ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 39 — 1995

De quelques spécificités de la valorisation des ressources naturelles semi-renouvelables

Jean-Pierre AMIGUES, Gérard GAUDET, Michel MOREAUX*

RÉSUMÉ. – Certaines ressources naturelles sont disponibles sous forme de flux et de stocks, ces derniers pouvant être renouvelés par les apports en flux. On s'intéresse aux principes d'évaluation de ce genre de ressource sous différentes hypothèses concernant l'évolution de la population. On montre que si la population est croissante, les valeurs imputées du flux et des stocks peuvent momentanément diverger même si flux et stocks sont de parfaits substituts.

On Some Specificities of The Valuation of Semi-Renewable Resources

ABSTRACT. – We study the optimal valuation of semi-renewable resources, like groundwater, under different assumptions as to the evolution of the population. When the population is either constant or decreasing, valuations of flow and stock resources are identical. With an increasing population however, an optimal consumption policy may involve refraining from consuming the flow in order to restock for future consumption. In this case, the marginal valuation of the resource as a flow or as a stock may differ at times.

---

* J.-P. AMIGUES : ERNA-INRA, Université de Toulouse; G. GAUDET : Département d'Economique, Université de Laval; M. MOREAUX : ERNA-INRA, GREMAQ, IDEI, Université de Toulouse. Les auteurs remercient un rapporteur anonyme, Jacques Cremer, Louis-André Gérard-Varet, Jean-Jacques Laffont et Jean Tirole pour d'utiles commentaires sur une version préliminaire de ce travail. Pour partie cette étude a été réalisée lors d'un séjour de chercheur invité de G. Gaudet et M. Moreaux à la station ESR de l'INRA-Toulouse. Enfin ce travail a bénéficié d'une subvention du Commissariat Général du Plan (subvention n^o 4944/66-01-MPPE002). Il est clair que les idées exprimées n'engagent que leurs auteurs, qui remercient les différentes institutions qui ont bien voulu leur apporter leur concours.

1 Introduction

Certaines ressources naturelles sont disponibles sous forme de flux et sous forme de stocks, parmi ceux-ci les uns sont régulièrement alimentés ou régénérés par le flux , les autres sont au contraire des stocks non renouvelables. L'exemple type d'une telle ressource est la ressource en eau [1]. L'objet de cet article est de montrer que la tarification de ce genre de ressources, que nous appelons semi-renouvelables, obéit à des principes qui peuvent déroger des principes généraux d'évaluation au sens suivant. On s'attend à ce que des biens dont les usages et les coûts sont identiques aient à chaque instant la même valeur, cette valeur pouvant éventuellement fluctuer au cours du temps. Nous montrons que pour le type de bien étudié ici il ne faut pas exclure que, tout au moins temporairement, l'évaluation instantanée du stock renouvelable, celle du stock non renouvelable et celle du flux d'apports soient nécessairement différentes, même si les usages potentiels sont les mêmes ainsi que les coûts de mise à disposition.

Pour ce nous nous plaçons dans le cadre le plus simple possible. On ne formalise pas la production de biens intermédiaires ou finals, l'utilisation de ressources qu'elle implique, ni les choix techniques de consommation finale dont la ressource est parfois le complément indispensable. On pose que la ressource est directement consommable et que les coûts d'accès ou de prélèvement sont tous nuls. Ces hypothèses permettent de mieux mettre en évidence les phénomènes de rente pure ou de valeur intrinsèque de la ressource.

Insistons sur un point. L'objet du présent mémoire n'est pas l'examen des cycles ou quasi-cycles à court terme de fluctuation des apports et de leur régulation, mais l'utilisation rationnelle à long terme de la ressource. Dans cette optique, on peut indifféremment poser que le flux d'apports naturels fluctue et que la population est stationnaire ou qu'au contraire le flux d'apports naturels est stationnaire et que la population fluctue. C'est cette seconde batterie d'hypothèses que nous avons retenue.

Le modèle est exposé à la section 2. La section 3 est consacrée à l'étude des cas de populations non croissantes, cas pour lesquels les évaluations sont identiques à chaque instant. On examine à la section 4 les cas où la population est croissante et on met en évidence les conditions de divergence

1. On trouvera au Chapitre 10 (Freshwater) du World Resources 1990-1991, un tableau global des différentes disponibilités en eau. Les situations des différentes régions du monde en ce qui concerne la part du renouvelable et du non renouvelable sont évidemment très différentes. Par exemple dans un pays comme l'Arabie Saoudite 90 % de l'eau utilisée (tous usages confondus) est prélevée sur le stock non renouvelable. Au rythme actuel des prélèvements ce stock non renouvelable devrait être épuisé dans vingt ans. On peut aussi considérer comme non renouvelables des nappes qui sont en permanence rechargées mais qui se détériorent, par exemple par salinisation, lorsque le rythme des prélèvements dépasse un certain seuil (seuil qui peut lui-même dépendre de l'état de la nappe). On rencontre une telle situation en France, par exemple dans la région de Bordeaux, et aux Etats-Unis pour les territoires au nord du Golfe du Mexique, et en Californie.

des évaluations. On montre à la section 5 comment devrait se traduire cette divergence au plan de la gestion de la ressource. On conclut briévement à la section 6.

2 Le modèle

On considère un territoire sur lequel réside une population d'effectif $N(t)$ à l'instant t, que l'on supposera soit non croissante, soit non décroissante. $N(t)$ est continue et si nécessaire continuement différentiable jusqu'à l'ordre requis. Lorsque la population est non décroissante le bon sens suggère que son effectif est borné supérieurement. On supposera que si la population est non croissante, son effectif est borné inférieurement par un effectif positif. Par conséquent dans tous les cas la population converge vers un niveau positif que l'on notera N, $N > 0$.

Chaque membre de la population peut voir mis à sa disposition à tout instant t une quantité $c(t)$ de ressource. On note $U(c(t))$ l'utilité instantanée qu'il en retire. On pose que $U(.)$ vérifie les conditions suivantes, conditions généralement posées dans ce type de problème :

$$(1a) \qquad U \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } (0, +\infty)$$

$$(1b) \qquad \frac{dU}{dc} > 0 \text{ pour tout } c > 0$$

$$(1c) \qquad \lim_{c \downarrow 0} \frac{dU}{dc} = +\infty$$

$$(1d) \qquad \frac{d^2U}{dc^2} < 0 \text{ pour tout } c > 0$$

L'hypothèse de non saturation n'est pas essentielle. On trouvera dans J.-P. AMIGUES, G. GAUDET et M. MOREAUX [1992] une analyse qui tient compte d'éventuelles saturations de la consommation.

Les utilités sont actualisées à un taux constant $r > 0$ et on se propose de maximiser leur somme sur l'ensemble de la population et sur l'ensemble du futur, c'est à dire de maximiser $\mathcal{U}$ définie par :

$$(2) \qquad \mathcal{U} = \int_0^{+\infty} N(t)\, U(c(t))\, e^{-rt}\, dt$$

La ressource est disponible sous trois formes, chacune étant parfaitement substituable à chaque autre pour l'utilisateur final. D'abord un flux régulier d'apports que pour simplifier on suppose stationnaire. On note s^0 l'intensité de ce flux de sorte que sur l'intervalle de temps $(t, t + dt)$ le volume de ressource apporté au territoire s'élève à $s^0 dt$. Il s'agit de l'eau apportée sous forme de précipitations par exemple, ou d'un apport de l'extérieur au système hydrographique de surface. La seconde forme sous laquelle la ressource est disponible est celle d'un stock S^1 (les nappes renouvelables) alimenté par le flux des apports naturels nets des prélèvements qu'on y aurait effectué, stock dont le niveau initial est égal à S^1_0. On suppose pour aller à l'essentiel que, premièrement, tout prélèvement sur les apports naturels s^0 pour mise à disposition des usagers est irrémédiablement perdu (est reinjecté dans le cycle de l'eau par évaporation) et que, deuxièmement, le stock renouvelable est alimenté par cette partie des apports naturels non utilisés à des fins de consommation pour autant que la capacité de stockage de la ressource, que l'on note $\bar{S}^1$, ne soit pas saturée, et ce sans déperdition lors du passage en nappe. De plus la capacité de stockage des nappes renouvelables n'est pas affectée par le niveau de la ressource en stock. Il existe aussi initialement un stock non renouvelable S^2_0 physiquement isolé des deux autres sources. Comme pour les prélèvements sur le flux d'apports, on suppose que les prélèvements pour consommation sur chacun des stocks, renouvelable et non renouvelable, sont définitivement perdus et on néglige la rétroaction entre niveaux des stocks et intensité des apports. On pose que tout prélèvement, que ce soit sur le flux d'apports, sur le stock renouvelable ou sur le stock non renouvelable, peut s'opérer à coût nul [2]. Enfin on suppose qu'il n'existe aucun autre moyen de stockage de la ressource que ces nappes renouvelable et non renouvelable.

Dans la mesure où premièrement le coût de prélèvement direct sur le flux d'apport est le même que le coût de prélèvement sur le stock renouvelable alimenté par la partie non consommée des apports et où, deuxièmement, le passage en nappe de la partie non consommée des apports s'effectue sans perte, il n'y a pas lieu de distinguer le prélèvement direct sur les apports du prélèvement direct sur le stock renouvelable pour déterminer le plan optimal des prélèvements. Tout se passe comme si la totalité des apports passait en nappe d'une part, et d'autre part, comme s'il n'y avait qu'un seul prélèvement sur le stock renouvelable. On verra à la section 5 qu'il n'en est pas nécessairement de même au plan de la gestion. Notons $s^1(t)$ le prélèvement instantané sur le stock renouvelable et $s^2(t)$ le prélèvement instantané sur le stock non renouvelable, et respectivement $S^1(t)$ et $S^2(t)$ les niveaux de ces stocks à l'instant t. Les contraintes liant flux d'apport et flux de prélèvements prennent la forme suivante :

$$(3a) \qquad s^1(t) \begin{cases} \in \ [0, s^0] & \text{si} \ \ S^1(t) = 0 \\ \in [0, +\infty) & \text{sinon} \end{cases}$$

2. On étudie dans J.-P. AMIGUES, P. FAVARD, G. GAUDET et M. MOREAUX [1994], le cas plus réaliste où le coût de prélèvement direct sur les apports et les coûts de prélèvement en nappes sont différents et où le transfert en nappe implique une perte de ressource. Il est clair qu'il faut alors distinguer le prélèvement direct sur le flux d'apports du prélèvement sur le stock renouvelable. L'analyse des valeurs des différents types de réserves qui reste relativement simple dans le cadre d'analyse choisi ici devient plus complexe.

$$(3b) \qquad \frac{dS^1}{dt} = \begin{cases} s^0 - s^1(t) & \text{si } \ S^1(t) < \bar{S}^1, \ \text{ ou} \\ & \text{si } \ S^1(t) = \bar{S}^1 \ \text{ et } \ s^0 - s^1(t) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(4a) \qquad s^2(t) \begin{cases} = 0 & \text{si } \ S^2(t) = 0 \\ \in [0, +\infty) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(4b) \qquad \frac{dS^2}{dt} = -s^2(t)$$

On appellera problème (2) le problème de maximisation de la fonction d'objectif (2) sous les contraintes (3.i) et (4.i), $i \in \{a, b\}$, et les contraintes additionnelles (5) et (6) :

$$(5) \qquad c(t) = \frac{s^1(t) + s^2(t)}{N(t)}$$

$$(6) \qquad S^1(0) = S^1_0, \ \text{donné}, \ \text{ et } S^2(0) = S^2_0, \text{donné}.$$

3 Le cas des populations non croissantes

Lorsque la population est non croissante la ressource peut être considérée comme une ressource unique, quelle que soit l'origine des prélèvements, dès lors que l'on suppose que d'une part les coûts d'accès sont identiques quelle que soit la source (en l'occurence ils sont posés nuls), et que d'autre part il y a substituabilité parfaite pour l'usager.

Pour le mettre en évidence on va montrer que la solution du problème initial (2) peut être obtenue comme la solution d'un problème d'optimisation dans lequel les conditions d'utilisation des flux et les liaisons stock-flux sont agrégées.

Définissons $s(t)$ comme le prélèvement total ($s(t) = s^1(t) + s^2(t)$), S_0 comme le stock total initialement disponible ($S_0 = S^1_0 + S^2_0$) et $S(t)$ comme le stock total à l'instant t ($S(t) = S^1(t) + S^2(t)$). Considérons alors le problème suivant :

$$(7) \qquad \max_{s(.)} \int_0^{+\infty} N(t)\, U\left(\frac{s(t)}{N(t)}\right) e^{-rt}\, dt$$

$$(8) \qquad \frac{dS(t)}{dt} = s^0 - s(t)$$

$$(9) \qquad s(t) \geq 0$$

$$(10) \qquad S(t) \geq 0$$

$$(11) \qquad S(0) = S_0 \ , \ \text{donné}$$

Négligeons la contrainte (9) de non négativité du prélèvement dont il est assez évident qu'elle ne sera jamais active. Notons $\lambda(t)$ la variable adjointe associée à l'équation (8) d'évolution de la variable d'état et $\alpha(t)$ le multiplicateur associé à la contrainte de non négativité (10) que doit satisfaire la variable d'état. Soit $H = N(t)\,U(s(t)/N(t))e^{-rt} + \lambda(t)(s^0 - s(t))$ le hamiltonien en valeur actualisée et $L = H + \alpha(t)S(t)$ le lagrangien. Les conditions de premier ordre sont [3] :

- condition de maximisation du hamiltonien :

$$(12) \qquad \left.\frac{dU}{dc}\right|_{c(t)=s(t)/N(t)} = \lambda(t)e^{rt}$$

- condition d'évolution de la variable adjointe :

$$(13) \qquad \frac{d\lambda(t)}{dt} = -\alpha(t)$$

- condition sur le multiplicateur $\alpha(t)$:

$$(14) \qquad \alpha(t) \geq 0, \qquad \alpha(t)S(t) = 0$$

Montrons que la solution consiste à d'abord épuiser les réserves initiales sur un certain intervalle de temps puis à consommer ensuite le seul flux d'apports s^0. Pour ce, à tout $\lambda \in \left(0, \left.\frac{dU}{dc}\right|_{c=s^0/N(0)}\right)$ associons la fonction $s(t,\lambda)$ solution de (12), $\left.\frac{dU}{dc}\right|_{c(t)=s(t)/N(t)} = \lambda(t)e^{rt}$, ainsi que la fonction $T(\lambda)$ valeur de t pour laquelle $s(t,\lambda) = s^0$ [4]. Il est clair que $s(t,\lambda)$ est une fonction continue et décroissante de t, avec $s(0,\lambda) > s^0$ et $\lim_{t\uparrow+\infty} s(t,\lambda) = 0$, une fonction continue et décroissante de λ avec $\lim_{\lambda\uparrow \frac{dU}{dc}|_{c=s^0/N(0)}} s(0,\lambda) = s^0$; de plus $T(\lambda)$ est également une fonction

3. cf. Seierstad et Sydsaeter [1987], théorème 1, chapitre 5, p. 317.

4. En différenciant (12) on obtient :

$$\frac{ds(t,\lambda)}{dt} = r\lambda\, e^{rt}\, \frac{N(t)}{d^2U/dc^2} + \frac{s(t)}{N(t)}\,\frac{dN(t)}{dt} < 0$$

Par ailleurs les hypothèses posées sur U et sur le mouvement de la population impliquent que, pour l'intervalle de λ que nous avons retenu, on ait $s(0,\lambda) > s^0$, $s(t,\lambda)$ strictement décroissante et $\lim_{t\uparrow+\infty} s(t,\lambda) = 0$, de sorte que $T(\lambda)$ est bien défini.

continue et décroissante de λ avec $\lim_{\lambda \uparrow \frac{dU}{dc}|c=s^0/N(0)} T(\lambda) = 0$ [5]; enfin $N > 0$ pour tout $t > 0$ implique que $\lim_{\lambda \downarrow 0} s(t, \lambda) = +\infty$, pour tout $t > 0$ et $\lim_{\lambda \downarrow 0} T(\lambda) = +\infty$. Définissons alors $S(\lambda)$ comme le stock initial nécessaire pour suivre le sentier $s(t, \lambda)$ sur $[0, T(\lambda))$:

$$(15) \qquad S(\lambda) = \int_0^{T(\lambda)} (s(t) - s^0)\, dt$$

Des relations précédentes il ressort que $S(\lambda)$ est continue et décroissante et que :

$$(16) \qquad \lim_{\lambda \downarrow 0} S(\lambda) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\lambda \uparrow \frac{dU}{dc}|c=s^0/N(0)} S(\lambda) = 0$$

L'équation :

$$(17) \qquad S(\lambda) = S_0$$

possède donc une solution unique λ^*.

Posons pour tout $t \in [0, T(\lambda^*))$: $\lambda(t) = \lambda^*$ et $\alpha(t) = 0$; et pour tout $t \geq T(\lambda^*)$, $\lambda(t) = e^{-rt} \frac{dU}{dc}\Big|_{c=s^0/N(t)} > 0$ et $\alpha(t) = \left[r \frac{dU}{dc}\Big|_{c=s^0/N(t)} + \frac{dN(t)/dt}{N(t)} \frac{d^2U}{dc^2}\Big|_{c=s^0/N(t)} \right] e^{-rt} > 0$. Les conditions (12) à (14) sont alors vérifiées avec $\lambda(t)$ continue et différentiable par morceaux et $\alpha(t)$ continue. On en conclut que sous les hypothèses posées [6] le sentier suivant est le sentier solution du problème (7) à (11) :

$$(18) \qquad s^*(t) = \begin{cases} s(t, \lambda^*) & t \in [0, T(\lambda^*)) \\ s^0 & t \in [T(\lambda^*), +\infty) \end{cases}$$

Le sentier $s^*(t)$ sera le sentier solution du problème initial (2) à condition de respecter la règle suivante de ventilation du prélèvement total entre le stock renouvelable et le stock non renouvelable. En tout $t \in [0, T(\lambda^*))$, on a $s^*(t) > s^0$: la partie s^0 de $s^*(t)$ doit être prélevée sur le seul stock renouvelable, la différence $s^*(t) - s^0$ étant prise indifferemment soit sur le stock renouvelable, soit sur le stock non renouvelable, jusqu'à ce qu'ils soient épuisés, ce qui intervient en $T(\lambda^*)$. D'une part cette

---

5. De (12) on déduit :

$$\frac{ds(t, \lambda)}{d\lambda} = \frac{N(t) e^{rt}}{d^2U/dc^2} < 0$$

et de $s(T, \lambda) = s^0$:

$$\frac{dT}{d\lambda} = -\frac{ds(T, \lambda)/d\lambda}{ds(T, \lambda)/dT} < 0$$

6. Cf. Seierstad et Sydsaeter, mêmes références. Les conditions posées sur U garantissent que les conditions (12) à (14) vérifiées pour $\lambda(t)$ continue et différentiable par morceaux et $\alpha(t)$ continue par morceaux, sont des conditions suffisantes.

politique satisfait les contraintes du problème initial, les prélèvements $s^*(t)$ étant en permanence supérieurs aux apports s^0 sur la première période $[0, T(\lambda^*)$, et en ce conformant à la règle que l'on vient de préciser, les stocks disponibles étant non croissants au cours de cette première phase, on ne bute jamais sur la contrainte de capacité du stock renouvelable. D'autre part aucune substitution intertemporelle n'est possible qui permettrait d'accroître la valeur de la fonction d'objectif : à partir de $T(\lambda^*)$ l'utilité marginale par tête actualisée, $e^{-rt}\left.\frac{dU}{dc}\right|_{c=s^0/N(t)}$, étant constamment décroissante, on n'a pas intérêt à renoncer temporairement à consommer une partie du flux d'apports, le stocker dans la nappe renouvelable alors vide, pour accroître ultérieurement la consommation; par ailleurs au-delà de $T(\lambda^*)$, l'utilité marginale par tête actualisée est toujours inférieure à $\lambda^* = e^{-rT(\lambda^*)}\left.\frac{dU}{dc}\right|_{c=s^0/N(T(\lambda^*))}$ et donc, réduire la consommation sur l'intervalle $[0, T(\lambda^*))$ pour l'augmenter au-delà de $T(\lambda^*)$, ne permettrait pas non plus d'améliorer la valeur de la fonction d'objectif.

En conclusion, lorsque la population est non croissante le système apports naturels-recharge du stock renouvelable perd toute spécificité. Tout se passe comme si l'on disposait d'une part d'un flux d'apports à consommer immédiatement et d'autre part de réserves non renouvelables d'un montant initialement égal à $S_0 = S_0^1 + S_0^2$. Les coûts marginaux et moyens d'accès à ces deux sources étant les mêmes, leurs valeurs sont identiques à chaque instant. Le prix imputé de la ressource en valeur courante est d'abord croissant et égal à $\lambda^* e^{rt}$ jusqu'en $T(\lambda^*)$ puis constant ou décroissant selon que la population est elle-même constante ou décroissante et égal à $\left.\frac{dU}{dc}\right|_{c=s^0/N(t)}$.

4 Le cas de populations croissantes

Montrons que dans le cas de populations croissantes il n'est généralement plus possible de se ramener à un modèle avec ressource unique et donc que, tout au moins pendant certaines périodes, la ressource devrait être tarifée à des prix différents selon sa provenance. On établit d'abord les conditions de premier ordre du problème (2), conditions qui suggèrent que les valeurs de la ressource renouvelable et de la ressource non renouvelable peuvent momentanément diverger. On traite ensuite un cas particulier d'évolution de la population pour lequel les évaluations instantanées des ressources doivent se séparer effectivement sur certains intervalles de temps non dégénérés [7].

7. On trouvera dans J.-P. AMIGUES, G. GAUDET et M. MOREAUX [1992] une étude plus complète de ces cas, l'objectif du présent article étant simplement de montrer que les valeurs imputées de la ressource ne sont pas toujours identiques.

4.1. **Reformulation du problème d'optimisation initial**

Revenons au problème (2) et plus précisément réexaminons les liaisons entre stocks et flux lorsque la contrainte de capacité des nappes est saturée. L'absence de déperdition lors du passage du flux d'apports dans la nappe renouvelable nous a conduit à confondre le flux de prélèvement sur les apports et le flux de prélèvement sur le stock renouvelable et nous avons noté $s^1(t)$ leur somme (cf. Section 2). Supposons que sur un intervalle de temps $(t, t+\Delta t)$, $\Delta t > 0$, la contrainte de capacité de la ressource renouvelable soit saturée : $S^1(\tau) = \bar{S}^1$, $\tau \in (t, t+\Delta t)$. Puisque l'utilité marginale de la consommation est toujours positive le long des sentiers optimaux de prélèvement, l'intensité du prélèvement instantané sur le stock S^1 devrait être au moins égale à s^0 si la contrainte de capacité du stock renouvelable est saturée. Il vaut mieux consommer ce flux d'apports plutôt que d'en laisser perdre une partie ou la totalité, ce qui arriverait nécessairement dans le cas présent de saturation de la capacité de stockage. En d'autres termes on doit avoir $s^1(\tau) = s^0$, $\tau \in (t, t+\Delta t)$. Reformulons le problème (2) comme suit :

$$(19) \qquad \max_{s^1(.),s^2(.)} \int_0^{+\infty} N(t)\, U\left(\frac{s^1(t)+s^2(t)}{N(t)}\right) e^{-rt}\, dt$$

$$(20) \qquad \frac{dS^1(t)}{dt} = s^0 - s^1(t)$$

$$(21) \qquad s^1(t) \geq 0$$

$$(22) \qquad S^1(t) \geq 0$$

$$(23) \qquad \bar{S}^1 - S^1(t) \geq 0$$

$$(24) \qquad S^1(0) = S_0^1 \text{ donné}$$

$$(25) \qquad \frac{dS^2(t)}{dt} = -s^2(t)$$

$$(26) \qquad s^2(t) \geq 0$$

$$(27) \qquad S^2(t) \geq 0$$

$$(28) \qquad S^2(0) = S_0^2 \text{ donné}$$

Des conditions (20) et (23) on déduit que si $S^1(t) = \bar{S}^1$ alors on doit avoir $s^1(t) \geq s^0$ et que si la contrainte (23) doit être saturée sur un intervalle

$(t, t + \Delta t)$ alors $s^1(\tau) = s^0$ pour tout $\tau \in (t, t + \Delta t)$, propriété qui doit être vérifiée par toute politique optimale comme on vient de le souligner plus haut.

Soit L le lagrangien du problème (19)-(28) :

$$
\begin{aligned}
L =& N(t)U\left(\frac{s^1(t) + s^2(t)}{N(t)}\right)e^{-rt} \\
&+ \lambda^1(t)(s^0 - s^1(t)) - \lambda^2(t)s^2(t) \\
&+ \alpha^1(t)s^1(t) + \alpha^2(t)s^2(t) + \underline{\gamma}^1(t)S^1(t) + \bar{\gamma}^1(t)(\bar{S}^1 - S^1(t)) \\
&+ \underline{\gamma}^2(t)S^2(t)
\end{aligned}
$$

On sait [8] qu'une condition suffisante d'optimalité de sentiers réalisables $(s^{1*}(t), s^{2*}(t), S^{1*}(t), S^{2*}(t))$ est l'existence de fonctions $\lambda^1(t)$ et $\lambda^2(t)$ continues et différentiables par morceaux et de fonctions $\alpha^1(t)$ et $\alpha^2(t)$ telles que :

$$(29a) \qquad \left.\frac{dU}{dc}\right|_{c=(s^{1*}(t)+s^{2*}(t))/N(t)} = (\lambda^1(t) + \alpha^1(t))e^{rt}$$

$$(29b) \qquad \left.\frac{dU}{dc}\right|_{c=(s^{1*}(t)+s^{2*}(t))/N(t)} = (\lambda^2(t) + \alpha^2(t))e^{rt}$$

$$(30a) \qquad \frac{d\lambda^1(t)}{dt} = -\underline{\gamma}^1(t) + \bar{\gamma}^1(t)$$

$$(30b) \qquad \frac{d\lambda^2(t)}{dt} = -\underline{\gamma}^2(t)$$

$$(31a) \qquad \alpha^1(t) \geq 0 \qquad \alpha^1(t)s^1(t) = 0$$

$$(31b) \qquad \alpha^2(t) \geq 0 \qquad \alpha^2(t)s^2(t) = 0$$

$$(32a) \qquad \underline{\gamma}^1(t) \geq 0 \qquad \underline{\gamma}^1(t)S^1(t) = 0$$

$$(32b) \qquad \bar{\gamma}^1(t) \geq 0 \qquad \bar{\gamma}^1(t)(\bar{S}^1 - S^1(t)) = 0$$

$$(32c) \qquad \underline{\gamma}^2(t) \geq 0 \qquad \underline{\gamma}^2(t)S^2(t) = 0$$

Pendant toute période où le stock non renouvelable est positif, il est clair que $\lambda^2(t)$ est constante. De même pendant toute période où le stock renouvelable est positif, $\lambda^1(t)$ est constante. Si de plus $s^{1*}(t)$ et $s^{2*}(t)$ sont tous deux positifs alors $\lambda^1(t) = \lambda^2(t)$. L'exemple traité au paragraphe (4.2)

8. Cf. Seierstad et Sydsaeter, mêmes références.

montre que $s^{1*}(t)$ et $s^{2*}(t)$ peuvent ne pas être simultanément positifs et que les variables adjointes λ^{1*} et λ^{2*} peuvent ne pas être égales.

Avant d'examiner cet exemple établissons une condition suffisante pour que même dans le cas d'une population croissante on puisse considérer la ressource comme une ressource unique et appliquer la procédure d'agrégation utilisée à la section précédente. Convenons de noter $V_0(t)$ l'utilité marginale par tête actualisée lorsque le prélèvement sur le stock renouvelable est égal aux seuls apports s^0 et le prélèvement sur le stock non renouvelable nul :

$$V_0(t) = e^{-rt} \left.\frac{dU}{dc}\right|_{c=s^0/N(t)} > 0 \tag{33}$$

On a :

$$\frac{dV_0}{dt} = -rV_0(t) - e^{-rt} \frac{s^0}{N^2(t)} \frac{dN(t)}{dt} \left.\frac{d^2U}{dc^2}\right|_{c=s^0/N(t)} \tag{34}$$

Lorsque la population est non croissante $dV_0/dt < 0$. Lorsque la population est croissante le signe de dV_0/dt est indéterminé. C'est ce qui rend délicate la construction des sentiers de prélèvement optimaux. Il est clair en effet que si $dV_0/dt < 0$, pour tout $t > 0$, la solution est du genre de celle mise en évidence à la section 3, c'est à dire épuisement des stocks initiaux sur un premier intervalle de temps $[0, T)$, puis à partir de T consommation des seuls apports s^0. Au cours de la première période l'utilité marginale actualisée de la consommation est constante et égale à une certaine valeur $\lambda^* > 0$, et ensuite elle décroît. Aucune substitution intertemporelle n'est possible qui améliorerait la valeur de la fonction d'objectif.

4.2. **Un exemple de divergence des valeurs imputées des ressources**

Supposons que la fonction $V_0(t)$ soit d'abord décroissante sur $[0, \hat{t}_1)$, puis croissante sur $[\hat{t}_1, \hat{t}_2)$, puis enfin décroissante sur $[\hat{t}_2, +\infty)$ et qu'il existe $\lambda^*, \lambda^{*\prime}, \lambda^{*\prime\prime}$, tels que (cf. Figure 1) :

$$\lambda^{*\prime\prime} > \lambda^* > \lambda^{*\prime} \tag{35}$$

$$V_0(0) > \lambda^*, \qquad \lambda^{*\prime} > V_0(\hat{t}_1), \qquad V_0(\hat{t}_2) > \lambda^{*\prime\prime} \tag{36}$$

Notons t_1 la plus petite date à laquelle $V_0(t) = \lambda^*$, t_2 et t_3 les plus petites dates auxquelles $V_0(t) = \lambda^{*\prime}$, et enfin t_4 et t_5 les deux dates supérieures à t_3 auxquelles $V_0(t) = \lambda^{*\prime\prime}$. Supposons de plus que :

$$\int_0^{t_1} (s(t, \lambda^*) - s^0)\, dt = S_0^1 \tag{37}$$

$$\int_{t_2}^{t_3} (s^0 - s(t, \lambda^{*\prime}))\, dt = \bar{S}^1 \tag{38}$$

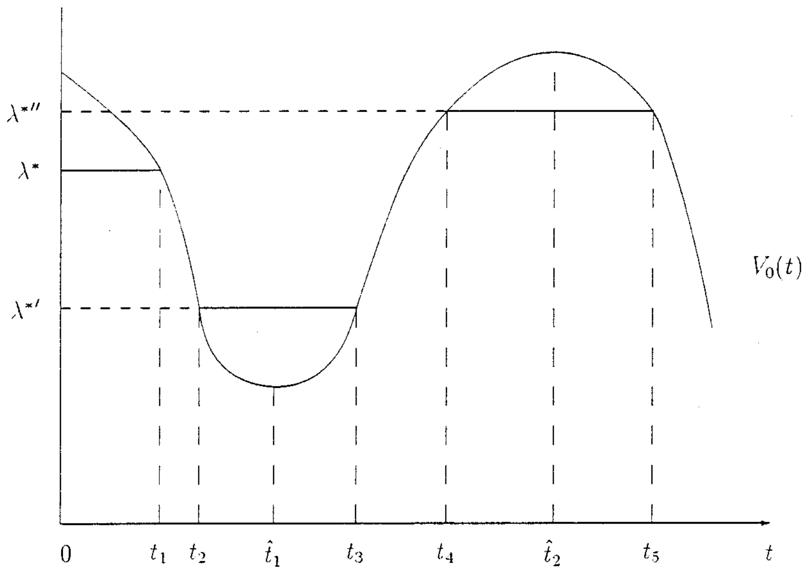

FIGURE 1

et :

(39)
$$\int_{t_4}^{t_5} (s(t, \lambda^{*\prime\prime}) - s^0)\, dt = \bar{S}^1 + S_0^2$$

où pour $\lambda \in \{\lambda^*, \lambda^{*\prime}, \lambda^{*\prime\prime}\}$, $s(t, \lambda)$ est la valeur de s solution de :

(40)
$$\left.\frac{dU}{dc}\right|_{c=s/N(t)} = \lambda e^{rt}$$

On notera que, sur l'intervalle (t_2, t_3), on a $V_0(t) < \lambda^{*\prime}$, de sorte que $s(t, \lambda^{*\prime}) < s^0$.

Considérons alors la politique suivante :

- sur l'intervalle $[0, t_1)$ consommer la totalité des apports et épuiser le stock de ressource renouvelable initialement disponible, mais laisser en l'état le stock non renouvelable de sorte qu'au cours de cette phase l'utilité marginale actualisée de la consommation par tête est en permanence égale à λ^*;

- sur l'intervalle $[t_1, t_2)$ consommer la totalité des apports s^0, laisser vide la nappe renouvelable et laisser en l'état le stock non renouvelable, de sorte que, au cours de cet intervalle de temps l'utilité marginale actualisée de la consommation par tête est égale à $V_0(t)$, décroissant de λ^* à $\lambda^{*\prime}$;

- sur l'intervalle $[t_2, t_3)$ ne consommer qu'une partie des apports s^0 de sorte qu'au cours de cette période l'utilité marginale actualisée de la consommation par tête est constante et égale à $\lambda^{*\prime\prime}$, la nappe renouvelable se recharge et est saturée en t_3;

- sur l'intervalle $[t_3, t_4)$ ne consommer que les seuls apports initiaux de sorte que l'utilité marginale actualisée de la consommation par tête est égale à $V_0(t)$, valeur qui sur l'intervalle croît de $\lambda^{*\prime}$ à $\lambda^{*\prime\prime}$;

- sur l'intervalle $[t_4, t_5)$ consommer la totalité des apports s^0 et épuiser les deux stocks, renouvelable et non renouvelable, de façon à égaliser l'utilité marginale actualisée de la consommation par tête à $\lambda^{*\prime\prime}$;

- enfin à partir de t_5 consommer en permanence les seuls apports s^0, de sorte que l'utilité marginale actualisée de la consommation par tête s'établit à $V_0(t)$, toujours décroissante.

Remarquons tout d'abord que, par hypothèse (cf. (37), (38), (39)), cette politique est une politique possible. Posons que sur l'intervalle (t_4, t_5), $s^{2*}(t) > 0$ de sorte que $s^{1*}(t) = s(t, \lambda^{*\prime\prime}) - s^{2*}(t)$ et $s^{1*}(t) \geq s^0$, ce qui est également possible. Il est clair que les conditions (29) à (32) sont vérifiées si :

$$\lambda^1(t) = \begin{cases} \lambda^* & \text{si } t \in [0, t_1) \\ V_0(t) & \text{si } t \in [t_1, t_2) \cup [t_3, t_4) \cup [t_5, +\infty) \\ \lambda^{*\prime} & \text{si } t \in [t_2, t_3) \\ \lambda^{*\prime\prime} & \text{si } t \in [t_4, t_5) \end{cases} \tag{41}$$

$$\lambda^2(t) = \lambda^{*\prime\prime} \qquad t \in [0, +\infty) \tag{42}$$

$$\alpha^1(t) = 0 \qquad t \in [0, +\infty) \tag{43}$$

$$\alpha^2(t) = \lambda^2(t) - \lambda^1(t) \qquad t \in [0, +\infty) \tag{44}$$

$$\underline{\gamma}^1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, t_1) \cup [t_2, t_5) \\ -\dfrac{dV_0}{dt} & \text{si } t \in [t_1, t_2) \cup [t_5, +\infty) \end{cases} \tag{45}$$

$$\bar{\gamma}^1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, t_3) \cup [t_4, +\infty) \\ \dfrac{dV_0}{dt} & \text{si } t \in [t_3, t_4) \end{cases} \tag{46}$$

$$\underline{\gamma}^2(t) = 0 \qquad t \in [0, \infty) \tag{47}$$

La politique décrite plus haut est donc une politique optimale [9]. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer qu'à n'importe quel instant, renoncer à consommer pour consommer plus tard, ou plus tôt (on pourrait ne pas attendre l'intervalle (t_4, t_5) pour consommer le stock non renouvelable), ou bien est impossible ou bien lorsque c'est possible réduit la valeur de la fonction d'objectif. A l'exception de l'intervalle $[t_4, t_5)$ les valeurs imputées des deux types de réserves divergent.

9. Il est clair que les valeurs de $\lambda^2(t)$ et $\underline{\gamma}^2(t)$ sur $[0, t_4)$ et $[t_5, +\infty)$ ne sont pas les seules possibles.

5 Structures de gestion et prix de vente des ressources

Pour résoudre le seul problème de l'optimum on peut confondre prélèvement sur le flux d'apports et prélèvement sur le stock renouvelable comme on l'a montré à la section 2 et comme on l'a fait aux sections 3 et 4. Mais selon les caractéristiques physiques du processus, il n'en sera pas nécessairement de même pour organiser la gestion du flux d'apports, du stock renouvelable et du stock non renouvelable. Deux cas polaires doivent être examinés.

Le premier cas polaire est celui où l'apport naturel s^0 passe automatiquement dans le stock renouvelable sans qu'il soit possible d'opérer directement sur cet apport un prélèvement aussi faible soit-il [10]. Dans ce cas il n'y a à considérer que deux stocks sur lesquels on peut puiser et la formulation retenue à la section 2 est la seule possible. Les fonctions $\lambda^1(t)$ et $\lambda^2(t)$ sont les prix actualisés de cession des ressources à l'utilisateur final qui peut acheter la quantité qu'il désire au plus petit des deux prix $\lambda^1(t)$ et $\lambda^2(t)$. Ces prix équilibrent l'offre et la demande, l'offre étant déterminée comme solution d'un problème de maximisation des profits aux prix en question.

Le second cas polaire est celui où il est effectivement possible de prélever directement sur le flux d'apports. Supposons qu'on puisse prélever exactement la totalité du flux d'apports si on le désire. On peut alors organiser la gestion avec un triple système de prix : un prix de vente du flux d'apports, un prix de vente des prélèvements effectués sur le stock renouvelable et un prix de vente des prélèvements effectués sur le stock non renouvelable. Evidemment le gestionnaire du stock renouvelable achète au gestionnaire du flux d'apports ce dont il a besoin pour recharger éventuellement la nappe qu'il gère, et l'utilisateur final peut s'approvisionner auprès de l'une ou l'autre des trois sources (il choisira évidemment la moins chère).

Reprenons alors l'exemple développé au paragraphe 4.2. Notons $p^0(t)$, $p^1(t)$ et $p^2(t)$ les prix de vente actualisés du flux d'apports, du stock renouvelable et du stock non renouvelable respectivement. Alors les prix suivants sont des prix d'équilibre :

$$(48) \qquad p^0(t) = \begin{cases} \lambda^* & \text{si } t \in [0, t_1) \\ V_0(t) & \text{si } t \in [t_1, t_2) \cup [t_3, t_4) \cup [t_5, +\infty) \\ \lambda^{*\prime} & \text{si } t \in [t_2, t_3) \\ \lambda^{*\prime\prime} & \text{si } t \in [t_4, t_5) \end{cases}$$

$$(49) \qquad p^1(t) = \begin{cases} \lambda^* & \text{si } t \in [0, t_3) \\ \lambda^{*\prime\prime} & \text{si } t \in [t_3, +\infty) \end{cases}$$

10. Les zones désertiques ou semi-désertiques sont souvent des zones où les précipitations passent directement en nappe renouvelable sans qu'il soit possible d'opérer un prélèvement direct sur le flux.

$$p^2(t) = \lambda^{*\prime\prime} \qquad \text{si } t \in [0, +\infty) \tag{50}$$

Les trois prix peuvent donc diverger sur certaines périodes.

6 Conclusion

Nous avons mis en évidence dans cette étude qu'une des spécificités de l'exploitation optimale d'une ressource semi-renouvelable est d'admettre des divergences des valeurs imputées des ressources qui la composent, selon leur caractère plus ou moins renouvelable, et ce malgré l'égalité des coûts d'exploitation et une substituabilité parfaite pour l'usager. Mais ces différences ne trouvent à s'exprimer que dans certains cas. Lorsque la population est non croissante, les possibilités de substitution entre les stocks renouvelables et non renouvelables sont *de facto* les mêmes, car il n'est jamais opportun de recharger le stock renouvelable. Lorsqu'au contraire la population est croissante, il peut s'avérer optimal de vider et de recharger la nappe renouvelable. Cette recharge est dans ce modèle la seule forme d'épargne possible, c'est à dire de report dans le temps de la consommation du flux d'apports naturels. Mais cette épargne peut être contrainte par la capacité de stockage des nappes. Il en résulte que les valeurs marginales des deux types de stocks peuvent momentanément diverger. L'écart entre les valeurs marginales peut s'interpréter comme la valeur marginale de la capacité du réservoir. Il mesure le prix de la location de la capacité des nappes que devrait supporter le gestionnaire du stock renouvelable dans un système de gestion décentralisé. Il est clair que cette divergence des valeurs est accentuée par le fait qu'on ne modélise pas le processus de production, le rôle du capital dans ce processus et son accumulation grâce à l'épargne, ni la substituabilité partielle capital-ressource naturelle. Néanmoins les premiers essais de formalisation visant à mieux prendre en compte ces phénomènes, tendent à montrer que ces divergences peuvent subsister.

• Références bibliographiques

AMIGUES, J.-P., FAVARD, P., GAUDET, G., MOREAUX, M. (1994). – “L'interaction stocks-flux : Prise en compte des coûts. Eléments pour une tarification rationnelle des usages de l'eau. 2.”, *mimeo*, GREMAQ-Université de Toulouse I, 64.

AMIGUES, J.-P., GAUDET, G., MOREAUX, M. (1992). – “Principes de valorisation d'une ressource semi-renouvelable. Eléments pour une tarification rationnelle des usages de l'eau. 1.”, *mimeo*, GREMAQ-Université de Toulouse 1, 56.

SEIERSTAD, A., SYDSAETER, K. (1987). – “Optimal Control Theory with Economic Applications”, North-Holland, Amsterdam.

WORLD RESOURCES 1990-1991 (1990). – World Resources Institute, Chap 10, Freshwater, 161-179, Oxford University Press, New York.