ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. - N° 36 — 1994

Caractérisation des optima de Pareto dans une économie avec effets externes

Jean-Marc BONNISSEAU*

RÉSUMÉ. – Nous considérons une économie avec des effets externes et des ensembles de production non-convexes. Nous démontrons l'existence d'une caractérisation des optima de Pareto qui généralise les résultats obtenus dans le cas convexe et dans le cas des économies non-convexes sans effets externes.

Auparavant, nous présentons une étude détaillée d'un exemple qui révèle plusieurs caractéristiques surprenantes des optima de Pareto dans une économie avec effets externes.

Characterization of Pareto Optima in an Economy with externalities

ABSTRACT. – We consider an economy with externalities and non-convex production sets. We state a general result which gives a characterization of Pareto optimal allocations. This generalizes previous results in the case of convex economies or non-convex economies without externalities.

Before, we present a precise study of an example which highlights several surprising features of the Pareto optima in an economy with externalities.

* J.M. BONNISSEAU : CERMSEM, Université de Paris 1.

1 Introduction

La présence d'effets externes entre les agents d'une économie implique souvent la non-convexité des ensembles de production ou des préférences des consommateurs comme cela est reconnu depuis longtemps dans la littérature économique. Ceci est particulièrement probable lorsque les effets externes sont négatifs. Il est donc nécessaire de s'affranchir des hypothèses classiques de convexités lorsqu'on étudie une économie avec effets externes même au risque de produire des résultats moins élégants.

Le propos de cet article est de donner une caractérisation des allocations Pareto-optimales dans une économie avec effets externes, sans hypothèse de convexité sur les ensembles de production ou sur les préférences des consommateurs.

Dans une économie convexe sans effets externes, un optimum de Pareto peut être décentralisé sous certaines conditions très faibles (ARROW [1951], DEBREU [1951, 1954, 1959]). Ceci signifie qu'il existe un prix non nul pour lequel les allocations des consommateurs sont une solution du problème de minimisation des dépenses et les allocations des producteurs sont une solution du problème de maximisation du profit. Ce résultat a été généralisé dans deux directions. Tout d'abord, en présence d'effets externes, LAFFONT [1976, 1977] montre que la décentralisation est encore possible si, suivant une idée de ARROW [1969], on introduit dans le modèle des marchés et donc des prix pour les externalités entre les agents. Ce résultat nécessite des hypothèses de convexité sur les graphes des correspondances décrivant les possibilités technologiques et les préférences des consommateurs.

D'autre part, dans BONNISSEAU-CORNET [1988], CORNET [1986, 1990], DIERKER [1986], GUESNERIE [1975], KHAN [1987], KHAN-VOHRA [1988], QUINZII [1988], YUN [1984], la question de la caractérisation des optima de Pareto est étudiée lorsque sont supprimées les hypothèses de convexité des résultats de ARROW et DEBREU. Dans ce cas-là, le résultat revient à traduire, dans un cadre général, le fait que les taux marginaux de substitution et les taux marginaux de transformation sont égaux en un état Pareto optimal. Bien entendu, la caractérisation obtenue est seulement nécessaire et n'est plus suffisante comme dans le cas convexe.

Le résultat indique qu'il existe un même vecteur prix non nul dans le cône normal à l'ensemble des consommations préférés pour chaque consommateur et à l'ensemble de production pour chaque producteur. Ceci signifie que ce prix et les allocations vérifient les conditions nécessaires du premier ordre des problèmes de minimisation de la dépense ou de maximisation du profit. Cette condition peut se démontrer en remarquant que l'allocation considérée est Pareto-optimale pour une économie dérivée de l'économie initiale obtenue en remplaçant les ensembles de production et les ensembles des allocations préférées par une « approximation convexe » de ces ensembles. On peut donc interpréter ce résultat en disant qu'à une allocation Pareto-optimale, pour un certain prix non nul, chaque consommateur minimise sa dépense sur une « approximation convexe » de l'ensemble des allocations préférées et chaque producteur maximise son profit sur une « approximation convexe » de son ensemble de production.

Nous proposons dans la troisième partie un théorème général qui donne une condition nécessaire de Pareto-optimalité. Comme ARROW [1969] l'a remarqué, les effets externes peuvent s'interpréter comme l'absence de certains marchés sur lesquels seraient échangés des droits à émettre des effets externes. Il est donc nécessaire de créer fictivement de nouveaux marchés pour caractériser les optima de Pareto et de tenir compte des prix qui apparaissent sur ces marchés. Nous introduisons également une hypothèse en plus de la non-statiation locale des préférences qui est toujours nécessaire dans ce type de problème. Elle exprime une condition de monotonie directionnelle des préférences pour un consommateur et elle est toujours vérifiée lorsque les préférences sont convexes. Cette hypothèse est utilisée pour la première fois dans CORNET [1986] qui donne un exemple où la caractérisation n'est pas valide lorsque cette hypothèse n'est pas satisfaite. De ce résultat général, nous déduisons directement les résultats obtenus dans le cas convexe et dans le cas sans effets externes.

Pour ne pas compliquer sur le plan technique le résultat, nous considérons uniquement le cône normal de Clarke pour exprimer cette condition nécessaire. D'autres résultats peuvent également être obtenus avec d'autres notions de cônes normaux comme cela a été fait pour les économies sans effets externes dans BONNISSEAU-CORNET [1988], GUESNERIE [1975], KHAN [1987], CORNET [1986, 1990]. La preuve du théorème consiste à se ramener à une économie auxiliaire sans effets externes qui est déduite de l'économie initiale par l'adjonction de biens correspondants aux droits à émettre des effets externes. Dans cette économie auxiliaire, on utilise le résultat de CORNET [1986] mais nous en donnons une nouvelle preuve à partir d'une propriété du cône normal de CLARKE du à CORNET et ROCKAFELLAR. Finalement, on revient à l'économie initiale en utilisant des transformations linéaires entre l'économie initiale et l'économie auxiliaire.

Avant d'énoncer notre résultat, nous allons étudier de façon approfondie un exemple repris de LAFFONT [1977]. D'autres exemples similaires ont été donnés dans MURAKAMI-NEGISHI [1964] et STARRETT [1972]. La particularité de cet exemple provient du fait que l'allocation du premier producteur à l'unique optimum est inefficace. LAFFONT en conclut que la décentralisation de tels optima est impossible et qu'une hypothèse de non-intériorité est nécessaire.

En fait, la condition de non-intériorité proposée par LAFFONT est satisfaite mais, par contre, le graphe de la correspondance qui représente les possibilités technologiques du deuxième producteur n'est pas convexe. Nous montrons cependant qu'il existe un prix non nul commun à tous les cônes normaux des ensembles considérés. Pour l'ensemble non-convexe, nous construisons le cône normal par analogie avec le cas convexe ce qui, dans le cas considéré, revient à utiliser le cône de Clarke.

Pour ce prix, on constate que le premier producteur qui a une allocation inefficace est dans une situation où le prix des biens est égal au prix du droit à émettre un effet externe sur l'autre producteur. Donc, au total, son profit est nul lorsqu'il n'utilise pas du bien qui n'intervient pas dans son processus de production, car il reçoit autant pour ce qu'il produit que ce qu'il paye pour l'externalité qu'il induit par sa production. Le prix trouvé peut sembler trivial et non intéressant. En fait, cette situation correspond au cas classique lorsqu'un producteur a des rendements d'échelle constants et que le prix d'équilibre ne permet pas de déterminer son niveau de production car son profit est nul quel que soit ce niveau. Nous allons maintenant passer à l'étude précise de cet exemple.

2 Un exemple

Nous considérons une économie à trois biens A, B et C. C est un facteur de production et A et B sont des biens de consommations. Un seul consommateur est présent dans cette économie et sa fonction d'utilité est définie sur R^3_+ par $u(x_A, x_B, x_C) = x_A(x_B)^3$. Deux producteurs produisent respectivement du bien A et du bien B. Le deuxième producteur supporte une externalité négative de la part du premier. Les ensembles de production sont définis de la façon suivante :

$$Y_1 = \{(a, b, c) \in R^3 | b \leq 0, c \leq 0, a \leq -c\}.$$

Si (a_1, b_1, c_1) est le plan de production du premier producteur, l'ensemble de production du deuxième est :

$$Y_2(a_1, b_1, c_1) = \left\{(a, b, c) \in R^3 \,\middle|\, a \leq 0, c \leq 0, b \leq -c\left(1 + \min\left\{\frac{1}{2}, -\frac{c_1}{a_1} - 1\right\}\right)\right\}.$$

Les allocations initiales sont $\omega = (0, 0, 1)$. Nous pouvons remarquer que le graphe de la correspondance Y_2 n'est pas convexe. En effet, s'il l'était, l'ensemble de production total défini par :

$$Y = \{y \in R^3 | \exists\, y_1 \in Y_1, \exists\, y_2 \in Y_2(y_1), y = y_1 + y_2\}$$

serait convexe. Or, en calculant ce qui peut être produit avec une quantité 1 de bien C, on obtient l'ensemble représenté sur la figure 1. Cet ensemble n'est pas convexe et c'est intersection de Y avec le plan $c = 1$, donc Y n'est pas convexe, ce qui montre que le graphe de Y_2 n'est pas convexe.

Cette économie a un unique optimum de Pareto qui est :

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{6}, \frac{9}{8}, 0\right), \qquad \bar{y}_1 = \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{4}\right), \qquad \bar{y}_2 = \left(0, \frac{9}{8}, -\frac{3}{4}\right).$$

On remarque que, au plan de production $\bar{y}_1$, la production n'est pas efficace car avec la même quantité de facteur de production, le premier producteur peut produire strictement plus de bien A. On note aussi que $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ ne peut être une solution du problème de maximisation du profit sur l'ensemble de production Y quelque soit le prix choisi. Donc il n'est pas possible de décentraliser cet optimum en terme de maximisation du profit pour chacun

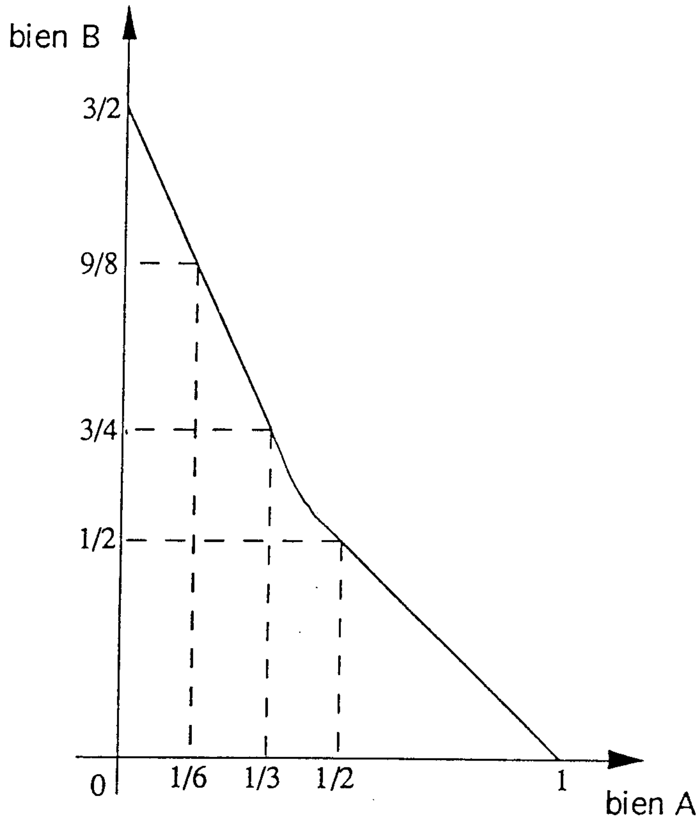

FIGURE 1

des producteurs même si on intègre de nouveaux marchés pour les effets externes.

Nous allons montrer maintenant qu'il est cependant possible de caractériser cet optimum avec une propriété portant sur le cône normal des ensembles considérés. Soit $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ et $\tilde{C}$ trois biens fictifs correspondant à l'effet externe du premier producteur sur le second. On peut plonger l'économie initiale dans une économie à 6 biens sans effets externes de la façon suivante :

L'ensemble de consommation et la fonction d'utilité sont :

$$\tilde{X} = \{x \in R^6 | x_A \geq 0,\ x_B \geq 0,\ x_C \geq 0,\ x_{\tilde{A}} = 0,\ x_{\tilde{B}} = 0,\ x_{\tilde{C}} = 0\};$$
$$\tilde{u}(x) = x_A (x_B)^3.$$

Les ensembles de productions et les allocations initiales sont :

$$\tilde{Y}_1 = \{y \in R^6 | (y_A,\ y_B,\ y_C) \in Y_1,\ y_{\tilde{A}} = y_A,\ y_{\tilde{B}} = y_B,\ y_{\tilde{C}} = y_C\};$$
$$\tilde{Y}_2 = \{y \in R^6 | (y_A,\ y_B,\ y_C) \in Y_2(-y_{\tilde{A}},\ -y_{\tilde{B}},\ -y_{\tilde{C}}\};$$
$$\tilde{\omega} = (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Les définitions précédentes signifient ceci : le premier producteur produit de façon conjointe les biens et les effets externes ce qui se traduit par $y_{\tilde{A}} = y_A$, $y_{\tilde{B}} = y_B$, $y_{\tilde{C}} = y_C$; le deuxième producteur doit se procurer les quantités d'effets externes $y_{\tilde{A}}$, $y_{\tilde{B}}$, $y_{\tilde{C}}$ pour pouvoir produire des biens réels. On peut aussi interpréter cela comme la nécessité pour le premier producteur d'acheter au deuxième des droits à produire des effets externes.

Cette nouvelle économie est non-convexe car $\tilde{Y}_2$ est non-convexe. Elle a un unique optimum de Pareto qui est donné par :

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{6}, \frac{9}{8}, 0, 0, 0, 0\right), \qquad \bar{y}_1 = \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{4}\right),$$
$$\bar{y}_2 = \left(0, \frac{9}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{4}\right).$$

Nous allons maintenant calculer le cône normal à $P(\tilde{x})$, l'ensemble des allocations préférées à $\tilde{x}$, à $\tilde{Y}_1$ et à $\tilde{Y}_2$ aux points $\tilde{x}$, $\tilde{y}_1$ et $\tilde{y}_2$. Les ensembles considérés sont définis par des égalités et des inégalités. Donc, s'ils sont convexes, nous savons que le cône normal est donné par l'ensemble des combinaisons linéaires (à coefficients positifs s'il s'agit d'inégalités) des gradients des contraintes saturées sous une hypothèse de qualification qui est ici satisfaite. Pour l'ensemble $\tilde{Y}_2$, nous utiliserons la même définition bien qu'il ne soit pas convexe. Ceci nous donne :

$$N_{P(\tilde{x})}(\tilde{x}) = \left\{ \left(-\alpha_1 \frac{81}{64}\frac{9}{8}, -\alpha_1 \frac{81}{64}\frac{1}{2}, -\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_4, -\alpha_5\right) \right.$$
$$\left. \Big| \, (\alpha_1, \ldots, \alpha_5) \in R_+^2 \times R^3 \right\};$$
$$N_{\tilde{Y}_1}(\tilde{y}_1) = \{(\beta_2, \beta_1 + \beta_3, \beta_4, -\beta_2, -\beta_3, -\beta_4) | (\beta_1, \ldots, \beta_4) \in R_+ \times R^3\};$$
$$N_{\tilde{Y}_2}(\tilde{y}_2) = \left\{ \left(\gamma_1, \gamma_2 + \gamma_3, \frac{3}{2}(\gamma_2 + \gamma_3), -\frac{27}{4}\gamma_3, 0, -\frac{9}{2}\gamma_3\right) \right.$$
$$\left. \Big| \, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in R_+^3 \right\}.$$

Après un simple calcul, nous remarquons que le vecteur $\tilde{p} = (9, 4, 6, -9, 0, -6)$ appartient à l'intersection de $-N_{P(\tilde{x})}(\tilde{x})$, de $N_{\tilde{Y}_1}(\tilde{y}_1)$ et de $N_{\tilde{Y}_2}(\tilde{y}_2)$. Ceci est notre caractérisation de l'optimum de cette économie. Si tous les ensembles étaient convexes, elle serait équivalente à la caractérisation que l'on obtient dans ce cas-là et qui est généralement présentée en disant que les consommateurs minimisent leur dépense et les producteurs maximisent leur profit.

Regardons maintenant ce qui se passe dans l'économie initiale en supposant que des marchés de droits sont ouverts pour les effets externes. Soit $\bar{p} = (9, 4, 6)$. L'allocation $\bar{x}$ est une solution du problème de minimisation de la dépense pour le prix $\bar{p}$ sur l'ensemble des préférés à $\bar{x}$. Le consommateur n'étant pas concerné par les effets externes, ceux-ci n'interviennent pas dans ce résultat.

Pour le premier producteur, s'il choisit un plan de production réel y_1, il produit conjointement des effets externes y_1. Son profit est alors $9\,y_{1A} + 4\,y_{1B} + 6\,y_{1C} - 9\,y_{1A} - 6\,y_{1C} = 4\,y_{1B}$. Donc, il maximise son profit dès qu'il ne consomme pas de bien B dans le processus de production. Ceci n'implique pas que sa production soit efficace comme cela se produit en $\tilde{y}_1$. Pour le deuxième producteur, vu que $\tilde{Y}_2$ n'est pas convexe, $\tilde{y}_2$ n'est pas une solution du problème de maximisation du profit sur $\tilde{Y}_2$ pour le prix $\tilde{p}$. Cependant, $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ vérifie les conditions du premier ordre pour le problème de maximisation du profit du deuxième producteur sur le graphe de la correspondance Y_2. Ce profit, en tenant compte de la recette tirée de la vente des droits à émettre des effets externes est égal à : $9\,y_{1A} + 6\,y_{1B} + 9\,y_{2A} + 4\,y_{2B} + 6\,y_{2C}$.

Pour conclure, nous remarquons que, malgré la non-efficacité du plan de production du premier producteur à l'optimum, nous obtenons $\tilde{p} \in -N_{P(\tilde{x})}(\tilde{x}) \cap N_{\tilde{Y}_1}(\tilde{y}_1) \cap N_{\tilde{Y}_2}(\tilde{y}_2)$. Nous ne pouvons obtenir une meilleure caractérisation car l'ensemble $\tilde{Y}_2$ n'est pas convexe. Le prix $\tilde{p}$ peut apparaître comme un prix trivial car il ne permet pas de déterminer le niveau de production du premier producteur. Mais ceci peut être comparé au cas d'un producteur ayant des rendements d'échelle constants où le prix d'équilibre ne permet pas de déterminer le niveau de production car le profit est identiquement nul pour tous les niveaux de production.

3 Caractérisation des optima de Pareto

Nous considérons maintenant un modèle général et nous allons énoncer un théorème sur la caractérisation des optima de Pareto pour une économie avec effets externes sans hypothèse de convexité. Nous proposons deux corollaires de ce résultat. Pour le premier, nous ferons des hypothèses de convexité ce qui nous permet d'obtenir un résultat de décentralisation. Dans le deuxième corollaire, nous montrons que le cas d'une économie sans effets externes se déduit aisément de notre résultat.

Pour énoncer notre résultat, nous allons utiliser la notion de cône normal de Clarke (voir Clarke [1983]). Ce concept a l'avantage d'être d'un maniement commode. De plus, lorsque les ensembles sont convexes, il est identique au cône normal de l'analyse convexe et lorsque les ensembles sont définies par des contraintes d'égalité et d'inégalité différentiable, il est facile de le calculer car les règles qui s'appliquent dans le cas convexe, s'appliquent également dans ce cas.

Soit[1] C un sous-ensemble d'un espace vectoriel euclidien F de dimension finie et soit $c \in \operatorname{ad} C$. Dans le cas convexe, le cône normal à C en c est l'ensemble des vecteurs u tel que l'ensemble C est entièrement du même côté de l'hyperplan orthogonal à u qui passe par c. Pour généraliser cette notion, nous allons d'abord considérer l'ensemble des vecteurs perpendiculaires à C en c qui est noté $\perp_C(c)$. Un vecteur u appartient à $\perp_C(c)$ s'il existe un réel $r > 0$ tel que l'ensemble C est entièrement à l'extérieur de la boule ouverte de rayon r et de centre $c + ru$. Ceci se traduit par :

$$\perp_C(c) = \{u \in F \mid \exists\, \rho > 0,\ \forall c' \in C,\ u \cdot c \geq u \cdot c' - \rho \,\| c - c' \|^2\}.$$

On remarque qu'un vecteur u qui est dans le cône normal a un ensemble convexe C en c est perpendiculaire à C en c et réciproquement. Il est facile de vérifier que l'ensemble $\perp_C(c)$ est un cône et que pour un ensemble dense de point de la frontière de C, il n'est pas réduit au vecteur nul. Le cône normal de Clarke à C en c, $N_C(c)$ est défini à partir de la notion de vecteur-perpendiculaire : il est égal à l'enveloppe convexe fermée des limites de vecteurs perpendiculaires à C en c^q, où c^q est une suite de points de C qui convergent vers c. $N_C(c)$ est donc l'enveloppe convexe fermée de :

$$\{u \in F \mid \exists\, (c^q) \subset \operatorname{ad} C,\ (c^q) \to c,\ \exists\, (u^q) \subset F,\ (u^q) \to u \text{ et } u^q \in \perp_C(c^q),\ \forall q\}.$$

Si C est convexe, $N_C(c)$ coïncide avec le cône normal de l'analyse convexe, c'est-à-dire, $N_C(c) = \{u \in F \mid \forall c' \in C,\ u \cdot c \geq u \cdot c'\}$. Si l'ensemble C est défini à partir d'un nombre fini d'égalités et d'inégalités, alors le cône normal de Clarke peut s'exprimer simplement sous une condition de qualification des contraintes. Plus précisément, supposons qu'il existe $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$ et $(g_j)_{j \in \mathcal{E}}$ un nombre fini de fonctions continûment différentiables de F dans R telles que :

$$C = \{c \in F | f_i(c) \leq 0,\ \forall i \in \mathcal{I},\ g_j(c) = 0,\ \forall j \in \mathcal{E}\}$$

Soit c un élément de C. Soit $\mathcal{I}(c) = \{i \in \mathcal{I} | f_i(c) = 0\}$, l'ensemble des contraintes d'inégalités saturées en c. Si les vecteurs $(\nabla g_j(c))_{j \in \mathcal{E}}$ sont linéairement indépendants et s'il existe $v \in F$ tel que $\nabla f_i(c) \cdot v < 0$ pour tout $i \in \mathcal{I}(c)$ et $\nabla G_j(c) \cdot v = 0$ pour tout $j \in \mathcal{E}$, alors :

$$N_C(c) = \left\{ \sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i \nabla f_i(c) + \sum_{j \in \mathcal{E}} \mu_j \nabla g_j(c) \;\middle|\; \begin{array}{l} \lambda_i \geq 0,\ \lambda_i f_i(c) = 0,\ \forall i \in \mathcal{I} \\ \mu_j \in R,\ \forall j \in \mathcal{E} \end{array} \right\}.$$

Nous reconnaissons dans cette formule l'expression qui sert à exprimer les conditions nécessaires du premier ordre pour la maximisation ou la minimisation d'une fonction sur C dans le théorème de Kuhn et Tucker. Plus généralement, si $\bar{c}$ est solution du problème de maximisation de $u \cdot c$ pour $c \in C$, alors u appartient à $N_C(\bar{c})$.

---

1. **Notations :** Si c et d sont deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie F, nous notons $c \cdot d$ le produit scalaire de c et de d, $\|c\|$ la norme de c. Si C est un sous- ensemble de F, nous notons $\operatorname{ad} C$ l'adhérence de C et $\operatorname{Fr} C$ la frontière de C. Pour $c \in F$ et $\varepsilon > 0$, $B(c, \varepsilon)$ est la boule ouverte de centre c et de rayon ε

La preuve de notre résultat est basée sur le résultat suivant dû à CORNET ROCKAFELLAR [1990].

PROPOSITION 1 : Soit $(C_k)_{k=1,\cdots,K}$, K sous- ensembles fermés de F. Soit $(c_k) \in \prod_{k=1}^{K} C_k$ tel que $\sum_{k=1}^{K} c_k \in \mathrm{Fr}\left(\sum_{k=1}^{K} C_k\right)$. Alors $\bigcap_{k=1}^{K} N_{C_k}(c_k) \neq \{0\}$.

Nous en venons maintenant à la présentation du modèle. Soit $\mathcal{E}$ une économie avec un nombre fini l de biens, m de consommateurs et n de producteurs. Pour des raisons de commodité de notations, les consommateurs seront représentés par l'indice $i \in \{1, \ldots, m\}$ et les producteurs par l'indice $j \in \{m+1, \ldots, m+n\}$. Nous utiliserons les notations suivantes. Pour tout $(x, y) \in (R^l)^{m+n}$, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$,

$$(x, y)_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m, y_{m+1}, \ldots, y_{m+n}) \in (R^l)^{m+n-1}$$

et pour tout $j \in \{m+1, \ldots, m+n\}$,

$$(x, y)_{-j} = (x_1, \ldots, x_m, y_{m+1}, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_{m+n}) \in (R^l)^{m+n-1}.$$

Pour tenir compte de l'éventualité de l'existence d'effets externes entre les agents, nous définissons les caractéristiques des agents de la façon suivante. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, l'ensemble de consommation du i-ième consommateur est donné par une correspondance X_i de $(R^l)^{m+n-1}$ dans R^l. $X_i((x, y)_{-i})$ est l'ensemble de consommation du i-ième consommateur étant donné son environnement $(x, y)_{-i}$. Nous noterons GX_i le graphe de la correspondance X_i. Les préférences du consommateur sont représentées par une correspondance P_i de GX_i dans GX_i. Pour tout $(x, y) \in GX_i$, $P_i(x, y)$ est l'ensemble des allocations strictement préférées à (x, y) par le i-ième consommateur.

Pour tout $j \in \{m+1, \ldots, m+n\}$, les possibilités technologiques de la firme j sont représentées par une correspondance Y_j de $(R^l)^{m+n-1}$ dans R^l. $Y_j((x, y)_{-j})$ est l'ensemble de production du j-ième producteur étant donné son environnement. Nous noterons GY_j le graphe de la correspondance Y_j. Nous noterons ω le vecteur des allocations initiales de l'économie.

DÉFINITION 1 : Un élément $(x, y) \in (R^l)^{m+n}$ est une allocation réalisable de l'économie $\mathcal{E}$ si (*a*) pour tout i, $(x, y) \in GX_i$, (*b*) pour tout j, $(x, y) \in GY_j$ et (*c*) $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=m+1}^{m+n} y_j + \omega$. Un élément $(\bar{x}, \bar{y}) \in (R^l)^{m+n}$ est un optimum de Pareto de l'économie si c'est une allocation réalisable et s'il n'existe pas d'allocation réalisable (x, y) de $\mathcal{E}$ telle que pour tout i, $(x, y) \in \mathrm{ad}P_i(\bar{x}, \bar{y})$ et pour un i_0 au moins, $(x, y) \in P_{i_0}(\bar{x}, \bar{y})$.

Pour obtenir une caractérisation des optima, nous avons besoin d'introduire de nouveaux marchés et donc de nouveaux biens qui correspondent aux effets externes entre les agents. Pour cela, nous allons utiliser les notations suivantes. Soit $E = (R^l)^{1+(m+n)(m+n-1)}$. Un élément

z de E a $1 + (m+n)(m+n-1)$ composantes dans R^l, notées z^0, $z^{k;k'}$ où $(k, k') \in \{1, \ldots, m+n\}^2$ et $k \neq k'$. Nous avons ajouté à l'espace des biens, $l(m+n)(m+n-1)$ biens. $z^{k;k'}$ correspond à l'effet externe de l'agent k sur l'agent k'.

Nous allons avoir besoin dans l'énoncé de notre résultat d'une condition technique qui sera interprétée ultérieurement.

DÉFINITION 2 : Un sous-ensemble C d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie F et un élément c de $\operatorname{ad} C$ vérifient la condition (D) s'il existe $e \in F$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $t \in]0, \varepsilon[$,

$$te + [\operatorname{ad} C \cap \operatorname{ad} B(c, \varepsilon)] \subset C.$$

Nous rappelons le résultat suivant (CORNET [1986], proposition 3.5) qui nous donne des conditions suffisantes sur C pour que la condition (D) soit satisfaite en tout point de C.

PROPOSITION 2 : Si C est convexe ou fermé, alors la condition (D) est satisfaite en tout point de C.

Si C est fermé, il suffit de prendre $e = 0$. Si C est convexe, il suffit de prendre $e = c' - c$ où c' est un élément de l'intérieur relatif de C. Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat.

THÉORÈME 3 : Soit $(\bar{x}, \bar{y})$ un optimum de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$. Si, pour tout i, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{ad} P_i(\bar{x}, \bar{y})$, pour tout j, GY_j est fermé ou convexe et si pour un $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, la condition (D) est satisfaite pour $P_{i_0}(\bar{x}, \bar{y})$ et $(\bar{x}, \bar{y})$, alors il existe un vecteur prix $\bar{p} \in E$ non nul tel que pour tout $i = 1, \ldots, m$, le vecteur $\bar{p}_i$ défini par :

$$\begin{aligned}&(-\bar{p}^{1;i}, \ldots, -\bar{p}^{i-1;i}, \bar{p}^0\\ &\quad + \sum_{k \neq i} \bar{p}^{i;k}, -\bar{p}^{i+1;i}, \ldots, -\bar{p}^{m;i}, \bar{p}^{m+1;i}, \ldots, \bar{p}^{m+n;i})\end{aligned}$$

est un élément de $-N_{P_i(\bar{x}, \bar{y})}(\bar{x}, \bar{y})$ et pour tout $j = m+1, \ldots, m+n$, le vecteur $\bar{p}_j$ donné par :

$$\begin{aligned}&(\bar{p}^{1;j}, \ldots, \bar{p}^{m;j}, -\bar{p}^{m+1;j}, \ldots, -\bar{p}^{j-1;j}, \bar{p}^0\\ &\quad + \sum_{k \neq j} \bar{p}^{j;k}, -\bar{p}^{j+1;j}, \ldots, -\bar{p}^{m+n;j})\end{aligned}$$

est un élément de $N_{GY_j}(\bar{x}, \bar{y})$.

Nous pouvons interpréter ce résultat de la manière suivante. Sur le marché des biens réels, le consommateur i achète la quantité $\bar{x}_i$ au prix $\bar{p}^0$. Dans le même temps, il émet un effet externe $\bar{x}_i$ pour tous les autres agents de l'économie. Il doit donc acheter le droit d'émettre des effets externes au prix $\bar{p}^{i;k}$ à chaque agent k. Par contre, les autres agents lui achète le droit d'émettre des effets externes aux prix $\bar{p}^{k;i}$. Le fait que des signes moins apparaissent dans l'expression du résultat provient de la manière dont on écrit les équations d'équilibre sur les marchés. En effet, si on considère le consommateur i', l'équilibre sur le marché des biens $i'\,i$ s'écrit $x_{i'}^{i';i} + x_i^{i';i} = 0$ ou $x_{i'}^{i';i}$ est ce que le consommateur i' achète comme droits à émettre des effets externes à l'agent i. Donc si le consommateur i' paye $\bar{p}^{i';i} \cdot x_{i'}^{i';i}$ le consommateur i reçoit $-\bar{p}^{i';i} \cdot x_{i'}^{i';i}$. Ceci explique que le prix de vente de droits d'émettre des effets externes pour l'agent i est $-\bar{p}^{i';i}$. Par contre, si on considère un producteur j, l'équilibre sur le marché des biens $j;\, i$ s'écrit $x_i^{j;i} = y_j^{j;i}$. Ici le prix de vente de droits à émettre des effets externes est donc $\bar{p}^{j';i}$. Finalement, la condition $\bar{p}_i \in -N_{P_i(\bar{x},\bar{y})}(\bar{x},\, \bar{y}) \times \bar{p}^{j;i}$ correspond à la condition nécessaire du premier ordre pour la minimisation de la dépense $\bar{p}_i \cdot (x,\, y)$ sur l'ensemble des préférés à $(\bar{x},\, \bar{y})$. La condition sur les producteurs s'interprète de la même façon.

Les hypothèses du théorème ne présentent pas d'originalité en dehors du fait que la convexité n'est requise pour aucun ensemble. On retrouve une hypothèse de non-satiation locale sous la forme $(\bar{x},\, \bar{y}) \in \mathrm{ad}\, P_i\,(\bar{x},\, \bar{y})$. Même en l'absence d'effets externes, une condition supplémentaire est nécessaire pour obtenir la caractérisation des optima de Pareto (voir CORNET [1986], remarque 3.1. pour un exemple). La condition (D) s'interprète comme ceci. La direction e est localement une direction suivant laquelle le consommateur i_0 augmente sa satisfaction. D'après la proposition 2. cette condition est satisfaite si un seul des consommateurs a des préférences convexe ou monotone. Cette hypothèse est reprise du résultat de CORNET [1986]. Elle peut être affaiblie de différentes façons qui n'introduisent pas d'améliorations significatives pour notre modèle.

Nous déduisons de notre résultat le corollaire suivant qui est le résultat de LAFFONT [1976].

COROLLAIRE 4 : Soit $(\bar{x},\, \bar{y})$ un optimum de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$. Si, pour tout i, $P_i\,(\bar{x},\, \bar{y})$ est convexe et $(\bar{x},\, \bar{y}) \in \mathrm{ad}\, P_i\,(\bar{x},\, \bar{y})$, si, pour tout j, GY_j est convexe, alors il existe un prix non-nul $\bar{p}$ de E tel que : pour tout $i = 1,\, \ldots,\, m$, $(\bar{x},\, \bar{y})$ est une solution de :

$$\begin{cases} \text{minimiser}\, \bar{p}_i \cdot (x,\, y) \\ (x,\, y) \in \mathrm{ad}\, P_i\,(\bar{x},\, \bar{y}) \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{p}_i = (&-\bar{p}^{1;i},\, \ldots,\, -\bar{p}^{i-1;i},\, \bar{p}^0 \\ &+ \sum_{k \neq i} \bar{p}^{i;k},\, -\bar{p}^{i+1;i},\, \ldots,\, -\bar{p}^{m;i},\, \bar{p}^{m+1;i},\, \ldots,\, \bar{p}^{m+n;i}); \end{aligned}$$

pour tout $j = m+1,\, \ldots,\, m+n$, $(\bar{x},\, \bar{y})$ est une solution de :

$$\begin{cases} \text{maximiser}\, \bar{p}_j \cdot (x,\, y) \\ (x,\, y) \in \mathrm{ad}\, GY_j \end{cases}$$

avec $$\begin{aligned} \bar{p}_j = (&\bar{p}^{1;j},\, \ldots,\, \bar{p}^{m;j},\, -\bar{p}^{m+1;j},\, \ldots,\, -\bar{p}^{j-1;j},\, \bar{p}^0 \\ &+ \sum_{k \neq j} \bar{p}^{j;k},\, -\bar{p}^{j+1;j},\, \ldots,\, -\bar{p}^{m+n;j}). \end{aligned}$$

Dans les hypothèses de son résultat, LAFFONT ajoute la condition $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Fr}\, GY_j$ pour tout j afin d'obtenir un prix non trivial. Ce corollaire est une conséquence directe du théorème 3., de la proposition 2. et du fait que le cône de Clarke s'identifie avec le cône de l'analyse convexe quand les ensembles sont convexes.

Nous regardons maintenant ce que donne notre résultat dans une économie sans effets externes. L'absence d'effets externes se traduit de la façon suivante. Pour tout $i = 1, \ldots, m$, il existe $\bar{X}_i \subset R^l$ tel que $GX_i = \{(x, y) \in (R^l)^{m+n} | x_i \in \bar{X}_i\}$ et il existe une correspondance $\bar{P}_i$ de GX_i dans $\bar{X}_i$ telle que $\bar{P}_i(x, y) = \{(x', y') \in GX_i | x'_i \in \bar{P}_i(x, y)\}$. Pour tout $j = m+1, \ldots, m+n$, il existe $\bar{Y}_j \subset R^l$ tel que $GY_j = \{(x, y) \in (R^l)^{m+n} | y_j \in \bar{Y}_j\}$. Dans ce cadre, on vérifie aisément que le cône normal de Clarke vérifie les conditions suivantes :

$$N_{P_i(x,y)}(x,y) = \{u \in (R^l)^{m+n} \,|\, u_i \in N_{\bar{P}_i(x,y)}(x_i),\ u_k = 0,\ k \neq i\};$$
$$N_{GY_i}(x,y) = \{u \in (R^l)^{m+n} \,|\, u_j \in N_{\bar{Y}_j}(x_j),\ u_k = 0,\ k \neq j\}.$$

En utilisant cette propriété du cône normal, le corollaire suivant pour les économies sans effets externes (CORNET [1986]) se déduit immédiatement du théorème 3.

COROLLAIRE 5 : Soit $(\bar{x}, \bar{y})$ un optimum de Pareto de l'économie sans effets externes $\mathcal{E}$. Si pour tout i, $(\bar{x}_i) \in \mathrm{ad}\, \bar{P}_i(\bar{x}, \bar{y})$ et si pour un $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$, la condition (D) est satisfaite pour $\bar{P}_{i_0}(\bar{x}, \bar{y})$ et $\bar{x}_{i_0}$, si pour tout j, $\bar{Y}_j$ est convexe ou fermé, alors il existe un prix $\bar{p} \in R^l$ non nul tel que :
pour tout $i = 1, \ldots, m$, $-\bar{p} \in N_{\bar{P}_i(\bar{x}, \bar{y})}(\bar{x}_i)$;
pour tout $j = m+1, \ldots, m+n, \bar{p} \in N_{\bar{Y}_j}(\bar{y}_j)$.

La propriété du cône normal qui nous a permis d'obtenir ce corollaire, nous permet de montrer que, lorsqu'il n'y a pas d'effets externes entre deux agents, le prix obtenu pour ces effets dans le théorème 3. est nul. Pour caractériser les optima de Pareto, il suffit d'introduire des marchés de droits pour les effets qui existent réellement comme nous l'avons fait dans l'exemple présenté dans la partie précédente.

4 Preuve du théorème 3

La preuve repose sur la construction d'une économie auxiliaire $\tilde{\mathcal{E}}$ dont l'espace des biens est E et qui a le même nombre de consommateurs et de producteurs que l'économie initiale $\mathcal{E}$. Nous caractérisons les optima de l'économie $\tilde{\mathcal{E}}$ puis nous en déduisons le résultat recherché. Pour cela, nous démontrons une formule donnant le cône normal de l'image d'un ensemble par certaines applications linéaires en fonction du cône normal de cet ensemble.

Nous commençons par définir des sous-espaces vectoriels de E adaptés à chaque consommateur et à chaque producteur. Pour tout $k = 1, \ldots, m+n$, soit :

$$E_k = \{z \in E \mid \forall k' \neq k,\ z^{k;k'} = z^0,\ \forall (k', k''),\ k' \neq k,\ k'' \neq k,\ z^{k';k''} = 0\}$$

Pour chacun de ces sous-espaces, nous définissons un isomorphisme linéaire avec $(R^l)^{m+n}$. Pour tout $i = 1, \ldots, m$, soit α_i l'application linéaire de $(R^l)^{m+n}$ dans E_i définie par : pour tout $(x, y) \in (R^l)^{m+n}$,

$$\begin{cases} \alpha_i^0\,(x, y) = x_i, \\ \alpha_i^{i';i}\,(x, y) = -x_{i'}, \quad \text{pour tout } i' = 1, \ldots, m,\ i' \neq i, \\ \alpha_i^{j;i}\,(x, y) = y_j, \quad \text{pour tout } j = m+1, \ldots, m+n. \end{cases}$$

Nous remarquons que, pour tout $z \in E_i$,

$$\alpha_i^{-1}\,(z) = (-z^{1;i}, \ldots, -z^{i-1;i}, z^0, \\ -z^{i+1;i}, \ldots, -z^{m;i}, z^{m+1;i}, \ldots, z^{m+n;i}).$$

Pour tout $j = m+1, \ldots, m+n$, soit α_j l'application linéaire de $(R^l)^{m+n}$ dans E_j définie par : pour tout $(x, y) \in (R^l)^{m+n}$,

$$\begin{cases} \alpha_j^0\,(x, y) = y_j, \\ \alpha_i^{i;j}\,(x, y) = x_i, \quad \text{pour tout } i = 1. \ldots. m, \\ \alpha_i^{j';j}\,(x, y) = -y_{j'}, \quad \text{pour tout } j' = m+1, \ldots, m+n,\ j' \neq j. \end{cases}$$

Nous remarquons que, pour tout $z \in E_j$,

$$\alpha_j^{-1}\,(z) = (z^{1;j}, \ldots, z^{m;j}, \\ -z^{m+1;j}, \ldots, -z^{j-1;j}, z^0, -z^{j+1;j}, \ldots, -z^{m+n;j}).$$

Nous définissons maintenant l'économie $\tilde{\mathcal{E}}$. Pour tout $i = 1, \ldots, m$,

$$\tilde{X}_i = \alpha_i\,(GX_i)$$
$$\tilde{P}_i\,(\tilde{x}_i) = \alpha_i\,(P_i\,(\alpha_i^{-1}\,(\tilde{x}_i)));$$

pour tout $j = m+1, \ldots, m+n$,

$$\tilde{Y}_j = \alpha_j\,(GY_j);$$
$$\tilde{\omega} \in E,\ \tilde{\omega}^0 = \omega,\ \tilde{\omega}^{k;k'} = 0 \quad \text{pour tout } k, k', k \neq k'.$$

Nous remarquons que $\tilde{\mathcal{E}}$ est une économie sans effets externes. Soit $(\tilde{x}, \tilde{y})$ une allocation réalisable (resp. un optimum de Pareto) de $\tilde{\mathcal{E}}$. Alors,

$((\tilde{x}_i^0), (\tilde{y}_j^0)) = \alpha_i^{-1}(\tilde{x}_i) = \alpha_j^{-1}(\tilde{y}_j)$ pour tout i et pour tout j. De plus $((\tilde{x}_i^0), (\tilde{y}_j^0))$ est une allocation réalisable (resp. un optimum de Pareto) de $\mathcal{E}$. Réciproquement, si (x, y) est une allocation réalisable (resp. un optimum de Pareto) de l'économie $\mathcal{E}$ alors $((\alpha_i(x, y)), (\alpha_j(x, y)))$ est une allocation réalisable (resp. un optimum de Pareto) de $\tilde{\mathcal{E}}$.

Venons en maintenant à la preuve de notre résultat. Soit $(\bar{x}, \bar{y})$ un optimum de Pareto de l'économie $\mathcal{E}$ qui vérifie les hypothèses du théorème 3. Soit, pour tout i, $\bar{\xi}_i = \alpha_i(\bar{x}, \bar{y})$ et pour tout j, $\bar{\zeta}_j = \alpha_j(\bar{x}, \bar{y})$. Alors, $(\bar{\xi}, \bar{\zeta})$ est un optimum de Pareto et les conditions suivantes sont satisfaites. Pour tout i, $\bar{\xi}_i \in \operatorname{ad}\tilde{P}_i(\bar{\xi}_i)$, pour tout j, $\tilde{Y}_j$ est fermé ou convexe et pour un i_0, disons $i_0 = 1$ pour simplifier les notations, la condition (D) est satisfaite par $\tilde{P}_1(\bar{\xi}_1)$ et $\bar{\xi}_1$. En effet, si la condition (D) est satisfaite par $P_1(\bar{x}, \bar{y})$ et $(\bar{x}, \bar{y})$ pour le couple e, ε, alors la condition (D) est satisfaite par $\tilde{P}_1(\bar{\xi}_1)$ et $\bar{\xi}_1$ pour $\alpha_1(e) = \tilde{e}$ et ε. D'après la proposition 2, pour tout j, la condition (D) est satisfaite par $\tilde{Y}_j$ et $\bar{\zeta}_j$. Donc, pour tout j, il existe $\tilde{e}_j \in E$ et $\varepsilon_j > 0$ donnés par la condition (D). Soit $\eta = \min\{\varepsilon, \varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_{m+n}\}$.

Nous remarquons que $\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^{m} \bar{\xi}_i - \sum_{j=m+1}^{m+n} \bar{\zeta}_j$ et donc $\tilde{\omega} \in Z$ où Z est défini par :

$$Z = [\operatorname{ad}\tilde{P}_1(\bar{\xi}_1) \cap \operatorname{ad}B(\bar{\xi}_1, \eta)] + \sum_{i=2}^{m} \operatorname{ad}\tilde{P}_i(\bar{\xi}_i)$$

$$- \sum_{j=m+1}^{m+n} [\operatorname{ad}\tilde{Y}_j \cap \operatorname{ad}B(\bar{\zeta}_j, \eta)]$$

Nous montrons que $\tilde{\omega}$ appartient à la frontière de Z. Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout $t \in]0, \eta[$, $\tilde{\omega} - t\left(\tilde{e} - \sum_{j=m+1}^{m+n} \tilde{e}_j\right) \notin Z$. Raisonnons par l'absurde : si il existe $t \in]0, \eta[$, tel que $\tilde{\omega} - t\left(\tilde{e} - \sum_{j=m+1}^{m+n} \tilde{e}_j\right) \in Z$, alors il existe $(\xi_i) \in [\operatorname{ad}\tilde{P}_1(\bar{\xi}_1) \cap \operatorname{ad}B(\bar{\xi}_1, \eta)] \times \prod_{i=2}^{m} \operatorname{ad}\tilde{P}_i(\bar{\xi}_i)$ et $(\zeta_j) \in \prod_{j=m+1}^{m+n} [\operatorname{ad}\tilde{Y}_j \cap \operatorname{ad}B(\bar{\zeta}_j, \eta)]$ tel que $\tilde{\omega} - t\left(\tilde{e} - \sum_{j=m+1}^{m+n} \tilde{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i - \sum_{j=m+1}^{m+n} \zeta_j$. Nous en déduisons que $\tilde{\omega} = \xi_1 + t\tilde{e} + \sum_{i=2}^{m} \xi_i - \sum_{j=m+1}^{m+n} (\zeta_j + t\tilde{e}_j)$. D'après la propriété (D), $\xi_1 + t\tilde{e} \in \tilde{P}_1(\bar{\xi}_1)$ et, pour tout j, $\zeta_j + t\tilde{e}_j \in \tilde{Y}_j$. Donc (ξ, ζ) est une allocation réalisable de l'économie $\tilde{\mathcal{E}}$. De plus, pour tout $i = 2, \dots, m$, $\xi_i \in \operatorname{ad}\tilde{P}_1(\bar{\xi}_1)$ et $\xi_1 + t\tilde{e} \in \tilde{P}_1(\bar{\xi}_1)$. Ceci contredit le fait que $(\bar{\xi}, \bar{\zeta})$ est un optimum de Pareto de l'économie $\tilde{\mathcal{E}}$.

La proposition 1 nous permet de déduire de ce qui précède qu'il existe un élément non nul $\bar{p}$ de E tel que $-\bar{p} \in N_{\tilde{P}_i(\bar{\xi}_i)}(\bar{\xi}_i)$, pour tout

$i = 1, \ldots, m$ et $\bar{p} \in N_{\tilde{Y}_j}(\bar{\zeta}_j)$, pour tout $j = m+1, \ldots, m+n$ car $N_{\tilde{P}_i(\bar{\xi}_i)}(\bar{\xi}_i) = N_{\mathrm{ad}\tilde{P}_i(\bar{\xi}_i)}(\bar{\xi}_i)$ et $N_{\tilde{Y}_j}(\bar{\zeta}_j) = N_{[\mathrm{ad}\tilde{Y}_j \cap \mathrm{ad}B(\bar{\zeta}_j, \eta)]}(\bar{\zeta}_j)$.

La preuve de notre résultat est maintenant une conséquence directe du lemme suivant.

LEMME 6 : Soit C un sous-ensemble de E_k, c un élément de C et p un élément de $N_C(c)$. Alors, si $k = 1, \ldots, m$,

$$(-p^{1;k}, \ldots, -p^{k-1;k}, p^0 + \sum_{k' \neq k} p^{k;k'}, -p^{k+1;k}, \ldots, -p^{m;k}, p^{m+1;k}, \ldots, p^{m+n;k})$$

est un élément de $N_{\alpha_k^{-1}(C)}(\alpha_k^{-1}(c))$ et, si $k = m+1, \ldots, m+n$,

$$(p^{1;k}, \ldots, p^{m;k}, -p^{m+1;k}, \ldots, -p^{k-1;k}, p^0 + \sum_{k' \neq k} p^{k;k'}, -p^{k+1;k}, \ldots, -p^{m+n;k})$$

est un élément de $N_{\alpha_k^{-1}(C)}(\alpha_k^{-1}(c))$.

La preuve de ce lemme se fait en trois étapes. Tout d'abord, en utilisant des arguments de continuité et la définition du cône normal de Clarke, on montre qu'il suffit de travailler sur les vecteurs perpendiculaires. Dans un deuxième temps, on remarque le fait suivant. Soit C un sous-ensemble de E_k. Notons $N_C^{E_k}(\cdot)$ le cône normal de Clarke à C vu comme un sous-ensemble de E_k alors que $N_C(\cdot)$ représente le cône normal de Clarke à C vu comme un sous-ensemble de E. Si p est un élément de $N_C(c)$ alors q, la projection orthogonale de p sur E_k, qui est définie par :

$$q_0 = \frac{1}{m+n}(p^0 + \sum_{k' \neq k} p^{kk'}),\ q^{k'k} = p^{k'k} \quad \text{pour tout } k' \neq k,$$

est un élément de $N_C^{E_k}(c)$. Finalement, il faut utiliser l'isomorphisme α_k entre E_k et $(R^l)^{m+n}$.

• Références bibliographiques

ARROWS, K. J. (1951). – "An Extension of the Basic Theorem of Classical Welfare Economics", Proceedings of the Second Berkeley Symposium, *University of California Press.*

ARROWS, K. J. (1969). – "The Organization of Economic Activity : Issues Pertinent to the Choice of Market versus Non-Market Allocation", in *Joint Economic Committee*, The Analysis and Evaluation of Public Expenditures : The PPB System, Washington, DC : Government Printing Office, pp. 47-64.

BONNISSEAU, J. M., CORNET, B. (1988). – "Valuation Equilibrium and Pareto Optimum in Non-Convex Economies", *Journal of Mathematical Economics*, 17, pp. 293-308.

CLARKE, F. (1983). – *Optimization and Nonsmooth Analysis*, New York : Wiley.

CORNET, B. (1986). – "The Second Welfare Theorem in Nonconvex Economies", CORE Discussion Paper 8630, Université Catholique de Louvain.

CORNET, B. (1990). – "Marginal Cost pricing and Pareto Optimality", Essays in Honor of Edmond Malinvaud, Cambridge : *MIT Press*, pp. 13-52.

CORNET, B., ROCKAFELLAR, R. T. (1990). – "Separation Theorems and Supporting Price Theorems for Nonconvex Sets", *Cahier de Recherches du CERMSEM*, Université de Paris 1.

DEBREU, G. (1951). – "The Coefficient of Resource Utilization", *Econometrica*, 19, pp. 273-292.

DEBREU, G. (1954). – "Valuation Equilibrium and Pareto Optimum", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 40, pp. 588-592.

DEBREU, G. (1959). – *Theory of Value*, New York : Wiley.

DIERKER, E. (1986). – "When Does Marginal Cost Pricing Lead to Pareto-Efficiency ?", *Zeitschrift fur Nationalokonomie*, Suppl. 5, pp. 41-66.

GUESNERIE, R. (1975). – "Pareto Optimality in Non-Convex Economies", *Econometrica*, 43, pp. 1-29.

KHAN, M. A. (1987). – "Ioffe's Normal Cone and the Foundations of Welfare Economics", Discussion Paper, University of Illinois, Champain, IL.

KHAN, M. A., VOHRA, R. (1987). – "An Extension of the Second Welfare Theorem to Economies with Non-Convexities and Public Goods", *Quaterly Journal of Economics*, 102, pp. 223-241.

KHAN, M. A., VOHRA, R. (1988). – "Pareto-Optimal Allocations of Nonconvex Economies in Locally Convex Spaces", *Nonlinear Analysis*, 12, pp. 943-950.

LAFFONT, J. J. (1976). – "Decentralization with Externalities", *European Economic Review*.

LAFFONT, J. J. (1977). – *Effets externes et théorie économique*, Monographie du Séminaire d'Économétrie, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

LAFFONT, J. J., LAROQUE, G. (1972). – "Effets externes et théorie de l'équilibre général", *Cahiers du Séminaire d'Économétrie*, Centre national de la Recherche Scientifique, 14, pp. 25-48.

MURAKAMI, Y., NEGISHI, T. (1964). – "A Note on a Formulation of External Economy", *International Economic Review*, 5, pp. 328-334.

QUINZII, M. (1988). – *Rendements Croissants et Efficacité Économique*, Paris : Éditions du CNRS.

STARRETT, D. (1972). – "Fundamental non Convexities in the Theory of Externalities", *Journal of Economic Theory*, 4, pp. 180-199.

YUN, K. K. (1984). – "Pareto Optimality in Non-Convex Economies and Marginal Cost Pricing Equilibria", Proceedings of the First International Conference of Korean Economists.