ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 35 — 1994

Le « dilemme des prisonniers » : les arguments d'une coopération en information incomplète

Michel CAVAGNAC*

RÉSUMÉ. – Nous recherchons, pour un « Dilemme des prisonniers » joué dans un contexte coopératif d'information incomplète, des transferts équilibrés, susceptibles d'être acceptés par les agents, et capables de satisfaire des contraintes incitatives d'efficacité. Il s'avère que l'existence et les caractéristiques de ces transferts solutions dépendent étroitement du pouvoir révélateur des vecteurs de résultat du jeu. Pour la classe des jeux ne possédant pas de « solution coopérative » lorsqu'ils ne sont joués qu'une seule fois, nous montrons que si le jeu est répété un nombre fini ou infini de fois, les joueurs peuvent, quel que soit leur taux d'actualisation, obtenir un gain supérieur au gain de non coopération à la première période et réaliser le gain collectif maximum dès la deuxième période.

The "Prisoners' Dilemma": Cooperation Under Incomplete Information

ABSTRACT. – For a "Prisoners' dilemma" played in a cooperative and incomplete information context we look for individually rational, incentive compatible and equilibrated side-payments. We show that the existence and the characteristics of these solution transfers are strongly related to the information conveyed by the payoff vectors of the game itself. For the class of one shot games for which no "cooperative solution" exists and when these games are played a finite or infinite number of times (whatever the discount factor), we show that players can obtain more than the non-cooperative gain in the first period and the maximum collective profit from the second period on.

---

* M. CAVAGNAC : GREMAQ, Université des Sciences Sociales de Toulouse, Place Anatole France, 31042 TOULOUSE CEDEX. L'auteur remercie deux rapporteurs des *Annales* pour leurs suggestions et commentaires.

1 Introduction

S'il est un jeu dont la solution est particulièrement caractéristique, c'est certainement le « dilemme du prisonnier » lorsque ce jeu n'est joué qu'une seule fois (voir par exemple : LUCE et RAIFFA [1957]). En effet, dans le contexte non coopératif considéré, chaque joueur dispose d'une stratégie dominante, c'est-à-dire préférable quelle que soit la stratégie jouée par le partenaire. Ces stratégies conduisent alors inexorablement les joueurs à un résultat inefficace.

Si nous choisissons de considérer le cas où « les prisonniers » effectuent leurs choix dans un contexte coopératif avec paiements latéraux, les concepts de solution tels le cœur ou la solution Von Neumann-Morgenstern renvoient à un même résultat : les joueurs se partagent un gain collectif égal au gain maximun permis par les règles du jeu ; les termes du partage ne sont contraints que par les valeurs de réservation des joueurs qui sont aisément repérées puisque les stratégies maximin correspondent ici aux stratégies dominantes. Les deux concepts de solution ci-dessus écrivent donc l'existence de transferts capables de satisfaire, à la fois : des contraintes incitatives d'efficacité (les transferts amènent les agents à réaliser le gain collectif maximum) et des contraintes de rationalité individuelle (à la solution, chaque agent obtient au moins sa valeur de réservation) [1]. En outre, ces résultats peuvent être établis aussi bien dans le cas d'un excès nul que dans celui d'un excès négatif ou encore, dans le cas d'un excès positif suffisamment faible pour ne pas être dissolvant (voir : Von NEUMANN-MORGENSTERN [1953]). Dans le cas considéré d'un excès nul, il n'apparaît ni prélèvement ni contribution extérieure de sorte que les transferts doivent être équilibrés.

L'objectif de ce travail est de rechercher dans quelle mesure les résultats établis pour un dilemme des prisonniers qui serait joué dans un tel contexte coopératif d'information complète, peuvent être étendus à un contexte coopératif d'information incomplète. Plus précisément, nous posons pour ce type de jeu, en information incomplète, le problème de l'existence et de la caractérisation de transferts équilibrés, susceptibles d'être acceptés par les agents et capables de satisfaire des contraintes incitatives d'efficacité.

Dans ce but, nous ajoutons aux variables d'aléa moral, correspondant aux choix de chacun des joueurs, des variables de sélection adverse, correspondant aux « types » de ces joueurs. Le type d'un joueur est ici assimilé à une information privée, détenue par ce joueur, sur l'état de l'environnement. Concernant le type du partenaire, nous retenons l'hypothèse de « complète ignorance » (LUCE-RAIFFA [1957]) : les joueurs ne se réfèrent pas à une distribution de probabilités *a priori* particulière concernant l'information privée détenue par leur partenaire. Nous conservons

1. La section 6 fournit incidemment des exemples de tels transferts.

au jeu sa nature de dilemme du prisonnier : dans un contexte non coopératif, il existerait, pour chaque agent, un choix dominant associé à son information privée ; et, dans tout état de l'environnement, ces choix engendreraient le gain collectif minimum associé. Alternativement, la réalisation, par coopération, du gain collectif maximum dans chaque état de l'environnement exige que chaque agent retienne, compte tenu de l'information privée qu'il détient, le choix dominé associé. Nous exigeons des transferts qu'ils transforment cette stratégie dominée de coopération en stratégie dominante.

La structure générale du jeu en information incomplète est ainsi la suivante.

En fonction de son type, chaque joueur refuse ou s'engage à accepter un système particulier de transferts ; cette décision est prise en ignorant ou, alternativement, en connaissant la décision du partenaire concernant ces transferts. Avant que le jeu proprement dit ne débute, les joueurs sont informés de l'acceptation (unanime) des transferts ou de leur refus. Sur la base de cette information et, en fonction de son type, chaque joueur effectue son choix (non observable par le partenaire). Les règles du jeu désignent ensuite un vecteur de résultat correspondant aux gains de chacun, avant transferts. Le vecteur de résultat dépend du type de chaque joueur et des choix retenus ; il est supposé vérifiable.

Bien entendu, de façon générale, tout système de transferts envisageable ne peut s'appuyer que sur des arguments vérifiables ; par conséquent, les transferts seront définis ici sur la base du seul élément vérifiable disponible : le vecteur de résultat attribué in fine par les règles du jeu. Un système particulier de transferts associera donc un transfert déterminé à chaque vecteur de résultat possible. La caractéristique essentielle du modèle découle de cette particularité. En effet, le vecteur de résultat étant défini comme une fonction des types et des choix des joueurs, il sera plus ou moins révélateur de ces types et de ces choix. Par exemple, dans le cas particulier où la relation est biunivoque, les joueurs se trouvent, *in fine*, en situation d'information complète sur la partie ayant été jouée. Dans ce cas extrême, il est donc possible d'associer un transfert particulier à chaque partie possible ; les contraintes incitatives s'en trouveront plus aisément satisfaites. En revanche, si les règles du jeu associent le même vecteur de résultat à plusieurs couples types-choix, le transfert associé doit être incitatif dans le cadre de plusieurs parties différentes ; le nombre de contraintes incitatives supporté par ce transfert se trouve par là augmenté [2]. Les informations transmises par le fonctionnement du jeu lui-même augmentent donc ici les possibilités de coopération en stratégies dominantes.

Cette situation est à rapprocher et à contraster avec celle décrite par GREEN-LAFFONT [1987]. Dans le problème de décision collective considéré, les deux agents concernés disposent d'informations privées nécessaires

2. Notons que toute information supplémentaire qu'apporterait un échange de signaux précédant le jeu (un signal particulier pourrait être l'acceptation, par un agent, d'un système donné de transferts) ne peut être considérée ici puisque nous exigeons que les transferts soient acceptés en stratégies dominantes

à l'évaluation de toute décision commune. L'accent est mis sur les possibilités d'échange d'information, ouvertes aux agents, via le mécanisme de décision lui-même. Là, l'environnement considéré est un environnement bayésien de sorte que toute information supplémentaire, ainsi transmise, vient affiner la partition des ensembles d'information et augmenter par là le nombre des contraintes incitatives. En appréhendant ce phénomène, la condition de « posterior implementability » restreint donc les possibilités d'implémentation bayésienne *stricto sensu.*

C'est encore la prise en compte de la transmission d'information opérée par le fonctionnement du mécanisme de décision qui amène FORGES [1990] à retenir une approche différente de celle de HOLMSTROM-MYERSON [1983] dans la définition de l'efficacité d'un mécanisme : les agents confrontent le résultat sélectionné par le mécanisme aux autres résultats possibles sur la base de leurs croyances *a priori* révisées à partir des informations transmises par le mécanisme. Ce n'est que si le résultat sélectionné n'est pas unanimement rejeté que le mécanisme est jugé « renegotiation proof ».

En ce qui nous concerne, nous ne sommes pas amenés à juger un mécanisme en tant que tel mais plutôt à juger le résultat collectif obtenu ; le critère retenu de gain collectif maximum dans tout état de l'environnement renvoie alors directement au critère de « outcome efficiency » retenu par d'ASPREMONT-GERARD-VARET [1979]. Bien que nous ne fassions pas référence ici à un mécanisme révélateur, la justification de ce critère peut être trouvée dans le fait que les agents connaissent, de par les règles du jeu, l'ensemble des vecteurs de résultat possibles ; ils peuvent donc, *ex-ante* et dans un raisonnement en stratégies dominantes, juger du caractère incitatif d'efficacité du schéma de transferts considéré. De ce point de vue, l'exigence est celle « d'absence de regrets » (analogue à celle décrite par FORGES [1990], Section 3).

Il demeure que la composante « incitation » du problème considéré pourrait être traitée comme un problème de révélation. En effet, la structure du jeu est telle que la stratégie de coopération associe ici un choix unique à chaque ensemble d'information privée (pour l'explicitation d'une telle équivalence voir : JOHNSON-PRATT-ZECKHAUSER [1990], section 2 ; cette procédure est notamment utilisée, dans un environnement bayésien, par : KIHLSTROM-VIVES [1988], [1989]). Or, nous savons qu'exiger que les contraintes incitatives soient satisfaites en stratégies dominantes par un système de transferts équilibrés doit inciter à la prudence quant à l'existence de ces transferts (voir notamment : GREEN-LAFFONT [1979], Chapitre 5). Cependant, dans le cas particulier où les agents ne peuvent être que de deux types différents, l'existence de tels transferts est assurée (voir : d'ASPREMONT-CREMER-GERARD-VARET [1990]). Retenir cette hypothèse favorable ne revient cependant pas à poser notre problème résolu : au-delà de la composante « incitation », il demeure les contraintes de rationalité individuelle. En effet, chaque agent dispose ici d'une stratégie maximin alternative lui assurant sa valeur de réservation ; les transferts considérés doivent donc conserver à chaque joueur un gain au moins égal à cette valeur de réservation qui dépend, via les fonctions de résultat, du type du joueur mais aussi du type du partenaire.

Après avoir plus formellement décrit le modèle, Section 2, et les systèmes de transferts envisagés, Section 3, nous caractérisons, Section 4, les contraintes incitatives d'efficacité et les contraintes de rationalité individuelle. Les systèmes de transferts équilibrés, capables de satisfaire simultanément l'ensemble de ces contraintes, sont déterminés à la Section 5.

Les caractéristiques de ces transferts solutions dépendent du pouvoir révélateur des vecteurs de résultat du jeu. Notons en particulier que dans les deux cas extrêmes de « résultats révélateurs » et de « résultats non révélateurs », il est possible de retenir des accords ne comportant aucun transfert sur le sentier d'équilibre. Dans le cas où les résultats ne sont que « partiellement révélateurs », on peut souligner qu'un partage unique du gain collectif maximum s'impose parfois à tout système de transferts solutions.

Pour une classe particulière de jeux cependant, les exigences des contraintes incitatives d'efficacité s'avèrent incompatibles avec le respect des contraintes de rationalité individuelle ; c'est le cas lorsque sont associés : une convexité du jeu faible et des vecteurs de résultat partiellement révélateurs. Nous reconsidérons, Section 6, cette dernière classe de jeux dans une approche jeu répété. Dans sa version répétée, en information complète, le dilemme du prisonnier conduit encore à des résultats caractéristiques du fait de leur dichotomie. En effet, lorsque le jeu est répété un nombre infini de fois, si les joueurs sont suffisamment patients, un comportement permanent de coopération (par exemple) peut être soutenu par un équilibre de Nash parfait du superjeu non coopératif (voir Friedman [1971], le théorème du folklore n'autorisant que la notion d'équilibre de Nash). En revanche, lorsque le jeu est répété un nombre fini de fois, les joueurs répliquent, à chaque période, l'équilibre non coopératif du jeu constituant (le dilemme du prisonnier ne possédant qu'un seul équilibre de Nash, le « chain store paradox » ne peut être évité ; voir Friedman [1985]). Dans l'approche des jeux coopératifs avec paiements latéraux en information incomplète, que nous retenons ici, une telle dichotomie n'apparaît pas dans les résultats obtenus. Plus précisément, pour la classe des jeux ne possédant pas de « solution coopérative » lorsqu'ils ne sont joués qu'une seule fois, nous montrons que si le jeu est répété un nombre fini ou infini de fois, quel que soit le taux d'actualisation des joueurs, ceux-ci peuvent, dans tout état de l'environnement (inchangé), obtenir un gain supérieur au gain de non coopération à la première période et réaliser le gain collectif maximum dès la deuxième période [3]. Le résultat est obtenu en s'appuyant sur deux systèmes de transferts séquentiels ; ces transferts sont choisis de façon à exploiter, de manière explicite, les informations transmises par les vecteurs de résultat du jeu.

3. Dans le cas non actualisé, les joueurs réalisent donc, dans tout état de l'environnement (inchangé), un gain collectif moyen qui tend, lorsque le nombre de périodes augmente, vers le gain collectif maximum.

2 Le modèle

Chaque joueur dispose d'une variable de décision

$$a \in \{\underline{a},\ \overline{a}\},\ \underline{a} < \overline{a},\ \overline{a} > 0 \quad \text{pour le joueur 1}$$
$$b \in \{\underline{b},\ \overline{b}\},\ \underline{b} < \overline{b},\ \overline{b} > 0 \quad \text{pour le joueur 2}$$

L'état de l'environnement est caractérisé par le couple $(\theta_1,\ \theta_2)$:

$$\theta_1 \in \{1,\ -1\} \qquad \text{et} \qquad \theta_2 \in \{1,\ -1\}$$

Les joueurs choisissent une valeur particulière pour leur variable de décision dans les conditions suivantes :

– la valeur de θ_1 est une information privée pour le joueur 1 ; celle de θ_2 pour le joueur 2. Le joueur i ne se réfère pas à des croyances *a priori* particulières concernant les valeurs de θ_j, $j \neq i$;

– le choix de chaque agent est opéré dans l'ignorance du choix de son partenaire ; nous avons : $a(\theta_1)$ et $b(\theta_2)$;

– les agents connaissent, de par les règles du jeu, les fonctions de résultat. Ces fonctions dépendent de l'état de l'environnement : $(\theta_1,\ \theta_2)$, du choix de chacun : $(a,\ b)$ et d'un paramètre α destiné à modifier la convexité du jeu (l'intérêt à coopérer sera d'autant plus fort, pour les agents, que la valeur de α sera élevée);

– les agents peuvent observer le vecteur de résultat attribué *in fine* par les règles du jeu : $H(a,\ b,\ \theta_1,\ \theta_2)$.

2.1. Caractéristiques des fonctions de résultat

Nous retenons les fonctions de résultat symétriques :

$$H_1(a,\ b,\ \theta_1,\ \theta_2) = -a\,\theta_1 + \alpha\, b\, \theta_2$$
$$H_2(a,\ b,\ \theta_1,\ \theta_2) = \alpha\, a\, \theta_1 - b\, \theta_2$$

Ces fonctions sont choisies de telle sorte que :

1 - La maximisation du gain collectif : $(\alpha - 1)\ [a\,\theta_1 + b\,\theta_2]$ que nous noterons : $M(\theta_1,\ \theta_2)$ exige la coopération totale des agents qui doivent nécessairement retenir les choix : $a^*(\theta_1)$ et $b^*(\theta_2)$ définis, pour $\alpha > 1$, par :

$$a^*(1) = \overline{a} \quad a^*(-1) = \underline{a} \qquad b^*(1) = \overline{b} \quad b^*(-1) = \underline{b}$$

2 - En l'absence de coopération, chaque agent choisit, dans tout état de l'environnement, et en stratégie dominante, la valeur de sa variable de décision qui minimise le gain collectif ; nous avons :

$$a(1) = \underline{a} \quad a(-1) = \overline{a} \qquad b(1) = \underline{b} \quad b(-1) = \overline{b}$$

L'intersection des deux stratégies dominantes détermine, dans ce cas, le résultat du jeu pour chaque joueur [4] ; nous noterons ce résultat : $u_i(\theta_1, \theta_2)$ $i = 1, 2$.

Remarque : Notons tout d'abord que pour les valeurs particulières $\alpha \leq 1$, nous avons :

$$\forall (\theta_1, \theta_2) \ : \ M(\theta_1, \theta_2) = u_1(\theta_1, \theta_2) + u_2(\theta_1, \theta_2)$$

Le jeu est donc inessentiel : la recherche d'un accord est superflue pour les joueurs [5]; ceux-ci réalisent spontanément $M(\theta_1, \theta_2)$ dans tout état de l'environnement.

Nous ne considérerons désormais que les valeurs $\alpha > 1$.

2.2. Arbre du jeu

Les résultats associés par les règles du jeu aux différents choix des joueurs, dans les différents états de l'environnement, sont repérés par des lettres majuscules dans la figure ci-dessous.

Pour chaque état de l'environnement, les résultats obtenus par les joueurs en cas de refus d'accord et en stratégies dominantes : $u(\theta_1, \theta_2)$ sont encadrés ; les résultats correspondant au gain collectif maximum : $M(\theta_1, \theta_2)$ sont repérés par (*).

Nous avons également calculé les différents vecteurs de résultat : $H(a, b, \theta_1, \theta_2)$ en ne considérant que le cas où les variables de décision sont bornées de façon identique pour les deux joueurs : même valeurs des bornes minimales ($\underline{a} = \underline{b}$) et mêmes valeurs des bornes maximales ($\overline{a} = \overline{b}$). Par exemple, dans l'état de l'environnement $(\theta_1, \theta_2) = (1, -1)$, si le joueur 1 choisit $a = \underline{a}$ et si le joueur 2 choisit $b = \underline{b}$, les règles du jeu attribuent le vecteur de résultat : (H_1, H_2), désigné par la lettre P, et tel que :

$$H_1(\underline{a}, \underline{b}, 1, -1) = -\underline{a} \cdot 1 + \alpha \underline{b}(-1) = -\underline{a} - \alpha \underline{b} = -(\alpha + 1)\underline{a}$$
$$H_2(\underline{a}, \underline{b}, 1, -1) = \alpha \underline{a} \cdot 1 - \underline{b}(-1) = \alpha \underline{a} + \underline{b} = (\alpha + 1)\underline{a}$$

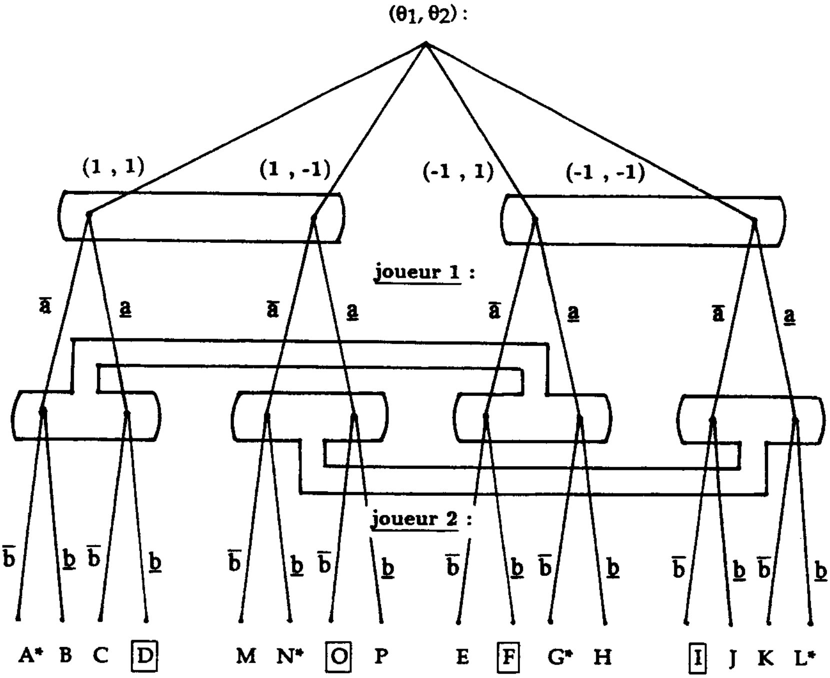
Soulignons que, suivant la valeur des paramètres, le même vecteur de résultat pourra apparaître sous plusieurs lettres différentes ; dans ce cas, l'observation du vecteur (H_1, H_2) ne permettra donc pas de repérer *ex post* la partie effectivement jouée.

---

4. Nous obtenons par exemple :

$$u_1(1, 1) = -\underline{a} + \alpha \underline{b} \qquad u_1(-1, 1) = \overline{a} + \alpha \underline{b}$$
$$u_1(1, -1) = -\underline{a} - \alpha \overline{b} \qquad u_1(-1, -1) = \overline{a} - \alpha \overline{b}$$

5. Pour $\alpha = 0$, l'interdépendance des situations individuelles disparaît totalement.



$A = ((\alpha - 1)\,\bar{a}\ ,\ (\alpha - 1)\,\bar{a})$
$B = (\alpha\,\underline{a} - \bar{a}\ ,\ \alpha\,\bar{a} - \underline{a})$
$C = (\alpha\,\bar{a} - \underline{a}\ ,\ \alpha\,\underline{a} - \bar{a})$
$D = ((\alpha - 1)\,\underline{a}\ ,\ (\alpha - 1)\,\underline{a})$

$E = ((\alpha + 1)\,\bar{a}\ ,\ -(\alpha + 1)\,\bar{a})$
$F = (\alpha\,\underline{a} + \bar{a}\ ,\ -\alpha\,\bar{a} - \underline{a})$
$G = (\alpha\,\bar{a} + \underline{a}\ ,\ -\alpha\,\underline{a} - \bar{a})$
$H = ((\alpha + 1)\,\underline{a}\ ,\ -(\alpha + 1)\,\underline{a})$

$I = ((1 - \alpha)\,\bar{a}\ ,\ (1 - \alpha)\,\bar{a})$
$J = (-\alpha\,\underline{a} + \bar{a}\ ,\ -\alpha\,\bar{a} + \underline{a})$
$K = (-\alpha\,\bar{a} + \underline{a}\ ,\ -\alpha\,\underline{a} + \bar{a})$
$L = ((1 - \alpha)\,\underline{a}\ ,\ (1 - \alpha)\,\underline{a})$

$M = (-(\alpha + 1)\underline{a}\ ,\ (\alpha + 1)\,\bar{a})$
$N = (-\alpha\,\underline{a} - \bar{a}\ ,\ \alpha\,\bar{a} + \underline{a})$

$O = (-\alpha\,\bar{a} - \underline{a}\ ,\ \alpha\,\underline{a} + \bar{a})$
$P = (-(\alpha + 1)\,\underline{a}\ ,\ (\alpha + 1)\,\underline{a})$

3 Accord efficace et équilibré

L'approche retenue est celle des jeux coopératifs avec paiements latéraux. Un accord est dit *efficace* s'il induit des choix $a^*(\quad)$ et $b^*(\quad)$ tels que :

$$\forall(\theta_1,\ \theta_2)\ :\ \Sigma_i\, H_i\,(a^*\,(\,),\ b^*\,(\,),\ \theta_1,\ \theta_2) = M\,(\theta_1,\ \theta_2)$$

Soulignons que si la partie effectivement jouée ne conduit pas à la réalisation du montant : $M\,(\theta_1,\ \theta_2)$, il n'existe, pour le joueurs, aucune possibilité de récupérer le manque à gagner ; en effet, le jeu est terminé dès lors que le vecteur de résultat : $H\,(a,\ b,\ \theta_1,\ \theta_2)$ a été attribué par les règles du jeu.

Les choix $a^*(\quad)$ et $b^*(\quad)$ sont induits par le jeu de transferts : $t(\quad)$.

Nous supposons que le fait d'accepter un accord prévoyant un système particulier de transferts est vérifiable et que, dans ce cas, les transferts seront effectivement payés.

En revanche, les joueurs ne peuvent s'engager à effectuer des choix $a(\quad)$ et $b(\quad)$ particuliers : les choix des joueurs sont supposés non vérifiables; il en va de même de l'état de l'environnement (θ_1, θ_2).

Le seul élément supposé vérifiable dans le jeu est le vecteur de résultat accordé *in fine* par les règles du jeu : $H(a, b, \theta_1, \theta_2)$.

Le système de transferts ne peut donc être défini que sur la base de ce seul élément vérifiable; nous avons : $t_i(H(a, b, \theta_1, \theta_2))\ i = 1, 2$.

Nous ne considérons ici que des jeux sans excès et exigeons que le système de transferts retenu soit en équilibre; l'accord sera ainsi dit *équilibré* si :

$$\forall(\theta_1, \theta_2), \quad \forall(a, b) : \Sigma_i t_i(\quad) = 0$$

A tout vecteur de résultat possible $A, B, ..., P$ est ainsi associé un transfert, positif ou négatif, reçu par le joueur 1 et versé par le joueur 2. Ce transfert est repéré par la lettre minuscule correspondante. Par exemple, si la partie jouée conduit au résultat P, les gains des joueurs sont, après transfert : $(P_1 + p, P_2 - p)$.

Bien entendu, si le même vecteur de résultat apparaît sous plusieurs lettres différentes, le même transfert devra nécessairement être associé à chacune de ces parties.

Nous parlerons d'accord *efficace et équilibré* pour désigner un système de transferts équilibrés, susceptible d'être accepté par les joueurs, et capable d'amener ceux-ci à réaliser le gain collectif maximum dans tout état de l'environnement.

4 Les contraintes de mise en œuvre de l'accord

Nous recherchons des accords efficaces et équilibrés, acceptés et appliqués en stratégies dominantes : chaque joueur doit être amené à accepter l'accord et à choisir $a^*(\quad)$ ou $b^*(\quad)$ quelle que soit la stratégie jouée par son partenaire.

Avant de retenir une valeur pour leur variable de décision, les joueurs choisissent d'accepter ou de refuser l'accord :

Les joueurs considèrent : $t(\ \ )$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

Les deux joueurs acceptent $\downarrow$ jeu joué : $H(a, b, \theta_1, \theta_2) + t(\ \ ) = R(a, b, \theta_1, \theta_2)$

Il existe au moins un refus $\downarrow$ jeu joué : $H(a, b, \theta_1, \theta_2)$

Chaque joueur connaît la décision $D_i(\ \ )$ de son partenaire, concernant l'accord, au moment où il doit choisir la valeur de la variable a ou b qu'il contrôle.

Il découle qu'une stratégie particulière du joueur 1, par exemple, s'écrit :

$$\{D_1(\ \ ),\ a(\theta_1,\ D_1(\ \ ),\ D_2(\ \ ))\}$$

4.1. Les contraintes incitatives

Considérons le sous-jeu dans lequel les deux joueurs ont accepté l'accord.

Chaque joueur ayant accepté les transferts, les gains s'écrivent :

$$H_i(a, b, \theta_1, \theta_2) + t_i(H(a, b, \theta_1, \theta_2)) \quad i = 1, 2$$

notés : $R_i(a, b, \theta_1, \theta_2)$ $i = 1, 2$.

Les joueurs doivent être amenés à choisir respectivement, en stratégies dominantes :

$$\forall \theta_1 : a^*(\theta_1) \quad \text{et} \quad \forall \theta_2 : b^*(\theta_2)$$

Par conséquent, l'accord doit satisfaire les contraintes fortement incitatives **(F.I.)** suivantes :

$$\begin{aligned}
&\forall \theta_1, \forall a(\theta_1), \forall \theta_2, \forall b(\theta_2) : \\
&R_1(a^*(\theta_1), b(\theta_2), \theta_1, \theta_2) \geq R_1(a(\theta_1), b(\theta_2), \theta_1, \theta_2) \\
&R_2(a(\theta_1), b^*(\theta_2), \theta_1, \theta_2) \geq R_2(a(\theta_1), b(\theta_2), \theta_1, \theta_2)
\end{aligned}$$

Les contraintes fortement incitatives **(F.I.)** assurent donc que, pour le sous-jeu considéré, les joueurs perçoivent, à l'équilibre en stratégies dominantes, le vecteur de gain :

$$R(a^*(\theta_1), b^*(\theta_2), \theta_1, \theta_2).$$

- **Écriture des contraintes (F.I.)**

Considérons, par exemple, l'état de l'environnement : $(\theta_1, \theta_2) = (1, -1)$. L'agent 1 doit avoir intérêt à jouer $a^*(1) = \overline{a}$ dans les deux cas suivants :

– si l'agent 2 joue $b(-1) = \underline{b}$; ceci implique :

$$N_1 + n \geqslant P_1 + p \quad \text{soit} : n \geqslant (\overline{a} - \underline{a}) + p$$

– si l'agent 2 joue $b(-1) = \bar{b}$; ceci implique :

$$M_1 + m \geqslant O_1 + o \quad \text{soit : } m \geqslant (\bar{a} - \underline{a}) + o$$

Nous avons des contraintes analogues dans chaque état de l'environnement et pour chaque agent; de sorte que les contraintes **(F.I.)** s'expriment par le système d'inégalités suivant :

$$\begin{aligned}
&c + (\bar{a} - \underline{a}) \leqslant a \leqslant b - (\bar{a} - \underline{a})\\
&p + (\bar{a} - \underline{a}) \leqslant n \leqslant m - (\bar{a} - \underline{a})\\
&e + (\bar{a} - \underline{a}) \leqslant g \leqslant h - (\bar{a} - \underline{a})\\
&j + (\bar{a} - \underline{a}) \leqslant i,\ l \leqslant k - (\bar{a} - \underline{a})\\
&d + (\bar{a} - \underline{a}) \leqslant b\\
&o + (\bar{a} - \underline{a}) \leqslant m\\
&f + (\bar{a} - \underline{a}) \leqslant h\\
&\qquad\qquad\quad c \leqslant k - (\bar{a} - \underline{a})\\
&\qquad\qquad\quad e \leqslant f - (\bar{a} - \underline{a})\\
&\qquad\qquad\quad p \leqslant o - (\bar{a} - \underline{a})
\end{aligned}$$

4.2. Les contraintes de rationalité individuelle

– Considérons tout d'abord le sous-jeu dans lequel l'un des deux joueurs au moins a refusé l'accord.

Chaque joueur sait qu'aucun transfert ne sera effectué, les gains s'écrivent : $H_i(a,\ b,\ \theta_1,\ \theta_2)\ i = 1, 2$.

Nous avons vu, Section 2, que les joueurs perçoivent alors, à l'équilibre en stratégies dominantes, le vecteur de gain : $u(\theta_1, \theta_2)$.

– Considérons à présent la décision d'accepter ou de refuser l'accord.

Du point de vue du joueur 1, par exemple, nous avons :

– Si le joueur 1 connaît la décision de son partenaire : $D_1(\theta_1,\ D_2(\quad))$

• si ce dernier a refusé l'accord, le joueur 1 ne peut que subir le veto et son gain sera : $u_1(\theta_1, \theta_2)$

• si ce dernier a accepté l'accord, le joueur 1 peut obtenir $u_1(\theta_1, \theta_2)$ en refusant l'accord ou bien : $R_1(a^*(\theta_1),\ b^*(\theta_2),\ \theta_1,\ \theta_2)$ en l'acceptant.

– Si le joueur 1 ignore la décision de son partenaire : $D_1(\theta_1)$

Dans l'équilibre en stratégies dominantes, le joueur 1 considère chaque stratégie du joueur 2 ou, de façon équivalente, chaque séquence de choix possible de ce dernier et, notamment, chacun des choix : refuser ou accepter l'accord sachant θ_2; les résultats sont ainsi analogues.

Par conséquent, pour être accepté en stratégies dominantes, l'accord doit satisfaire les contraintes de rationalité individuelle **(R.I.)** suivantes :

$$\forall \theta_1,\ \forall \theta_2\ :\ R_i(a^*(\theta_1),\ b^*(\theta_2),\ \theta_1,\ \theta_2) \geqslant u_i(\theta_1,\ \theta_2) \quad i = 1, 2$$

• **Écriture des contraintes (R.I.)**

La réalisation du gain collectif maximum : A, G, L, N (suivant l'état de l'environnement) s'appuie sur les transferts associés : a, g, l, n. Les contraintes (**R.I.**) définies ci-dessus exigent que ces transferts conservent à chaque joueur un gain au moins égal à sa valeur de réservation : $u_i(\theta_1, \theta_2)$.

Notons tout d'abord que la convexité du jeu est identique dans tout état de l'environnement :

$$\forall(\theta_1, \theta_2) \ : \ M(\theta_1, \theta_2) - u_1(\theta_1, \theta_2) - u_2(\theta_1, \theta_2) = 2(\alpha - 1)(\overline{a} - \underline{a})$$

De plus, nous avons :

$$\forall(\theta_1, \theta_2), \forall i \ : \ H_i(a^*(\theta_1), b^*(\theta_2), \theta_1, \theta_2) - u_i(\theta_1, \theta_2) = (\alpha - 1)(\overline{a} - \underline{a})$$

Les contraintes (**R.I.**) s'écrivent donc :

$$-(\alpha - 1)(\overline{a} - \underline{a}) \leqslant a, g, l, n \leqslant (\alpha - 1)(\overline{a} - \underline{a})$$

5 Les accords possibles

L'existence d'accords efficaces et équilibrés, ainsi que leurs caractéristiques, dépendent du pouvoir révélateur des résultats attribués *in fine* par les règles du jeu : $H(a, b, \theta_1, \theta_2)$.

5.1. Résultats totalement révélateurs

Il s'agit du cas : $\underline{a} \neq 0$ et $\underline{a} \neq -\overline{a}$.

Dans ce cas chaque vecteur de résultat possible ne peut apparaître qu'une seule fois : les 16 parties A, B, ..., P sont bien identifiées.

Des accords efficaces et équilibrés existent et il n'apparaît pas de contrainte particulière dans le partage du gain de coopération sur le sentier d'équilibre. Les joueurs peuvent notamment retenir :

– Un accord conduisant à un partage égalitaire des gains de coopération dans tout état de l'environnement : $a = g = l = n = 0$.

Dans ce cas, aucun transfert n'apparaît donc sur le sentier d'équilibre : c'est la simple menace de transferts, hors du sentier d'équilibre, qui assure la réalisation de l'accord. Et cette menace doit ici s'appuyer sur les transferts hors équilibre suivants :

$$d = o = f = i = 0 \qquad c = p = e = j = -(\overline{a} - \underline{a})$$
$$b = m = h = k = (\overline{a} - \underline{a})$$

– Un accord attribuant toute la convexité du jeu au joueur 1 par exemple et n'accordant au joueur 2 que sa valeur de réservation :

$$a = g = l = n = (\alpha - 1)(\overline{a} - \underline{a})$$

sur le sentier d'équilibre associés aux transferts suivants, hors du sentier d'équilibre :

$$d = o = f = \imath = (\alpha - 1)(\overline{a} - \underline{a}) \qquad b = m = h = k = \alpha(\overline{a} - \underline{a})$$
$$c = p = e = j = (\alpha - 2)(\overline{a} - \underline{a})$$

5.2. Résultats non révélateurs

Il s'agit du cas : $\underline{a} \neq 0$ et $\underline{a} = -\overline{a}$.

Les vecteurs de résultat vérifient alors :

$$A = G = L = N \quad C = E = J = P \quad B = H = K = M \quad D = F = I = O$$

Les résultats associés aux branches terminales de l'arbre du jeu sont ainsi les suivants :

$$\text{A* B C } \boxed{\text{D}} \qquad \text{B A* } \boxed{\text{D}} \text{ C} \qquad \text{C } \boxed{\text{D}} \text{ A* B} \qquad \boxed{\text{D}} \text{ C B A*}$$

Les égalités ci-dessus sont des contraintes pour les lettres minuscules correspondant aux transferts associés. Les contraintes **(R.I.)** et **(F.I.)** peuvent ainsi s'écrire :

(R.I.) : $-(\alpha - 1)\, 2\overline{a} \leqslant a \leqslant (\alpha - 1)\, 2\overline{a}$

(F.I.) : $c + 2\overline{a} \leqslant a,\ d \leqslant b - 2\overline{a}$

Bien que l'observation d'un vecteur de résultat particulier : (H_1, H_2) ne permette plus d'identifier ici la partie qui a été effectivement jouée, la structure du problème d'incitation demeure relativement simple.

En effet, dans tout état de l'environnement, les transferts doivent jouer le même rôle :

– amener le joueur 1 à préférer le résultat A au résultat C et le résultat B au résultat D;

– amener le joueur 2 à préférer le résultat A au résultat B et le résultat C au résultat D;

– satisfaire les contraintes **(R.I.)** : $A_1 + a \geqslant D_1$ et $A_2 - a \geqslant D_2$.

Il découle que les possibilités d'accords efficaces et équilibrés sont aussi larges dans ce dernier cas de « résultats non révélateurs » que dans le cas précédent de « résultats totalement révélateurs »; par exemple :

– Un accord conduisant à un partage égalitaire dans tout état de l'environnement peut reposer sur les transferts définis par :

$$-t_2(\cdot) = t_1(\cdot) = H_2(a, b, \theta_1, \theta_2) - H_1(a, b, \theta_1, \theta_2)$$

– Un accord n'accordant au joueur 2, par exemple, que sa valeur d'isolement peut s'appuyer sur :

$$-t_2(\cdot) = t_1(\cdot) = 2\,H_2(a,\, b,\, \theta_1,\, \theta_2)$$

5.3. Résultats partiellement révélateurs

Il s'agit du cas $\underline{a} = 0$.

Les vecteurs de résultat vérifient alors :

$B = N \quad C = G \quad F = J \quad K = O \quad D = H = L = P$

Les résultats associés aux branches terminales de l'arbre du jeu sont ainsi les suivants :

A* B C $\boxed{\text{D}}$ M B* $\boxed{\text{K}}$ D E $\boxed{\text{F}}$ C* D $\boxed{\text{I}}$ F K D*

Les égalités ci-dessus sont des contraintes pour les lettres minuscules correspondant aux transferts associés.

Les contraintes **(R.I.)** s'écrivent ainsi :

$$-(\alpha-1)\,\overline{a} \leqslant a,\, b,\, c,\, d \leqslant (\alpha-1)\,\overline{a}$$

Les contraintes **(F.I.)** peuvent s'écrire :

(1) $c + \overline{a} \leqslant a \leqslant b - \overline{a}$
(2) $d + \overline{a} \leqslant b \leqslant m - \overline{a}$
(3) $e + \overline{a} \leqslant c \leqslant d - \overline{a}$
(4) $f + \overline{a} \leqslant d,\; i \leqslant k - \overline{a}$
(5) $e + \overline{a} \leqslant f$
(6) $\qquad k \leqslant m - \overline{a}$

Notons que (1), (2), (3) dans **(F.I.)** impliquent :

$$c < a,\; d < b \qquad \text{et} \qquad b - c \geqslant 2\,\overline{a}$$

La conjonction des contraintes **(F.I.)** et **(R.I.)** exige donc, notamment, de satisfaire le système :

$$\text{(I)} : \quad -(\alpha-1)\,\overline{a} \leqslant c < a,\; d < b \leqslant (\alpha-1)\,\overline{a} \qquad \text{et} \qquad b - c \geqslant 2\,\overline{a}$$

Il découle :

PROPOSITION 1 : Pour $\underline{a} = 0$ et $\alpha > 2$ des accords efficaces et équilibrés existent; par exemple, l'accord s'appuyant sur les transferts suivants :
$a = d = i = 0 \qquad b = k = \overline{a} \qquad c = f = -\overline{a} \qquad e = -2\,\overline{a} \qquad m = 2\,\overline{a}$
Cependant, ces accords apportent des contraintes spécifiques dans le partage du gain de coopération. Ainsi, par exemple, un partage égalitaire du gain de coopération dans tout état de l'environnement, ou encore, un partage n'accordant à l'un des joueurs que sa valeur de réservation, ne sont plus possibles :

$$a = b = c = d \qquad \text{contradictoire avec le système (I).}$$

PROPOSITION 2 : Pour $\underline{a} = 0$ et $\alpha = 2$, le partage du gain de coopération sur le sentier d'équilibre est unique et indépendant de l'accord retenu :

$$a = 0 \qquad b = \overline{a} \qquad c = -\overline{a} \qquad d = 0.$$

En effet, le système (I) ci-dessus exige :

$$c = -(\alpha - 1)\,\overline{a} = -\overline{a} \qquad \text{et} \qquad b = (\alpha - 1)\,\overline{a} = \overline{a}$$

(1), (2) et (3) impliquent alors, respectivement : $a = 0$ et $d = 0$.

Signification :

Dans les états de l'environnement $(\theta_1, \theta_2) = (1, 1)$ et $(-1, -1)$, les joueurs se partagent le gain de coopération de façon égalitaire : $a = 0$ et $d = 0$.

Pour $(\theta_1, \theta_2) = (-1, 1)$, le joueur 2 prélève tout le gain de coopération sur le sentier d'équilibre : $c = -\overline{a}$. Inversement, pour $(\theta_1, \theta_2) = (1, -1)$, c'est le joueur 1 qui en bénéficie : $b = \overline{a}$.

La Proposition 2 retrouve ainsi la Proposition 1 dans un cas extrême : la réalisation du gain maximum $M(\theta_1, \theta_2)$ ne peut être dissociée de son partage qui est ici strictement déterminé.

PROPOSITION 3 : Pour $\underline{a} = 0$ et $1 < \alpha < 2$ il n'existe pas d'accords efficaces et équilibrés; plus précisément, nous avons :
– les contraintes **(F.I.)** sont compatibles entre elles : par exemple, elles sont satisfaites par le système de transferts décrit à la Proposition 1;
– les contraintes **(F.I.)** ne sont pas compatibles avec les contraintes **(R.I.)**; en effet, le système (I) exige :

$$(\alpha - 1)\,\overline{a} - [-(\alpha - 1)\,\overline{a}] \geqslant 2\,\overline{a} \qquad \text{soit : } \quad \alpha \geqslant 2$$

La Proposition 3 montre donc que lorsque les résultats du jeu ne sont que partiellement révélateurs de la partie jouée, la réalisation du gain maximum : $M(\theta_1, \theta_2)$ ne peut être assurée dès lors que la convexité du jeu n'est pas suffisamment importante.

La difficulté provient du fait que le même vecteur de résultat peut apparaître à la fois : sur le sentier d'équilibre recherché et hors de ce sentier.

Exemple

Pour les valeurs numériques : $\underline{a} = 0, \overline{a} = 1, \alpha = 5/4$ les résultats associés aux branches terminales de l'arbre du jeu sont les suivants (les lignes 1 et 2 désignent respectivement les résultats H_1 et H_2) :

A*	B	C	$\boxed{\text{D}}$	M	B*	$\boxed{\text{K}}$	D	E	$\boxed{\text{F}}$	C*	D	$\boxed{\text{I}}$	F	K	D*
1/4	-1	5/4	0	-9/4	-1	-5/4	0	9/4	1	5/4	0	-1/4	1	-5/4	0
1/4	5/4	-1	0	9/4	5/4	1	0	-9/4	-5/4	-1	0	-1/4	-5/4	1	0

Le vecteur de résultat C, par exemple, apparaît à la fois hors du sentier d'équilibre recherché et sur ce sentier, le transfert c doit ainsi satisfaire, du point de vue du joueur 1 :

$1/4 + a \geq 5/4 + c$ et $5/4 + c \geq 1$; ceci implique : $a \geq 3/4$.

Le vecteur de résultat B apparaît également à la fois hors et sur le sentier d'équilibre recherché ; le transfert b doit ainsi satisfaire, du point de vue du joueur 2 :

$1/4 - a \geq 5/4 - b$ et $5/4 - b \geq 1$; ceci implique : $a \leq -3/4$ (contradictoire avec l'exigence $a \geq 3/4$ ci-dessus).

6 La version répétée du jeu

Nous reprenons le dernier cas considéré : les vecteurs de résultat sont partiellement révélateurs et il n'existe pas d'accord efficace et équilibré :

$$\underline{a} = 0 \qquad \text{et} \qquad 1 < \alpha < 2$$

Il est possible d'établir la proposition suivante :

PROPOSITION 4 : Si le jeu est répété un nombre fini ou infini de fois dans un état de l'environnement inchangé, il est possible de définir un accord de coopération tel que, quel que soit le taux d'actualisation des joueurs :
– le gain de première période est supérieur au gain de non coopération associé à la période ;
– la réalisation du gain collectif maximum : $M(\theta_1, \theta_2)$ est effective dès la deuxième période.
L'accord s'appuie sur deux systèmes de transferts séquentiels : T_1 et T_2.

Les transferts T_1 amènent les joueurs à investir dans la transmission d'information via le fonctionnement du jeu lui-même : les joueurs retiennent des choix qui engendrent des vecteurs de résultat totalement révélateurs ; il s'agit des vecteurs : A, M, E, I qui ne peuvent apparaître, respectivement, que dans les états de l'environnement :

$$(\theta_1, \theta_2) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1).$$

A la période suivante, sur le sentier d'équilibre, les deux joueurs sont ainsi en information complète sur l'état de l'environnement; les transferts T_2 assurent alors la réalisation du montant : $M(\theta_1, \theta_2)$.

La procédure de négociation est la suivante :

En début de période 1, les joueurs acceptent ou refusent T_1 ; en cas de refus, le jeu est joué sans transferts et T_1 est à nouveau considéré en début de période 2, etc...

Si T_1 a été accepté au début d'une période donnée, le jeu est joué sous T_1 et, au début de la période suivante, les joueurs doivent décider d'accepter ou de refuser T_2 : le jeu est alors rejoué respectivement sous T_2 ou sans transferts. Au début de chacune des périodes suivantes, les joueurs choisissent à nouveau de retenir T_2 ou de jouer sans transferts.

• Les transferts T_1 sont définis par :

$$a = d = f = i = k = 0 \qquad b = m = \overline{a} \qquad c = e = -\overline{a}$$

Ces transferts amènent les joueurs à retenir, en stratégies dominantes, des choix qui engendrent, suivant l'état de l'environnement, l'un des vecteurs de résultat totalement révélateurs : A, M, E, I.

En outre, ces transferts satisfont les contraintes de rationalité individuelle : quel que soit l'état de l'environnement, le gain de l'agent i, sur le sentier d'équilibre, est supérieur ou égal au gain qu'obtiendrait cet agent, en stratégies dominantes, en cas de refus d'accord : $u_i(\theta_1, \theta_2)$. Par conséquent, l'acceptation de T_1 pour une période donnée n'implique aucun coût pour les joueurs; les gains actualisés des périodes suivantes correspondent donc à des gains nets.

• Les transferts T_2 sont définis corrélativement au résultat engendré par les transferts T_1 de la période précédente :

$$\begin{array}{lcllll}
T_2/A & : & a = 0 & b = \overline{a} & c = -\overline{a} & d = 0 \\
T_2/M & : & b = 0 & d = -\overline{a} & k = 0 & m = \overline{a} \\
T_2/E & : & c = 0 & d = \overline{a} & e = -\overline{a} & f = 0 \\
T_2/I & : & d = 0 & f = -\overline{a} & i = 0 & k = \overline{a} \\
\multicolumn{6}{l}{T_2/B,\ C,\ D,\ F,\ K\ :\ \text{transferts nuls}}
\end{array}$$

Lorqu'ils considèrent T_2, les joueurs sont, sur le sentier d'équilibre, en information complète sur l'état de l'environnement. Dans chacun des quatre sous-jeux possibles, les transferts T_2 respectent les contraintes de rationalité individuelle et amènent les joueurs à réaliser, en stratégies dominantes, le gain maximum de coopération : $M(\theta_1, \theta_2)$.

Tout retard pris dans l'acceptation de T_1 ou T_2 correspond à une perte nette pour les joueurs; de sorte que, sur le sentier d'équilibre, ceux-ci retiennent T_1 dès la première période et T_2 pour les périodes : 2, 3, 4,...

Il découle que, dans le cas non actualisé, le gain collectif moyen réalisé tend, lorsque le nombre de périodes augmente, vers le gain collectif maximum.

7 Conclusion

Si notre « dilemme des prisonniers » n'est joué qu'une seule fois, les résultats établis dans un contexte coopératif d'information complète peuvent être étendus au contexte d'information incomplète dès lors que les vecteurs de résultat du jeu sont « non révélateurs » ou « totalement révélateurs » de la partie jouée. Dans le cas de résultats « partiellement révélateurs » en revanche, lorsque la réalisation du gain collectif maximum est assurée, son partage se trouve soumis à des contraintes spécifiques, dépassant le simple respect des valeurs de réservation qui constitue la seule exigence en information complète. Ceci signifie, pour les dilemmes à deux agents concernés, une réduction de l'ensemble des imputations constituant le cœur.

Cependant, le résultat ne serait pas aussi tranché pour un nombre de joueurs plus important. En effet, la détermination des imputations du cœur, dans les jeux à plus de deux joueurs, exige le recours à la notion de fonction caractéristique. Celle-ci permet de repérer les relations de domination entre les différents imputations possibles en associant à chaque coalition de joueurs le gain que cette coalition peut s'assurer dans le jeu. La définition de ce gain repose sur un choix corrélé des stratégies de la part des membres de la coalition. Et nos résultats indiquent qu'une telle coopération peut exiger, en information incomplète, le respect de contraintes spécifiques portant sur le partage du gain réalisable. Or, en réduisant les modes de partage du gain associé à une coalition, ces contraintes spécifiques réduisent en conséquence l'ensemble des imputations pour lesquelles cette coalition est efficace. Il en découle une restriction des relations de domination entre les différentes imputations possibles. Les imputations du cœur subissent donc deux effets antagonistes. Le premier (déjà souligné), réduit cet ensemble solution du fait des contraintes pesant sur le partage du gain collectif maximum au sein des coalitions capables de réaliser ce gain, notamment la coalition globale. Le second (qui apparaît au-delà de deux joueurs) élargit cet ensemble solution du fait de la restriction des relations de domination dans le jeu. La dimension de l'ensemble des imputations constituant le cœur dépend ainsi de l'importance comparée des deux effets.

Il demeure cependant que, malgré leur antagonisme, les deux effets résultent d'une même exigence : respecter des contraintes de partage, spécifiques d'une coopération en information incomplète, que le dilemme des prisonniers suffit à mettre en évidence.

• Références bibliographiques

d'Aspremont, C., Gerard-Varet, L. A., (1979). – "Incentives and Incomplete Information", *Journal of Public Economics*, 11, pp. 25-45.

d'Aspremont, C., Cremer J., Gerard-Varet, L. A., (1990). – "Incentives and the Existence of PARETO-Optimal Revelation Mechanisms", *Journal of Economic Theory*, 51, pp. 233-254.

Forges, F., (1990). – "Some Thoughts on Efficiency and Information", CORE Discussion Paper n° 9071.

Friedman, J. W., (1971). – "A Non-Cooperative Equilibrium for Supergames", *Review of Economic Studies*, 38, pp. 1-12.

Friedman, J. W., (1985). – "Cooperative Equilibria Infinite Horizon Non-cooperative Supergames", *Journal of Economic Theory*, 35, pp. 390-398.

Green, E. J., Laffont, J. J., (1979). – "Incentives in Public Decision-Making", *Studies in Public Economics*, North-Holland Ed.

Green, E. J., Laffont, J. J., (1987). – "Posterior Implementability in a Two Person Decision Problem", *Econometrica*, 55, pp. 69-94.

Holmstrom, B., Myerson, R., (1983). – "Efficient and Durable Decision Rules with Incomplete Information", *Econometrica*, 51, pp. 1799-1819.

Johnson, S., Pratt, J., Zeckhauser, R., (1990). – "Efficiency Despite Mutually Payoff-Relevant Private Information : The Finite Case", *Econometrica*, 58, pp. 873-900.

Kihlstrom, R. E., Vives, X., (1989). – "Collusion by Asymmetrically Informed Duopolists", *European Journal of Political Economy*, 5, pp. 371-402.

Kihlstrom, R. E., Vives, X., (1992). – "Collusion by Asymmetrically Informed Firms", *Journal of Economics & Management Strategy*, vol. 1, N° 2, pp. 371-396.

Luce, R. D., Raiffa, H., (1957). – "Games and Decisions", New York, John Wiley and Sons.

Von Neumann, J., Morgenstern, O., (1953). – "Theory of Games and Economic Behavior", 3e Ed., Princeton University Press.