'existence de telles variables d'état semble peu restrictif *a priori* mais suffit à restreindre fortement la classe des fonctions de volatilité admissibles. Il reste alors à spécifier précisément la volatilité elle-même, ce qui dépend crucialement de son caractère stochastique ou non.

Si l'on suppose que la volatilité est déterministe, on aboutit au Modèle Linéaire Gaussien, où l'existence de variables d'état implique que la volatilité est une combinaison linéaire de fonctions exponentielles (voir par exemple (JAMSHIDIAN [1989], EL KAROUI, MYNENI et VISWANATHAN [1992], EL KAROUI et LACOSTE [1992], FRACHOT, JANCI et LACOSTE [1993]), DUFFIE et KAN [1993]...). Cependant, pour être en accord avec la présence d'effets ARCH dans les séries de taux d'intérêt, il semble plus naturel d'étudier des modèles à volatilité stochastique. Dans ce cas également, nous montrons que l'hypothèse de structure factorielle permet de trouver des spécifications précises de la fonction de volatilité, et donc du modèle dans son ensemble.

Dans la section 2, nous rappelons brièvement le cadre proposé par HEATH, JARROW et MORTON [1992] où seule l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage est introduite. La section 3 traduit les conséquences de l'hypothèse supplémentaire de structure factorielle. Les sections 4 et 5 sont consacrées à l'économétrie de ce type de modèle lorsqu'on suppose les volatilités déterministes (Modèle Linéaire Gaussien). Les preuves sont données en annexe.

2 Le modèle de HEATH, JARROW et MORTON [1992]

Dans cette section, nous rappelons brièvement le cadre proposé par HEATH, JARROW et MORTON [1992] (HJM par la suite), dans lequel l'absence d'opportunité d'arbitrage est caractérisée par l'existence d'une probabilité risque-neutre. Nous notons $B(t,T)$ le prix à la date t d'un bon zéro-coupon expirant en T ($B(t,t) = 1, \ \forall \ t$); le taux d'intérêt actuariel d'un bon zéro-coupon est défini par :

$$Y(t,T) = -\frac{1}{T-t} Ln \ B(t,T),$$

tandis que le taux instantané à terme (à la date t pour la maturité T) vaut [1] :

$$f(t,T) = -\partial_2 Ln \ B(t,T).$$

Enfin, le taux instantané sans risque est $r_t = f(t,t)$.

Clairement, l'ensemble de la structure par termes est défini d'une manière équivalente par chacune des trois courbes suivantes :

$$\begin{cases} B(t,.) & \text{(avec la contrainte } B(t,t) = 1) \\ Y(t,.) \\ f(t,.) \end{cases}$$

HJM proposent une large classe de processus de diffusion pour les taux à terme :

$$(1) \qquad f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)'.dW_s$$

où $(W_t)_t$ est un processus de Wiener standard à m-composantes sous la probabilité objective Q associé à sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t$. σ' est la transposée du vecteur de volatilité (de dimension m) supposé continu, adapté

1. Le symbole ∂_2 dénote bien sûr la dérivée partielle par rapport au second argument.

et suffisamment régulier pour que l'équation (1) ait une unique solution forte. De plus, cette fonction de volatilité satisfait l'hypothèse habituelle :

HYPOTHÈSE 1 : La matrice $m \times m$

$$\begin{pmatrix} \sigma(t,T_1)' \\ \vdots \\ \sigma(t,T_m)' \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout t et tout m-uplet de maturités (distinctes) $T_1, \ldots, T_m$.

Puisque $B(t,T) = exp\left[-\int_t^T f(t,s)ds\right]$, le théorème de Fubini pour les intégrales stochastiques donne :

$$dB(t,T) = [r(t) + b(t,T)]B(t,T)dt - B(t,T)\tilde{\sigma}(t,T)'.dW_t$$

où :

$$\tilde{\sigma}(t,T) = \int_t^T \sigma(t,v)dv$$

$$b(t,T) = -\int_t^T \alpha(t,v)dv + \frac{1}{2}\|\tilde{\sigma}(t,T)\|^2.$$

L'absence d'opportunités d'arbitrage impose qu'existe entre les termes de dérive et de volatilité la relation suivante :

$$\alpha(t,T) = \left(\int_t^T \sigma(t,\tau)d\tau \; - \; \lambda(t)\right)' . \, \sigma(t,T) \tag{2}$$

où $\lambda(t)$ s'interprète comme le prix de marché du risque. S'il est supposé suffisamment régulier pour que le théorème de Girsanov s'applique, on en déduit l'existence d'une probabilité P (équivalente à Q), appelée probabilité risque-neutre, sous laquelle les prix de tous les bons zéro-coupon, une fois actualisés au taux sans risque, sont des martingales :

$$dB(t,T) = r(t)B(t,T)dt - B(t,T)\tilde{\sigma}(t,T)'.d\tilde{W}_t \tag{3}$$

où $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda(s)ds$ est un processus de Wiener standard sous la probabilité P.

Cela implique que sous P, le processus de taux à terme suit la diffusion :

$$\begin{aligned} f(t,T) =& f(0,T) \\ &+ \int_0^t \left(\int_s^T \sigma(s,\tau)'d\tau\right).\sigma(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)'.d\tilde{W}_s \end{aligned} \tag{4}$$

ou encore (en utilisant $\tilde{\sigma}$) :

$$(5)\ f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \tilde{\sigma}(s,T)'.\sigma(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)'.d\tilde{W}_s$$
$$= f(0,T) + \int_0^t \frac{1}{2}\partial_2 \parallel \tilde{\sigma}(s,T) \parallel^2 ds + \int_0^t \partial_2\tilde{\sigma}(s,T)'.d\tilde{W}_s.$$

Il en résulte que la courbe des taux est complètement paramétrée par la fonction de volatilité $\sigma(t,T)$ (ou $\tilde{\sigma}(t,T)$) et la courbe des taux initiale $(f(0,t))_t$. Cependant, dans la mesure où la volatilité n'est pas contrainte (en dehors de conditions techniques de régularité), le modèle comporte encore un nombre infini de paramètres.

3 Modèles factoriels de la courbe des taux

Pour contraindre davantage la fonction de volatilité, une hypothèse naturelle consiste à supposer que la dynamique des taux est gouvernée par m variables d'état.

3.1. Hypothèse de structure factorielle

Suivant les cas, nous utiliserons les hypothèses de structures factorielles stricte ou linéaire, définies ci-après.

Hypothèse 2 (Structure factorielle stricte) : La structure par termes des taux d'intérêt suit une structure factorielle stricte de dimension m s'il existe un processus de dimension m, (F_t), et une fonction déterministe suffisamment régulière $G(.,.,.)$ telle que :

$$(6) \qquad \forall\, t \leq T,\ \ f(t,T)\ =\ G(t,T,F_t).$$

Cette hypothèse aurait pu être formulée de manière équivalente sur les taux ou les prix des bons zéro-coupon, puisque ceux-ci sont respectivement des intégrales ou des exponentielles d'intégrales des taux à terme.

L'hypothèse factorielle autorise *a priori* l'existence de facteurs endogènes qui seraient certains taux particuliers (taux court, taux long, écart de taux), comme celle de facteurs exogènes au modèle (par exemple des variables macroéconomiques), qui seraient censés apporter une information supplémentaire. Cependant, la proposition suivante montre que ces deux approches sont équivalentes :

Proposition 1 : Toute structure factorielle stricte admet une représentation endogène, c'est-à-dire une représentation dans laquelle les facteurs sont certains taux particuliers.

En conséquence, il devient quelque peu arbitraire d'attribuer *a priori* un sens économique aux facteurs, dans la mesure où ceux-ci pourront toujours être identifiés à des taux particuliers. Par exemple, Longstaff et Schwartz [1992] relient l'un de leurs deux facteurs à la volatilité des taux, mais cette volatilité peut toujours s'exprimer comme une fonction de deux taux particuliers.

Un cas particulièrement simple de l'hypothèse 2 est celui où la fonction G est affine par rapport aux facteurs :

Hypothèse 3 (Structure factorielle linéaire) : La structure par termes présente une structure factorielle linéaire de dimension m s'il existe un processus (F_t) et deux fonctions $a(.,.)$ et $b(.,.)$ tels que :

$$\forall\, t \leq T, \;\; f(t,T) \;=\; a(t,T)'.F_t + b(t,T).$$

Dans ce cadre, il est immédiat de constater qu'on peut toujours identifier les facteurs à m taux particuliers, d'échéances $\theta_1, \ldots, \theta_m$, ce qui requiert d'ajouter les conditions d'identification suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} b(t,t+\theta_i) = 0, & \forall\, i = 1,\ldots,m, \\ a_i(t,t+\theta_i) = 1, & \forall\, i = 1,\ldots,m, \\ a_i(t,t+\theta_j) = 0, & \forall\, i,j,\; i \neq j, \end{array} \right. \tag{7}$$

Enfin, en posant :

$$A_i(t,T) = \int_t^T a_i(t,s)ds$$

il est immédiat de voir que les taux zéro-coupon suivent aussi une structure factorielle linéaire :

$$\begin{aligned} (T-t)\,Y(t,T) &= \int_t^T f(t,s)ds \\ &= \int_t^T b(t,s)ds + A(t,T)'.F_t \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant expliciter les contraintes que l'hypothèse de structure factorielle impose sur la forme de la courbe des taux à chaque instant (contraintes statiques) ainsi que sur la dynamique des facteurs (contraintes dynamiques), dans le but d'obtenir un paramétrage assez réduit des fonctions de volatilité, qu'elles soient aléatoires ou non.

3.2. Hypothèses sur la volatilité

De nombreux travaux empiriques ont bien montré que la volatilité des taux d'intérêt présente un caractère aléatoire. Une façon simple d'introduire cette propriété dans notre modèle consiste à supposer que le vecteur $\sigma(t,T)$ des volatilités est fonction des facteurs aléatoires F_t, qui constituent donc des variables d'état à la fois pour les différents taux et pour leurs volatilités :

HYPOTHÈSE 4 : Le vecteur $\sigma(t,T)$ est une fonction (supposée suffisamment régulière) des facteurs F_t :

$$\sigma(t,T) = \sigma(t,T,F_t)$$

On note encore $\tilde{\sigma}(t,T,F_t) = \int_t^T \sigma(t,s,F_t)ds$, et donc $\sigma(t,T,F_t) = \partial_2\tilde{\sigma}(t,T,F_t)$.

Le Modèle Linéaire Gaussien, qui a été largement traité dans la littérature récente (voir par exemple JAMSHIDIAN [1989] ou EL KAROUI, MYNENI et VISWANATHAN [1992]), apparaît clairement comme un cas particulier de l'hypothèse précédente dans lequel la fonction σ est déterministe, donc ne dépend pas de F_t. On sait que dans ce cas toute structure factorielle est linéaire, c'est-à-dire que les hypothèses 3.1 et 3.2 sont équivalentes. Il est donc important d'établir des conditions suffisantes sous lesquelles cette équivalence se transpose au cas où les volatilités peuvent être stochastiques. Ces conditions, peu restrictives, sont satisfaites par la quasi-totalité des modèles de taux actuels, et reviennent simplement à supposer qu'il y a séparabilité entre la partie temporelle et la partie stochastique de la volatilité :

HYPOTHÈSE 5 :

$$\sigma(t,T,F_t) = \Omega(t,F_t)'.a(t,T)$$

où $\Omega(t,F_t)$ est une matrice $m \times m$ et $a(t,T)$ un vecteur déterministe de taille m.

Sous cette hypothèse, on peut alors établir la proposition suivante :

PROPOSITION 2 : Sous l'hypothèse 5, toute structure factorielle stricte est linéaire.

Nous pouvons alors établir le résultat central de cette partie, qui permet de caractériser précisément à la fois la forme de la structure par termes et celle de la dynamique des facteurs (et donc de tous les taux), et d'exhiber les paramètres communs aux parties statiques et dynamiques (voir DUFFIE et KAN [1993] pour le même type d'approche, mais dans un cadre différent de celui de HEATH, JARROW et MORTON [1992]).

PROPOSITION 3 : Si les hypothèses 2, 4 et 5 sont satisfaites et si la fonction $a(t,T)$ définie ci-dessus est homogène dans le temps : $a(t,T) = a(T-t)$, alors :
1) la courbe des taux vérifie :

$$f(t,T) = b(t,T) + a(T-t)'.F_t$$

2) la dynamique des facteurs F_t est donnée par un modèle de Cox-Ingersoll-Ross généralisé :

$$dF_t = (\phi(t) - \Gamma.F_t)\, dt + V(t, F_t).d\tilde{W}_t$$

où

a) $A(x) = \int_0^x a(u)du = (A_1(x), ..., A_m(x))'$ est solution d'une équation de Riccati multi-dimensionnelle :

$$\begin{cases} \partial A(x) = \partial A(0) - \Gamma' A(x) - \frac{1}{2}\Big(\sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij} A_i(x) A_j(x)\Big) \\ A(0) = 0 \end{cases}$$

avec Γ matrice $m \times m$ et $(\alpha_{ij})_{ij}$ des vecteurs $m \times 1$ vérifiant $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \forall\ i, j$

b) le terme $b(t,T)$ est solution de :

$$\begin{cases} \partial_1 b(t,T) = \sum_{i,j=1}^{m} \beta_{ij}(t) a_i(T-t) A_j(T-t) - a(T-t)'.\phi(t) \\ b(t,t) = 0, \ \forall\, t \end{cases}$$

avec $\phi(t)$ fonction vectorielle à m dimensions et $(\beta_{ij})_{ij}$ m^2 fonctions réelles vérifiant $\beta_{ij}(t) = \beta_{ji}(t), \forall\ i, j$

c) $V(t, F_t).V(t, F_t)'$ est linéaire en F_t :

$$V(t, F_t).V(t, F_t)' = \begin{bmatrix} \alpha'_{11}.F_t + \beta_{11}(t) & \dots & \alpha'_{1m}.F_t + \beta_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{m1}.F_t + \beta_{m1}(t) & \dots & \alpha'_{mm}.F_t + \beta_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

Cette proposition appelle plusieurs remarques : premièrement, l'identification des facteurs à des taux particuliers fournira des conditions aux bornes sur les fonctions A et b, qui sont les conditions (7), ce qui permet d'identifier tous les paramètres. Deuxièmement, les fonctions $\phi(t)$ et $\beta_{ij}(t)$ restent à spécifier. L'annexe 4 montre que la donnée de la courbe des taux initiale ne suffit pas à les construire, et qu'il reste donc un choix arbitraire à faire. Troisièmement, on peut proposer des cas particuliers. Ainsi, si l'on prend les α_{ij} tous nuls, le modèle est à volatilité déterministe (Modèle Linéaire Gaussien). La fonction $A(x)$ ainsi que la volatilité $\sigma(x)$ sont des combinaisons linéaires d'exponentielles $e^{-\lambda_i x}$, où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice Γ. Comme autre cas particulier, on peut se restreindre au cas où l'équation de Riccati multi-dimensionnelle peut se résoudre explicitement. Il s'agit intuitivement du cas où ce système de Riccati se découple en m équations uni-dimensionnelles. Ceci n'est possible que pour des valeurs très particulières des paramètres Γ et α_{ij}. On obtient alors le modèle de Longstaff et Schwartz [1992]. Le cas uni-dimensionnel ($m = 1$) correspond au modèle bien connu de Cox, Ingersoll et Ross [1985]. Enfin, Duffie et Kan [1993] proposent un cas particulier où la matrice $V(t, F_t)$ s'écrit :

$$V(t, F_t) = \Sigma.Diag[v_1(F_t), ..., v_m(F_t)]$$

où Σ est une matrice constante et $Diag[v_1(F_t), ..., v_m(F_t)]$ une matrice diagonale composée de racines carrées de formes linéaires en F_t. Bien que ce soit *a priori* un cas particulier, il est néanmoins très intéressant puisqu'il permet d'appréhender les problèmes d'existence d'une solution à l'équation différentielle stochastique suivie par les facteurs.

4 L'économétrie du Modèle Linéaire Gaussien

Nous allons maintenant développer des méthodes simples d'estimation des valeurs propres λ_i de la matrice Γ, définie dans la proposition (3). Intuitivement, ces paramètres mesurent la vitesse d'ajustement des facteurs, c'est-à-dire l'intensité de la force de retour à la moyenne qu'ils subissent. Ces paramètres présentent un intérêt particulier puisque les stratégies de couverture sont fondées sur eux seuls (voir FRACHOT, JANCI et LACOSTE [1993]).

Afin de pouvoir estimer ces paramètres à partir de nos données, dans lesquelles les maturités et les dates d'observation des taux sont évidemment discrètes, il est au préalable nécessaire d'écrire une version discrétisée du modèle.

4.1. Discrétisation du modèle

Nous utiliserons par la suite des données de prix zéro-coupon qui peuvent être journalières ou hebdomadaires et qui concernent des maturités comptées en mois. La plupart de ces prix zéro-coupon ne sont en général pas observés directement puisqu'il existe peu de tels titres en France. Il est donc nécessaire de les reconstituer (par interpolation) à partir des observables, c'est-à-dire les prix d'obligation.

Les dates t sont maintenant discrètes : $t = 1, 2...$ et les dates d'échéance T sont également discrètes avec un pas de temps *a priori* différent Δ : $T = t + \Delta, t + 2\Delta, ..., t + N\Delta$.

La courbe des taux peut alors être décrite par les taux à terme élémentaires suivants :

$$F(t, t + k\Delta) = -Ln \frac{B(t, t + k\Delta)}{B(t, t + (k-1)\Delta)}$$

Le taux court correspond donc à $F(t, t + \Delta)$. En utilisant l'équation (5), on voit que :

$$(8) \quad F(t, t + k\Delta) = C(t, t + k\Delta) + \int_0^t \left[\int_{t+(k-1)\Delta}^{t+k\Delta} \sigma(s-u)'ds \right] .d\tilde{W}_u$$

où la volatilité a la forme suivante :

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{m} e^{-\lambda_i x} \sigma_0 i$$

et où :

$$\begin{aligned}
&(9)\ C(t, t + k\Delta) \\
&\qquad = \int_{t+(k-1)\Delta}^{t+k\Delta} f(0, s) ds \\
&(10) \qquad + \int_0^t \left(\left\| \int_0^{t+k\Delta-u} \sigma(x) dx \right\|^2 - \left\| \int_0^{t+(k-1)\Delta-u} \sigma(x) dx \right\|^2 \right) du.
\end{aligned}$$

L'équation (8) est donc l'équation fondamentale qui relie les données au modèle théorique.

Nous noterons (Z_t) la « courbe des taux » à la date t, c'est-à-dire le vecteur des observations :

$$Z_t = \begin{pmatrix} F(t, t + \Delta) \\ \vdots \\ F(t, t + N\Delta) \end{pmatrix}, \quad t = 1, 2, ...$$

4.2. Le modèle factoriel

On retrouve le modèle factoriel en injectant la forme exponentielle des volatilités dans l'équation (8):

$$(11) \qquad F(t, t + k\Delta) = C(t, t + k\Delta) + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t e^{-\lambda_i (t+k\Delta-u)} \sigma_{0i}^{'} . d\tilde{W}_u$$

$F(t, t+k\Delta)$ apparaît alors comme une combinaison linéaire de m facteurs :

$$(12) \qquad F(t, t + k\Delta) = C(t, t + k\Delta) + \sum_{i=1}^{m} e^{-\lambda_i k\Delta} F_{it}$$

où F_{it} est égal à :

$$F_{it} = \int_0^t e^{-\lambda_i (t-u)} \sigma_{0i}^{'} . d\tilde{W}_u$$

Le modèle économétrique est donc donnée par deux parties :

- une *partie statique* qui relie les taux aux facteurs,
- une *partie dynamique* qui décrit la dynamique des facteurs.

4.2.1. *Partie statique*

Sous forme matricielle, cette partie statique peut s'écrire :

$$Z_t = C_t + B.F_t \tag{13}$$

où

$$F_t = \begin{bmatrix} F_{1t} \\ \vdots \\ F_{mt} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$B = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 \Delta} & \dots & e^{-\lambda_m \Delta} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{-\lambda_1 N \Delta} & \dots & e^{-\lambda_m N \Delta} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Comme tout modèle factoriel, cette forme n'est pas unique puisque, pour toute matrice L inversible, on a :

$$Z_t = C_t + B^* F_t^*$$

avec

$$B^* = BL \quad F_t^* = L^{-1} F_t$$

4.2.2. *Partie dynamique*

La dynamique des facteurs peut s'écrire comme un modèle vectoriel auto-régressif (VAR) d'ordre 1. À partir de la définition des facteurs F_t, on a :

$$F_t = DF_{t-1} + \Omega^{\frac{1}{2}} \tilde{\epsilon}_t \tag{16}$$

avec

$$D = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{-\lambda_m} \end{bmatrix}$$

et où $(\tilde{\epsilon}_t)$ est un bruit blanc gaussien multidimensionnel (sous P). Malheureusement, $(\tilde{\epsilon}_t)$ n'est plus bruit blanc sous la probabilité « objective » Q puisque :

$$E^Q(\tilde{\epsilon}_t / \mathcal{F}_{t-1}) \neq 0.$$

Pour cette raison, il est toujours délicat d'essayer d'estimer les dynamiques induites par les modèles d'arbitrage sauf à spécifier comment on passe de la probabilité risque-neutre à la probabilité objective, ce qui nécessite un cadre plus large (par exemple, un modèle d'équilibre) dans lequel le prix du risque a une forme explicite. Pour éviter ce problème, nous n'utiliserons pas la partie dynamique et nous nous concentrerons sur la partie statique. Une première méthode d'estimation des λ_i consisterait à estimer sans contrainte la matrice B par une ACP, puis à chercher les λ_i qui ajustent au mieux cette estimation à la forme théorique donnée par (15). Toutefois, cet ajustement, non-linéaire, est rendu plus difficile par le fait que ces matrices sont définies à une transformation inversible près. Nous proposons au contraire une vision duale, plus simple, qui exploite le fait que le modèle factoriel induit des relations linéaires particulières entre les taux de diverses maturités.

4.3. **Analyse par régression linéaire**

Partons du modèle factoriel :

$$Z_t = C_t + BF_t \tag{17}$$

et remarquons qu'il est équivalent à la représentation duale :

$$(Id - B(B'B)^{-1}B')(Z_t - C_t) = 0. \tag{18}$$

Ceci signifie qu'il existe $N - m$ relations linéaires entre les taux de différentes maturités à un instant donné et que ces relations sont stables au cours du temps. De plus, puisqu'elles sont déterministes, elles ne dépendent plus de la mesure de probabilité sous-jacente. Il est important de voir que, compte-tenu de la forme particulière de la matrice B, l'orthogonal de l'espace engendré par les colonnes de B possède une base très simple :

$$B^{\perp} = \begin{pmatrix} -\alpha_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & -\alpha_m & & \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & & & -\alpha_m \\ 1 & -\alpha_1 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\alpha_1 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

où les (α_j) constituent un nouveau paramétrage, qui est équivalent aux (λ_i) puisqu'il est facile de voir que l'équation polynomiale

$$\xi(x) = X^m - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j X^{m-j} = 0$$

admet pour solutions :

$$e^{-\lambda_1 \Delta}, \dots, e^{-\lambda_m \Delta}.$$

Ainsi, au lieu d'estimer les paramètres initiaux (λ_i), nous estimons les coefficients du polynôme dont ils sont les racines :

$$(19)\quad \begin{cases} F(t, t+(m+1)\Delta) = D(t, t+(m+1)\Delta) \\ \qquad\qquad + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j F(t, t+(m+1-j)\Delta) \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ F(t, t+N\Delta) = D(t, t+N\Delta) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j F(t, t+(N-j)\Delta) \end{cases}$$

où les termes déterministes $D(.,.)$ sont immédiatement calculés à partir de C_t.

Il est alors naturel d'estimer par moindres-carrés ce système de contraintes entre les taux observés, puis de résoudre le polynôme associé pour trouver les λ_i. Cette approche, outre sa simplicité, a l'avantage de ne pas nécessiter un choix particulier de la base des facteurs, qui n'a jamais été explicitée dans ce qui précède. En revanche, l'idenfication des autres paramètres (par exemple les σ_{0i} de la formule (11)) requiert le choix d'une base de facteurs particulière, par exemple un couple de deux taux de maturités particulières.

Cependant, plusieurs points restent à discuter. Premièrement, les termes déterministes D ont une expression compliquée en fonction des paramètres du modèle que nous n'exploiterons pas, ce qui réduit nécessairement l'efficacité de la procédure. Nous remplacerons donc les fonctions $D(t, t + k\Delta)$ par des paramètres libres D_k, ne dépendant que des maturités. Ceci n'est licite que si ces fonctions sont en fait indépendantes du temps; sinon, ce remplacement par des constantes dans l'estimation impliquerait une mauvaise spécification du modèle et donc des estimations des α_i asymptotiquement biaisés. On montre en annexe 5 qu'effectivement, $D(t, t + k\Delta)$ est asymptotiquement indépendant de t à condition que les λ_i ne soient pas nuls.

Deuxièmement, il faut discuter les problèmes de stationarité. En effet, d'après la partie dynamique du modèle, dès qu'un des paramètres λ_i est nul, il y a non-stationarité sous la probabilité risque-neutre et donc très probablement sous la probabilité objective. On peut montrer, dans ce cas, que la présence d'un λ_i nul perturbe l'ensemble du processus d'estimation, en introduisant des termes de tendance déterministe (en t) dans les équations. Les deux arguments précédents (non-dépendance de D en t, stationarité) nous conduisent à faire l'hypothèse théorique que les λ_i sont tous strictement positifs même si, empiriquement, nous trouverons que l'un d'eux est proche de 0.

5 Applications sur données françaises

À titre d'illustration, nous appliquons cette méthodologie sur deux fichiers de données. Il y a deux moyens d'obtenir des taux zéro-coupon : soit en utilisant les taux PIBOR (pour les maturités les plus liquides de 1, 3, 6 et 12 mois), soit en les reconstituant par interpolation à partir des prix d'obligations (les maturités sont alors trimestrielles).

Nous cherchons à ajuster un modèle à deux facteurs et nous comparerons évidemment les deux couples de valeurs (λ_1, λ_2) obtenus pour ces deux fichiers.

5.1. Premier fichier : taux interpolés

Notre premier fichier contient les prix des zéro-coupon pour des maturités trimestrielles, reconstitués par une méthode d'interpolation polynomiale (voir De Bandt et Lesne [1991], ce qui nous permet de reconstituer :

$$H_1(t, t+3k\Delta) = -Ln\,\frac{B(t, t+3k\Delta)}{B(t, t+3(k-1)\Delta)}$$

où Δ correspond à 1 mois. Nous utilisons ce pas de temps élémentaire d'un mois pour pouvoir comparer ces résultats à ceux obtenus à partir des taux PIBOR. Les observations obtenues, $H_1(t, t+k\Delta)$, s'écrivent donc :

$$\begin{cases} H_1(t, t+\Delta) = \sum_{k=1}^{3} F(t, t+k\Delta) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ H_1(t, t+3N\Delta) = \sum_{k=N-2}^{N} F(t, t+k\Delta) \end{cases}$$

et la partie statique :

$$(20) \qquad \begin{cases} H_1(t, t+3\Delta) = \left[\sum_{k=1}^{3} e^{-\lambda_1 k\Delta}\right].F_{1t} \\ \qquad\qquad + \left[\sum_{k=1}^{3} e^{-\lambda_2 k\Delta}\right].F_{2t} + C(3) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ H_1(t, t+3N\Delta) = \left[\sum_{k=N-2}^{N} e^{-\lambda_1 k\Delta}\right].F_{1t} \\ \qquad\qquad + \left[\sum_{k=N-2}^{N} e^{-\lambda_2 k\Delta}\right].F_{2t} + C(N) \end{cases}$$

Pour récupérer les $e^{-\lambda_i\Delta}$, il faut donc résoudre :

$$(21) \qquad X^8 + X^7 + X^6 - \alpha_1(X^5 + X^4 + X^3) - \alpha_2(X^2 + X + 1) = 0$$

soit :

$$X^6 - \alpha_1 X^3 - \alpha_2 = 0$$

où nous retenons les deux racines comprises entre 0 et 1 et où les paramètres α_1 et α_2 sont estimés par simple régression linéaire :

$$\begin{cases} H_1(t, t+3\Delta) = \alpha_1.H_1(t, t+2\Delta) + \alpha_2.H_1(t, t+\Delta) + D(3) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ H_1(t, t+3N\Delta) = \alpha_1.H_1(t, t+3(N-1)\Delta) \\ \qquad\qquad + \alpha_2.H_1(t, t+3(N-2)\Delta) + D(N) \end{cases}$$

5.2. Second fichier : taux PIBOR

Ces taux sont directement des taux zéro-coupon, mais il nous faut maintenant tenir compte du fait que les maturités disponibles ne sont pas régulièrement espacées; ainsi on observe :

$$\begin{cases} B(t, t+\Delta) \\ B(t, t+3\Delta) \\ B(t, t+6\Delta) \\ B(t, t+12\Delta) \end{cases}$$

ce qui permet de construire les taux à terme suivants :

$$\begin{cases} H_2(t, t, t+\Delta) = -Ln \dfrac{B(t, t+\Delta)}{B(t,t)} \\ H_2(t, t+\Delta, t+3\Delta) = -Ln \dfrac{B(t, t+3\Delta)}{B(t, t+\Delta)} \\ H_2(t, t+3\Delta, t+6\Delta) = -Ln \dfrac{B(t, t+6\Delta)}{B(t, t+3\Delta)} \\ H_2(t, t+6\Delta, t+12\Delta) = -Ln \dfrac{B(t, t+12\Delta)}{B(t, t+6\Delta)} \end{cases}$$

Il est alors facile de voir que les polynômes d'intérêt sont :

$$(22) \qquad \begin{cases} X^5 + X^4 + X^3 - \alpha_1.(X^2 + X) - \alpha_2 = 0 \\ X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 \\ \quad - \tilde{\alpha}_1(X^4 + X^3 + X^2) - \tilde{\alpha}_2(X+1) = 0 \end{cases}$$

où α_1 et α_2 sont estimés en régressant $H_2(t, t+3\Delta, t+6\Delta)$ sur $H_2(t, t+\Delta, t+3\Delta)$ et $H_2(t, t, t+\Delta)$, et $\tilde{\alpha}_1$ et $\tilde{\alpha}_2$ en régressant $H_2(t, t+6\Delta, t+12\Delta)$ sur $H_2(t, t+3\Delta, t+6\Delta)$ et $H_2(t, t+\Delta, t+3\Delta)$.

Puisque ces deux équations polynomiales ont deux racines communes, il existe une relation bijective entre les α_i et $\tilde{\alpha}_i$. Une façon plus efficace d'estimer les paramètres serait de tenir compte de cette contrainte. Toutefois, elle est non linéaire et difficilement utilisable.

Remarquons également que, si l'on croit au modèle à deux facteurs, une régression de $H_2(t, t+6\Delta, t+12\Delta)$ sur les *trois* précédents taux doit donner les mêmes valeurs de $e^{-\lambda_1\Delta}$ et $e^{-\lambda_2\Delta}$, bien que, par construction, les régresseurs soient parfaitement corrélés en théorie. Ainsi, le polynôme correspondant à la régression s'écrit :

$$(23) \qquad X^{11} + X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 \\ - \tilde{\tilde{\alpha}}_1(X^5 + X^4 + X^3) - \tilde{\tilde{\alpha}}_2(X^2 + X) - \tilde{\tilde{\alpha}}_3 = 0.$$

Cependant, dans le cas d'un modèle à deux facteurs, les coefficients de la régression $\tilde{\tilde{\alpha}}$ n'ont pas de sens; en particulier, l'estimation de $\tilde{\tilde{\alpha}}$ ainsi obtenue devrait être très instable (si par exemple, on coupait l'échantillon en deux périodes d'observations) alors que les deux racines cherchées devraient rester les mêmes. D'une certaine façon, cette remarque constitue un moyen heuristique de « tester » si le modèle comporte deux ou trois facteurs.

5.3. Résultats empiriques

Sur notre premier fichier, nous effectuons les régressions décrites précédemment et résolvons les polynômes correspondants dans deux cas : $N = 15$ trimestres et $N = 30$ trimestres.

Dans les deux cas, nous n'obtenons que deux racines comprises entre 0 et 1 (tableau 1). Nous avons également essayé d'ajuster un modèle à trois facteurs en régressant un taux sur les trois précédents (tableau 2).

TABLEAU 1

Régression sur premier fichier (taux interpolés) : $H_1(t, t + 3k\Delta) = C_1(k) + \alpha_1 H_1(t, t + 3(k-1)\Delta) + \alpha_2 H_1(t, t + 3(k-2)\Delta)$ ***et résolution de*** $X^6 - \alpha_1 X^3 - \alpha_2 = 0$

	$N = 15$	$N = 30$
$e^{-\lambda_1 \Delta}$	0.68	0.70
$e^{-\lambda_2 \Delta}$	0.99	0.99

TABLEAU 2

Régression sur premier fichier (3 facteurs)

	$N = 15$	$N = 30$
$e^{-\lambda_1 \Delta}$	0.58	0.58
$e^{-\lambda_2 \Delta}$	0.99	0.99

L'absence d'une troisième racine entre 0 et 1 indique que le modèle comporte en fait au plus deux facteurs.

Sur le deuxième fichier (taux PIBOR), nous effectuons les régressions :

$$\left\{\begin{aligned} H_2(t, t+3\Delta, t+6\Delta) =& \alpha_1.H_2(t, t+\Delta, t+3\Delta) \\ & + \alpha_2.H_2(t, t, t+\Delta) + C_2(1) \\ H_2(t, t+6\Delta, t+12\Delta) =& \tilde{\alpha}_1.H_2(t, t+3\Delta, t+6\Delta) \\ & + \tilde{\alpha}_2.H_2(t, t+\Delta, t+3\Delta) + C_2(2) \\ H_2(t, t+6\Delta, t+12\Delta) =& \tilde{\tilde{\alpha}}_1.H_2(t, t+3\Delta, t+6\Delta) \\ & + \tilde{\tilde{\alpha}}_2.H_2(t, t+\Delta, t+3\Delta) \\ & + \tilde{\tilde{\alpha}}_3.H_2(t, t, t+\Delta) + C_2(3) \end{aligned}\right.$$

associées aux polynômes :

$$X^5 + X^4 + X^3 - \alpha_1.(X^2 + X) - \alpha_2 = 0 \tag{24}$$

$$X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 - \tilde{\alpha}_1(X^4 + X^3 + X^2) - \tilde{\alpha}_2(X + 1) = 0 \tag{25}$$

$$X^{11} + X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 - \tilde{\tilde{\alpha}}_1(X^5 + X^4 + X^3) - \tilde{\tilde{\alpha}}_2(X^2 + X) - \tilde{\tilde{\alpha}}_3 = 0 \tag{26}$$

Nous obtenons les résultats du tableau 3 : la seconde racine est d'un ordre de grandeur très proche de celui trouvé sur le précédent fichier; la première également, quoiqu'elle n'existe pas toujours.

TABLEAU 3

Régressions sur second fichier (taux PIBOR)

	équation (24)	équation (25)	équation (26)
$e^{-\lambda_1\Delta}$	pas de racine	pas de racine	0.63
$e^{-\lambda_2\Delta}$	0.83	1.00	0.96

Pour établir la stabilité de ces résultats, nous avons divisé ce second fichier en deux périodes d'observation d'égale longueur pour obtenir les tableaux 4 et 5.

TABLEAU 4

Second fichier - Première période

	équation (24)	équation (25)	équation (26)
$e^{-\lambda_1\Delta}$	0.67	0.62	0.70
$e^{-\lambda_2\Delta}$	0.86	1.02	0.96

TABLEAU 5

Second fichier - Seconde période

	équation (24)	équation (25)	équation (26)
$e^{-\lambda_1\Delta}$	pas de racine	pas de racine	0.63
$e^{-\lambda_2\Delta}$	0.83	1.00	0.96

Comme on peut le voir, $e^{-\lambda_1\Delta}$ est compris entre 0.6 et 0.7 et $e^{-\lambda_2\Delta}$ entre 0.95 et 1.00.

Ces résultats encourageants appellent plusieurs commentaires et développements. Premièrement, les valeurs obtenues sont relativement proches bien que les deux fichiers soient de provenance différente et que les polynômes résolus soient également très différents, ce qui ne se comprend que dans le cadre du Modèle Linéaire Gaussien et en illustre la pertinence sur les données.

Cependant, nous ne sommes pas toujours assurés de l'existence de deux racines et la proximité de l'une des valeurs (en l'occurence λ_2) à zéro rend discutable l'hypothèse de stationarité des séries.

6 Conclusion

Nous avons donné ici un cadre général pour les modèles à facteurs sur les taux d'intérêt sous l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage. Le résultat essentiel est que l'hypothèse de modèle factoriel (linéaire) associée à l'absence d'opportunités d'arbitrage suffit pour obtenir une forme précise et paramétrique du modèle factoriel, ainsi que la dynamique (sous la probabilité risque-neutre) des facteurs. À titre d'illustration, le Modèle Linéaire Gaussien estimé avec deux facteurs donne des résultats intéressants qui semblent rejeter l'idée de considérer trois facteurs : en particulier, on observe deux racines stables entre 0 et 1. Cependant, ce modèle présente plusieurs faiblesses, notamment le fait que des tendances déterministes apparaissent dès qu'une des valeurs λ_i est nulle. Par ailleurs, les volatilités (*i.e.* les variances conditionnelles) sont déterministes, ce qui contredit les résultats empiriques sur l'hétéroscédasticité conditionnelle mis en évidence par la littérature ARCH. Il serait alors logique d'estimer plutôt des modèles à volatilité stochastique tels que ceux développés dans la partie 3. Le problème de l'estimation de ce type de modèles dès qu'il y a au moins deux facteurs reste à notre connaissance ouvert.

Preuve de la proposition 1

Supposons que la dynamique des taux soit :

$$F_t = F_0 + \int_0^t D(s, F_s)ds + \int_0^t V(s, F_s).d\tilde{W}_s \tag{27}$$

où $D(s, F_s)$ et $V(s, F_s)$ sont suffisamment réguliers, et écrivons l'équation (6) pour m maturités distinctes $T = t + \theta_1, ..., t + \theta_m$:

$$\begin{pmatrix} f(t, t+\theta_1) \\ \vdots \\ f(t, t+\theta_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(t, t+\theta_1, F_t) \\ \vdots \\ G(t, t+\theta_m, F_t) \end{pmatrix} = \mathcal{G}(t, t+\theta_1, \ldots, t+\theta_m, F_t).$$

Ce système d'équations peut être inversé pour exprimer F_t comme fonction déterministe des taux à terme particuliers $f(t, t+\theta_1), ..., f(t, t+\theta_m)$ du moment que $\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial F'}$ est inversible. Mais d'après le lemme d'Itô,

$$[\sigma(t, t+\theta_1), ..., \sigma(t, t+\theta_m)] = V(t, F_t)'.\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial F'}.$$

Puisque l'hypothèse 1 assure que la matrice de volatilité du membre de gauche est inversible, $\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial F'}$ l'est aussi. □

Preuve de la proposition 2

D'après la proposition 1, on sait qu'il existe une représentation endogène; on peut donc identifier les facteurs à des taux particuliers $F_t = (f(t, t+\theta_1), \ldots, f(t, t+\theta_m))$. La matrice de volatilité de F_t est donc

$$\sigma(t, T, F_t) = (\sigma(t, t+\theta_1, F_t), \ldots, \sigma(t, t+\theta_m, F_t)).\partial_3 G(t, T, F_t),$$

Mais d'après l'hypothèse 5, cela revient à :

$$\Omega(t, F_t)'.a(t, T) = \Omega(t, F_t)'.(a(t, t+\theta_1), \ldots, a(t, t+\theta_m)).\partial_3 G$$

$\Omega(t, F_t)$ est nécessairement inversible, sinon l'hypothèse 1 serait violée; en l'éliminant de chaque côté de l'équation, on en déduit que $\partial_3 G$ est déterministe, donc que la fonction $G(., ., .)$ est linéaire en F_t. □

Preuve de la proposition 3

D'après la proposition 2, on sait que le modèle est linéaire factoriel :

$$f(t,T) = a(T-t)'.F_t + b(t,T).$$

D'après le modèle HJM, on sait que la dynamique des taux sous la probabilité risque-neutre est donnée par :

$$f(t,T) = f(0,T) + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_2 \parallel \tilde{\sigma}(s,T,F_s) \parallel^2 ds + \int_0^t \partial_2\tilde{\sigma}(s,T,F_s)'.d\tilde{W}_s$$

Enfin, en notant D et V la dérive et la volatilité des facteurs, leur dynamique est :

$$F_t = F_0 + \int_0^t D(s,F_s)ds + \int_0^t V(s,F_s).d\tilde{W}_s$$

On rend compatibles ces équations en identifiant les termes de dérive et de volatilité :

$$(28) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\partial_2 \parallel \tilde{\sigma}(t,T,F_t) \parallel^2 \\ \qquad = a(T-t)'.D(t,F_t) - \partial a(T-t)'.F_t + \partial_1 b(t,T) \\ \qquad\qquad \partial_2\tilde{\sigma}(t,T,F_t) = V(t,F_t)'.a(T-t) \end{cases}$$

Par intégration par rapport à l'échéance $T-t$, on obtient : [2]

$$(29) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\partial_2 \parallel \tilde{\sigma}(t,T,F_t) \parallel^2 \\ \qquad = a(T-t)'.D(t,F_t) - \partial a(T-t)'.F_t + \partial_1 b(t,T) \\ \qquad\qquad \tilde{\sigma}(t,T,F_t) = V(t,F_t)'.A(T-t) \end{cases}$$

Ces deux équations impliquent :

$$(30) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2}a(T-t)'.V(t,F_t).V(t,F_t)'.A(T-t) \\ &\quad = a(T-t)'.D(t,F_t) - \partial a(T-t)'.F_t + \partial_1 b(t,T) \end{aligned}$$

Puisque cette équation est vérifiée dès que $T \geq t$, cela entraîne que $V(t,F_t).V(t,F_t)'$ et $D(t,F_t)$ doivent être des fonctions affines de F_t dès que

2. Nous rappelons que $A(T-t) = \int_0^{T-t} a(y)dy$.

cette équation peut être inversée. Ceci n'est plus garanti par l'hypothèse 1 et peut ne pas être vérifié dans certains cas non-génériques.

En excluant ces cas, nous pouvons écrire :

$$V(t, F_t).V(t, F_t)' = \begin{bmatrix} \alpha'_{11}.F_t + \beta_{11}(t) & \dots & \alpha'_{1m}.F_t + \beta_{1m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha'_{m1}.F_t + \beta_{m1}(t) & \dots & \alpha'_{mm}.F_t + \beta_{mm}(t) \end{bmatrix}$$
$$D(t, F_t) = \phi(t) - \Gamma.F_t$$

où $\alpha_{i,j}$ sont des vecteurs $m \times 1$ constants, Γ une matrice $m \times m$ constante, et $\phi(t)$ et $\beta_{ij}(t)$ des fonctions déterministes du temps. Remarquons que α_{ij} et Γ dépendraient du temps si l'on n'avait pas supposé l'homogénéité de la fonction $a(t, T)$.

On a ainsi prouvé que le carré de la fonction de volatilité et la dérive sont *nécessairement* des fonctions affines des facteurs, dès qu'une structure linéaire factorielle est supposée. De plus, la symétrie de la matrice $V(t, F_t).V(t, F_t)'$ impose :

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \quad \forall\, i \neq j$$
$$\beta_{ij}(t) = \beta_{ji}(t), \quad \forall\, i \neq j$$

En remplaçant $V(t, F_t).V(t, F_t)'$ et $D(t, F_t)$ dans l'équation (30) on obtient l'équation vérifiée par la fonction $A(.)$:

$$(31) \qquad \partial A(x) = \partial A(0) - \Gamma' A(x) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij} A_i(x) A_j(x)\right),$$

c'est-à-dire une équation de Riccati multi-dimensionnelle.

Finalement, le terme $b(t, T)$ est obtenu à partir des conditions (29) :

$$(32) \qquad \partial_1 b(t, T) = \sum_{i,j=1}^{m} \beta_{ij}(t) a_i(T-t) A_j(T-t) - a(T-t)'.\phi(t).$$

□

Identification des fonctions $\phi(t)$ et $\beta_{ij}(t)$

Nous discutons ici comment la donnée d'une courbe des taux initiale permet d'indentifier en partie les fonctions $\phi(t)$ et $\beta_{ij}(t)$. Identifions pour cela les facteurs F_t à des taux particuliers $(f(t, t+\theta_1), ..., f(t, t+\theta_m))$, avec $\theta_1 = 0$. L'équation différentielle sur $b(.,.)$ s'intègre sous la contrainte $b(T,T) = 0, \ \forall\ T$ sous la forme :

$$b(t,T) = -\sum_{i,j=1}^{m} \int_t^T \beta_{ij}(s) a_i(T-s) A_j(T-s) ds + \int_t^T a(T-s)'.\phi(s) ds$$

Pour $t = 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} b(0,T) &= f(0,T) - a(T)'.F_0 \\ &= -\sum_{i,j=1}^{m} \int_0^T \beta_{ij}(s) a_i(T-s) A_j(T-s) ds + \int_0^T a(T-s)'.\phi(s) ds \end{aligned}$$

qui est clairement insuffisante pour reconstituer les fonctions $\phi(t)$ et $\beta_{ij}(t)$.

Il reste donc une indétermination, qu'on peut lever en supposant que certaines de ces fonctions sont constantes. Supposer β_{ij} et ϕ constants revient en fait à postuler l'homogénéité en $T-t$ de $b(t,T)$.

Dépendance de $D(.,.)$ en t

Nous discutons ici de la forme des termes déterministes $D(.,.)$ qui apparaissent dans les régressions. Comme nous le voyons, dans la définition de $C(t, t+k\Delta)$, ce terme peut être divisé en deux parties :

- un premier terme issu de la courbe des taux initiale :

$$\int_{t+(k-1)\Delta}^{t+k\Delta} f(0,s)ds$$

- un second terme dépendant de la volatilité :

$$\frac{1}{2}\int_0^t du(\| \tilde{\sigma}(t+k\Delta-u) \|^2 - \| \tilde{\sigma}(t+(k-1)\Delta-u) \|^2)$$

où $\tilde{\sigma}$ a déjà été défini sous la forme :

$$\tilde{\sigma}(x) = \int_0^x \sigma(y)dy$$

La fonction $\tilde{\sigma}$ satisfait l'équation récursive suivante : [3]

$$(1-L).\xi(L).\tilde{\sigma}(x) = 0$$

où :

$$\xi(L) = 1 - \alpha_1 L - ... - \alpha_m L^m$$

ce qui implique que la fonction $\tilde{\sigma}$ a la forme suivante :

$$\tilde{\sigma}(x) = \sum_{i=1}^{m+1} v_i e^{-\lambda_i \Delta x}$$

où λ_{m+1} est égal à 0.

Puisque $\| \tilde{\sigma}(x) \|^2$ est égal à :

$$\| \tilde{\sigma}(x) \|^2 = \sum_{i,j=1}^{m+1} v_i' v_j e^{-(\lambda_i+\lambda_j)\Delta x}$$

il est solution de :

$$\psi(L). \| \tilde{\sigma}(x) \|^2 = 0 \qquad (33)$$

3. Nous définissons l'opérateur retard L par $L.\tilde{\sigma}(x) = \tilde{\sigma}(x-\Delta)$. Il porte donc sur les maturités.

avec

$$\psi(L) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq m+1} (1 - e^{-(\lambda_i + \lambda_j)\Delta} L)$$

Il est alors facile d'analyser la dépendance en temps de $D(t, t + k\Delta) = \xi(L).C(t, t + k\Delta)$ car :

$$\psi(L) = \xi(L).\theta(L).(1 - L)$$

avec

$$\theta(L) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq m} (1 - e^{-(\lambda_i + \lambda_j)\Delta} L)$$

En conséquence, le second terme de $D(t, t + k\Delta)$ est asymptotiquement constant dès que les paramètres λ_i sont tous strictement positifs.

En revanche, si un de ces paramètres est nul, il existe une tendance en t^2 dans C et donc en t dans D.

Concernant le premier terme issue de la courbe des taux initiale, nous supposerons qu'il converge quand t tend vers l'infini :

$$\int_{t+(k-1)\Delta}^{t+k\Delta} f(0, s) ds \longrightarrow_{t \to +\infty} \text{constant}$$

En particulier, ceci implique qu'il existe un taux long limite $Y(0, \infty)$.

• Références bibliographiques

BRENNAN, M., SCHWARTZ, E. (1979). – "A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds", *Journal of Banking and Finance*, 3, pp. 133-155.

COX, J. C., INGERSOLL, J. E., ROSS, S. A. (1985). – "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica*, 53, pp. 385-407.

DE BANDT, O., LESNE, J. P. (1991). – "Une analyse factorielle de la courbe des taux d'intérêt en France", *Document de travail*, Banque de France, Paris.

DUFFIE, D., KAN, R. (1993). – "A Yield-Factor Model of Interest Rates", *Working Paper*, Graduate School of Business, Stanford University.

EL KAROUI, N., LACOSTE, V. (1992). – "Multifactor Models of the Term Structure of Interest Rates", *AFFI*.

EL KAROUI, N., MYNENI, R., VISWANATHAN, R. (1992). – "Arbitrage Pricing and Hedging of Interest Rate Claims with State Variables. I, II", *Working Paper*, Paris VI and Stanford University.

FRACHOT, A., JANCI, D., LACOSTE, V. (1993). – "Factor Analysis of the Term Structure: a Probabilistic Approach", *Working Paper*, Banque de France, Paris.

HEATH, D., JARROW, R., MORTON, A. (1992). – "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: a New Methodology for Contingent Claims Valuation", *Econometrica*. 60, pp. 77-106.

Jamshidian, F. (1989). – "The Multifactor Gaussian Interest Rate Model and Implementation", *Working paper*, Fuji Bank, London.

Litterman, R., Scheinkman, J. (1988). – "Common Factors Affecting Bond Returns", *Working paper*, Goldman Sachs - Financial Strategies Group.

Longstaff, F., Schwartz, E. (1992). – "Interest Rate Volatility and the Term Structure: a Two-Factor General Equilibrium Model", *Journal of Finance*, 47, pp. 1259-1282.

Vasicek, O. (1977). – "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.