ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 39 — 1995

Croissance et structure du système productif dans une économie log-linéaire

Jérôme GLACHANT*

RÉSUMÉ. – En étudiant le sentier concurrentiel de croissance d'une économie multi-sectorielle (LONG et PLOSSER [1983]), cet article se propose de généraliser les résultats de REBELO [1991]. Nous démontrons ainsi que, dans une économie caractérisée par des rendements d'échelle constants et la présence d'un facteur non-reproductible, l'existence d'un sentier de croissance endogène implique une propriété de décomposabilité du système productif. Nous analysons ce découpage en mettant en évidence des propriétés relatives au vecteur des taux de croissance, à la place du facteur primaire travail, à la convergence des économies nationales et aux systèmes des prix fictifs soutenant le sentier optimal.

Growth and Structure of the Productive System in a Linear Logarithmic Economy

ABSTRACT. – By studying the competitive growth path of a multi-sectoral linear logarithmic economy *à la* LONG and PLOSSER [1983], this article provides a generalization of the results obtained by REBELO [1991]. We show that, in an economy characterized by constant returns to scale and the presence of a non-reproducible factor of production, endogenous growth implies a property of decomposability of the productive system. We characterized this decomposition by providing some properties dealing with the growth rates vector, the role played by the non-reproducible factor, the convergence of national economies and the competitive price system.

---

* J. GLACHANT : E.P.E.E., Université d'Evry et M.A.D., Université de Paris I, 90 rue de Tolbiac, 75634 Paris Cedex 13, France. Je remercie Antoine d'Autume, Xavier Fairise, Pierre-Yves Hénin, le rédacteur de cette revue, Jean-Pierre Laffargue, et deux rapporteurs anonymes pour leurs précieux commentaires. Les erreurs et insuffisances persistantes sont miennes.

1 Introduction

Cet article poursuit deux objectifs. En premier lieu, il s'agit de montrer comment peuvent être conciliées l'existence d'un sentier de croissance régulière endogène et la présence de rendements d'échelle constants dans une économie multisectorielle avec facteur primaire. Cette conciliation requiert que les échanges intersectoriels soient contraints : la matrice inputs-outputs retraçant ces échanges est *décomposable*. En second lieu, l'article fournit une série de propriétés qui découle logiquement de cette décomposition du système productif. Ces propriétés concernent le vecteur des taux de croissance, la place du facteur primaire, la dépendance aux conditions initiales et le système des prix fictifs soutenant la trajectoire optimale.

Le renouveau d'intérêt pour les théories de la croissance s'est initialement effectué en abandonnant l'hypothèse de convexité de l'ensemble de production. En témoignent les contributions de ROMER [1986] et LUCAS [1988]. Pourtant comme le signale ROMER [1989], cet abandon n'est nullement nécessaire s'il s'agit de mettre en évidence un sentier de croissance régulière endogène. Dans le cadre d'une économie à un seul secteur, l'aménagement le plus élémentaire permettant de concilier convexité de l'ensemble de production et croissance de long terme consiste à supposer que le facteur de production non reproductible n'est pas *essentiel* [1] à la production.

Dans ces conditions, le modèle le plus épuré de croissance endogène surprend par sa simplicité : il suffit, pour le construire, d'éliminer toute intervention du facteur primaire en maintenant l'hypothèse de constance des rendements. La fonction de production est alors linéaire par rapport à son unique argument : le stock de capital [2]. Une représentation aussi basique conduit à évacuer de l'analyse le facteur primaire.

Toutefois, même en retenant l'hypothèse de convexité de l'ensemble de production, le facteur primaire peut être réintroduit sans remettre en cause la croissance, et cela en considérant une structure à multiples biens capitaux. UZAWA [1965] et LUCAS [1988] introduisent ainsi, au côté du secteur de production, un secteur dont l'objectif est l'accumulation de capital humain. Ce dernier vient alors améliorer l'efficacité productive du facteur primaire travail. Dans ces conditions, le facteur primaire travail sert de support au capital humain, et, de fait, n'apparaît plus comme un véritable argument de

1. Un facteur de production X intervient de manière *essentielle* dans la production si pour $f(X,K)$, fonction de production de l'output et K le vecteur des autres facteurs de production, $f(0,K)=0,\ \forall K$.

2. La pertinence du modèle de croissance endogène se heurte alors à sa fragilité. En effet, l'existence d'un sentier de croissance régulière requiert que les rendements d'échelle soient tout juste constants par rapport au facteur accumulable. Ce problème de *fil du rasoir* est examiné dans GLACHANT [1994b].

la fonction de production. Rebelo [1991] complète ce modèle sans exclure que le facteur primaire travail puisse être un argument direct des fonctions de production. Il aboutit alors au constat suivant :

> "Seule est requise, pour la possibilité d'une croissance perpétuelle, l'existence d'un *cœur* de biens intermédiaires, produits par des technologies à rendements constants sans recourir à l'utilisation directe ou indirecte de facteurs non reproductibles."

Cette conclusion généralise la notion de facteur primaire *essentiel* à un contexte multisectoriel. Le facteur travail peut intervenir directement dans certains secteurs pourvu qu'il n'affecte pas les technologies de production d'un sous-ensemble autonome d'autres secteurs.

La proposition ainsi émise n'est pas véritablement démontrée dans l'article de Rebelo : elle est plutôt illustrée de sorte que, de notre point de vue, l'auteur n'en tire pas toutes les implications. Nous nous proposons dans cet article d'approfondir et de prolonger cette démarche en insistant sur les propriétés de décomposition du système productif. Toutefois, cet approfondissement est effectué dans un cadre plus restrictif que celui proposé par Rebelo. Aussi notre analyse se limite-t-elle à une économie multisectorielle 'log-linéaire' à la mode de Radner [1967]-Long et Plosser [1983].

L'étude des propriétés dynamiques du sentier optimal de croissance met en évidence le caractère décomposable du système productif. La dynamique de l'économie s'organise ainsi autour de deux pôles caractérisés par leur fonctionnement autonome. Le premier est constitué des secteurs traditionnels qui restent imperméables au progrès technique. Par un effet de diffusion de ses productions dans les autres secteurs de l'économie, il agit comme un frein à la croissance. A l'inverse, le second pôle – le cœur de croissance – est le moteur de la croissance. L'absence du facteur primaire, en tant qu'input, pour les technologies des secteurs constituant ce cœur génère la croissance auto-entretenue. Enfin, au centre du système productif se situent les industries de transformation qui subissent alors les influences contradictoires des deux pôles.

L'intérêt formel de ce découpage est indéniable. Il tient tout d'abord au regroupement des secteurs selon leur rythme de croissance de long terme [3].

3. Ceci n'est pas sans rappeler la distinction effectuée par Fourastié [1989] entre les secteurs primaire, secondaire et tertiaire. Cet auteur distingue ces secteurs selon le rythme avec lequel le progrès technique les affecte. Ce rythme est modéré pour le secteur primaire, rapide pour le secteur secondaire et quasi-nul pour le secteur tertiaire. Malheureusement, la référence à ces travaux s'arrête à ce stade. En effet, pour Fourastié, le comportement de consommation occupe une place centrale alors que, dans notre modèle, il ne contrecarre pas la tendance naturelle de l'économie. En effet, Fourastié propose une interprétation du développement économique en insistant sur le glissement de la structure des économies du secteur primaire vers le secondaire, puis vers le tertiaire. Dans ce glissement, la tendance naturelle de la production est contrecarrée par celle de la consommation. En effet, alors que le progrès technique affecte prioritairement les secteurs secondaire et primaire, le consommateur se reporte de plus en plus vers les produits du tertiaire. Cette non-coïncidence provoque des transferts massifs de population active des secteurs primaires et secondaires vers le tertiaire.

La croissance régulière n'implique pas nécessairement un développement homothétique de l'économie, mais s'accompagne plutôt d'une déformation du système productif. Le comportement de long terme de l'économie est alors résumé par le vecteur des taux de croissance des productions des différents secteurs. La déformation ainsi mise en évidence obéit à un principe simple : le poids des secteurs utilisant intensivement le facteur primaire ne cesse de décroître.

Ensuite, les caractéristiques des secteurs regroupés dans le cœur influent de manière cruciale sur la dynamique de long terme. D'une part, les techniques de production de ces secteurs fixent, avec le facteur de préférence pour le présent, le niveau du vecteur des taux de croissance. Dès lors, toute altération de ces techniques accélère ou au contraire ralentit le rythme de croissance de l'économie. D'autre part, le caractère endogène de la croissance implique que les niveaux de dotations initiales marquent les niveaux de production de long terme. Une fois encore, les biens du cœur se singularisent : seuls les niveaux des dotations initiales en biens du cœur ont un effet persistant sur le niveau de l'économie à long terme. Ce résultat implique alors que la convergence des sentiers de croissance de deux économies nationales se trouve conditionnée par une égalité des dotations initiales en biens du cœur.

Ces différentes propriétés formelles du modèle restent trop générales pour asseoir une validation empirique du modèle. Par exemple, l'interprétation la plus probante du cœur de croissance nous conduit à l'assimiler aux secteurs d'accumulation du capital humain. Cependant, la production de ce secteur est en partie inobservable. Il nous faudrait alors accepter que la théorie devance, en ce domaine, la mesure des phénomènes [4]. Une interprétation de ce type n'est évidemment pas pleinement satisfaisante.

En conséquence, nous devons retenir de ce travail non pas un schéma qui aiderait à l'identification empirique des sources et des canaux de diffusion de la croissance mais un cadre théorique qui pourrait donner lieu à certaines extensions. On pense notamment à une analyse en économie ouverte.

L'article est organisé autour de quatre sections. La première présente la structure log-linéaire de l'économie, décrit la dynamique optimale des produits et caractérise son comportement de long terme. La seconde introduit la décomposition du système productif et en interprète la forme. La troisième a pour objet l'examen des propriétés du modèle relatives à la convergence des économies nationales. La quatrième décrit le système des prix duaux associés à la trajectoire optimale.

4. Nous devons toutefois noter les efforts effectués par JORGENSON [1994] visant à caractériser empiriquement le secteur d'accumulation de capital humain, et à l'intégrer alors dans un modèle théorique dont les paramètres sont estimés.

2 Présentation et étude préliminaire du sentier optimal

Cette première section est destinée à présenter l'économie, à dériver le sentier de croissance optimale puis à examiner les conditions sous lesquelles une croissance à taux constant des produits est réalisable.

2.1. Présentation et interprétation de l'économie

L'économie est caractérisée par une structure log-linéaire à la fois pour la technologie et les préférences de l'agent représentatif. De plus, le modèle est sectoriel : il comporte n biens qui sont nécessairement produits et une dotation horaire qui constitue l'unique ressource primaire du modèle. L'ensemble des biens est détruit au cours du cycle de production en étant utilisé comme consommation intermédiaire dans la production d'autres biens ou bien en étant consommé par l'agent représentatif.

Les préférences

Les préférences du consommateur sont définies sur l'ensemble des allocations $\{C_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$ où C_t est le vecteur $(n, 1)$ des biens consommés durant la période t et Z_t est la quantité de loisir consommée durant cette même période. U prend la forme :

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log u(C_t, Z_t), \qquad 0 < \beta < 1, \tag{1}$$

avec β le facteur de préférence pour le présent.

La fonction $u(\cdot)$ définissant les préférences instantanées est de type Stone-Geary :

$$u(C_t, Z_t) = Z_t^{\theta_0} \prod_{i=1}^{n} C_{it}^{\theta_i}, \tag{2}$$

où $\theta_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ et $\theta_0 > 0$. S'il existe $k \geq 1$ tel que $\theta_k = 0$, alors le bien k n'est pas consommé.

Les préférences sont résumées par la donnée du couple de paramètres (θ, β) avec θ un vecteur de dimension $(n+1, 1)$ admettant $\theta_{i+1}, i = 0, \ldots, n$ pour i-ème élément.

La technologie

Les fonctions de production sont de Cobb-Douglas :

$$Y_{i,t+1} = \lambda_i L_{it}^{b_i} \prod_{j=1}^{n} X_{ijt}^{a_{ij}}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

avec :

Y_{t+1} un vecteur $(n,1)$ dont le i-ème élément est le stock total de bien i disponible à l'instant $t+1$.

L_t le vecteur $(n,1)$ des inputs travail L_{it} alloués au secteur i.

X_t la matrice (n,n) des inputs alloués à l'instant t. L'élément X_{ijt} désigne la quantité de bien j allouée à la production de bien i.

λ un vecteur positif [5] $(n,1)$ de paramètres λ_i.

Les paramètres b_i et a_{ij} sont non négatifs et constants au cours du temps; de plus, ils vérifient la relation :

$$b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \qquad \forall i = 1, \ldots, n \; .$$

La production s'effectue ainsi *à rendements constants* dans l'ensemble des secteurs. Nous supposons de plus qu'il existe au moins un secteur pour lequel le facteur travail est *essentiel* à la production. Ceci implique que le vecteur $b = [b_i]_{i=1}^{n}$ est semi-positif. En conséquence, nous maintenons l'hypothèse suivante tout au long de l'article :

(H1) (i) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1$; (ii) il existe au moins un i tel que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Retenons que la technologie de l'économie est résumée par le triplet de paramètres (A, b, λ) avec A la matrice (n,n) dont l'élément (i,j) est a_{ij}, b le vecteur $(n,1)$ admettant b_i pour i-ème élément et λ le vecteur positif $(n,1)$ dont le i-ème élément est λ_i.

Les contraintes de ressource

A chaque instant t, l'agent représentatif est doté d'un temps total disponible H de sorte que l'arbitrage travail-loisir est contraint par :

$$(4) \qquad Z_t + \sum_{i=1}^{n} L_{it} = H, \qquad t = 0, 1, 2 \ldots .$$

L'allocation de biens vérifie :

$$(5) \qquad C_{jt} + \sum_{i=1}^{n} X_{ijt} = Y_{jt}, \qquad j = 1, \ldots, n; \quad t = 0, 1, 2 \ldots .$$

Enfin, on suppose l'état initial de l'économie décrit par le vecteur de dotations initiales Y_0 positif.

Trois types de biens cohabitent dans l'économie. Les premiers sont des *biens de consommation purs* : ils ne sont pas utilisés dans le

5. Dans cet article, les notations suivantes sont employées pour classer les vecteurs : soit x un vecteur $(n,1)$ admettant x_i pour i-ème élément alors : (i) le vecteur x est *positif*, noté $x \gg 0$, si $x_i > 0$, $\forall i$; (ii) le vecteur x est *semi-positif*, noté $x > 0$, si $x_i \geq 0$, $\forall i$ et $x \neq 0$; (iii) le vecteur x est *non-négatif*, noté $x \geq 0$, si $x_i \geq 0$, $\forall i$.

processus de production. Par conséquent, pour un bien i de ce type : $a_{ji} = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Les seconds sont des *biens intermédiaires purs* : ils ne sont pas consommés et sont donc repérés par $\theta_i = 0$. Enfin, la dernière catégorie regroupe les *biens mixtes* qui peuvent être à la fois consommés et utilisés dans la production.

Parmi les biens mixtes peut figurer le travail qualifié. Dans ce cas, le secteur de production correspondant produit du capital humain [6]. Ce capital humain est utilisé en tant que bien intermédiaire dans la production, ou bien directement consommé sous la forme d'un loisir 'qualifié' [7].

L'existence d'un secteur d'accumulation de capital humain implique que travailleurs qualifiés et non qualifiés sont présents dans le modèle. Ces deux facteurs sont distincts : un travailleur non qualifié ne peut devenir qualifié, de sorte que l'accroissement du volume de capital humain passe seulement par l'acquisition progressive de connaissances par le travailleur qualifié.

2.2. **Sentier de croissance optimale**

En absence de toute externalité, le sentier d'équilibre général intertemporel d'une économie composée d'un ménage représentatif disposant d'un horizon infini est optimal au sens de Pareto. De ce fait, nous caractérisons le sentier concurrentiel en étudiant un problème centralisé.

A chaque instant t, le planificateur, soumis aux contraintes technologiques (3) et de ressources (4), (5), et connaissant l'état $S_t = Y_t$, choisit des plans de production et de consommation maximisant :

$$U_t = \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} \log u(C_s, Z_s).$$

Soit $V(S_t)$ la fonction valeur associant à l'état S_t le maximum de U_t; $V(\cdot)$ et l'allocation optimale sont les solutions jointes de l'équation de Bellman :

$$V(S_t) = \max_{\{C_t, X_t, Z_t, L_t\}} \{\log u(C_t, Z_t) + \beta V(S_{t+1})\}, \tag{6}$$

sous les contraintes de ressource et d'évolution de la variable d'état Y_t données par (3). La structure log-linéaire du modèle implique la log-linéarité

6. L'expression de capital peut paraître ici abusive puisque ce dernier est intégralement déprécié en une période.

7. La valorisation du loisir par le niveau de capital humain dans les préférences du consommateur constitue une hypothèse standard des modèles d'investissement en capital humain (Cf. HECKMANN [1976]).

de la fonction valeur :

$$V(S_t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \log Y_{it} + K, \tag{7}$$

où le vecteur $\gamma = [\gamma_i]_{i=1}^n$ est donné par :

$$\gamma' = \theta'(I - \beta A)^{-1}. \tag{8}$$

Le scalaire K dépend des paramètres décrivant les préférences et la technologie [8].

Les règles de décision, qui indiquent à chaque instant les allocations optimales C_t, Z_t, X_t, L_t en fonction de l'état Y_t, sont obtenues en maximisant l'expression de droite de (6) en tenant compte de l'expression (7) de la fonction valeur. Soient :

$$C_{it} = \frac{\theta_i}{\gamma_i} Y_{it}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

$$Z_t = \theta_0 \left(\theta_0 + \beta \sum_{i=1}^{n} \gamma_i b_i \right)^{-1} H, \tag{10}$$

$$X_{ijt} = \frac{\beta \gamma_i a_{ij}}{\gamma_j} Y_{jt}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

$$L_{it} = \beta \gamma_i b_i \left(\theta_0 + \beta \sum_{i=1}^{n} \gamma_i b_i \right)^{-1} H, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

La dynamique du vecteur Y_t des produits optimaux est déterminée en substituant ces règles de décision dans les équations (3) d'évolution des états. Sous forme vectorielle, $\{Y_t\}$ est définie par le système récurrent d'ordre 1 avec second membre :

$$y_{t+1} = A y_t + B \text{ avec } y_0 \text{ donné}, \tag{13}$$

où $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, y_t est le vecteur $(n, 1)$ dont le i-ème élément est $\log Y_{it}$, et B est un vecteur $(n, 1)$ de constantes dont le i-ème élément est donné par :

$$\begin{aligned} B_i = & b_i \left[\log H + \log \left\{ \beta \gamma_i b_i \left(\theta_0 + \beta \sum_{i=1}^{n} \gamma_i b_i \right)^{-1} \right\} \right] \\ & + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \log \{ \beta \gamma_i a_{ij} / \gamma_j \} + \log \lambda_i. \end{aligned}$$

La matrice des élasticités A régit la dynamique (13) tout comme elle caractérise les propriétés de la technologie. La linéarité des règles optimales

8. Afin de déterminer les valeurs de γ et de K puis de vérifier que V est de la forme (7), il suffit de conjecturer que V est de la forme (7) puis de maximiser l'expression à droite de (6). On constate alors que le maximum de (6) est donné par la fonction $V(S_t)$ définie par (7).

de décision (11) implique en effet que le coefficient a_{ij} mesure l'impact d'une augmentation de la production d'un bien j sur la production du secteur i. En fait, A retrace la structure des échanges intersectoriels. En effet, dans le cadre d'une économie concurrentielle, A est la matrice des parts de rémunération.

2.3. **Croissance régulière endogène**

Dans une première étape, il est observé que l'existence d'un sentier de croissance régulière requiert que la matrice des élasticités A admette 1 pour valeur propre. La solution de la récurrence (13) est explicitée dans une seconde étape.

Croissance et valeur propre unitaire

En itérant l'équation (13), la solution s'exprime sous la forme :

$$y_t = A^t y_0 + (I + A + A^2 + \cdots + A^{t-1})B.$$

$\{y_t\}$ converge alors vers la solution stationnaire $(I - A)^{-1}B$ si et seulement si les modules des valeurs propres de A sont strictement inférieurs à un. Il s'agit du cas étudié par LONG et PLOSSER [1983]. Une condition suffisante assurant la stabilité de la dynamique se déduit en appliquant la proposition suivante démontrée par SOLOW [1952] :

> PROPOSITION (SOLOW [1952]) : Si A est une matrice non-négative, indécomposable [9] telle que (i) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, $\forall i = 1, \ldots, n$ et (ii) il existe au moins un i tel que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1$; alors les valeurs propres de A sont strictement à l'intérieur du disque unitaire.

Cette proposition s'applique à la matrice des élasticités A. En effet, l'hypothèse (H1), qui stipule la constance des rendements d'échelle et le

9. Une matrice A est dite *décomposable* s'il existe une permutation simultanée des lignes et des colonnes qui la mette sous la forme bloc-triangulaire :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix},$$

où B et D sont des matrices carrées. Si ce n'est pas le cas, la matrice A est dite *indécomposable* (Cf. GANTMACHER [1966], tome 2, p. 47).

caractère essentiel, dans au moins un secteur, du facteur non reproductible, correspond aux points (i) et (ii) de la proposition. En conséquence, l'indécomposabilité de la matrice A garantit la stationnarité asymptotique de l'économie. Or, la propriété d'indécomposabilité signifie que la technologie est elle-même indécomposable; il n'existe pas de sous-ensemble de biens qui puissent être produits à partir d'eux-même. Plus concrètement, on retrouve l'hypothèse standard des modèles multisectoriels de croissance : le facteur primaire travail intervient directement ou indirectement dans la production de chacun des biens de l'économie. Dès lors, la constance des rendements implique la convergence de l'économie vers un état stationnaire.

Au contraire, notre propos est de mettre en évidence une croissance régulière du vecteur des produits. Par cette dernière, nous entendons une croissance à taux constant de chacun des éléments du vecteur Y_t. Cette définition n'exclut pas que chaque composante puisse croître à un taux spécifique.

Formellement, l'existence d'un sentier de croissance régulière nécessite que 1 soit valeur propre *dominante* [10] de A, et que l'espace propre associé ait pour dimension l'ordre de multiplicité de la valeur propre [11]. Dans ces conditions, la solution $\{y_t\}$ de la dynamique (13) se comporte asymptotiquement comme un vecteur dont les éléments sont des polynômes de degré 1 du temps.

Avant de déterminer ces solutions, il nous faut remarquer que la combinaison de (H1) et de l'existence d'une valeur propre unitaire pour A implique, d'après la proposition de Solow, la *décomposabilité* de la matrice A. Cette propriété sera par la suite l'objet d'une attention particulière.

Finalement, outre (H1), les hypothèses suivantes sont imposées sur la matrice non-négative A :

(H2) 1 est valeur propre *simple* de A.

(H3) A n'admet pas de valeur propre de module unitaire autre que 1 [12].

L'hypothèse (H1) implique qu'aucune valeur propre de A ne peut excéder 1 en module [13]. L'hypothèse (H2) garantit alors l'existence d'un sentier de croissance régulière. Le fait que l'unité soit valeur propre *simple* de A est destiné à simplifier le propos. Une généralisation à un cas pour lequel cet ordre serait supérieur à un tout en étant égal à la dimension de l'espace propre associé ne remet pas en cause les résultats principaux de l'article [14]. Enfin, la dernière hypothèse est destinée à exclure des comportements cycliques des solutions de long terme.

---

10. La valeur propre est dominante en ce sens que son module excède les modules de toutes les autres valeurs propres de A.
11. Si la dimension est strictement inférieure à l'ordre de multiplicité alors les solutions de la dynamique peuvent se comporter comme des polynômes de degré supérieur à 1 du temps, invalidant ainsi la croissance à taux constant.
12. La matrice A est dite *primitive*.
13. Le module de la valeur propre dominante ne peut jamais excéder la somme des éléments pris en ligne ou en colonne.
14. Cf. GLACHANT [1994a] pour cette généralisation.

Trajectoire solution de la dynamique

La solution $\{y_t\}$ s'obtient en sommant la solution générale du système sans second membre associé à (13) et une solution particulière. Le premier terme est donné par :

$$y_t^* = A^t \alpha,$$

α étant un vecteur $(n, 1)$ de réels.

Sous les hypothèses (H2) et (H3), son comportement asymptotique est défini par :

$$\lim_{t \to \infty} y_t^* = \alpha_0 V,$$

avec α_0 un scalaire, et V le vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

1 étant valeur propre de A, une solution particulière y_t^p est $f + gt$ avec f et g deux vecteurs $(n, 1)$. En substituant cette solution dans (13), ces vecteurs vérifient :

$$\begin{cases} (I - A)g = 0 \\ (I - A)f = B - g. \end{cases}$$

La première égalité du système implique $g \in \mathrm{Ker}(I - A)$. Une base de $\mathrm{Ker}(I - A)$ est constituée par le vecteur propre V normalisé de manière adéquate. On obtient alors $g = \mu V$. La valeur du scalaire μ est déterminée conjointement à celle du vecteur f par la seconde équation du système [15]. Le développement est reporté en Annexe A. Nous démontrons qu'une fois le vecteur V choisi la solution μ est unique.

La solution générale de (13) vérifie finalement :

$$y_t = y_t^* + y_t^p,$$

soit, en tenant compte de la condition initiale y_0 :

$$y_t = A^t(y_0 - f) + f + (\mu V)t \qquad t = 0, 1, \ldots, \infty. \tag{14}$$

Ainsi, asymptotiquement :

$$\lim_{t \to \infty} [y_t - \nu(y_0)V - f - (\mu V)t] = 0. \tag{15}$$

15. Notons que μ est nul dans le cas où $B \in \mathrm{Im}(I - A)$, $\mathrm{Im}(I - A)$ désignant l'espace linéaire engendré par les colonnes de $I - A$.

Le vecteur des taux de croissance de long terme de l'économie est $g = \mu V$ [16], et la production de chaque secteur vérifie :

$$\text{(16)} \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{Y_{it}}{\xi_i e^{\mu V_i t}} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

avec ξ_i une constante dépendante du vecteur de conditions initiales Y_0 et de f_i.

La proposition de Frobénius-Perron [17] indique le signe des taux de croissance de l'économie. En effet, 1 étant valeur propre dominante de la matrice A, le vecteur propre associé V a toutes ses composantes de même signe. Nous le normalisons alors pour qu'il soit semi-positif. En conséquence, les produits de chaque secteur sont croissants ou décroissants selon que le scalaire μ est positif ou négatif.

Afin d'étudier une économie en expansion, il est supposé que les paramètres $(\theta, \beta, A, b, \lambda)$ du modèle sont tels que l'économie se situe sur un sentier de croissance. Soit :

(H4) Le vecteur des taux de croissance g est semi-positif.

La mise sous forme explicite de cette hypothèse requiert que soit décrite la détermination de la constante μ. Ceci sera en partie effectué dans la suite de l'article. Il semble intuitif que deux considérations jouent pour la réalisation de (H4). La première concerne l'ampleur de la préférence pour le présent. Le facteur β ne doit pas être trop faible. La seconde tient aux caractéristiques de la technologie. La technologie doit être suffisamment "productive" pour que la croissance soit possible. Les paramètres λ_i doivent être "suffisamment" élevés.

L'écriture du vecteur g des taux de croissance sous la forme $g = \mu V$, $V > 0$, nous conduit à distinguer le *niveau* de ce vecteur de sa *structure*. En premier lieu, la structure est déterminée par le vecteur propre V. De ce fait, cette structure est entièrement dictée par la matrice des élasticités A. Elle indique alors comment s'organise les différentiels de croissance entre les secteurs. En second lieu, le niveau du taux de croissance est déterminé par le scalaire μ. *A priori*, le niveau dépend non seulement des paramètres technologiques (A, b, λ) mais également des paramètres (θ, β) définissant les préférences et du scalaire H représentant la dotation en temps.

Au terme de cette section, nous retenons que *la propriété de croissance résulte entièrement de l'existence d'une valeur propre unitaire pour la matrice A. Le vecteur g des taux de croissance appartient à l'espace propre associé à la valeur propre unitaire*. Ce vecteur se décompose en deux parties : le scalaire μ fixe le *niveau* de la croissance alors que le vecteur propre V détermine sa *structure*.

---

16. Cette assimilation résulte d'une approximation. Si g_i est la i-ème composante du vecteur g, le taux de croissance de long terme de la production du bien i est $\lim_{t \to \infty}(Y_{i,t} - Y_{i,t-1})/Y_{i,t-1} = \exp(g_i) - 1$. Nous procédons alors en utilisant l'approximation habituelle : $\exp(g_i) - 1 \sim g_i$.
17. Cf. GANTMACHER [1966], tome 2, p. 62.

3 La mise en évidence du cœur de croissance

Cette section contient les principaux résultats de l'article. Elle propose tout d'abord une décomposition du système productif assise sur les propriétés de long terme de l'économie. Elle montre ensuite comment un sous-ensemble de secteurs, formant le *cœur de croissance*, se singularise.

3.1. **Une décomposition du système productif**

Les hypothèses (H1) et (H2) autorisent le vecteur des produits à croître. Elles occupent ainsi une place centrale dans notre analyse. Toutefois, elles restent pour le moins formelles. Nous avons déjà noté que l'existence d'une valeur propre unitaire et l'hypothèse (H1) impliquent une propriété de *décomposabilité* de la matrice A. De ce fait, il existe des sous-ensembles de biens *autonomes* pour la matrice A [18], c'est-à-dire des sous-ensembles de biens qui ne sont produits qu'à partir d'eux-même, sans contribution d'un bien extérieur au sous-ensemble. Le résultat principal de l'article résulte de la proposition suivante :

PROPOSITION 1 : Soit A, une matrice non-négative vérifiant les hypothèses (H1) et (H2). Alors, il existe une matrice (n, n) de permutation T telle que $T^{-1}AT$ soit une matrice bloc triangulaire de la forme :

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_3 \end{bmatrix},$$

où :

(i) A_1 est une matrice de format $(n_1, n_1), n_1 > 0$, potentiellement décomposable et ayant toutes ses valeurs propres strictement inférieures à 1 en module.

(ii) A_2 de dimension $(n_2, n_2), n_2 > 0$ est indécomposable admettant 1 comme valeur propre dominante simple. De plus, la matrice A_2 est stochastique [19].

(iii) A_3 de dimension $(n_3, n_3), n_3 \geq 0$ est potentiellement décomposable et ayant toutes ses valeurs propres strictement inférieures à 1 en module.

18. Un ensemble *autonome* pour une matrice carrée positive A, (n, n), est un sous-ensemble S non-vide de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que : $\forall i \in S$, $\forall j \notin S$, $a_{ij} = 0$.

19. Une matrice est dite *stochastique* si elle est non-négative et si la somme des éléments de chacune de ses lignes est égale à 1 (Cf. GANTMACHER [1966], vol. 2, p. 78.).

(iv) Les matrices A_{31} et A_{32}, respectivement de dimension (n_3, n_1) et (n_3, n_2), sont telles que la matrice $[A_{31}\ A_{32}]$ ne comporte aucune ligne dont les éléments sont tous nuls.
L'application de la matrice de permutation T au vecteur propre V définit une décomposition de ce dernier en :

$$T^{-1}V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix},$$

avec :
(i) V_1, le vecteur nul de dimension n_1.
(ii) V_2, le vecteur unitaire de dimension n_2.
(iii) V_3 un vecteur positif ($V_3 \gg 0$) de dimension n_3.

Démonstration : Voir Annexe B.

A La décomposition de la matrice A introduite dans cette proposition correspond une partition de l'ensemble des biens, et en conséquence du système productif. Les ensembles de biens, ou encore les ensembles de secteurs associés, sont respectivement notés I_1, I_2 et I_3 [20]. Cette partition contraint les relations intersectorielles. Ainsi, les secteurs formant I_1 n'utilisent pas de biens intermédiaires I_2 ou I_3. Les secteurs de I_2 n'utilisent que des biens intermédiaires I_2. Enfin, les secteurs de I_3 peuvent utiliser des biens intermédiaires de toute provenance.

Il convient de noter que le découpage proposé résulte de l'existence d'une valeur propre unitaire. Il apparaît ainsi comme une conséquence logique de l'existence du sentier de croissance régulière. Il n'est pas imposé à notre analyse; bien au contraire, il émerge de celle-ci.

Deux points de vue intimement liés peuvent être invoqués pour fournir une interprétation à ce découpage. Le premier concerne les propriétés de long terme des vecteurs de production associés à chacun des sous-ensembles de secteurs. Le second renvoie à la contribution du facteur primaire dans la dynamique de croissance de chacun de ces sous-ensembles de secteurs.

3.2. **Propriétés du taux de croissance**

Les résultats sont fournis sous la forme d'une série de corollaires. Rappelons que le vecteur des taux de croissance de l'économie est donné par μV avec V le vecteur propre associé à la valeur propre 1 de A. Le premier corollaire concerne la *structure* du vecteur des taux de croissance alors que le second caractérise son *niveau*.

---

20. Dans ce qui suit, I_1, I_2 ou I_3 désigne aussi biens les ensembles de secteur que les ensembles de biens correspondants. Un bien I_1, I_2 ou I_3 correspond à un bien de I_1, I_2 ou I_3.

COROLLAIRE 1 : Sous (H4), les différentes composantes du vecteur g des taux de croissance vérifient :

(i) Les taux de croissance de long terme des productions de biens I_1 sont nuls.

(ii) Les taux de croissance de long terme des productions de biens I_2 sont strictement positifs et identiques.

(iii) Les taux de croissance de long terme des productions de bien I_3 sont strictement positifs et inférieurs au taux de croissance commun des productions de biens I_2.

Démonstration : Elle est effectuée en examinant la structure $V > 0$ du vecteur des taux de croissance. Les développements sont reportés en Annexe C.

Ce corollaire fait apparaître une première ligne de fracture entre les différents sous-ensembles de secteurs : I_1 regroupe les secteurs dont la production stagne à long terme. En revanche, il ne fournit pas d'éclairage très poussé sur la partition entre I_2 et I_3. Certes, les productions des secteurs I_3 peuvent croître à un taux inférieur à celles des secteurs I_2 mais rien n'exclut que ce taux soit égal. Au regard des propriétés du vecteur des taux de croissance, la distinction entre I_2 et I_3 est légitimée en examinant comment se détermine le niveau de ce vecteur.

COROLLAIRE 2 : Le niveau μ du vecteur des taux de croissance $g = \mu V$ se décompose en :

$$\mu = \nu - \log \beta, \tag{18}$$

où ν est un scalaire entièrement déterminé par la technologie de production des biens de I_2 – *i.e.* par le sous-ensemble (A_2, b_2, λ_2) de paramètres–, et β est le facteur de préférence pour le présent.

Démonstration : Voir Annexe D.

Ce corollaire a deux implications. La première concerne le rôle des technologies de production des biens I_2. La seconde montre comment interviennent les préférences du consommateur dans la détermination du taux de croissance.

En premier lieu, le corollaire indique que les biens I_2 se singularisent des biens I_3 en ce que, seules leurs technologies de production ont une influence sur le niveau du vecteur des taux de croissance. Les biens I_2 constituent ainsi le véritable 'moteur' de la croissance de l'économie. En revanche, les technologies de production des secteurs I_3 se contentent de déterminer la structure du vecteur des taux de croissance des productions de ces mêmes secteurs.

Une conséquence de ce résultat concerne l'impact sur le vecteur des taux de croissance d'un choc permanent affectant la productivité totale des facteurs dans un secteur donné. Un choc de ce type modifie le paramètre λ de la fonction de production (3), et, par voie de conséquence, le niveau μ

du vecteur des taux de croissance [21]. Si cette altération permanente survient dans une branche de I_2 alors elle altère le niveau de la croissance, et par conséquent le vecteur des taux de croissance de l'économie. En revanche, si elle survient à l'extérieur de I_2, elle n'affecte en rien le vecteur des taux de croissance : elle se contente de modifier le niveau de l'économie. De ce fait, dans le cadre d'une approche Cycles Réels des fluctuations (KING, PLOSSER et REBELO [1988]), un choc de productivité affectant un secteur de l'économie génère un effet permanent sur l'économie si et seulement s'il survient dans un secteur de I_2. Par ailleurs, REBELO [1991] suggère que l'altération du paramètre λ peut résulter d'une taxation de la valeur ajoutée de la branche correspondante. Dans ce cadre, un prélèvement sur la valeur ajoutée n'a de conséquence sur le vecteur des taux de croissance que s'il concerne un secteur de I_2.

En second lieu, le corollaire est une expression de la règle d'or modifiée dans un problème de croissance optimale en présence d'un taux de préférence pour le présent. Le vecteur des taux de croissance de l'économie est indépendant des préférences statiques des consommateurs. Le taux de préférence pour le présent résume entièrement le choix du consommateur quant à l'arbitrage croissance-niveau ou encore présent-futur. De plus, ce rapprochement entre règle d'or modifiée et l'équation (18) suggère que le scalaire ν a la dimension d'un taux de rendement. Ce point sera examiné lors de l'étude du système des prix fictifs soutenant la trajectoire optimale.

3.3. **La place du facteur primaire**

Les conclusions auxquelles nous ont permis d'aboutir l'étude du comportement de long terme des vecteurs de production prennent toute leur signification en examinant comment intervient le facteur primaire travail au sein du système productif. En effet, dans un environnement à rendements constants, ce dernier se révèle être le "frein" à la croissance de sorte que les propriétés du vecteur des taux de croissance dépendent étroitement de son intervention.

COROLLAIRE 3 : Nous supposons (H1), (H2); b_i désigne l'élasticité de la production par rapport au facteur travail dans la fonction de production (3). Alors :

(i) $b_i = 0, \forall i \in I_2$: le facteur primaire travail n'intervient pas dans la production des biens I_2.

(ii) Le facteur primaire travail intervient directement ou indirectement dans la production de chacun des biens I_1.

21. Elle ne modifie pas la structure du vecteur des taux de croissance, puisque celle-ci est entièrement déterminée par la matrice A.

Démonstration : Le premier point est évident car la matrice A_2 est stochastique. Ainsi, pour $i \in I_2$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, cela implique sous l'hypothèse de constance des rendements d'échelle que $b_i = 0$, $\forall i \in I_2$. La démonstration du second point résulte directement de l'application du corollaire de SOLOW [1952] [22] à la matrice stable A_1.

En premier lieu, le corollaire 3 montre que l'ensemble I_2 correspond parfaitement à la notion de cœur de croissance introduite par Rebelo : il s'agit d'un ensemble de biens produits à partir d'eux-mêmes sans intervention directe ou indirecte du facteur travail. C'est pourquoi, nous considérerons désormais que l'ensemble I_2 forme le cœur de croissance de l'économie. Ce qualificatif se trouve justifié au regard du corollaire 2 : la technologie des biens du cœur fixe le niveau du taux de croissance de l'économie.

En second lieu, le corollaire 3 indique la raison pour laquelle les productions des biens I_1 stagnent à long terme : le facteur fixe intervient directement ou indirectement dans leurs technologies de production.

En dernier lieu, le corollaire ne fournit pas de justification évidente à la distinction entre biens du cœur et de I_3. En effet, le facteur primaire peut ne pas intervenir directement ou indirectement dans la production des biens de I_3. Ainsi, dans le modèle de Uzawa-Lucas, le cœur ne contient qu'un seul bien : le capital humain. En effet, ce dernier est produit à partir de lui-même et à rendements d'échelle constants. Dès lors, le bien physique se trouve à l'extérieur du cœur sans que sa production n'exige de facteur primaire. En fait, en se tenant à notre typologie, le bien physique du modèle de Lucas appartient à I_3.

Cet exemple souligne que le corollaire 3 ne suffit pas à distinguer les secteurs de I_3 et le cœur. Le corollaire suivant montre comment opérer cette distinction.

COROLLAIRE 4 : Un bien est à l'extérieur du cœur de croissance I_2 si : (i) le facteur primaire travail intervient dans sa fonction de production; ou bien (ii) la croissance reste possible si nous modifions sa fonction de production $F(\cdot)$ en $\widetilde{F}(\cdot)$, $\widetilde{F}(\cdot)$ étant définie par : $\widetilde{F}(\cdot) = [F(\cdot)]^{\omega} L^{1-\omega}$ o L est le facteur primaire travail et $0 \leq \omega \leq 1$.

Démonstration : Elle résulte de la construction de l'ensemble I_2 et, plus précisément, du caractère stochastique et indécomposable de la matrice A_2. Si le facteur travail était ajouté à la technologie d'un bien du cœur alors cela aurait pour conséquence, du fait de l'indécomposabilité de la matrice A_2, de provoquer l'intervention indirecte du facteur primaire dans l'ensemble du cœur. La croissance serait alors étouffée.

22. Ce corollaire est énoncé en Annexe B.

Ce corollaire correspond à la définition du cœur de croissance présentée par REBELO [1991] dans la version préliminaire de son article. Il souligne que le facteur primaire fixe n'intervient pas nécessairement *directement* dans la production d'un bien hors du cœur, cette intervention pouvant être seulement indirecte ou inexistante. Dans ce dernier cas, le facteur primaire peut toujours être introduit en altérant ni la dynamique de croissance économique initiée par le cœur, ni le classement effectué des biens. Cela est par exemple le cas dans le modèle de Uzawa-Lucas. En effet, pour ce dernier, l'introduction d'un facteur primaire dans la technologie de production du produit physique de ce dernier ne remet pas en cause l'existence d'un sentier de croissance endogène.

A cette série de corollaires concernant la place du facteur primaire, nous voudrions ajouter le suivant qui concerne cette fois la nature des biens du cœur.

> COROLLAIRE 5 : Un bien de consommation pur ne peut appartenir au cœur de croissance de l'économie.

Le cœur est ainsi réduit à un ensemble de biens intermédiaires purs et de biens mixtes. En effet, un bien de consommation i est caractérisé par $a_{ji} = 0, \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$. Le cœur est un ensemble autonome pour la matrice A et qui ne contient pas d'ensemble autonome autre que lui-même. Or, si un bien de consommation est contenu dans le cœur, alors le cœur moins ce bien sera un ensemble autonome, ce qui est en contradiction avec les propriétés du cœur.

Dans une perspective plus économique, on retrouve ainsi un résultat de REBELO [1991] : la taxation des secteurs produisant des biens de consommation purs n'affecte pas le taux de croissance de l'économie.

3.4. **Le cœur de croissance comme moteur de la croissance**

L'ensemble des propriétés que nous venons de démontrer permet de mettre en lumière la manière dont la croissance est rendue possible dans une économie caractérisée par la constance des rendements d'échelle et la présence d'un facteur primaire. Le point de départ de notre analyse est constitué de l'équation dynamique (13). Certes, cette dernière décrit l'ajustement d'une économie à son sentier optimal. Toutefois, elle peut s'interpréter en dehors du strict cadre de la croissance optimale. En effet, en admettant une certaine invariance des règles d'allocation des inputs entre les différents secteurs, la matrice des élasticités A régit la dynamique de croissance. L'élasticité a_{ij} mesure ainsi l'intensité avec laquelle une augmentation de l'input j se propage dans le secteur i. L'hypothèse de constance des rendements d'échelle implique que pour un secteur i, ces coefficients somment à un à condition d'y ajouter l'élasticité b_i de l'output par rapport au facteur primaire.

Dans ce cadre, l'existence d'un sentier de croissance régulière endogène requiert que 1 est valeur propre de A ou encore que $I-A$ est singulière. Nous concluons alors que, sous l'hypothèse de rendements d'échelle constants, une telle propriété *implique* un découpage du système productif de l'économie.

La caractéristique essentielle de ce découpage tient à sa hiérarchisation. Cette dernière apparaît plus nettement en réécrivant la dynamique (13) sous forme récursive :

$$(19) \qquad y_{t+1} = \begin{bmatrix} y_{1,t+1} \\ y_{2,t+1} \\ y_{3,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ y_{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}.$$

Tout d'abord, les secteurs du cœur, ou encore de l'ensemble I_2, sont à l'origine de la croissance auto-entretenue. Ils sont produits à partir d'eux-mêmes et sans intervention du facteur primaire travail. En ce sens, ils forment un *sous-ensemble fermé au sein du système productif*. Ce cœur regroupe des secteurs dont la fonction est la production de '*connaissances*' ou encore de *biens 'technologiques'*. L'activité d'accumulation de connaissances peut être informelle au sens où elle ne donne pas lieu à une transaction directe sur le marché : il en est ainsi du capital humain en considérant que ce dernier est incorporé au travailleur qualifié comme dans le modèle de LUCAS [1988]. Les secteurs de Recherche et Développement, dont le produit est constitué de brevets ou de biens intermédiaires 'technologiques', sont des exemples d'activités formelles.

Ensuite, les technologies de production des biens du cœur fixent le niveau de croissance de l'économie. En effet, les nouvelles 'connaissances', ou encore les innovations technologiques, se diffusent dans les *secteurs regroupant les industries secondaires ou de transformation* I_3, soit sous forme de biens intermédiaires, soit au moyen d'une offre de travail qualifié. Elles contribuent alors à accroître la productivité du travail brut dans ces secteurs. Le cœur vient ainsi nourrir les industries de transformation en agissant comme le moteur de la croissance.

Enfin, les *secteurs 'traditionnels'*, I_1, se maintiennent sans profiter d'innovation technologique. I_1 regroupe à la fois des industries traditionnelles et des secteurs prestataires de service. Le facteur primaire travail joue alors un rôle essentiel en empêchant toute croissance de la production. Cette dernière alimente ensuite les industries de transformation ou la consommation.

La dynamique de l'économie s'organise ainsi autour de deux pôles. Le premier est constitué des secteurs traditionnels, et a tendance à ramener l'économie vers un état stationnaire. Il agit comme un frein à la croissance. A l'inverse, le second pôle – le cœur – est le moteur de la croissance. Au centre se situent les industries de transformation qui subissent alors les influences contradictoires des deux pôles.

4 Propriétés dynamiques : convergence conditionnelle et invariance des structures des productions relatives de long terme

Cette section a pour objet d'approfondir les propriétés de la dynamique de long terme de l'économie. L'existence d'une croissance endogène s'accompagne nécessairement d'une dépendance de la trajectoire à ses conditions initiales. Cet effet de persistance a pour conséquence d'empêcher la convergence des niveaux de deux économies dont les dotations initiales diffèrent. Néanmoins, là encore le cœur joue un rôle essentiel. Nous mettons ainsi en évidence un résultat de convergence conditionnelle à une égalité des dotations initiales en biens du cœur. De plus, une éventuelle non-convergence des niveaux s'accompagne d'une convergence d'une certaine *structure* des productions relatives.

D'un point de vue formel, les notions d'intégration et de cointégration [23] illustrent ces deux phénomènes. La propriété d'intégration souligne la dépendance aux conditions initiales alors que celle de cointégration permet de dégager la structure des productions relatives invariante à long terme. Finalement, en distinguant ainsi l'évolution de la structure de production de celle de son niveau, nous proposons une représentation stationnaire de la dynamique économique.

4.1. Non-convergence des niveaux et ordre d'intégration du système dynamique

Reprenons la dynamique (13) :

$$y_{t+1} = Ay_t + B.$$

A admet 1 comme valeur propre dominante simple. Dès lors, le modèle déterministe est dit *intégré d'ordre 1*, noté $I(1)$: il existe des composantes

23. Pour une introduction à ces concepts dans un cadre économique, on peut se référer à la contribution de d'AUTUME [1992]. Ces notions ont été développées dans un cadre stochastique. Néanmoins, elle se prête parfaitement à un contexte dynamique déterministe : notre application en est une illustration.

de la solution générale y de la dynamique sans second membre, qui sont asymptotiquement non-nulles. Les composantes intégrées d'ordre 1 correspondent aux biens dont la production croît; c'est-à-dire ceux pour lesquels la composante du vecteur propre V associé à la valeur propre unitaire est strictement positive. La production de biens non-croissants est qualifiée de $I(0)$: le niveau converge vers une constante [24]. L'existence d'une seule composante $I(1)$ suffit à qualifier le modèle de $I(1)$.

Pour un système récurrent autonome [25], l'existence d'un sentier croissant de la production implique nécessairement un phénomène de persistance – *i.e.* une dépendance des solutions de long terme aux conditions initiales y_0. Ces deux phénomènes indissociables sont issus de la présence d'une valeur propre unitaire.

D'une part, cette valeur propre, combinée au terme constant B du système, donne lieu à une croissance des solutions. D'autre part, cette même valeur propre conduit à l'existence d'un continuum d'équilibres pour le système sans second membre associé. La sélection d'un de ces équilibres est alors dictée par les conditions initiales. De ce fait, l'influence des conditions initiales persiste à long terme. Nous retrouvons ici un des traits majeurs de la littérature : *la persistance apparait comme un sous-produit du caractère endogène de la croissance*.

Une particularité des propriétés de persistance de notre système $I(1)$ est résumée dans le résultat suivant :

COROLLAIRE 6 : Seules les niveaux des dotations initiales en biens du cœur de croissance ont un effet persistant à long terme sur les niveaux des productions du cœur et de I_3.

Démonstration : Si nous reprenons la dynamique récursive (19) de l'économie, nous observons que :

1. Les productions de biens I_1 convergent vers un niveau stationnaire $(I - A_1)^{-1}B_1$ indépendant des conditions initiales, y_{10}; la sous-dynamique est stable.

2. Les productions des biens du cœur croissent au taux μV_2 et leurs niveaux dépendent des conditions initiales. Un phénomène de persistance se fait jour, résultant uniquement de la présence de la valeur propre 1 de A_2.

3. La dynamique des productions de I_3 est la combinaison d'une dynamique spécifique initiée par la matrice A_3, qui reste stable, et de deux dynamiques qui interviennent de manière exogène. La première a pour origine la dynamique des productions de biens I_1; elle introduit un second membre asymptotiquement constant dans le système récurrent. La seconde, plus fondamentale, est entièrement induite par la présence d'un cœur de croissance dans l'économie. Ce cœur, véritable moteur de la croissance,

24. Dans un cadre déterministe, une définition rigoureuse de l'intégration d'ordre zéro est la suivante : une composante est $I(0)$ si la composante correspondante de la dynamique sans second membre associée tend vers zéro.
25. Les matrices A et B ne sont pas indicées par le temps.

joue pour les secteurs de I_3 exactement le rôle d'un progrès technique exogène ou d'une croissance à taux constant des facteurs primaires : le second membre du système récurrent est asymptotiquement équivalent à un vecteur de polynômes de degré un du temps fonction des dotations initiales y_{20}. Ainsi le niveau asymptotique de production d'un bien I_3 est-il indépendant des dotations y_{30}, la matrice A_3 étant stable. Il dépend néanmoins des dotations initiales en biens du cœur par l'intermédiaire de la solution particulière.

Finalement, l'existence de propriétés de persistance se traduit par l'absence de convergence des économies nationales dont les dotations initiales diffèrent. Ce résultat est ici raffiné : seules des différences de dotations en biens du cœur impliquent une absence de convergence des économies. La notion de clubs de convergence, mise en évidence dans la littérature empirique (Cf. DURLAUF et JOHNSON [1992]), peut ainsi trouver une explication. Des nations regroupées au sein d'un club seraient caractérisées par des dotations initiales en biens du cœur similaires, et suivraient donc des évolutions convergentes. Cette explication se distingue de celle fourni par DURLAUF et JOHNSON [1992]. Ces derniers voient dans l'existence de ces clubs la manifestation d'une dynamique caractérisée par l'existence d'équilibres multiples isolés. Notre modèle présente l'avantage de faire apparaître des résultats de convergence conditionnelle dans un cadre très élémentaire.

4.2. **Convergence des structures de production et cointégration**

L'intérêt de la cointégration est de parvenir à mettre en évidence des relations stables entre les différentes composantes du vecteur y_t. En effet, le système $I(1)$ est *cointégré* s'il existe des combinaisons linéaires des composantes $I(1)$ qui soient $I(0)$.

Compte tenu du caractère récursif de la dynamique, nous allons tout d'abord nous concentrer sur la sous-dynamique régissant l'évolution des productions du cœur de croissance :

$$y_{2,t+1} = A_2 y_{2t} + B_2 \text{ avec } y_{20} \text{ donné.} \tag{20}$$

La solution s'écrit sous la forme :

$$y_{2t} = \sum_{i=1}^{n_2-1} \nu_i r_i^t V_{2i} + \nu V_2 + f_2 + \mu V_2 t, \tag{21}$$

où r_i sont les $n_2 - 1$ valeurs propres de A_2 strictement inférieures à 1 en module et V_{2i} les vecteurs propres associés [26]; V_2 est le vecteur propre

26. Nous supposons ici, sans perte de généralité, que la matrice A_2 est diagonalisable. Si elle ne l'était pas, nous devrions faire appel à des matrices de Jordan, ce qui ne modifierait pas les propriétés asymptotiques des solutions.

associé à 1. Les réels ν_i et ν sont fonctions des conditions initiales. Enfin, les deux derniers termes forment la solution particulière indépendante des conditions initiales.

Toutes les composantes du vecteur y_2 sont intégrées d'ordre 1. Multiplions la solution par le vecteur α de dimension $(n_2, 1)$,

$$\alpha' y_{2t} = \sum_{i=1}^{n_2-1} \alpha' \nu_i r_i^t V_{2i} + \alpha' \nu V_2 + \alpha' f_2 + \alpha' \mu V_2 t.$$

Pour α orthogonal à V_2, $\alpha' y_{2,t+1}$ est $I(0)$. En effet, d'une part, la solution générale tend vers 0 et ne dépend donc pas des conditions initiales et, d'autre part, la solution particulière tend vers une constante indépendante des conditions initiales. Le vecteur α est appelé *vecteur cointégrant*. Celui-ci n'est évidemment pas unique. En effet, V_2 définissant un sous-espace de dimension 1 dans l'espace de dimension n_2, le *rang de cointégration* est $n_2 - 1$: il existe $n_2 - 1$ vecteurs indépendants de cointégration α.

De plus, A_2 est une matrice stochastique, le vecteur propre V_2 est donc le vecteur unitaire e_2 . De ce fait, une base de l'*espace cointégrant* est donnée par :

$$\{\alpha_i,\ i = 1, \ldots, n_2 - 1 \text{ tels que } \alpha_{i,1} = -1,\ \alpha_{i,i} = 1 \text{ et } \alpha_{i,j} = 0\ \forall j \neq i\}.$$

Il s'en déduit :

$$\forall i, j = 1, \ldots, n_2 - 1 \quad i \neq j, \qquad y_{2t,i} - y_{2t,j} \sim I(0).$$

En repassant en variables en niveau, ce résultat signifie que les proportions de long terme des productions du cœur de croissance sont constantes et indépendantes des conditions initiales. Nous avons également vu que ces productions croissent au même taux. De ce fait, il existe à long terme une structure invariante des productions relatives des secteurs du cœur. Cette propriété est caractéristique du sentier de long terme : la déformation des productions du cœur de croissance est *homothétique*. Au terme de cette première application, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

> COROLLAIRE 7 : Les proportions relatives de long terme entre productions du cœur sont indépendantes des conditions initiales y_0 – *i.e.* la structure des productions relatives du cœur est invariante à long terme.

L'analyse menée jusqu'alors sur les productions du cœur s'étend à l'intégralité de la dynamique. Les vecteurs de cointégration α constituent une base de l'espace orthogonal V, le vecteur propre associé à la valeur propre 1 de la matrice A, de sorte que $\alpha' y_t \sim I(0)$. Ces vecteurs sont au nombre de $n - 1$. Les n_1 premières composantes de y_t sont par construction $I(0)$; de ce fait, les n_1 premiers vecteurs α admettent 1 pour i-ème composante

$(i = 1, \ldots, n_1)$ et 0 pour les autres composantes. Les $n_2 - 1$ vecteurs α suivants correspondent aux vecteurs déjà présentés. Les relations de cointégration définissent alors la structure des productions relatives du cœur – *i.e.* les proportions Y_i/Y_{n_1+1} [27]. Ensuite, les n_3 derniers vecteurs sont donnés par :

$$\{\alpha_i,\ i = n-1-n_3, \ldots, n-1 \,\text{tel que}\, \alpha_{i,n_1+1} = -1;$$
$$\alpha_{i,i} = 1/V_{i+1} \,\text{et}\, \alpha_{i,j} = 0\ \forall j \neq i\},$$

avec V_i la i-ème composante du vecteur propre V. Ces n_3 dernières relations de cointégration signifient que les ratios $Y_i^{1/V_i}/Y_{n_1+1}, i = n - n_3, \ldots, n$ sont stationnaires à long terme.

Finalement, la mise en évidence des propriétés de cointégration a permis de définir une structure des productions invariantes à long terme. Cette structure est indépendante du vecteur des dotations initiales Y_0. De ce fait, deux économies différant par ce vecteur de conditions initiales convergent vers cette même structure de production.

4.3. **Une représentation stationnaire de la dynamique**

L'intérêt de la cointégration est de proposer des représentations stationnarisées de la dynamique – *i.e.* dans lesquelles n'apparaissent que des composantes intégrées d'ordre 0. Une représentation de ce type peut être construite en utilisant un résultat exposé dans MELLANDER, VREDIN et WARNE [1992]. Cette représentation stationnarisée fait apparaître la dynamique des $n-1$ relations de cointégration $\alpha' y_t$ et d'une variable différenciée Δy_{n_1+1}, le taux ou le facteur de croissance de la production du premier secteur du cœur. Les relations de cointégration décrivent l'évolution de la *structure* des productions de l'économie. Pour les n_1 premières, il s'agit simplement du niveau de production des biens I_1; les $n_1 - 1$ suivantes rendent compte de la structure du cœur; enfin, les n_3 dernières amarrent les productions des biens I_3 à celles du cœur. Ensuite, l'évolution de la variable différenciée Δy_{n_1+1} résume la composante *non stationnaire*, ou encore de croissance de l'économie.

Cette représentation met en évidence une propriété importante du modèle : la dynamique de la structure des productions – *i.e.* des relations de cointégration – est parfaitement indépendante de celle des niveaux de production. Une application directe du résultat de MELLANDER, VREDIN et WARNE [1992] fait apparaître que $z_t = \alpha' y_t$ obéit :

$$z_t = \mathcal{A} z_{t-1} + \mathcal{B}, z_0 \text{ donné}, \tag{22}$$

avec $\mathcal{A}$ matrice stable par construction, alors que les niveaux sont résumés par Δy_{n_1+1} vérifiant :

$$\Delta y_{n_1+1,t} = \mathcal{C}' z_{t-1} + \mathcal{D}, \tag{23}$$

avec $\mathcal{C}$ un vecteur de dimension $n-1$ et $\mathcal{D}$ un scalaire.

27. La production du premier secteur du cœur est arbitrairement choisie comme facteur de normalisation.

Nous retrouvons alors la propriété de sentier de croissance *homothétique* : deux économies différant simplement par leur dotation initiale convergent vers la même structure de productions définies par les relations de cointégration. A long terme, seuls les niveaux diffèrent et l'expansion des économies se réalise de manière parfaitement parallèle.

5 Dynamique des prix duaux

Cette dernière section est consacrée à l'analyse de la dynamique des prix duaux associés à la trajectoire optimale. Ces prix soutiennent la trajectoire optimale comme une trajectoire concurrentielle d'une économie dotée d'un consommateur représentatif bénéficiant d'un horizon infini. En étudiant le comportement de long terme de ces prix, nous mettons en évidence un résultat de non-substitution.

5.1. **Détermination des prix duaux**

Le long du sentier optimal et à une date t donnée, l'agent représentatif est prêt à céder une unité de bien i contre $r_{ij,t}$ unités de bien j pourvu que son niveau de bien-être, mesuré par la fonction valeur $V(Y_t)$, reste inchangé. Dès lors, le prix instantané du bien j exprimé en terme de bien i est :

$$r_{ij,t} = \frac{\partial V(Y_t)/\partial Y_{j,t}}{\partial V(Y_t)/\partial Y_{i,t}}.$$

Si le prix est mesuré en termes d'utilité alors le prix instantané du bien i est :

$$P_{it} = \frac{\partial}{\partial Y_{it}} V(S_t) = \frac{\gamma_i}{Y_{it}}. \tag{24}$$

Le prix dual associé au facteur primaire travail est également mesuré en termes d'utilité, soit :

$$W_t = \frac{\partial}{\partial Z_t} u(C_t, Z_t) = \left(\theta_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i b_i\right) H.$$

En désignant par p_t, le vecteur $(n, 1)$ des logarithmes des prix duaux à l'instant t, la dynamique des prix implicites est liée à celle des productions par la relation : $p_t = \log \gamma - y_t$. Par conséquent, cette dynamique est rgie par le système récurrent :

$$p_{t+1} = Ap_t - B + (I - A) \log \gamma. \tag{25}$$

Elle constitue le dual de la dynamique des quantités (13). De ce fait, les propriétés de cointégration mises en évidence pour les quantités s'appliquent. Nous reviendrons sur ce point par la suite.

Le système des prix duaux doit être complété en explicitant sa dimension intertemporelle. Considérons ainsi un actif émis à la date t qui prévoit la livraison d'une unité de bien i à la date $t+1$; le prix de cet actif, mesuré en bien i, est donné par la quantité de bien i laquelle l'agent est prêt à renoncer la date t pour se le procurer :

$$(26) \qquad \frac{\beta(\partial/\partial Y_{i,t+1})V(Y_{t+1})}{(\partial/\partial Y_{i,t})V(Y_t)} = P_{it}^a$$

Le taux d'intérêt r_i mesuré en termes de bien i est alors donné par :

$$P_{it}^a = \frac{1}{1+r_{it}}.$$

Les conditions standards d'arbitrage lient les prix des actifs aux prix relatifs :

$$P_{jt}^a \frac{P_{jt}}{P_{j,t+1}} = P_{it}^a \frac{P_{it}}{P_{i,t+1}}, \ \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}^2.$$

Un système de prix décentralisant l'allocation intertemporelle optimale est parfaitement défini en choisissant arbitrairement un numéraire qui sert à exprimer à la fois les prix et le taux d'intérêt.

5.2. **Propriétés du système de prix**

Compte tenu de l'expression analytique de la fonction valeur, le taux d'intérêt associé au bien i est lié au facteur de croissance de la production de ce même bien par :

$$(27) \qquad 1 + r_{it} = \beta^{-1}\left(1 + \frac{Y_{i,t+1}}{Y_{i,t}}\right).$$

La relation (27) exprime la règle de Ramsey qui caractérise le sentier de croissance concurrentielle d'une économie multisectorielle.

A long terme, (27) implique [28] la relation suivante entre vecteur des taux d'intérêt spécifiques à chaque bien r et vecteur des taux de croissance g :

$$(28) \qquad r = g - \log\beta.$$

Ainsi retrouvons-nous la relation (18) mise en évidence dans le corollaire 2.

Il se déduit des corollaires caractérisant le vecteur des taux de croissance une série de propriétés du vecteur des taux d'intérêt de long terme. Pour les biens non-croissants, le taux d'intérêt de long terme est $-\log\beta$. Les taux d'intérêt de long terme des biens du cœur sont égaux. Enfin, en appliquant le corollaire 2, le taux d'intérêt commun aux biens du cœur se trouve

28. Après l'approximation logarithmique habituelle.

entièrement déterminé à long terme par la technologie de production de ces biens. Ainsi énonçons-nous :

> COROLLAIRE 8 : Le vecteur des taux d'intérêt de l'économie, r, est lié au taux de croissance par la relation (28). De plus, le taux d'intérêt commun aux biens du cœur de l'économie est entièrement déterminé à long terme par la technologie de production de ces biens.

Il apparaît naturel de choisir comme numéraire le premier bien du cœur. Dans ce cas, on en déduit immédiatement que les prix des biens du cœur sont constants à long terme alors que ceux des biens de I_1 croissent au taux g et ceux de I_3 à un taux inférieur à g. De plus, le salaire réel croît au taux g.

En ce qui concerne les déterminants des prix relatifs, on obtient :

> COROLLAIRE 9 : Les prix relatifs des biens du cœur de croissance sont entièrement déterminés à long terme par la technologie de production de ces biens.

En effet, la dynamique régissant l'évolution des prix des biens du cœur de croissance s'écrit :

$$p_{2,t+1} = A_2 p_{2t} - B_2 + (I - A_2) \log \gamma_2. \tag{29}$$

Il apparaît alors que le terme constant est indépendant du vecteur γ_2 (Cf. l'équation (33) apparaissant dans la démonstration du corollaire 2). Ensuite, compte tenu des propriétés de cointégration de cette dynamique, le corollaire se déduit directement [29].

5.3. **Théorème de non-substitution et système productif fermé**

L'association des corollaires 8 et 9 constitue une version extrême du *théorème de non-substitution*. Ce théorème s'applique habituellement dans des économies multisectorielles avec production simple [30] dans lesquelles le facteur primaire travail contribue directement ou indirectement à la production de tous les biens. Il pose alors qu'une fois le sentier de croissance régulière atteint, la donnée du vecteur des taux de rendement et de la technologie détermine entièrement les prix exprimés en salaire. Cela signifie que le choix des techniques concurrentielles est parfaitement déterminé par la donnée du vecteur des taux de rendement. Ainsi, une fois le vecteur des taux de rendement donné, le choix des techniques est-il indépendant des conditions de la demande. La caractérisation complète du sentier concurrentiel en régime de croissance régulière nécessite alors que soit indiquée la manière dont se forme le vecteur des taux de rendement. A ce stade, les conditions de la demande peuvent intervenir. Le théorème

29. La matrice A_2 est stochastique, les relations de cointégration sont ainsi les $n_2 - 1$ prix relatifs.
30. La production est dite *simple* si chaque secteur produit un unique bien. Elle est dite *jointe* dans le cas contraire.

de non-substitution circonscrit ainsi l'intervention du bloc demande : son influence ne peut transiter que par la détermination du taux de rendement ou d'intérêt.

Pour notre modèle de croissance, et en ce qui concerne les biens du cœur, ce dernier lien est supprimé : le taux de rendement du cœur est lui-même déterminé par la technologie de production de ces biens. Le processus de production des biens du cœur est *fermé* puisque ces biens sont produits à partir d'eux-même sans intervention du facteur primaire. Dans ces conditions, le choix des techniques de production des biens du cœur est purement technologique.

En revanche, pour les autres secteurs, cette conclusion ne tient plus : ces secteurs sont ouverts en ce sens que les biens de ces secteurs ne sont pas seulement produits à partir d'eux-même. En effet, le facteur primaire travail intervient dans la production des biens I_1 et, éventuellement, dans celle des biens I_3. Pour le premier secteur, la version usuelle du théorème de non-substitution s'applique une fois l'état de croissance régulière atteint : le travail est l'unique facteur primaire. A l'opposé, pour le secteur I_3, tout se passe comme s'il existait une multiplicité de facteurs primaires : le travail et les biens du cœur appartiennent ainsi à cette catégorie, cependant, les dotations en ces derniers croissent à taux constant. Les prix relatifs des biens de I_3 dépendent alors des rapports de prix des facteurs primaires et d'un taux de rendement. Le message simple du théorème de non-substitution est brouillé par la multiplicité de facteurs primaires [31].

6 Conclusion

L'objectif de cet article était de donner un sens à la notion de cœur de croissance développée par REBELO [1991]. Il nous a permis tout à la fois de raffiner le statut du facteur primaire travail et de proposer une décomposition du système productif.

Aussi avons-nous analysé un modèle autarcique qui compartimente l'appareil productif en trois sous-ensembles. La caractéristique essentielle du découpage présenté tient alors à sa hiérarchisation. Cette dernière permet de dégager trois propriétés essentielles. En premier lieu, la croissance de long terme est caractérisée par une déformation de la structure de l'économie : les productions de chacun des secteurs croissent à des rythmes différents. En second lieu, la technologie de production des biens du cœur fixe le niveau du vecteur des taux de croissance alors que les autres technologies n'influent que sur sa structure. En troisième lieu, seules les dotations initiales en biens du cœur marquent à long terme le niveau de l'économie. Ces

31. Pour une présentation du théorème de non-substitution en présence de multiples facteurs primaires, on peut se référer à BURMEISTER [1975].

propriétés trouvent leur contrepartie en examinant le comportement des prix fictifs associés au sentier de croissance optimale : un résultat extrême de non-substitution est dégagé.

Au terme de ce travail, nous voudrions relever deux types d'insuffisance dans notre démarche. Les premières concernent le caractère restrictif imposé par le cadre log-linéaire. Toutefois, une comparaison de nos résultats avec des cas particuliers traités dans une annexe technique du papier de Rebelo nous conduit à conjecturer qu'aucun de nos principaux résultats dépend de manière cruciale de cette hypothèse.

Les secondes réserves tiennent à la correspondance empirique de nos développements théoriques. Nous avons déjà signalé que l'interprétation la plus probante du cœur de croissance consiste à l'assimiler aux secteurs d'accumulation du capital humain. La validation empirique de cette assertion reste pour le moins difficile à mener.

En conséquence, nous devons retenir de ce travail non pas un schéma qui aiderait à l'identification empirique des sources et des canaux de diffusion de la croissance mais un cadre théorique qui pourrait donner lieu à certaines extensions.

Par exemple, une extension de ce travail consiste à ouvrir notre économie autarcique à l'échange international. Une dynamique de spécialisation des économies semble alors inévitable. Ainsi, l'asymétrie des différents secteurs productifs a toutes chances de se transposer en une hiérarchisation des économies. En premier lieu, un 'centre' se chargera de fournir à la 'périphérie' les biens de haute technologie (et les compétences) nécessaires à la production des industries de transformation. En second lieu et sous certaines hypothèses, une 'périphérie' éloignée stagnera, repliée sur son secteur 'traditionnel'. Les premiers éléments de cette analyse sont présentés dans GLACHANT [1994a]. Le degré de mobilité des biens du cœur semble alors être le déterminant essentiel de la division internationale du système productif. L'introduction d'externalité enrichirait encore ce modèle.

A Détermination de la solution particulière

Nous nous plaçons dans le cas où $B \notin \mathrm{Im}(I - A)$. On a alors $g = \mu V$ avec V le vecteur propre associé à la matrice A. μ et f sont déterminés conjointement par le système :

$$[I - A \vdots V] \begin{bmatrix} f \\ \mu \end{bmatrix} = B, \tag{30}$$

la matrice $[I - A \vdots V]$ est de dimension $(n, n+1)$ et de rang n, puisque $V \in \mathrm{Ker}(I - A)$. Il existe alors une solution $\begin{bmatrix} f_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix}$ au système (30) car $B \in \mathrm{Im}([I - A \vdots V])$. Cette solution n'est évidemment pas unique. L'ensemble des solutions $\begin{bmatrix} f \\ \mu \end{bmatrix}$ est défini par :

$$[I - A \vdots V] \begin{bmatrix} f \\ \mu \end{bmatrix} = B = [I - A \vdots V] \begin{bmatrix} f_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix},$$

soit $\begin{bmatrix} f \\ \mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}([I - A \vdots V])$.

L'ensemble des solutions est donc un sous-espace affine de dimension 1 parallèle à $\mathrm{Ker}([I - A \vdots V])$. Or, une base de ce noyau est le vecteur $(n+1, 1)$ $\begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}$. La solution μ_0 est donc unique.

B Démonstration de la proposition 1

Sous (H1) et (H2), la proposition de Solow démontre que la matrice A est décomposable. Elle peut alors être partitionnée sous la forme suivante [32] :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_g & 0 & \cdots & 0 \\ A_{g+1,1} & A_{g+1,2} & \cdots & A_{g+1,g} & A_{g+1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sg} & A_{s,g+1} & \cdots & A_s \end{bmatrix}.$$

32. Après une opération de permutation adéquate.

$A_1, A_2, \ldots, A_s$ sont des matrices carrées indécomposables formant des sous-blocs *isolés*, et pour chaque ligne, au moins une des matrices $A_{f1},\ A_{f2},\ \ldots, A_{f,f-1}\quad (f = g+1, \ldots, s)$ est non nulle. Cette dernière forme est appelée *forme normale* de la matrice décomposable A.

Tout d'abord, les sous-blocs isolés de la forme normale vérifient :

$$A_i V_i = V_i \quad i = 1, \ldots, g,$$

avec V_i le sous-bloc correspondant du vecteur propre V associé à la valeur propre unitaire de A. Cette égalité indique que nous devons distinguer (i) les sous-blocs isolés de type (a) auxquelles sont associés des vecteurs $V_i = 0$ et (ii) les sous-blocs isolés de type (b) admettant 1 pour valeur propre. Par construction, chacun de ces sous-blocs isolés est indécomposable.

Par ailleurs, nous énonçons le corollaire suivant de la propriété de Solow [1952] :

Corollaire (Solow [1952]) : *Soit A une matrice décomposable telle que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1$. Alors une condition suffisante pour que les valeurs propres de A soient strictement inférieures à 1 en module est que, pour chaque sous-matrice $A_1, \ldots, A_g$ de la diagonale, au moins une des sommes des éléments pris en ligne est strictement inférieure à l'unité.*

Ce corollaire s'applique à la matrice des élasticités A. A est décomposable et admet une valeur propre unitaire; il existe alors au moins un sous-bloc *isolé* de la forme normale dont toutes les lignes somment à 1. Ce sous-bloc isolé est stochastique. Une matrice stochastique admettant 1 pour valeur propre dominante [33], ce sous-bloc stochastique est de type (b). Ceci implique qu'il existe au moins un sous-bloc isolé de type (b).

Ensuite, le polynôme caractéristique de A se factorise sous la forme :

$$P(\lambda) = \mathrm{Det}(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{g} \mathrm{Det}(\lambda I - A_i) Q(\lambda).$$

Il se déduit alors que, sous (H1), (H2) et (H3) : (i) il ne peut exister plusieurs sous-blocs isolés de type (b) [34]; ce sous-bloc est donc stochastique; (ii) 1 est valeur propre dominante simple de A_b; (iii) le vecteur propre V_b associé à cette valeur propre dominante de A_b est unitaire [35]; enfin, (iv) les valeurs propres des sous-blocs isolés de type (a) sont strictement inférieures à 1 en module. Par construction, aux sous-blocs isolés de type (a) correspondent des composantes nulles du vecteur propre V.

Nous sommes donc parvenus à la décomposition suivante de A et V :

$$A = \begin{bmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & A_b & 0 \\ A_{ca} & A_{cb} & A_c \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} 0 \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}.$$

33. Cf. Gantmacher [1966], vol. 2 p. 79.
34. Cet unique sous-bloc isolé est désormais noté A_b.
35. En effet, le vecteur propre associé à la valeur propre 1 d'une matrice stochastique est le vecteur unitaire (Cf. Gantmacher [1966], vol. 2, p. 79.).

Enfin, parmi les composantes i correspondant aux sous-blocs de type (c), on peut avoir $V_i = 0$ ou bien $V_i > 0$. Si $V_i = 0$, il apparaît que la ligne correspondante de la matrice A_{cb} est nul. Les composantes de ce type sont regroupées avec celles de type (a) et forment alors le sous-bloc de composante de type 1. Le sous-bloc associé est noté A_1. Les autres composantes de (c) sont regroupés dans un ensemble 3. Enfin, les composantes correspondant au sous-blocs isolé (b) forment le groupe I_2 et la matrice A_b correspond alors à la matrice A_2 de la proposition.

C Démonstration du corollaire 1

Le point (i) résulte directement de la décomposition de la matrice A. (ii) est issu du caractère stochastique de la matrice A_2. Le sous-vecteur propre V_2 est alors unitaire, soit $V_2 = e_2$. Or le vecteur des taux de croissance de I_2 est μV_2 : les taux de croissance des secteurs de type I_2 sont donc égaux. Enfin, (iii) se démontre en constatant que le vecteur des taux de croissance des secteurs de I_3 est μV_3 avec $V_3 \gg 0$. De plus, V_3 vérifie :

$$A_{32}e_2 + A_3V_3 = V_3.$$

Soit le vecteur $e_3 - V_3$, avec e_3 le vecteur unitaire de dimension $(n_3, 1)$; ce vecteur est solution de :

$$[I - A_3](e_3 - V_3) = e_3 - A_{32}e_2 - A_3e_3.$$

L'hypothèse (H1) implique que le vecteur $e_3 - A_{32}e_2 - A_3e_3$ soit positif. La matrice $I - A_3$ est inversible, par construction, et son inverse est une matrice non-négative [36]. Nous pouvons alors conclure que le vecteur $e_3 - V_3$ est positif.

D Démonstration du corollaire 2

Le vecteur des taux de croissance de l'économie est unique et s'écrit $g = \mu V$. Par ailleurs, Il apparaît que la dynamique régissant la production des biens de I_2 est autonome. Elle s'écrit :

$$y_{2,t} = A_2y_{2,t-1} + B_2.$$

En conséquence, le taux de croissance g_2 de ces biens est entièrement déterminée par les matrices A_2 et B_2. Ceci implique immédiatement que le scalaire μ fixant le niveau de croissance de l'économie ne dépend que de A_2 et B_2. Plus précisément, μ est l'unique solution de :

$$(I - A_2)f_2 + \mu V_2 = B_2, \tag{32}$$

36. En effet, les modules des valeurs propres de A sont strictement inférieures à 1.

avec V_2 le vecteur propre associé A_2 et f_2 un vecteur à déterminer donnant le niveau de la solution particulière. Pour les biens de I_2, remarquons que [37] :

$$B_{2i} = \sum_{j=1}^{n_2} a_{2,ij} \log\{\beta\gamma_{2i} a_{2,ij}/\gamma_{2,j}\} + \log\lambda_{2i},$$

soit, en notation vectorielle :

$$(33) \qquad B_2 = \mathrm{Diag}[A_2[\log A_2]'] + \log\beta e + (I - A_2)\log\gamma_2 + \log\lambda_2,$$

où $\log M$ désigne la matrice des logarithmes des éléments de la matrice M, e le vecteur colonne de dimension $(n,1)$ composé de 1, et Diag$[M]$ le vecteur formé par les termes diagonaux de M. En introduisant cette expression à la droite de (32), il se déduit :

$$(I - A_2)(f_2 - \log\gamma_2) + \mu V_2 = \mathrm{Diag}[A_2[\log A_2]'] + \log\lambda_2 + \log\beta e.$$

La matrice A_2 étant stochastique, le vecteur propre V_2 est égal au vecteur unitaire e_2; l'expression peut alors être réécrite sous la forme :

$$(34) \quad (I - A_2)(f_2 - \log\gamma_2) + (\mu - \log\beta)V_2 = \mathrm{Diag}[A_2[\log A_2]'] + \log\lambda_2.$$

Par conséquent, la solution μ est indépendante de γ_2 et est entièrement déterminée par le facteur d'actualisation β et la matrice des élasticités A_2 des biens I_2. De plus, le logarithme du facteur d'actualisation intervient de manière additive dans la détermination de μ. Les élasticités de la fonction d'utilité instantanée, le vecteur θ, n'interviennent que sur le niveau de long terme des productions via l'influence de γ sur f_2.

• Références bibliographiques

d'Autume, A. (1992). – "Cointégration et modèles dynamiques", *Economie et Prévision*, 106, pp. 71-84.

Burmeister, E. (1975). – "Many Primary Factors in Non-Joint Production Economies", *Economic Record*, Dec., pp. 486-512.

Durlauf, S. N., Johnson, P. A. (1992). – "Local Versus Global Convergence Across National Economies", *N.B.E.R, Working Paper*, # 3996.

Fourastié, J. (1989). – *Le grand espoir du XX-ième siècle*, édition revue et mise à jour, Gallimard.

Gantmacher, F. R. (1966). – *Théorie des matrices*, tome 2, *Questions spéciales et applications*, Dunod, Paris.

Glachant, J. (1994a). – *Les théories de la croissance : fondements et implications*, thèse de doctorat, Université de Paris I.

37. Pour les secteurs I_2, le corollaire 3 démontre que $b_i = 0$.

GLACHANT, J. (1994b). – “Fil du rasoir et chocs sur les rendements”, *Recherches économiques de Louvain*, 60(3), pp. 359-75.

HECKMANN, J. J. (1976). – “A Life Cycle Model of Earning, Learning and Consumption”, *Journal of Political Economy*, 84(2), pp. S11-S44.

JORGENSON, D. W. (1994). – *Investment and economic growth*, Simon Kuznets Lectures, Yale University.

KING, R. G., PLOSSER, C. I., REBELO S. T. (1988). – “Production, Growth and Business Cycles: I and II”, *Journal of Monetary Economics*, 21.

LONG, J. B., PLOSSER, C. I. (1983). – “Real Business Cycles”, *Journal of Political Economy*, 91(11), pp. 39-69.

LUCAS, R. E. (1988). – “On the Mechanics of Economic Development”, *Journal of Monetary Economics*, 22, pp. 3-34.

MELLANDER, E., VREDIN, A., WARNE, A. (1992). – “Stochastic Trends and Economic Fluctuations in a Small Open Economy”, *Journal of Applied Econometrics*, 7(4), pp. 369-95.

RADNER, R. (1966). – “Optimal Growth in a Linear-Logarithmic Economy”, *International Economic Review*, 7(1), pp. 1-33.

REBELO, S. (1991). – “Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth”, *Journal of Political Economy*, 99(3), pp. 500-521, version préliminaire sous le même titre, *Working Paper NBER # 3325*, 1990.

ROMER, P. M. (1986). – “Increasing Returns and Long-Run Growth”, *Journal of Political Economy*, 94, pp. 1002-37.

ROMER, P. M. (1989). – “Increasing Returns and New Developments in the Theory of Growth”, in *Equilibrium theory and applications*, W. A. Barnett (ed.), Cambridge University Press, Cambridge.

SOLOW, R. M. (1952). – “On the Structure of Linear Models”, *Econometrica*, 20(1), pp. 29-46.

UZAWA, H. (1965). – “Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth”, *International Economic Review*, 6, pp. 18-31.