ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 36 — 1994

Amélioration de la prévision et Causalité entre deux séries d'un système multivarié autorégressif stationnaire

Catherine BRUNEAU, Jean-Paul NICOLAÏ*

RÉSUMÉ. – Dans ce papier, nous étudions les liens de causalité unidirectionnels entre deux séries extraites d'un système multivarié, dont la dynamique est caractérisée par un modèle autorégressif stationnaire. Constatant que la caractérisation usuelle de la causalité selon Granger en termes d'amélioration de la prévision pour un horizon de prévision unitaire, est insuffisante pour capter les liens de causalité indirects pouvant exister entre deux variables, dès lors qu'il existe au moins une troisième série dans le système, nous caractérisons la « causalité à la Granger » en termes d'amélioration de la prévision pour tous les horizons de prévision, suivant les suggestions de Lütkepohl [1990]. Mais contrairement à cet auteur, nous ne choisissons pas comme alternative à la caractérisation de la causalité selon Granger la caractérisation selon Sims [1980], fondée sur les multiplicateurs dynamiques. Nous établissons en effet un théorème donnant une condition nécessaire et suffisante pour exclure tous les liens de causalité unidirectionnels directs et indirects entre deux séries d'un système multivarié. Ce théorème fait apparaître les deux modes de caractérisation comme complémentaires, puisque la condition nécessaire et suffisante est énoncée sous la forme d'une contrainte portant sur les coefficients autorégressifs et les multiplicateurs dynamiques canoniques associés respectivement à la série causale et à la série causée.

Prediction Improvement and Causality Between Two Series Inside a Multivariate Stationary Autoregressive Framework

ABSTRACT. – In this paper, we study the unidirectional causal links between two series in a multivariate autoregressive stationary framework. We emphasize that the usual characterization of the unidirectional Granger causality, which is based on the prediction improvement oneperiod ahead, is not sufficient to capture all direct and indirect causal links between two series, once there exists a third serie in the system. As a consequence, following Lütkepohl [1990], we consider the prediction improvement for every prediction horizon. But contrary to this author, we do not choose to analyse the unidirectional causal links according to the Sim's approach [1980], which is based on the study of impulse coefficients. Indeed, we prove a theorem, which gives a necessary and sufficient condition to exclude any prediction improvement for every prediction horizon. According to this theorem, both characterizations of unidirectional causality appear to be complementary, because the necessary and sufficient condition is expressed as a constraint on the canonical autoregressive coefficients and the impulse coefficients respectively associated with the causal serie and the caused serie.

---

* C. BRUNEAU : ENSAE; J. P. NICOLAÏ : CDC. Nous remercions le Professeur Christian Gouriéroux ainsi que les deux referees anonymes pour les améliorations significatives que nous avons pu apporter à ce papier grâce à leurs critiques et suggestions.

1 Introduction

Dans ce papier, nous étudions les liens de causalité entre deux séries extraites d'un système multivarié. Depuis sa formalisation par GRANGER [1969], la propriété de causalité, énoncée en termes d'*amélioration de la prévision*, a donné lieu à de nombreuses études empiriques dans le domaine économique notamment. Cette propriété admet en effet une caractérisation simple dans le cas où le système présente une dynamique autorégressive stationnaire. Plus fondamentalement, cette propriété de causalité a été reconnue comme une condition nécessaire de la propriété d'*exogénéïté* forte d'une variable selon la formalisation proposée par ENGLE, HENDRY, RICHARD [1983], propriété dont on connaît l'importance dans la modélisation économétrique d'un système dynamique stochastique : c'est en effet cette propriété qui permet de simplifier l'étude de la dynamique d'un système en autorisant l'inférence statistique tout autant que la simulation des séries modélisées dans le cadre de modèles conditionnels de plus petite dimension.

Très récemment, LÜTKEPOHL [1990], a souligné l'insuffisance de l'approche traditionnelle de la causalité à la Granger dans un système multivarié : des liens de causalité entre deux variables peuvent être transmis par une troisième variable. Il est alors naturel de penser que ces liens de causalité, indirectement transmis, ne peuvent être mis en évidence lorsqu'on limite la prévision à un horizon unitaire : il faut plus d'une période pour que puisse se manifester l'impact d'une variable sur une autre lorsqu'il transite par une troisième variable. Deux options se présentent alors à l'économètre.

Si la causalité est analysée en termes d'amélioration de la prévision selon l'approche de GRANGER, il convient d'étudier cette amélioration *à tous les horizons de prévision* dès lors que l'univers de référence est multivarié (LÜTKEPOHL [1990]). Dans ce cas il faut aussi rechercher une caractérisation statistique de cette « causalité généralisée à la Granger » dans le cadre de modèles standards tels que les modèles vectoriels autorégressifs stationnaires.

L'alternative adoptée par LÜTKEPOHL [1990] consiste à analyser la causalité selon l'approche préconisée par SIMS [1980]; selon cette approche, que l'on ne confondra pas avec l'approche préconisée par le même auteur en 1972, une série ne cause pas une autre série si un choc sur la première n'a pas d'impact sur la deuxième; les notions de choc et d'impact ont l'intérêt d'être définies *quelle que soit la dimension de l'univers* : lorsqu'il n'existe pas de corrélations entre les innovations des variables, un choc sur une série est assimilé à son innovation canonique; quant à l'impact, il est mesuré par le multiplicateur dynamique relatif aux deux séries, tel qu'il est extrait de la décomposition de Wold canonique de la variable causée.

Les deux formalisations de la notion de causalité proposées par GRANGER [1969] et SIMS [1980] sont liées : elles conduisent à des caractérisations équivalentes dans un système autorégressif stationnaire bivarié, tout au moins lorsqu'il n'existe pas de corrélations entre les innovations des variables. L'équivalence disparaît toutefois dans les systèmes de plus grande dimension, même en l'absence de corrélations entre les innovations. Plus généralement, l'existence de corrélations entre les innovations, c'est-à-dire l'existence de liens de causalité instantanés au sens de Granger, rend problématique l'interprétation de la causalité « à la Sims » en termes d'amélioration de la prévision (LÜTKEPOHL [1991]). Il faut donc faire *un choix a priori* de l'une ou l'autre des deux caractérisations dès que l'univers de référence comporte plus de deux séries. LÜTKEPOHL [1990], par exemple, constatant l'insuffisance de l'analyse selon GRANGER [1969], choisit l'approche préconisée par SIMS [1980].

Dans ce papier, nous étudions la causalité *en termes d'amélioration de la prévision* dans un système multivarié. Notre étude s'inscrit ainsi dans un ensemble de travaux récents développés sur ce thème (BRUNEAU et NICOLAÏ [1991], BRUNEAU et NICOLAÏ [1992]. DUFOUR et RENAULT [1992], DUFOUR et TESSIER [1992]). Nous nous limitons explicitement aux *liens de causalité unidirectionnels*, en excluant toute considération de causalité instantanée. A priori, la caractérisation de la causalité instantanée n'a pas lieu d'être remise en question lorsqu'on passe d'un système bivarié à un système de plus grande dimension; par ailleurs, la propriété de non-causalité unidirectionnelle est à elle seule une condition nécessaire d'exogénéité forte. Nous proposons une caractérisation des liens de causalité unidirectionnels *directs et indirects* qui justifie la caractérisation de la causalité unidirectionnelle en termes d'amélioration de la prévision *à tous les horizons*, comme le suggère LÜTKEPOHL [1990]. Nous dérivons conjointement une condition nécessaire et suffisante de non-causalité dans un système multivarié autorégressif stationnaire, d'ordre fini ou infini. Cette condition est énoncée sous la forme d'une contrainte qui fait intervenir – outre des paramètres auxiliaires bien choisis – des coefficients autorégressifs et des multiplicateurs dynamiques associés respectivement à la série causale et à la série causée.

Le papier est organisé de la façon suivante : la section 2 rappelle les principes de l'analyse de la causalité selon GRANGER [1969] et selon SIMS [1980]. Dans la section 3, nous montrons que ces principes appellent une discussion lorsque la dimension de l'univers de référence devient au moins égale à trois : dans un univers ainsi augmenté, nous remarquons d'abord que ces principes ne conduisent plus à des caractérisations équivalentes de la causalité, même lorsqu'il n'existe pas de corrélations instantanées entre les variables. Nous choisissons alors d'étudier la causalité en termes d'amélioration de la prévision; nous soulignons ensuite, comme LÜTKEPOHL [1990], l'insuffisance de la caractérisation usuelle au sens de GRANGER pour capter l'intégralité des liens de causalité ainsi caractérisés. L'accent est enfin mis sur la distinction entre liens de causalité (unidirectionnels) *directs* et *indirects*. Cette distinction nous conduit de manière naturelle à la caractérisation de la causalité suggérée par LÜTKEPOHL [1990] en termes d'amélioration de la prévision *à tous les horizons*. Toutes les définitions utiles sont alors précisées. Dans la section 4, nous établissons une condition nécessaire et suffisante de non-causalité au sens de LÜTKEPOHL [1990] dans un système multivarié autorégressif stationnaire d'ordre fini ou infini. En l'absence de corrélations entre les innovations des variables, les conditions de non-causalité au sens de GRANGER [1969] ou de SIMS [1980] sont reconnues chacune comme des conditions nécessaires, mais non suffisantes, de non-causalité au sens de LÜTKEPOHL [1990]. Elles apparaissent donc complémentaires dans l'analyse de la causalité telle que nous l'abordons dans ce papier. Nous concluons en précisant quelques perspectives de travaux ultérieurs qu'il nous semble intéressant de développer sur la base des résultats obtenus.

2 Analyse causale dans un système autorégressif stationnaire

2.1. Caractérisation de la causalité au sens de GRANGER [1969]

D'après la formalisation proposée par GRANGER [1969], la causalité entre séries peut être analysée simplement dans un cadre vectoriel autorégressif stationnaire d'ordre fini. Plus précisément, on considère un univers de référence $X = \{X_1, X_2, X_3\}$, où les séries $X_i = (X_{i,t})_t$, $1 \leq i \leq 3$, peuvent être vectorielles et telles que leurs composantes sont des éléments d'un espace de Hilbert $L^2(\Omega, A, P)$ adapté; pour toute date t, on note $\underline{X_{it}}$, (resp. $\{\underline{X_{i,t}}; \underline{X_{j,t}}\}$, $\underline{X_t}$), les sous-espaces de Hilbert engendrés par les combinaisons linéaires finies des « valeurs » passées $\{X_{i,t-h}, h \geq 0\}$, (resp. $\{X_{i,t-h}, h \geq 0, X_{j,t-h}, h \geq 0\}$, $\{X_{i,t-h}, h \geq 0, 1 \leq i \leq 3\}$). Par la suite, nous supposons les prévisions des variables effectuées par *régression linéaire théorique*. La meilleure prévision linéaire de la variable X_{it}, fondée sur l'information $\{X_{i,t-h}, h \geq 1\}$, (resp. $\{X_{i,t-h}, h \geq 1, X_{j,t-h}, h \geq 1\}$ ou $\{X_{i,t-h}, h \geq 1, 1 \leq i \leq 3\}$) est notée $EL(X_{it}/\underline{X_{i,t-1}})$ (resp. $EL(X_{it}/\{\underline{X_{i,t-1}}; \underline{X_{j,t-1}}\})$ ou $EL(X_{it}/\underline{X_{t-1}})$); elle correspond à la projection orthogonale au sens du produit scalaire (L^2) de X_{it} sur le sous-espace $\underline{X_{it-1}}$, (resp. $\{\underline{X_{i,t-1}}; \underline{X_{j,t-1}}\}$, ou $\underline{X_t - 1}$).

D'après la formalisation proposée par GRANGER, il existe un lien causal unidirectionnel de la série $X_2 = (X_{2t})_t$ vers la série $X_1 = (X_{1t})_t$ dans l'univers de référence X, si la connaissance du passé de la première améliore la prévision de la seconde au sens suivant :

$$\text{(CGU)} \qquad \exists\, t, \quad EL(X_{1t}/\underline{X_{t-1}}) \neq EL(X_{1t}/\{\underline{X_{1,t-1}}; \underline{X_{3,t-1}}\})$$

La notion de causalité instantanée est caractérisée d'une manière analogue, par la condition :

$$\text{(CGI)} \qquad \exists\, t, \quad EL(X_{1t}/\{\underline{X_{t-1}}; X_{2t}\}) \neq EL(X_{1t}/\underline{X_{t-1}}).$$

Lorsque le système a une dynamique stationnaire, les conditions (CGU) ou (CGI) s'écrivent :

$$\text{(CGU)} \qquad EL(X_{1t}/\underline{X_{t-1}}) \neq EL(X_{1t}/\{\underline{X_{1,t-1}}; \underline{X_{3,t-1}}\})$$

$$\text{(CGI)} \qquad EL(X_{1t}/\{\underline{X_{t-1}}; X_{2t}\}) \neq EL(X_{1t}/\underline{X_{t-1}}).$$

2.2. Caractérisation de la causalité au sens de SIMS [1980]

Une autre approche de la causalité a été adoptée par SIMS [1980, 1981], PENM-TERELL [1986], LÜTKEPOHL [1990] et d'autres auteurs, qui considèrent les réponses de la variable « causée » à des chocs appliqués à une série « causale »; un choc sur une série à une date t est représenté par l'innovation de cette série à cette date dans l'univers de référence. Plus précisément, dans un cadre stationnaire, avec les notations du paragraphe précédent, la série X_2 est dite non causale pour X_1 dans l'univers $X = \{X_1, X_2, X_3\}$ si, à chaque date t, le processus d'innovation de $X_2, \varepsilon_{2t} = X_{2t} - EL\,(X_{2t}/\underline{X_{t-1}})$ n'intervient pas dans le « signal » X_{1t} tel qu'il est caractérisé à partir de la décomposition canonique de Wold :

$$X_t = (X_{1t}, X_{2t}, X_{3t})' = C\,(L)\,\varepsilon_t,$$

où L désigne l'opérateur retard, $C\,(0) = \text{Id}$, $\varepsilon_t = X_t - EL\,(X_t/\underline{X_{t-1}})$.

X_2 est alors dite non causale pour X_1 si et seulement si le multiplicateur dynamique $C_{12}\,(L)$ est nul, au moins lorsque les séries X_i ne présentent aucune corrélation instantanée, c'est-à-dire lorsque la matrice de variance-covariance $V\,\varepsilon$ du vecteur des innovations $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{3t})'$ est diagonale. Dans le cas contraire, les auteurs recommandent d'orthogonaliser au préalable les « résidus » ε et de considérer la nullité du multiplicateur dynamique associé à la décomposition de Wold ainsi « orthogonalisée » (SIMS [1981], LÜTKEPOHL [1990], soit :

$$X_t = Q\,(L)\,\varepsilon_t^*$$

où ε_t^* a une matrice de variance-covariance diagonale.

On dit alors que X_2 ne cause pas X_1 dans l'univers X si et seulement si $Q_{12}\,(L) = 0$. La caractérisation de la non-causalité dépend ainsi du schéma d'orthogonalisation retenu, qui n'est évidemment pas unique. Habituellement, l'orthogonalisation est obtenue à partir d'une décomposition de Choleski de la matrice de variance covariance de ε_t; l'ordre des variables apparaît ainsi déterminant dans l'analyse de causalité. Dans tous les cas, le choix du schéma d'orthogonalisation ne peut être justifié que par une modélisation structurelle de l'univers, définie avant toute analyse statistique de la causalité. En ce sens, on peut dire que X_2 ne cause pas X_1 si, à chaque date t, le processus de l'innovation « structurelle » ε_2^* de X_2 est exclu du signal X_{1t}.

L'introduction de contraintes structurelles constitue un élément de critique habituellement avancé à l'encontre de l'analyse de la causalité en termes de multiplicateurs. Nous ne le retiendrons pas dans ce papier parce que nous nous limitons à l'étude de la causalité unidirectionnelle entre variables et supposons pour simplifier qu'il n'existe pas de corrélations entre les innovations canoniques des différentes variables.

Par contre, dans ce qui suit, nous montrons que, même en l'absence de corrélations instantanées entre les différences variables, les analyses causales selon GRANGER [1969] ou selon SIMS [1980] ne sont pas équivalentes, lorsque la dimension du système devient au moins égale à trois. Ceci impose un choix entre les deux modes d'analyse. Choisissant de caractériser la causalité en termes d'amélioration de la prévision, nous montrons que l'analyse traditionnelle de la causalité au sens de GRANGER ne permet de capter qu'une partie des liens de causalité unidirectionnels entre deux variables dès qu'elles sont plongées dans un système de dimension au moins égale à trois.

3 Causalité entre deux variables extraites d'un système multivarié

On considère désormais un système multivarié $X_t = (X_{1t}, \ldots, X_{nt})'$ dont la dynamique est caractérisée par un modèle VAR stationnaire, d'ordre éventuellement infini, écrit sous la forme canonique suivante :

$$A(L)\, X_t = \varepsilon_t^0$$

où $A(0) = \mathrm{Id}$ et l'innovation $\varepsilon_t^0 = (\varepsilon_{1t}^0, \ldots, \varepsilon_{nt}^0)'$ a une matrice de variance-covariance $V\varepsilon^0$ régulière supposée diagonale pour simplifier. Les composantes X_{it} sont alors univariées.

La décomposition de Wold (canonique) associée est donnée par :

$$X_t = C(L)\, \varepsilon_t^0,$$

où $C(0) = \mathrm{Id}$ et $C(L)\, A(L) = \mathrm{Id}$.

Pour démontrer l'ensemble des propositions relatives à la caractérisation de la causalité dans un système VAR de dimension strictement plus grande que deux, nous utiliserons le lemme suivant, dont la preuve est donnée en annexe.

LEMME 1 : Soit un processus multivarié $X_t = (X_{1t}, \ldots, X_{nt})'$ dont la dynamique est caractérisée par un modèle VAR stationnaire, d'ordre éventuellement infini, écrit sous la forme canonique suivante :

$$A(L)\, X_t = \varepsilon_t^0$$

où $A(0) = \mathrm{Id}$ et l'innovation $\varepsilon_t^0 = (\varepsilon_{1t}^0, \ldots, \varepsilon_{nt}^0)'$ a une matrice de variance-covariance $V\varepsilon^0$ régulière.

$(X_{it}, 1 \leq i \leq n, t \in Z)$ constitue un système libre, au sens de l'implication suivante :

$$\left\{\forall t, \sum_{i=1}^{n} P_i(L)\, X_{it} = 0\right\} \quad \Rightarrow \quad \{\forall i \in \{1, \ldots, n\}, P_i(L) = 0\},$$

où $P_i(L) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}\, L^k$ désigne un polynôme quelconque de l'opérateur retard L, éventuellement d'ordre infini, tel que l'égalité $\sum_{i=1}^{n} P_i(L)\, X_{it} = 0$ soit vérifiée au sens L^2.

3.1. Le problème de l'équivalence entre les approches de GRANGER et de SIMS

Dans une analyse bivariée de la dynamique, on sait que les caractérisations de la causalité unidirectionnelle entre deux séries selon GRANGER [1969] et selon SIMS [1980] sont équivalentes.

Plus précisément, si on considère une représentation bivariée autorégressive (infinie) de X, décomposé selon deux séries (multivariées) $(X_1^*, X_2^*)'$, elle s'écrit :

$$A^*(L)\, X_t = \varepsilon_t^* \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} A_{11}^*(L) & A_{12}^*(L) \\ A_{21}^*(L) & A_{22}^*(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1t}^* \\ X_{2t}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t}^* \\ \varepsilon_{2t}^* \end{bmatrix}$$

où $A^*(0) = \mathrm{Id}$, et $(\varepsilon_{1t}^*, \varepsilon_{2t}^*)'$ désigne l'innovation de $[X_{1t}^*, X_{2t}^*]'$ dans l'univers $\{X_1^*, X_2^*\}$.

On sait que X_2^* ne cause pas unidirectionnellement X_1^* si et seulement si $\{A_{12}^*(L) = 0\}$. La condition est évidemment suffisante [GRANGER, 1969]. Pour montrer que cette condition est nécessaire, on utilise le lemme précédent.

Par ailleurs le système, puisqu'il est stationnaire, admet la décomposition canonique de Wold :

$$\text{(MA)} \quad X_t = C^*(L)\, \varepsilon_t^* \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} X_{1t}^* \\ X_{2t}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^*(L) & C_{12}^*(L) \\ C_{21}^*(L) & C_{22}^*(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t}^* \\ \varepsilon_{2t}^* \end{bmatrix}$$

où $C(0) = \mathrm{Id}$.

Puisque $A^*(L)\, C^*(L) = \mathrm{Id}$, on a l'équivalence :

$$\{A_{12}^*(L) = 0\} \quad \Leftrightarrow \quad \{C_{12}^*(L) = 0\}.$$

Considérons maintenant une analyse trivariée de la dynamique :

$$\tilde{A}(L)\, X_t = \tilde{\varepsilon}_t \quad \Leftrightarrow \quad X_t = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i\, X_{t-I} + \tilde{\varepsilon}_t,$$

où le processus $X_t = (\tilde{X}_{1t}, \tilde{X}_{2t}, \tilde{X}_{3t})'$ a été décomposé en trois séries vectorielles (X_{it}), $1 \leq i \leq 3$; $\tilde{A}(0) = \mathrm{Id}$ de sorte que $\tilde{\varepsilon}_t = (\tilde{\varepsilon}_{1t}, \tilde{\varepsilon}_{2t}, \tilde{\varepsilon}_{3t})'$ désigne l'innovation de X_t dans l'univers $X = \{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3\}$. La dynamique de X_t admet la décomposition de Wold canonique :

$$X_t = \tilde{C}(L)\, \tilde{\varepsilon}_t = \sum_{i \geq 0} C_i\, \varepsilon_{t-i}$$

où $C(0) = \mathrm{Id}$.

Les deux caractérisations de la dynamique sont liées par les identités :

$$\forall\, i \geq 1, \quad \tilde{C}_i = \sum_{j=1}^{i} \tilde{C}_{i-j}\, \tilde{A}_j$$

Dans le cas particulier d'un processus autorégressif d'ordre 2, on peut écrire :

$$\tilde{C}_{12,1} = \tilde{A}_{12,1}$$
$$\tilde{C}_{12,2} - \tilde{A}_{11,1}\, \tilde{C}_{12,1} - \tilde{A}_{12,1}\, \tilde{C}_{22,1} - \tilde{A}_{13,1}\, \tilde{C}_{32,1} - \tilde{A}_{12,2} = 0.$$

Par conséquent, l'une ou l'autre des deux conditions :

$$\{\tilde{A}_{12}(L) = 0 \text{ et } \tilde{C}_{12}(L) \neq 0\} \quad \text{ou} \quad \{\tilde{A}_{12}(L) \neq 0 \text{ et } \tilde{C}_{12}(L) = 0\}$$

peut être observée.

Les deux caractérisations de la causalité proposées par Granger [1969] et par Sims [1980] ne sont donc plus équivalentes, même en l'absence de corrélations instantanées entre les innovations, dès que la dimension du système devient strictement plus grande que deux. Nous choisissons désormais d'étudier la causalité *en termes d'amélioration de la prévision.*

3.2. Causalité et amélioration de la prévision dans les systèmes de dimension au moins égale à trois

Lorsqu'on est confronté à trois séries $\{X_1, X_2, X_3\}$, il est naturel de penser à l'existence de liens de causalité *indirects* (Lütkepohl [1990]) de X_2 vers X_1 transitant par une troisième série X_3 : X_2 cause X_3 qui cause à son tour X_1. En termes d'amélioration de la prévision, on conçoit aisément que les liens de causalité indirects ne puissent pas être mis en évidence lorsqu'on se limite aux prévisions d'une variable à un horizon *unitaire* : il faut plus d'une période pour que se révèle « l'impact » *unidirectionnel* de X_2 sur X_1, lorsqu'il est transmis par une troisième série X_3. C'est la raison pour laquelle Lütkepohl [1990] propose de caractériser un lien de causalité « à la Granger » en termes d'amélioration de la prévision, pour *tout horizon de prévision.* Nous nous intéressons désormais à cette caractérisation et nous montrons qu'elle est équivalente à l'exclusion de liens directs et indirects convenablement caractérisés. Pour faciliter l'exposé et la compréhension des résultats ultérieurs, nous nous limitons à des univers *trivariés* constitués de séries *vectorielles.* Nous montrerons que ce cadre est suffisant pour étudier la causalité dans tous les systèmes multivariés.

Définition 1 : Dans l'univers $X = \{X_1, X_2, X_3\}$, caractérisé par trois séries vectielles, il existe un lien de causalité *unidirectionnel direct* de X_2 vers X_1 si et seulement s'il existe une date t, pour laquelle la connaissance du passé de X_2, $\underline{X_{2t-1}}$ améliore la prévision de X_1, *à l'horizon 1*, soit :

$$\text{(CD)} \qquad \exists\, t, \quad EL(X_{1t}/\underline{X_{t-1}}) \neq EL(X_{1t}/\{\underline{X_{1,t-1}};\ \underline{X_{3,t-1}}\})$$

Définition 2 : Dans l'univers $X = \{X_1, X_2, X_3\}$, caractérisé par trois séries vectorielles, il existe un lien de causalité *unidirectionnel indirect* de X_2 vers X_1 si et seulement s'il n'existe pas de lien de causalité unidirectionnel direct de X_2 vers X_1, et s'il existe une date t et un horizon *strictement plus grand que 1* pour lesquels la connaissance du passé $\underline{X_{2t-1}}$ de X_2, améliore la prévision de X_1 soit :

$$\text{(CI)} \qquad \begin{cases} \forall t, \quad EL(X_{1t}/\underline{X_{t-1}}) = EL(X_{1t}/\{\underline{X_{1,t-1}};\ \underline{X_{3,t-1}}\}) \\ \qquad\qquad \exists\, t, \quad \exists h > 1, \\ EL(X_{1t+h}/\underline{X_{t-1}}) \neq EL(X_{1t+h}/\{\underline{X_{1,t-1}};\ \underline{X_{3,t-1}}\}) \end{cases}$$

DÉFINITION 3 : Dans l'univers $X = \{X_1, X_2, X_3\}$, caractérisé par trois séries vectielles, il existe un lien de causalité *unidirectionnel* de X_2 vers X_1 si et seulement si il existe un lien de causalité *unidirectionnel direct ou* un lien de causalité *unidirectionnel indirect* de X_2 vers X_1, soit :

$$(\mathrm{C}) \quad \Leftrightarrow \quad \{(\mathrm{CD}) \text{ ou } (\mathrm{CI})\}$$

Remarque : D'après les définitions 1 et 2, on ne peut observer simultanément de causalité directe et de causalité indirecte, ce qui peut paraître surprenant, sauf si l'on se souvient que la causalité est caractérisée en termes d'amélioration de la prévision; si on observe en effet une amélioration de la prévision à l'horizon 1, l'analyse est terminée : on conclut à la causalité. *Sinon*, c'est-à-dire *s'il n'existe pas de causalité directe*, il convient d'étudier si l'amélioration de la prévision peut survenir à un horizon supérieur à 1 : l'observation de telles améliorations caractérise la causalité indirecte.

Par la suite, nous nous limitons au cadre stationnaire; les définitions précédentes sont conservées, mais la spécification de la date t n'apparaît plus dans l'énoncé des conditions.

Nous montrons maintenant que la caractérisation précédente de la causalité unidirectionnelle correspond exactement à la caractérisation proposée par LÜTKEPOHL [1990].

PROPRIÉTÉ 2 : Dans l'univers stationnaire $X = X_1, X_2, X_3$, caractérisé par trois séries vectorielles, il existe un lien de causalité *unidirectionnel* de X_2 vers X_1 si et seulement si la connaissance du passé de X_2, X_2t-1 améliore la prévision de X_1, pour au moins *un horizon de prévision*, soit :

$$\exists\, h \geq 0, \quad EL\,(X_{1t+h}/\underline{X_{t-1}}) \neq EL\,(X_{1t+h}/\{\underline{X_{1,t-1}};\ \underline{X_{3,t-1}}\})$$

Preuve : Pour toute proposition P, on note $\overline{P}$ sa négation. On peut alors écrire les équivalences suivantes :

$$(\mathrm{C}) \quad \Leftrightarrow \quad \{(\mathrm{CD})\ \textit{ou}\ (\mathrm{CI})\}$$

soit,

$$\overline{(\mathrm{C})} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\overline{(\mathrm{CD})}\ \textit{et}\ \overline{(\mathrm{CI})}\right\}$$

La condition $\overline{(\mathrm{C})}$ est donc équivalente à la condition :

$$\{\overline{(\mathrm{CD})} \text{ et } \{(\mathrm{CD})\ \textit{ou}\ \{\forall\, h \geq 1,\ EL\,(X_{1t+h}/\underline{X_{t-1}}) = EL\,(X_{1t+h}/\{\underline{X_{1,t-1}};\ \underline{X_{3,t-1}}\})\}\},$$

soit :

$$\overline{(\mathrm{C})} \quad \Leftrightarrow \quad \{\overline{(\mathrm{CD})}\ \textit{et}\ \{\forall\, h \geq 1,\ EL\,(X_{1t+h}/\underline{X_{t-1}}) = EL\,(X_{1t+h}/\{\underline{X_{1,t-1}};\ \underline{X_{3,t-1}}\})\}\}$$

$$\overline{(\mathrm{C})} \quad \Leftrightarrow \quad \{\forall\, h \geq 0,\ EL\,(X_{1t+h}/\underline{X_{t-1}}) = EL\,(X_{1t+h}/\{\underline{X_{1,t-1}};\ \underline{X_{3,t-1}}\})\} \quad \square$$

On remarque que l'existence de liens de causalité unidirectionnels directs correspond exactement à la causalité usuelle au sens de GRANGER. La causalité au sens usuel de GRANGER (CGU) est donc une condition nécessaire de causalité au sens de la condition (C).

Il est intéressant de montrer que la condition (CGU) implique la condition (C) dans le cadre stationnaire bivarié en section 2. On retrouve ainsi un résultat établi par Florens et Mouchart [1982] lorsque la causalité est caractérisée en termes d'espérance conditionnelle.

Propriété 3 : Dans un cadre bivarié stationnaire, les conditions de non-causalité \x\to((CGU)) et $\overline{(\mathbf{C})}$ sont équivalentes.

La preuve est donnée en annexe.

Il apparaît donc que, dans un univers *bivarié*, si l'amélioration de la prévision n'est pas observée à un horizon unitaire, elle ne peut pas être mise en évidence pour des horizons plus lointains. Or la causalité unidirectionnelle indirecte n'existe qu'entre deux variables sans liens de causalité directs (cf. définition 2); on ne peut donc distinguer les deux notions de non-causalité directe et indirecte que dans les systèmes de dimension strictement plus grande que deux. Ceci confirme l'intuition selon laquelle l'amélioration de la prévision « *indirecte* », distincte de l'amélioration usuelle à l'horizon 1, est réalisée par l'intermédiaire de variables auxiliaires.

De fait, la caractérisation usuelle de la causalité « à la Granger » en termes d'amélioration de la prévision à un horizon unitaire se révèle insuffisante pour assurer la condition (C), dès que la dimension de l'univers devient strictement plus grande que deux, comme le montre l'exemple simple suivant :

$$\begin{cases} X_{1t} = a_{13}\, X_{3t-1} + \varepsilon_{1t} \\ X_{2t} = \varepsilon_{2t} \\ X_{3t} = a_{32}\, X_{2t-1} + \varepsilon_{3t} \end{cases}$$

où la matrice de variance-covariance $V\varepsilon$ de l'innovation est supposée orthogonale (et toujours régulière).

Dans ce cas,

$$EL\,(X_{1t}/\underline{X_{t-1}}) \;=\; EL\,(X_{1t}/\{\underline{X_{1,t-1}};\ \underline{X_{3,t-1}}\}) \;=\; a_{13}\, X_{3t-1}$$

Or, on peut écrire $X_{1t} = a_{13}\, a_{32} X_{2t-2} + a_{13}\varepsilon_{3t-1} + \varepsilon_{1t}$, et par conséquent,

$$EL\,(X_{1t}/\underline{X_{t-2}}) \;=\; a_{13}\, a_{32}\, X_{2t-2}$$

D'après le lemme, $EL\,(X_{1t}/\underline{X_{t-2}})$, qui est un élément de l'espace $\underline{X_{2t-1}}$, ne peut être égal à $EL\,(X_{1t}/\{\underline{X_{1t-2}};\ \underline{X_{3t-2}}\})$.

Ainsi, dans le cas particulier précédent, la condition $\overline{(\mathrm{CGU})}$ est vérifiée mais non la condition $\overline{(\mathbf{C})}$.

A ce stade, nous avons montré l'intérêt d'aborder l'analyse de la causalité en termes d'amélioration de la prévision à tous les horizons, comme le suggère Lütkepohl [1990]), dès que l'on essaie de capter les liens de causalité directs et indirects tels que nous les avons définis. C'est cette approche que nous adoptons par la suite. Dans la section suivante, nous établissons un théorème dont l'objet est la spécification d'une *condition nécessaire et suffisante de non-causalité* *au sens* $\overline{(\mathbf{C})}$ énoncée à partir des *paramètres d'intérêt* que sont les coefficients autorégressifs de la dynamique de la variable causale *et* les multiplicateurs dynamiques de la variable causée. Même en l'absence de corrélations instantanées entre les variables, les conditions usuelles de non-casalité $\{A_{12}(L) = 0\}$ ou $\{C_{12}(L) = 0\}$, correspondant respectivement aux approches de GRANGER [1969] ou SIMS [1980], apparaissent alors comme des conditions *nécessaires*, mais *non suffisantes* de non-casalité au sens de la condition $\overline{(\mathbf{C})}$.

4 Caractérisation de la causalité unidirectionnelle dans un cadre VAR stationnaire

Pour simplifier l'interprétation des résultats concernant notamment la caractérisation des liens de causalité directs et indirects, nous établissons un premier théorème qui spécifie une condition nécessaire et suffisante de non-causalité au sens de la définition 3 : dans ce cas, la causalité est étudiée entre deux séries extraites d'un système $X = \{X_1, X_2, X_3\}$, constitué de trois séries vectorielles dont la dynamique admet une représentation autorégressive stationnaire d'ordre éventuellement infini. Un deuxième théorème est ensuite établi pour caractérisé la non-causalité entre deux séries univariées extraites d'un système de dimension quelconque admettant une représentation autorégressive stationnaire d'ordre éventuellement infini.

THÉORÈME 4 : Pour tout système $X = \{X_1, X_2, X_3\}$, constitué de trois séries vectorielles, dont la dynamique est décrite par un modèle stationnaire, $A(L) X_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow X_t = C(L) \varepsilon_t$ pour lequel $A(0) = C(0) = \mathrm{Id}$ et la matrice de variance-covariance $V \varepsilon_t$ est régulière, une condition nécessaire et suffisante pour que X_2 ne cause pas *unidirectionnellement* X_1, au sens de la condition $\overline{(\mathbf{C})}$, dans l'univers stationnaire $X = \{X_1, X_2, X_3\}$ est donnée par l'ensemble des deux propriétés :
(i) $\{C_{12}(L) = 0$ et $A_{12}(L) = 0\}$
(ii) Pour tout $h \geq 0$, $C_{13,h} A_{32}(L) = 0$.

COROLLAIRE 5 : Pour tout système $X = \{X_1, X_2, X_3\}$, constitué de séries vectorielles, dont la dynamique est décrite par un modèle stationnaire, $A(L) X_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow X_t = C(L) \varepsilon_t$, pour lequel $A(0) = C(0) = \mathrm{Id}$ et la matrice de variance-covariance $V \varepsilon_t$ est régulière, X_2 ne cause pas *unidirectionnellement* X_1 au sens de GRANGER dans l'univers stationnaire $X = \{X_1, X_2, X_3\}$, si et seulement si $\{A_{12}(L) = 0\}$.

COROLLAIRE 6 : Pour tout système $X = \{X_1, X_2, X_3\}$, constitué de séries vectorielles, où X_3 est de dimension 1 et dont la dynamique est décrite par un modèle stationnaire, $A(L)X_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow X_t = C(L)\varepsilon_t$, pour lequel $A(0) = C(0) = \mathrm{Id}$ et la matrice de variance-covariance $V\varepsilon_t$ est régulière, une condition nécessaire et suffisante pour que X_2 ne cause pas *unidirectionnellement* X_1 au sens de la condition $\overline{(\mathbf{C})}$, dans l'univers stationnaire $X = \{X_1, X_2, X_3\}$, est donnée par :

$$\{C_{12}(L) = 0 \text{ et } A_{12}(L) = 0\}.$$

Preuve du théorème 4

(i) **un équivalent de la condition** $\overline{(\mathbf{C})}$ **:**

Il résulte de la propriété pour $\{X_{1t}, X_{2t}, X_{3t}, t \in Z\}$ d'être un système libre que la condition $\overline{(\mathbf{C})}$ est vérifiée si et seulement si, pour tout $h \geq 0$,

$$EL(X_{1t+h}/\{\underline{X_{1,t-1}};\ \underline{X_{2,t-1}};\ \underline{X_{3,t-1}}\}) = EL(X_{1,t+h}/\{\underline{X_{1,t-1}};\ \underline{X_{3,t-1}}\})$$

Or, $EL(X_{1,t+h}/\{\underline{X_{1,t-1}};\ \underline{X_{2,t-1}};\ \underline{X_{3,t-1}}\})$ est égal à la projection :

$$\begin{aligned}
&EL(X_{1t+h}/\{\underline{\varepsilon_{1t-1}};\ \underline{\varepsilon_{2t-1}};\ \underline{\varepsilon_{3t-1}}\})\\
&\quad = \Big(\sum_{k\geq h+1} C_{11,k}L^{k-h-1},\ \sum_{k\geq h+1} C_{12,k}L^{k-h-1},\ \sum_{k\geq h+1} C_{13,k}L^{k-h-1}\Big)\varepsilon_{t-1}\\
&\quad = \Big(\sum_{k\geq h+1} C_{11,k}L^{k-h-1},\ \sum_{k\geq h+1} C_{12,k}L^{k-h-1},\ \sum_{k\geq h+1} C_{13,k}L^{k-h-1}\Big)\\
&\qquad \times A(L)X_{t-1}
\end{aligned}$$

On peut donc conclure, par application du lemme, que la condition $\overline{(\mathbf{C})}$ est satisfaite si et seulement si l'ensemble des conditions (C_h) est vérifié où (C_h) s'énonce :

$$(\mathrm{C}_h) \qquad \sum_{i=1}^{3}\sum_{k\geq h+1} C_{li,k}L^{k-h-1}A_{i2}(L) = 0$$

(ii) **Condition nécessaire de non-causalité** $\overline{(\mathbf{C})}$: $\{\{C_{12}(L) = 0\}$ **et** $\{A_{12}(L) = 0\}\}$

Si la condition $\overline{(\mathbf{C})}$ est satisfaite, la condition (C_h) est satisfaite pour tout $h \geq 0$, et en particulier pour h égal à zéro; d'après la représentation canonique de la dynamique du système, la condition (C_0) peut être décrite comme suit :

$$(C_{11}(L) - 1)A_{12}(L) + \sum_{i=2}^{3} C_{li}(L)A_{i2}(L) = 0$$

En utilisant le fait que $C(L)$ est l'inverse de la matrice $A(L)$, on peut affirmer que :

$$\sum_{i=1}^{3} C_{li}(L)A_{i2}(L) = 0$$

Par conséquent,

$$(C_0) \quad \Leftrightarrow \quad \{A_{12}(L) = 0\}$$

La condition $\{A_{12}(L) = 0\}$ est donc une condition nécessaire de la condition $\overline{(\mathbf{C})}$.

On remarque de plus qu'elle apparaît comme une condition nécessaire et suffisante de non-causalité au sens usuel de GRANGER $\overline{\mathrm{CGU}} \Leftrightarrow (C_0)$. Ce qui établit le corollaire 5. Enfin, d'après les propriétés de la représentation canonique, on remarque que la constante qui apparaît dans la condition (C_h) est précisément égale au coefficient $C_{12,h+1}$, qui doit donc être nul. On peut donc conclure que $\{C_{12}(L) = 0$ et $A_{12}(L) = 0\}$ est une condition nécessaire de non-causalité au sens de la condition $\overline{(\mathbf{C})}$.

(iii) **Preuve du théorème 4**

D'après les résultats précédents, la condition $\overline{(\mathbf{C})}$ implique la condition :

$$\{C_{12}(L) = 0 \text{ et } A_{12}(L) = 0\}.$$

Il s'ensuit que, sous la condition $\overline{(\mathbf{C})}$, chaque condition (C_h), $h \geq 0$, peut être réécrite :

$$\sum_{k \geq h+1} C_{13,k} L^{k-h-1} A_{32}(L) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k \geq h+1} C_{13,k} L^k A_{32}(L) = 0$$

ou, de manière équivalente :

$$(\mathrm{C}'_h) \qquad (C_{13}(L) - \sum_{k \leq h} C_{13,k} L^k) A_{32}(L) = 0$$

En utilisant l'identité $A(L) = C(L))^{-1}$, et en particulier les relations qui s'en déduisent :

$$C_{13}(L) A_{32}(L) = 0,$$

on conclut que la condition $\overline{(\mathbf{C})}$ implique, outre la propriété $\{A_{12}(L) = 0$ et $C_{12}(L) = 0\}$, l'ensemble des conditions (C''_h), $h \geq 0$:

$$(\mathrm{C}''_h) \qquad \{C_{13,h} A_{32}(L) = 0\}$$

La réciproque est obtenue de manière immédiate, d'après les résultats établis en (i). En effet, on a l'implication :

$$\{A_{12}(L) = 0;\ C_{12}(L) = 0,\ (\mathrm{C}''_h),\ h \geq 0\} \quad \Rightarrow \quad \{(\mathrm{C}_h),\ h \geq 0\}.$$

Preuve du corollaire 6 : Lorsque X_3 est de dimension 1, les conditions (C''_h) s'écrivent :

$$\{C_{i3,h} A_{3j}(L) = 0;\ 1 \leq i \leq n_1;\ n_1 + 1 \leq j \leq n_1 + n_2\},$$

si les séries X_1 et X_2 sont respectivement de dimensions n_1 et n_2.

Dans ce cas, l'ensemble des conditions (C''_h) est donc équivalent à l'ensemble des conditions :

$$\{C_{i3,h}\, A_{3j,k}(L) = 0;\ 1 \le i \le n_1;\ n_1 + 1 \le j \le n_1 + n_2;\ h \ge 0;\ k \ge 0\}$$

c'est-à-dire à la condition $C_{13}(L)\, A_{32}(L) = 0$, dont on sait qu'elle est automatiquement vérifiée, dès que $\{A_{12}(L) = C_{12}(L) = 0\}$, parce que la propriété pour $C(L)$ d'être l'inverse de $A(L)$ implique l'égalité :

$$C_{11}(L)\, A_{12}(L) + C_{12}(L)\, A_{22}(L) + C_{13}(L)\, A_{32}(L) = 0$$

Finalement, on a l'équivalence :

$$\overline{(\mathbf{C})} \quad \Leftrightarrow \quad \{A_{12}(L) = 0 \text{ et } C_{12}(L) = 0\} \quad \square$$

Dans le cas trivarié, on peut interpréter facilement la condition de causalité au sens de la condition $(\mathbf{C})$. Le cas trivarié montre en particulier comment se distinguent les deux notions de causalité unidirectionnelle *directe* et *indirecte*.

Il est en effet intéressant de noter, dans ce cas, les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&\{\{C_{12}(L) = 0\} \text{ et } \{A_{12}(L) = 0\}\} \\
&\qquad \Leftrightarrow \quad \{\{C_{13}(L)\, C_{32}(L) = 0\} \text{ et } \{C_{12}(L) = 0\}\}, \\
&\{\{C_{12}(L) = 0\} \text{ et } \{A_{12}(L) = 0\}\} \\
&\qquad \Leftrightarrow \quad \{\{A_{13}(L)\, A_{32}(L) = 0\} \text{ et } \{A_{12}(L) = 0\}\}
\end{aligned}$$

La condition nécessaire est suffisante de non-causalité unidirectionnelle $\{\{C_{12}(L) = 0\}$ et $\{A_{12}(L) = 0\}\}$ s'interprète alors facilement : l'amélioration de la prévision pour *tout horizon de prévision* est exclue si et seulement si il n'existe aucun lien de causalité *unidirectionnel direct* $\{A_{12}(L) = 0\}$ (cf. propriété 4) *et indirect* de X_2 vers X_1. Précisons la condition de causalité unidirectionnelle indirecte. Celle-ci est observée si et seulement si $\{\{A_{12}(L) = 0\}$ et $\{A_{13}(L)\, A_{32}(L) \neq 0\}\}$. En effet, si on reprend la définition 2, on ne peut observer de causalité unidirectionnelle indirecte qu'en l'absence de causalité unidirectionnelle directe, c'est-à-dire, d'après le théorème, lorsque $\{A_{12}(L) = 0\}$. Or dès que la proposition $\{A_{12}(L) = 0\}$ est vraie, d'après le théorème, on ne peut observer de liens de causalité unidirectionnels indirects que si $\{A_{13}(L)\, A_{32}(L) \neq 0\}$; dans le cas contraire, on aurait absence de causalité unidirectionnelle, et donc, en particulier de causalité unidirectionnelle indirecte. On note donc que, conformément à l'intuition, les liens de causalité unidirectionnels indirects transitent nécessairement par la variable auxiliaire X_3. De manière plus formelle, on peut énoncer la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 7 : Pour tout système trivarié $X = \{X_1, X_2, X_3\}$, dont la dynamique est décrite par un modèle stationnaire, $A(L)\, X_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow X_t = C(L)\varepsilon_t$, pour lequel $A(0) = C(0) = \mathrm{Id}$ et la matrice de variance-covariance $V\,\varepsilon_t$ est régulière, lorsqu'il n'existe pas de liens de causalité unidirectionnels directs de X_2 vers X_1 au sens de la condition $\overline{(\mathbf{CGU})}$, il n'existe pas de liens de causalité unidirectionnels indirects de X_2 vers X_1 si et seulement si il n'existe pas de liens directs transitant par la variable X_3, soit :

$$\{A_{13}(L)\, A_{32}(L) = 0\}.$$

On remarque qu'aucune des deux conditions usuelles $\{C_{12}(L) = 0\}$ ou $\{A_{12}(L) = 0\}$, n'est suffisante pour exclure tous les liens de causalité *unidirectionnels directs et indirects* de X_2 vers X_1, au sens de la condition $\overline{(\mathbf{C})}$, dès que la dimension du système est au moins égale à trois.

On note enfin que, dans le cas trivarié, on peut proposer une lecture « duale » des caractérisations de la causalité selon GRANGER et selon SIMS au sens suivant :

sous la condition $\overline{(\mathbf{C})}$, l'absence de causalité unidirectionnelle directe (respectivement indirecte) au sens de GRANGER $\{A_{12}(L) = 0\}$ (resp. $\{A_{13}(L)\,A_{32}(L) = 0\}$ peut être interprétée comme une condition de non-causalité unidirectionnelle indirecte (respectivement directe) au sens de SIMS $\{C_{13}(L)\,C_{32}(L) = 0\}$ (resp. $\{C_{12}(L) = 0\}$), tout au moins lorsqu'il n'existe aucune corrélation instantanée entre les innovations des différentes variables.

Nous établissons maintenant une caractérisation de non-causalité au sens de $\overline{(\mathbf{C})}$ entre deux séries univariées extraites d'un système à n dimensions, dont la dynamique est décrite par un modèle VAR stationnaire de dimension finie p. Le résultat est ensuite généralisé au cas de modèles VARMA stationnaires, stables et inversibles.

THÉORÈME 8 : Pour tout système $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ de séries univariées dont la dynamique est décrite par un modèle VAR stationnaire d'ordre p, $A(L)X_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow X_t = C(L)\,\varepsilon_t$, pour lequel $A(0) = C(0) =$ Id et la matrice de variance-covariance $V\,\varepsilon_t$ est régulière, une condition nécessaire et suffisante pour que X_2 ne cause pas *unidirectionnellement* X_1 dans l'univers stationnaire $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ est donnée par l'ensemble des deux propriétés :

(i) $\{C_{12}(L) = 0$ et $A_{12}(L) = 0\}$

(ii) si J désigne un sous-ensemble maximal d'indices $j \in \{3, \ldots, n\}$ tels que les vecteurs $A^*_{j2} = (A_{j2,1}, \ldots, A_{j2,p}) \in R^p$ soient linéairement indépendants, et K le complémentaire dans l'ensemble $\{3 \ldots, n\}$, l'une des propriétés (exclusives) suivantes doit être satisfaite :

1) $J = \emptyset \Leftrightarrow \{A_{j2}(L) = 0;\ j \geq 3\}$

2) $J = \{3, \ldots, n\} \Leftrightarrow \{C_{1j}(L) = 0;\ j \geq 3\}$

3) $J \neq \emptyset$ et $J \neq \{3, \ldots, n\}$ et il existe des scalaires $\alpha_{jk}, j \in J$ et $k \in K$ tels que, pour tous $k \in K$ et $j \in J$:

- $C_{1j}(L) + \sum_{k \in K} \alpha_{jk}\, C_{1k}(L) = 0$
- $A_{k2}(L) - \sum_{j \in J} \alpha_{jk}\, A_{j2}(L) = 0$

Le théorème 8 s'établit selon les mêmes principes que le théorème 4; on établit comme précédemment l'équivalence entre la condition $\overline{(\mathbf{C})}$ et la condition :

$$\{C_{12}(L) = 0;\ A_{12}(L) = 0;\ \{(\mathrm{C}''_h),\ h \geq 0\}\}$$

où la condition (C''_h) est spécifiée de la manière suivante :

$$(C''_h) \qquad \sum_{j=3}^{n} C_{1j,h}\, A_{j2}\,(L) = 0$$

Soit alors J un sous-ensemble maximal d'indices $j \in \{3, \ldots, n\}$ tels que les vecteurs $A_{j2} = (A_{j2,1}, \ldots, A_{j2,p})' \in R^p$ soit linéairement indépendants. Soit K le complémentaire de J dans $\{3, \ldots, n\}$. Par définition de J et K, l'une des propriétés – exclusives – suivantes est vérifiée :

1) $J = \emptyset \Leftrightarrow \{A_{j2}\,(L) = 0;\ j \geq 3\}$

2) $J = \{3, \ldots, n\} \Leftrightarrow \{C_{1j}\,(L) = 0;\ j \geq 3\}$

3) $J \neq \emptyset$ et $J \neq \{3, \ldots, n\}$ et il existe des scalaires α_{jk}, $j \in J$ et $k \in K$ tels que, pour tout $k \in K$:

$$A_{k2}\,(L) = \sum_{j \in J} \alpha_{jk}\, A_{j2}\,(L)$$

Par conséquent la condition (C''_h) est satisfaite si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1) $J = \emptyset \Leftrightarrow \{A_{j2}\,(L) = 0;\ j \geq 3\}$,

2) $J = \{3, \ldots, n\} \Leftrightarrow \{C_{1j}\,(L) = 0;\ j \geq 3\}$,

3) $J \neq \emptyset$ et $J \neq \{3, \ldots, n\}$ et il existe des scalaires α_{jk}, $j \in J$ et $k \in K$ tels que, pour tout $k \in K$:

$$\sum_{j \in J} A_{j2}\,(L)\,(C_{1j,h} + \sum_{k \in K} \alpha_{jk}\, C_{1k,h}) = 0$$

ou, de manière équivalente, tels que :

$$\sum_{j \in J} A_{j2}\,(C_{1j,h} + \sum_{k \in K} \alpha_{jk}\, C_{1k,h}) = 0$$

Comme les vecteurs A_{j2}, $j \in J$, sont linéairement indépendants, l'ensemble des conditions $\{(C''_h);\ h \geq 0\}$ est satisfait, dans ce dernier cas, si et seulement si, pour tous $h \geq 0$ et $j \in J$,

$$C_{1j,h} + \sum_{k \in K} \alpha_{jk}\, C_{1k,h} = 0.$$

Ce qui peut être réécrit de manière synthétique sous la forme :

$$C_{1j}\,(L) + \sum_{k \in K} \alpha_{jk}\, C_{1k}\,(L) = 0. \quad \square$$

Remarquons que dans l'énoncé du corollaire 5, il est possible que certains cas soient exclus d'emblée; par exemple, si $p \leq n - 3$, on ne peut avoir $J = \{3, \ldots, n\}$, puisque les vecteurs A^*_{j2}, $j \in J$, appartiennent à R^P.

Notons aussi que l'on retrouve les résultats établis dans le cas trivarié, en remarquant que l'on ne peut avoir que l'une des deux alternatives $J = \emptyset$ ou $J = \{3\}$ qui correspondent respectivement aux conditions $\{C_{12}\,(L) = 0;\ A_{12}\,(L) = 0;\ C_{13}\,(L) = 0\}$ et $\{C_{12}\,(L) = 0;\ A_{12}\,(L) = 0;\ A_{32}\,(L) = 0\}$, équivalentes, chacune, à la condition $\{C_{12}\,(L) = 0;\ A_{12}\,(L) = 0\}$.

Il est intéressant de commenter le cas $n = 4$, pour lequel une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{(\mathbf{C})}$ soit satisfaite prend la forme suivante :

• $\{C_{1j}(L) = 0$ pour tout $j \geq 2\} \Leftrightarrow \{X_{1t} = C_{11}(L)\varepsilon_{1t}\}$, lorsque $J = \{3, 4\}$, si $p \geq 2$; sinon ce cas est exclu, puisque les vecteurs $A_{j2}^{*} = (A_{j2,1}, \ldots, A_{j2,p}) \in R^p$, doivent être linéairement indépendants pour $j \in J$.

• Si $J = \emptyset$, $A_{32}(L) = A_{42}(L) = 0$; dans ce cas, puisque $C(L)$ est l'inverse de $A(L)$, nécessairement, $C_{32}(L) = C_{42}(L) = 0$; par ailleurs, $C_{12}(L) = 0$; par conséquent, X_{1t}, X_{3t}, X_{4t} appartiennent à l'espace $\{\underline{\varepsilon_{1t}}, \underline{\varepsilon_{3t}}, \underline{\varepsilon_{4t}}\}$; réciproquement, la condition $\{A_{12}(L) = A_{32}(L) = A_{42}(L) = 0\}$ implique que $\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{3t}, \varepsilon_{4t}$ appartiennent à $\{\underline{X_{1t}}, \underline{X_{3t}}, \underline{X_{4t}}\}$. Les deux espaces sont confondus, « excluant » en ce sens la variable X_2 de la dynamique de X_1.

• Il existe des scalaires λ et μ, éventuellement nuls séparément, tels que :

$$\begin{cases} \bullet\ \lambda\, C_{13}(L) + \mu\, C_{14}(L) = 0 \\ \bullet\ \lambda\, A_{42}(L) - \mu\, A_{32}(L) = 0 \end{cases}$$

Si par exemple, $\lambda \neq 0$, et $\mu \neq 0$, le « signal » $X_{1t} = C_{11}(L)\varepsilon_{1t} + C_{14}(L)\left(-\frac{\mu}{\lambda}\varepsilon_{3t} + \varepsilon_{4t}\right)$ est décrit à partir des innovations ε_{1t-i}, $i \geq 0$ et $\left(-\frac{\mu}{\lambda}\varepsilon_{3t-i} + \varepsilon_{4t-i}\right)$, $i \geq 1$, inscrites dans l'univers restreint $\{X_1, X_3, X_4\}$, comme le montre la caractérisation autorégressive du système écrite sous la contrainte $\lambda\, A_{42}(L) - \mu\, A_{32}(L) = 0$: sous cette contrainte, on a en effet les appartenances suivantes :

$$A_{11}(L)X_1 + A_{13}(L)X_3 + A_{14}(L)X_4 = \varepsilon_{1t} \in \{\underline{X_{1t}}, \underline{X_{3t-1}}, \underline{X_{4t-1}}\}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{31}(L)X_1 + A_{32}(L)X_2 + A_{33}(L)X_3 + A_{34}(L)X_4 = \varepsilon_{3t} \\ A_{41}(L)X_1 + \lambda\, A_{32}(L)X_2 + A_{43}(L)X_3 + A_{44}(L)X_4 = \varepsilon_{4t} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \left(-\frac{\mu}{\lambda}\varepsilon_{3t} + \varepsilon_{4t}\right) \in \{\underline{X_{1t-1}}, \underline{X_{3t}}, \underline{X_{4t}}\}$$

Lorsque $\mu = 0$, (resp. $\lambda = 0$) les résultats précédents sont conservés, si on remplace $-\frac{\mu}{\lambda}\varepsilon_{3t} + \varepsilon_{4t}$ par ε_{4t} (resp. ε_{3t}).

A ce stade, on peut faire trois remarques qui permettent d'ouvrir des perspectives intéressantes sur la base des résultats obtenus dans ce papier.

Remarque 1 : Bien qu'aucune procédure de test statistique ne soit proposée dans ce papier, on note que, d'après les théorèmes 4 et 8, la non-causalité de X_2 vers X_1, telle qu'elle est caractérisée selon $\overline{(\mathbf{C})}$, fait apparaître en (ii) *une contrainte bilinéaire* « en des *paramètres d'intérêt*, $\{C_{1j}(L);\ j \geq 3\}$ et des paramètres auxiliaires $\{A_{j2}(L), j \geq 3\}$ », dans le cas de l'analyse trivariée, (respectivement, $\{C_{1j}(L);\ j \geq 3\}$ et $\{A_{j2}(L), j \geq 3;\ \alpha_{jk};\ j \in J$ et $k \in K\}$, dans le cas de la dimension n). Les travaux de LÜTKEPOHL [1990] sur les tests des conditions du type $\{C_{ij}(L) = 0$, d'une part, les travaux de GOURIÉROUX, MONFORT, RENAULT [1988] sur les tests de contraintes implicites bilinéaires peuvent être utilisés conjointement pour tester la non-causalité caractérisée au sens de la condition $\overline{(\mathbf{C})}$.

Remarque 2 : Le théorème a été établi pour des modèles VAR stationnaires d'ordre fini (p). La démonstration de ce théorème montre qu'il est aisé de généraliser le résultat au cas de modèles VARMA (p, q) (stationnaires) stables, inversibles, $A(L) X_t = B(L) \varepsilon_t$, c'est-à-dire tels que $\det(A(x)) \neq 0$ et $\det(B(x)) \neq 0$ pour x de valeur absolue strictement plus petite que 1. Dans ce cas, on sait en effet que les séries des coefficients autorégressifs $(A_{ij,k})_{0 \leq k \leq \infty}$ de la représentation « VAR pure » sont absolument sommables pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$. Il suffit alors de remplacer dans l'énoncé du théorème l'espace vectoriel R^P par l'espace vectoriel des suites de nombres réels absolument sommables.

Remarque 3 : Les études empiriques récentes montrent que les séries économiques sont la plupart du temps non stationnaires; elles sont le plus souvent reconnues comme étant intégrées d'ordre un, éventuellement cointégrées. Les résultats obtenus dans ce papier peuvent *a priori* être utilisés pour étudier des liens de causalité entre les variables différenciées; en effet, lorsqu'il n'existe pas de liens de cointégration, la dynamique des variables différenciées obéit à un modèle VAR stationnaire; dans le cas contraire, pour décrire la dynamique du système, on peut utiliser les modèles VAR cointégrés (stationnaires) tels qu'ils ont été étudiés, en toute généralité par WARNE [1990]. Toutefois, il faut noter qu'une telle approche est différente de celle adoptée par TODA et PHILLIPS [1991], qui étudient simultanément les liens de cointégration et les liens de causalité entre les variables; pour exploiter les résultats obtenus dans ce papier, la causalité devrait être étudiée après la reconnaissance de relations de cointégration mises en évidence lors d'une première étape.

5 Conclusion

Dans ce papier, nous nous sommes intéressés à l'analyse des liens de causalité unidirectionnels entre deux variables extraites d'un système multivarié, dont la dynamique est caractérisée par un modèle VAR stationnaire. La préoccupation majeure de l'étude était de montrer, suivant en cela LÜTKEPOHL [1990], que la caractérisation usuelle de la causalité « à la Granger », énoncée en termes d'amélioration de la prévision pour un horizon unitaire, était insuffisante pour capter tous les liens de causalité pouvant exister entre deux variables, dès lors qu'il existe au moins une troisième variable pouvant servir de relais entre les deux premières. Ce faisant, nous n'avons pas suivi cet auteur en adoptant l'analyse de la causalité préconisée par SIMS [1980], fondée sur l'étude des multiplicateurs dynamiques. Nous avons choisi d'étudier la causalité en termes d'amélioration de la prévision. En nous limitant à l'étude de liens de causalité unidirectionnels, nous avons proposé une distinction entre les liens de causalité directs et indirects; nous avons alors montré que, selon les définitions adoptées, les liens directs correspondent aux liens de causalité tels qu'ils sont caractérisés au sens usuel de GRANGER [1969], en termes d'amélioration de la prévision à un horizon unitaire, tandis que les liens indirects apparaissent lorsqu'on étudie l'amélioration de la prévision à des horizons strictement plus grands que un. Ainsi, l'analyse de la causalité entre deux variables extraites d'un système multivarié requiert l'étude de l'amélioration de la prévision à tous les horizons, comme le suggère LÜTKEPOHL [1990]. Aux fins d'une analyse statistique menée dans un cadre VAR stationnaire d'ordre éventuellement infini, nous avons établi une condition nécessaire et suffisante de non-causalité unidirectionnelle entre deux variables, énoncée en termes d'amélioration de la prévision à tous les horizons de prévision. Dans un tel cadre VAR, cette condition nécessaire et suffisante s'exprime comme une contrainte portant sur les paramètres d'intérêt que sont les coefficients autorégressifs et les multiplicateurs dynamiques canoniques respectivement associés à la variable causale et la variable causée. A ce stade, aucune procédure de test statistique n'a été développée; nous avons seulement remarqué que dans le cadre d'un modèle VAR stationnaire la caractérisation statistique de la non-causalité unidirectionnelle au sens adopté dans ce papier apparaît sous la forme favorable d'une contrainte implicite bilinéaire entre des paramètres auxiliaires et des paramètres d'intérêt bien choisis. Cette écriture permet d'envisager, dans le cadre de travaux ultérieurs, une application fructueuse des procédures de test de contraintes bilinéaires telles qu'elles ont été étudiées par GOURIÉROUX, MONFORT, RENAULT [1988]. Enfin, le cadre VAR stationnaire apparaît comme un référentiel privilégié pour étudier la causalité entre séries non stationnaires, intégrées d'ordre un et éventuellement cointégrées, ce qui ouvre des perspectives d'applications intéressantes à la compréhension de liens de causalité entre séries économiques réellement observées.

• Lemme : Soit un bruit blanc faible, $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \ldots, \varepsilon_{nt})'$, de matrice de variance-covariance $V\varepsilon$ régulière, on a l'implication suivante :

$$\left\{\forall t, \sum_{i=1}^{n} P_i(L)\,\varepsilon_{it} = 0\right\} \quad \Rightarrow \quad \{\forall i \in \{1, \ldots, n\}, P_i(L) = 0\},$$

où $P_i(L) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} L^k$ désigne un polynôme quelconque de l'opérateur retard L, éventuellement d'ordre infini, tel que l'égalité $\sum_{i=1}^{n} P_i(L)\,\varepsilon_{it} = 0$ soit vérifiée au sens L^2. (Comme les variables ε_{it} sont centrées, l'égalité est vérifiée si et seulement si, lorsque K tend vers l'infini, la variance de la variable $\sum_{k=0}^{K}\sum_{i=1}^{n} P_{ik} L^k \varepsilon_{it}$ tend vers zéro.)

Preuve du lemme : en utilisant la non-corrélation sérielle des innovations, on peut écrire :

$$\forall t, \quad \forall t', \quad \forall j, \quad \forall K,$$

$$\left(\operatorname{cov}\left(\sum_{k=0}^{K}\sum_{i=1}^{n} P_{ik} L^k \varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt'}\right)\right)^2 \leq \operatorname{var}\left(\sum_{k=0}^{K}\sum_{i=1}^{n} P_{ik} L^k \varepsilon_{it}\right) \operatorname{var}(\varepsilon_{jt'})$$

$$\forall j, \quad \forall k, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} P_{ik} \operatorname{cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt})\right)^2 \leq \operatorname{var}\left(\sum_{k=0}^{K}\sum_{i=1}^{n} P_{ik} L^k \varepsilon_{it}\right) \operatorname{var}(\varepsilon_{jt'})$$

or

$$\left\{\forall t, \sum_{i=1}^{n} P_i(L)\,\varepsilon_{it} = 0\right\} \Rightarrow \left\{\lim_{K\to\infty}\left\{\operatorname{var}\left(\sum_{k=0}^{K}\sum_{i=1}^{n} P_{ik} L^k \varepsilon_{it}\right)\right\} = 0\right\}$$

Par conséquent, on a l'implication :

$$\left\{\forall t, \sum_{i=1}^{n} P_i(L)\,\varepsilon_{it} = 0\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\forall j, \forall k, \sum_{i=1}^{n} P_{ik} \operatorname{cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) = 0\right\}$$

La régularité de la matrice $V\varepsilon$ permet alors de conclure que la proposition suivante est vraie :

$$\left\{\forall t, \sum_{i=1}^{n} P_i(L)\,\varepsilon_{it} = 0\right\} \quad \Rightarrow \quad \{\forall k \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, P_{ik} = 0\}.$$

• Corollaire : Étant donné un ensemble de séries $\{X_1 = (X_{1t}, \ldots, X_{nt})'\}_t$, sont la dynamique admet une représentation vectorielle autorégressive stationnaire, éventuellement d'ordre infini, on a l'implication suivante :

$$\left\{\forall t, \sum_{i=1}^{n} P_i(L) X_{it} = 0\right\} \quad \Rightarrow \quad \{\forall i \in \{1, \ldots, n\}, P_i(L) = 0\}.$$

Preuve du corollaire : On suppose que la propriété suivante est vérifiée :

$$\left\{\forall t, \sum_{i=1}^{n} P_i(L) X_{it} = 0\right\},$$

On peut alors écrire, en utilisant la décomposition de Wold de $X_t = (X_{1t}, \ldots, X_{nt})'$:

$$\left\{\forall t, \sum_{i=1}^{n} P_i(L) \sum_{j=1}^{n} C_{ij}(L) \varepsilon_{it} = 0\right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\forall t, \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} C_{ij}(L) P_i(L) \varepsilon_{it} = 0\right\}$$

Par application du lemme, on déduit la condition :

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sum_{i=1}^{n} C_{ij}(L) P_i(L) = 0.$$

Par suite des propriétés de la représentation canonique ($C(0) = \mathrm{Id}$), on peut affirmer que :

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sum_{i=1}^{n} C_{ij}(0) P_i(L) = P_j(L) = 0,$$

où les égalités ont lieu au sens L^2. □

• **Équivalence entre les conditions $\overline{(\mathrm{CGU})}$ et $\overline{(\mathrm{C})}$, dans le cas bivarié :**

Soit $X_t = (X_{1t}, X_{2t})'$ une série admettant une représentation autorégressive stationnaire, éventuellement d'ordre infini :

$$A(L) X_t = \varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})' \quad \Leftrightarrow \quad X_t = C(L) \varepsilon_t,$$

La condition $\overline{(\mathrm{C})}$ implique, par définition, la condition $\overline{(\mathrm{CGU})}$.

Supposons que la condition $\overline{(\mathrm{CGU})}$ soit satisfaite. Montrons que la condition $\overline{(\mathrm{C})}$ est alors aussi vérifiée.

Dans le cas bivarié autorégressif stationnaire, on sait que la condition $\overline{(\mathrm{CGU})}$ est équivalente à la condition $\{C_{12}(L) = 0\}$. De la décomposition canonique de Wold, on déduit alors l'écriture :

$$X_{1t} = C_{11}(L) \varepsilon_{1t}.$$

Par conséquent, pour tout h, $h \geq 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} EL(X_{1t+h}/\underline{X_{1t-1}}; \underline{X_{2t-1}}) &= EL(X_{1t+h}/\{\underline{\varepsilon_{1,t-1}}; \underline{\varepsilon_{2,t-1}}\}) \\ &= EL(X_{1t}/\underline{\varepsilon_{1,t-1}}) = \sum_{j \geq h+1} C_{11,j}\, \varepsilon_{1,t+h-1} \end{aligned}$$

De plus, comme X_t admet une représentation VAR stationnaire :

$$A(L)\,X_t = (\varepsilon_{1t},\, \varepsilon_{2t})'$$

$A(L)C(L) = \mathrm{Id}$; par conséquent, lorsque $C_{12}(L) = 0$, on a nécessairement :

$A_{12}(L)\,C_{22}(L) = 0$, ce qui implique $A_{12}(L) = 0$, puisque $C_{22}(0) = 1$; finalement ε_{1t} s'écrit :

$$\varepsilon_{1t} = A_{11}(L)\,X_{1t}$$

Les espaces $\underline{\varepsilon_{1,t-1}}$ et $\underline{X_{1,t-1}}$ sont confondus, ce qui implique l'égalité :

$$\forall h \geq 0, \quad EL\,(X_{1t+h}/\underline{X_{1t-1}}) = EL\,(X_{1t+h}/\underline{\varepsilon_{1,t-1}})$$

et donc :

$$\forall h \geq 0, \quad EL\,(X_{1t+h}/\underline{X_{1t-1}}) = EL\,(X_{1t+h}/\{\underline{X_{t-1}}). \quad \square$$

• Références bibliographiques

BRUNEAU, C., NICOLAÏ, J. P. (1991). – "Persistent and Transitory Causalities in a Multivariate Non-stationary System", Communication, European Conference Series, in *Quantitative Economics And Econometrics : EC2*, Amsterdam.

BRUNEAU, C., NICOLAÏ, J. P. (1992). – "Probabilistic Foundations of a Causal Analysis in a Stationary Vectorial Autoregressive Model", document de travail Insee.

DUFOUR, J. M., RENAULT, E. (1992). – « Causalités à court et à long terme dans les modèles VAR et ARIMA multivariés », document de travail CRDE.

DUFOUR, J. M., TESSIER, E. (1991). – "On the Relationship Between Impulse Response Analysis, Innovation Accounting and Granger Causality in Multiple Time Series", document de travail CRDE.

ENGLE, R. F., HENDRY, D. F., RICHARD, J. F. (1983). – "Exogeneity", *Econometrica*, 51, pp. 277-304.

GOURIÉROUX, Ch., MONFORT, A., RENAULT, E. (1988). – « Contraintes bilinéaires : estimation et test », dans "Mélanges économiques, Essais en l'honneur d'E. Malinvaud », *Economica*, Paris.

GRANGER, C. W. J. (1969). – "Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods", *Econometrica*, 37, pp. 424-438.

LÜTKEPOHL, H. (1990). – "Testing for Causation Between two Variables in Higher Dimensional VAR Models", paper presented at the World Congress of the Econometric Society, Barcelona.

PENM, J. H. W., TERELL, R. D. (1986). – "The Derived Moving Average Model and its Role in Causality", in J. Gani, M. B. Priestley (eds.), Essays in Time Series and Allied Processes, Sheffield : Applied Probability Trust, pp. 99-111.

SIMS, C. A. (1972). – "Money, Income and Causality", *American Economic Review*, 62, pp. 540-552.

SIMS, C. A. (1980). – "Macroeconomics and Reality", *Econometrica*, 48, pp. 1-48.

SIMS, C. A. (1981). – "An Autoregressive Index Model for the US 1948-1975", in Kmenta and J. B. Ramsey (eds.), Large-Scale Macro-Econometric Models, Amsterdam : North-Holland, pp. 283-327.

TODA, H. Y., PHILLIPS, P. C. B. (1991). – "Vector Autoregression and Causality", Cowles Foundation Discussion Paper No. 977, May.

WARNE (1990). – "Estimating and Analysing the Dynamic Properties of a Common Trends Model", *Mimeo*.