ANNALES D'ÉCONOMIE ET DE STATISTIQUE. – N° 31 — 1993

Demande optimale de facteurs et coûts d'ajustement croisés

Xavier FAIRISE*

RÉSUMÉ. – Nous développons un modèle de demande de capital et de travail en présence de coûts d'ajustement croisés. Les coûts d'ajustement porteront à la fois sur l'investissement et sur l'embauche ; de plus aucune séparabilité entre les coûts portant sur les différents facteurs ne sera imposée. Ainsi, les coûts d'ajustement portant sur l'investissement dépendront également de l'embauche. Une telle spécification nous permettra de prendre en compte les interactions existant entre les demandes des différents facteurs. Nous montrerons alors que sous l'hypothèse de constance des rendements d'échelle, la connaissance du « q moyen » ne suffit plus à déterminer le taux d'investissement.

Optimal Factors Demand and Interrelated Adjustement Costs

ABSTRACT. – We develop a capital and labor demand model with interrelated adjustement costs. The adjustement costs will simultaneously bear on investment and labor; moreover we shall not suppose any separability assumption on the different kinds of adjustment costs. Investment adjustment costs will thus also depend on hiring. Such a specification will allow us to account for the interactions between the different factors demands. Under the assumption of constant return to scale, we shall then show that the knowledge of the avarage q does not enable us to determine the investment rate.

---

* X. FAIRISE : C.M.E. et M.A.D., Université de Paris-I, 90, rue de Tolbiac, 75634 Paris Cedex 13. Je remercie J. GLACHANT, F. LANGOT et Ph. Le GALL pour leurs conseils et leurs suggestions.

1 Introduction

La notion de coûts d'ajustement a été introduite par EISNER et STORTZ [1963]; le comportement de la firme en présence de coûts d'ajustement a ensuite fait l'objet de nombreux articles [1]. L'existence de coûts d'ajustement sur l'investissement conduit la firme à ne pas pouvoir ajuster immédiatement son stock de capital au stock « désiré » – *i. e.* la « cible » –. Dans une modélisation simple, on déduit dans un premier temps cette « cible » d'un programme de maximisation du profit de la firme (n'incluant pas les coûts d'ajustement); dans un second temps, un processus d'ajustement (postulé *a priori*) assure la convergence du stock effectif vers la « cible ». Cette méthode peut cependant sembler artificielle et pour ainsi dire *ad hoc*. Il est beaucoup plus pertinent d'inclure directement les coûts d'ajustement dans l'objectif – *i. e.* le profit – que maximise la firme.

En fait, un processus d'ajustement à une cible [2] peut s'interpréter comme l'approximation de la solution d'un problème de contrôle optimal où une fonction de coûts d'ajustement (ayant notamment comme argument le volume de l'investissement) est intégrée à la fonction objectif que la firme maximise [3].

La notion de coûts d'ajustement joue un rôle extrêmement important dans la théorie de l'investissement et a permis de réaliser la synthèse entre deux théories alternatives de l'investissement. D'une part, le modèle néoclassique de maximisation intertemporelle du profit, et d'autre part la théorie de Tobin où le taux d'investissement dépend du coefficient q, ratio de la valeur de la firme et du coût de remplacement du capital installé. Sur ce point, le papier de HAYASHI [1982] introduit un élément novateur : il établit que sous l'hypothèse de rendements constants, le « q moyen » est égal au « q marginal », et que le taux d'investissement est une fonction croissante du « q marginal » qui est la valeur implicite du capital. Cette égalité n'est en fait plus vérifiée dans un certain nombre de cas : (*i*) hypothèse de concurrence monopolistique sur le marché des biens (GEORGOUTSOS et SCHIANTARELLI [1990]), (*ii*) incertitude sur la demande et contrainte de capacité (LICANDRO [1992] b), (*iii*) coûts d'ajustement sur l'emploi, éventuellement croisé avec le capital (GALEOTTI et SCHIANTARELLI [1991] et LICANDRO [1992] a). Ces deux derniers articles conservent cependant un cadre de concurrence monopolistique sur le marché des biens.

D'un point de vue économique, la prise en compte d'un coût d'ajustement sur l'emploi, croisé ou non avec le capital, dans le modèle de demande de facteurs apparaît particulièrement important. Une firme qui embauche est soumise à des coûts de formation, et réciproquement si elle licencie elle

1. Citons en particulier LUCAS [1967] *b*, LUCAS [1967] *a*, GOULD [1968], NADIRI et ROSEN [1969], TREADWAY [1971], MORTENSEN [1973], HAYASHI [1982] et NICKELL [1986].
2. Comme celui que postulent par NADIRI et ROSEN [1969].
3. Voir par exemple LUCAS [1967] *b* et GOULD [1968].

sera soumise à des coûts de licenciement. De même, comme le soulignent TREADWAY [1971] et MORTENSEN [1973], il n'y a *a priori* aucune raison de supposer une séparabilité quelconque entre les différents coûts d'ajustement. Ainsi, les coûts de formation rentrent aussi bien dans les coûts d'installation que dans les coûts d'embauche.

Il existe dans la litérature un certain nombre d'articles traitant de l'existence de coûts d'ajustement croisés. On citera tout d'abord les travaux théoriques de TREADWAY [1971] et MORTENSEN [1973], ces deux articles étant principalement centrés sur les questions de stabilité et de point selle. Il existe d'autre part toute une littérature empirique, beaucoup plus récente, ayant pour objet l'estimation de modèles de demande de facteurs avec des formes très générales de coûts d'ajustement. Il s'agit en particulier des contributions de SHAPIRO [1986], KODDE, PALM et PFANN [1990] et GALEOTTI et SCHIANTARELLI [1991]. Cependant, ces articles n'étudient pas de façon systématique comment l'existence de coûts d'ajustement croisés sur le capital et l'emploi conduit à la non égalité des q moyen et marginal.

Dans cette étude, on introduit dans le modèle néoclassique de demande de facteurs une fonction de coûts d'ajustement croisés sur le capital et le travail. A la différence de GALEOTTI et SCHIANTARELLI [1991] et LICANDRO [1992] *a*, on se situe dans un cadre de concurrence parfaite. On s'efforcera de montrer comment les coûts d'ajustement croisés empêchent l'égalité du q moyen et du q marginal. On essaiera également de mettre en évidence les contributions respectives du coût d'ajustement sur l'emploi et du coût d'ajustement croisé dans l'obtention de ce résultat.

Dans la première section, nous écrivons le modèle de demande de capital et de travail en présence de coûts croisés. Nous établissons que la fonction valeur est homogène de degré 1 si et seulement si les fonctions de production et de coûts sont homogènes de degré 1. Dans la seconde section, nous procédons à l'étude du modèle dans le cas d'une fonction objectif homogène de degré 1. En particulier, nous déduisons que le taux d'« investissement » dans un facteur ne dépend pas uniquement du prix implicite de ce facteur, mais également du prix implicite de l'autre facteur et du capital par tête, et nous examinons comment il est alors possible de préciser le sens de ces effets croisés. Dans la troisième section, nous étudions le modèle au voisinage de l'état stationnaire et nous dérivons une propriété de point selle.

2 Prix implicite du capital et coûts croisés

Dans cette section, nous écrivons le programme de maximisation intertemporelle du profit d'une firme soumise à des coûts d'ajustement croisés et nous en déduisons les conditions d'optimalité. Ensuite, nous établissons sous quelles conditions la fonction valeur est homogène de degré 1 et nous donnons une interprétation de ce résultat.

2.1. Programme de la firme

Le programme de maximisation intertemporelle du profit de la firme est le suivant :

$$\text{(1)} \qquad \max \int_0^{\infty} e^{-\mathrm{R}(t)} [\mathrm{F}(\mathrm{K}(t), \mathrm{L}(t)) - w(t)\,\mathrm{L}(t) \\ - \mathrm{G}(\mathrm{I}(t), \mathrm{K}(t), \mathrm{E}(t), \mathrm{L}(t))]\, dt$$

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{K}}(t) = \mathrm{I}(t) - \delta\,\mathrm{K}(t) & (q(t)) & (\mathrm{K}(0) = \mathrm{K}_0) \\ \dot{\mathrm{L}}(t) = \mathrm{E}(t) - s\,\mathrm{L}(t) & (\lambda(t)) & (\mathrm{L}(0) = \mathrm{L}_0). \end{cases}$$

$\dot{\mathrm{K}}(t) = \mathrm{I}(t) - \delta\,\mathrm{K}(t)$ est l'équation d'évolution du capital, δ est le taux de dépréciation du capital. I (t) est le volume de l'investissement et K (t) le stock de capital.

$\dot{\mathrm{L}}(t) = \mathrm{E}(t) - s\,\mathrm{L}(t)$ est l'équation d'évolution de l'emploi, s est un taux de sortie exogène, par exemple les départs en retraite. E (t) est le volume des embauches et L (t) le volume de la force de travail.

I (t) et E (t) sont des variables de flux, et K (t) et L (t) des variables de stock.

Nous avons en outre $\mathrm{R}(t) = \int_0^t r(s)\,ds$, où $r(s)$ est le taux d'intérêt.

I (t) et E (t) sont les variables de contrôle et K (t) et L (t) sont les variables d'état du problème.

F (K, L) est la fonction de production qui est supposée croissante en K et L et concave.

G (I, K, E, L) est la fonction de coûts d'ajustement croisés, elle est supposée croissante en I et E, et convexe en (I, K, E, L). Le hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H} = \mathrm{F}(\mathrm{K}(t), \mathrm{L}(t)) - w(t)\,\mathrm{L}(t) - \mathrm{G}(\mathrm{I}(t), \mathrm{K}(t), \mathrm{E}(t), \mathrm{L}(t)) \\ + q(t)\,(I(t) - \delta\mathrm{K}(t)) + \lambda(t)\,(\mathrm{E}(t) - s\mathrm{L}(t));$$

nous obtenons comme conditions d'optimalité :

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathrm{I}(t)} = -\mathrm{G}_{\mathrm{I}} + q = 0$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathrm{E}(t)} = -\mathrm{G}_{\mathrm{E}} + \lambda = 0$$

$$\text{(4)} \qquad \dot{q}(t) = r(t)\,q(t) - \mathrm{F}_{\mathrm{K}} + \mathrm{G}_{\mathrm{K}} + \delta q(t)$$

$$\text{(5)} \qquad \dot{\lambda}(t) = r(t)\,\lambda(t) - \mathrm{F}_{\mathrm{L}} + \mathrm{G}_{\mathrm{L}} + w(t) + s\lambda(t);$$

nous avons comme conditions de transversalité :

$$\text{(6)} \qquad \lim_{t \to \infty} e^{-\mathrm{R}(t)}\, q(t)\,\mathrm{K}(t) = 0$$

$$\text{(7)} \qquad \lim_{t \to \infty} e^{-\mathrm{R}(t)}\, \lambda(t)\,\mathrm{L}(t) = 0;$$

q (t) est le prix implicite du capital et λ (t) le prix implicite du travail.

La valeur de la firme est donnée par l'expression suivante :

$$V(K(t), L(t), t) = \max_{\{I(t), E(t)\}} \left\{ \int_t^{\infty} e^{-\int_t^s r(\tau)\, d\tau} \right.$$
$$\times [F(K_s, L_s) - w_s L_s - G(I_s, K_s, E_s, L_s)]\, ds \; :$$
$$\left. \dot{K}_s = I_s - \delta K_s,\; K(t) = K_t,\; \dot{L}_s = E_s - sL_s,\; L(t) = L_t) \right\}.$$

On obtient en dérivant [4] par rapport à K (*t*) et L (*t*) :

$$q(t) = \frac{\partial V(K(t), L(t), t)}{\partial K(t)}$$
$$\lambda(t) = \frac{\partial V(K(t), L(t), t)}{\partial L(t)}.$$

En intégrant les équation (4) et (5), on a :

$$q(t) = \int_t^{\infty} e^{-\int_t^s (r(\tau)+\delta)\, d\tau} (F_K - G_K)\, ds$$
$$\lambda(t) = \int_t^{\infty} e^{-\int_t^s (r(\tau)+s)\, d\tau} (F_L - G_L - w(t))\, ds.$$

$q(t)$ et $\lambda(t)$ apparaissent comme des variables résumant toute l'information future.

$q(t)$ et $\lambda(t)$, respectivement le prix implicite du capital et du travail, sont égaux à la somme des gains d'une unité supplémentaire du facteur correspondant.

Il apparait qu'à l'optimum le coût d'une unité d'investissement supplémentaire est égal à la somme actualisée des gains d'une unité de capital en plus. De même, à l'optimum, le coût d'un travailleur supplémentaire est égal à la somme actualisée des gains d'un travailleur supplémentaire.

Les conditions de transversalité expriment le fait qu'à l'infini, la valeur actualisée du stock de capital et du « stock » de travailleurs est nulle.

2.2. *q* moyen et *q* marginal

Proposition 1 : Supposons que la firme considère le prix du bien qu'elle produit comme donné et que les conditions de transversalité soient vérifiées, alors:

$$V(K(t), L(t), t) = q(t)\, K(t) + \lambda(t)\, L(t)$$

si et seulement si:

1. La fonction de coûts d'ajustement est homogène de degré 1 en (I, K, E, L).
2. La fonction de production est à rendements constants.

4. Utilisation de Bellman en temps continu.

Démonstration : On s'inspire [5] de HAYASHI [1982]. Considérons F et G homogènes de degré 1, on obtient :

$$\begin{aligned} F &= LF_L + KF_K \\ G &= IG_I + KG_K + EG_E + LG_L. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(q\,Ke^{-R(t)}\right) &= \left(\dot{q}K + q\dot{K} - r(t)\,qK\right)e^{-R(t)} \\ &= -(KF_K - KG_K - IG_I)\,e^{-R(t)}. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons les deux relations :

$$\frac{d}{dt}\left(q\,Ke^{-R(t)}\right) = -(KF_K - KG_K - IG_I)\,e^{-R(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda\,Le^{-R(t)}\right) = -(LF_L - LG_L - EG_E - wL)\,e^{-R(t)},$$

d'où, en sommant :

$$\frac{d}{dt}\left(qKe^{-R(t)} + \lambda Le^{-R(t)}\right) = -(F(K, L) - G(I, K, E, L) - wL)e^{-R(t)}.$$

En intégrant et en tenant compte des conditions de transversalité, on trouve finalement :

$$\begin{aligned} q(t)\,K(t) + \lambda(t)\,L(t) = \int_t^{\infty} & e^{-\int_t^s r(\tau)\,d\tau} \\ & \times [F(K(s), L(s)) - w(s)\,L(s) \\ & - G(I(s), K(s), E(s), L(s))]\,ds, \end{aligned}$$

d'où

$$q(t)\,K(t) + \lambda(t)\,L(t) = V(K(t), L(t), t). \quad \square$$

Si l'on se place dans le cas où les coûts d'ajustement ne portent que sur le capital, on retrouve le résultat de HAYASHI [1982], soit $q(t) = \dfrac{V(K(t), t)}{K(t)}$ – *i. e.* le q moyen est égal au q marginal –. Dans le cas de coûts croisés, on obtient $V(K(t), L(t), t) = q(t)\,K(t) + \lambda(t)\,L(t)$. Si la fonction de production et la fonction de coûts sont homogènes de degré 1, la valeur de la firme est égale à la valeur marginale du stock de capital ajouté de la valeur marginale du « stock » de travailleurs. Il apparaît également que $q(t)$ et $\lambda(t)$ ne dépendent que du capital par tête à un instant donné.

Considérons deux firmes ayant à l'origine le même capital par tête mais des stocks de capital et de travail de niveaux différents. Soient K_0 et L_0 les

5. Pour une démonstration alternative, voir d'AUTUME et MICHEL [1985].

stocks de capital et de travail de la première firme et K'_0 et L'_0 ceux de la seconde firme. Nous avons $K'_0 = kK_0$ et $L'_0 = kL_0$: la seconde firme peut être considérée comme k fois plus grande que la première.

A chaque instant, les stocks de capital et de travail de la seconde firme seront k fois plus important que ceux de la première. La valeur de la seconde sera k fois plus importante que celle de la première. Par contre, à chaque instant, les valeurs implicites du capital et du travail seront les mêmes pour les deux firmes.

De (2) et (3), on déduit que $\frac{I}{K} = \propto (q, \lambda, K/L)$. Le taux d'investissement dépend des prix implicites des facteurs ainsi que du capital par tête. On constate alors que le taux d'investissement dépend, en plus du prix implicite du capital q, du prix implicite du travail λ et du capital par tête k. L'intervention de ces deux dernières variables comme déterminants du taux d'investissement est due au caractère croisé des coûts d'ajustement. Plus précisément, quand la firme investit, le coût qu'elle supporte dépend du niveau de l'embauche. Il en résulte que le taux d'investissement doit dépendre de la valeur marginale du travail. Dans notre modèle, le coût d'ajustement dépend également des stocks de capital et de travail. Le taux d'investissement sera donc également fonction des niveaux de capital et de travail détenus par la firme. La fonction de coûts d'ajustement étant homogène de degré 1, c'est finalement le capital par tête qui interviendra. Si on avait des coûts d'ajustement séparables sur l'investissement et l'emploi, alors le taux d'investissement ne dépendrait que du prix implicite du capital (et le taux d'embauche du prix implicite du travail).

Définissons $h(t) = \frac{V(K(t), L(t), t)}{K(t)}$. $h(t)$ est le q moyen, c'est-à-dire le rapport entre la valeur de la firme et le coût de remplacement du capital installé. On obtient :

$$h(t) = q(t) + \frac{\lambda(t)}{k(t)}.$$

Le q moyen est égal au q marginal augmenté de la valeur implicite du travail multiplié par l'emploi par unité de capital. Contrairement au résultat de HAYASHI [1982], il n'y a plus égalité entre le q moyen et le q marginal. La perte de cette égalité est due à l'existence d'un coût d'ajustement sur l'emploi indépendamment du caractère séparable ou non des coûts d'ajustement. Le coût d'ajustement fait du travail un facteur quasi-fixe. L'emploi d'un travailleur supplémentaire, s'il n'a pas un caractère complètement irréversible n'est pas totalement réversible non plus et engage la firme pour l'avenir. La décision d'embauche doit donc être prise en tenant compte des anticipations futures de profit. Le prix implicite du travail n'est plus nul et la valeur de la firme en est modifiée. Elle dépend de la valeur marginale du travail en plus de la valeur marginale du capital.

On conclut que la connaissance du q moyen ne suffit plus à déterminer le taux d'investissement qui est donné par :

1. $\frac{I}{K} = \alpha\left(h - \frac{\lambda}{k}\right)$ si les coûts sont séparables.
2. $\frac{I}{K} = \alpha\left(h - \frac{\lambda}{k}, \lambda, k\right)$ si les coûts sont croisés.

On retrouve un résultat qui a déjà été démontré dans des contextes un peu différents par divers auteurs. GEORGOUTSOS et SCHIANTARELLI [1990] montrent dans un modèle de concurrence monopolistique avec coûts d'ajustement sur le capital que l'égalité entre le q moyen et le q marginal n'est plus vérifiée. LICANDRO [1992] *b* établit un résultat analogue dans un modèle avec incertitude sur la demande et contrainte de capacités. LICANDRO [1992] *a* montre également dans le cadre d'un modèle de concurrence monopolistique qu'un coût d'ajustement sur l'emploi peut entraîner une différence entre les q moyen et marginal.

3 Effets croisés dans la fonction de coûts

L'objet de cette section est de préciser comment les taux d'investissement et d'embauche varient en fonction des prix implicites du capital et de l'emploi et du capital par tête. Pour cela, nous commençons par réécrire les conditions d'optimalité de la firme en variables par tête et nous déduisons les taux d'investissement et d'embauche en fonction des prix implicites et du capital par tête. Nous étudions ensuite comment ces taux dépendent des prix implicites et du capital par tête. A ce moment apparaît l'importance des effets croisés dans la fonction de coûts d'ajustement – *i. e.* les termes croisés du hessien de la fonction g – sur les comportements d'investissement et d'embauche.

3.1. Réécriture des conditions d'optimalité

La fonction de production et la fonction de coûts d'ajustement sont homogènes de degré 1. Ces propriétés nous permettent de réécrire les conditions d'optimalité de la firme en déflatant l'ensemble des variables par l'emploi. On définit alors les variables suivantes : $k = K/L$, $i = I/L$, $e = E/L$ et $j = I/K$. En raison de leurs propriétés d'homogénéité, F et G se réécrivent : $G(I, K, E, L) = Lg(i, e, k)$ et $F(K, L) = Lf(k)$. A l'aide des équations (2) à (5) et des résultats de l'annexe A, on réécrit les conditions d'optimalité comme il suit :

(8) $$q = g_i\,(i,\ e,\ k)$$

(9) $$\lambda = g_e\,(i,\ e,\ k)$$

(10) $$\dot{q} = rq - f'(k) + g_k + \delta q$$

(11) $$\dot{\lambda} = r\lambda - f\,(k) + kf''\,(k) + w + g - kg_k - qi - \lambda\,(e - s).$$

Les équations d'évolution du capital et du travail se réduisent à une équation d'évolution du capital par tête :

(12) $$\dot{k} = i - (\delta + e - s)k.$$

En intégrant les équations (10) et (11), on obtient :

$$q(t) = \int_t^{\infty} e^{-\int_t^s (r(\tau)+\delta)\, d\tau} \left[f'(k) - g_k\right] ds$$

$$\lambda(t) = \int_t^{\infty} e^{-\int_t^s (r(\tau)+\delta)\, d\tau} \times \left[f(k) - kf'(k) - w - g + ig_i + eg_e + kg_k\right] ds.$$

Comme nous l'avons dit précédemment, q et λ apparaissent comme des variables résumant tout le futur.

Le système formé des équaitons (8) et (9), a une solution unique en i et e en raison des hypothèses de convexité faites sur g. On peut alors écrire les taux d'investissement et d'embauche comme fonctions des prix implicites et du capital par tête :

(13) $$i = i(q, \lambda, k)$$

ou encore

(14) $$j = \alpha(q, \lambda, k)$$

(15) $$e = e(q, \lambda, k).$$

Le taux d'investissement et le taux d'embauche dépendent simultanément du prix implicite du capital, du prix implicite du travail et du capital par tête. S'il y avait séparabilité totale entre les coûts portant sur le capital et le travail, nous aurions : $j = j(q)$ et $e = e(\lambda)$, où le taux d'investissement ne dépend que du prix implicite du capital, et le taux d'embauche du prix implicite du travail.

Les deux équations (14) et (15) font nettement apparaître que les décisions d'investissement et d'embauche sont étroitement liées. Elles ne sont pas prises indépendamment l'une de l'autre, j et e dépendent du prix implicite du capital, q, et du prix implicite du travail, λ, mais également de k, le capital par tête. Les décisions d'investissement et d'embauche dépendent, en plus des valeurs du capital et du travail, du volume du capital relativement à l'emploi.

Nous établissons maintenant deux propositions faisant apparaître comment les taux d'investissement et d'embauche sont liés aux propriétés que l'on impose à la fonction de coûts d'ajustement et plus particulièrement à ses termes croisés.

3.2. Taux d'investissement, taux d'embauche et prix implicites

Les dérivées des taux d'investissement et d'embauche par rapport aux prix implicites s'écrivent [6] :

$$\frac{\partial j}{\partial q} = \frac{1}{k}\frac{1}{\Delta} g_{ee} > 0 \qquad \frac{\partial j}{\partial \lambda} = -\frac{1}{k}\frac{1}{\Delta} g_{ie}$$

6. Voir à l'annexe B.

et

$$\frac{\partial e}{\partial q} = -\frac{1}{\Delta} g_{ie} \quad \frac{\partial e}{\partial \lambda} = \frac{1}{\Delta} g_{ii} > 0,$$

avec $\Delta = g_{ii} g_{ee} - g_{ie}^2 > 0$.

Commentaires : q et λ sont des variables résumant tout le futur. q, valeur implicite du capital est égale à la somme des gains d'une unité de capital supplémentaire, et λ, valeur implicite du travail, est égale à la somme des gains d'une unité de travail supplémentaire.

Les taux d'investissement et d'embauche sont des fonctions croissantes de leur prix implicite respectif. Plus le gain d'une unité d'investissement dans un facteur est important, plus le taux d'investissement dans ce facteur sera important.

Dans le cadre des hypothèses précédentes, nous ne pouvons dire quel est l'effet d'une hausse du prix implicite du travail sur le taux d'investissement ou d'une hausse du prix implicite du capital sur le taux d'embauche. Comme nous allons le voir, ceci dépendra du signe du terme croisé g_{ie}.

Nous avons $g_{ie} = LG_{IE}$, et nous n'avons jusqu'à présent pas fait d'hypothèses sur le signe de G_{IE}. *A priori*, il est possible d'envisager $G_{IE} > 0$ ou $G_{IE} < 0$.

$G_{IE} > 0$ Le coût d'une unité d'investissement supplémentaire dépend positivement du volume de l'embauche. Dans ce cas, la firme ne sera pas incitée à investir et embaucher en même temps. On a alors :

$$\frac{\partial j}{\partial \lambda} = -\frac{1}{k}\frac{1}{\Delta} g_{ie} < 0,$$

et

$$\frac{\partial e}{\partial q} = -\frac{1}{\Delta} g_{ie} < 0.$$

Le taux d'investissement est fonction décroissante de la valeur du travail et le taux d'embauche est fonction décroissante de la valeur du travail. Si la valeur du travail augmente, la firme augmente le taux d'embauche et ralentit le taux d'investissement et, inversement, si la valeur du capital augmente, la firme augmente le taux d'investissement et diminue le taux d'embauche.

$G_{IE} < 0$ Le coût d'une unité d'investissement supplémentaire dépend négativement du volume de l'embauche, et inversement, le coût d'un travailleur supplémentaire sera d'autant plus faible que le volume de l'investissement sera important. La firme aura, dans ce cas, intérêt à embaucher à investir en même temps. On obtient alors :

$$\frac{\partial j}{\partial \lambda} = -\frac{1}{k}\frac{1}{\Delta} g_{ie} > 0,$$

et

$$\frac{\partial e}{\partial q} = -\frac{1}{\Delta} g_{ie} > 0.$$

Le taux d'investissement et le taux d'embauche sont alors des fonctions croissantes respectivement de la valeur du travail et de la valeur du capital. $g_{ie} = \mathrm{L}\mathrm{G}_{\mathrm{IE}} < 0$ signifie que la firme a intérêt, en terme de coûts d'ajustement, à investir et embaucher en même temps. Il est donc logique qu'un accroissement de la valeur implicite du capital induise simultanément un accroissement du taux d'investissement et du taux d'embauche; il en est de même pour la valeur implicite du travail. Il apparaît que le capital et le travail sont complémentaires. Si le capital est plus rentable, la firme investira plus et simultanément embauchera plus car, en terme de coûts d'ajustement, la firme à intérêt à investir et embaucher simultanément.

Cependant, si un accroissement de la valeur du capital augmente le taux d'investissement et le taux d'embauche simultanément, il est raisonnable de penser que l'augmentation du taux d'investissement devra dominer celle du taux d'embauche. Inversement, une augmentation de la valeur du travail devra conduire à une augmentation du taux d'embauche plus forte que le taux d'investissement. Nous sommes alors conduits à formuler la proposition suivante :

PROPOSITION 2 : Si la fonction de coûts d'ajustement vérifie [7] :

$$\mathrm{G}_{\mathrm{EE}} + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}\,\mathrm{G}_{\mathrm{IE}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}\,\mathrm{G}_{\mathrm{II}} + \mathrm{G}_{\mathrm{IE}} > 0,$$

alors

$$\frac{\partial j}{\partial q} > \frac{\partial e}{\partial q} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial e}{\partial \lambda} > \frac{\partial j}{\partial \lambda}.$$

Démonstration : Ce résultat est immédiat. Ainsi, les propriétés $\mathrm{G}_{\mathrm{EE}} + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}\,\mathrm{G}_{\mathrm{IE}} > 0$ et $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}\,\mathrm{G}_{\mathrm{II}} + \mathrm{G}_{\mathrm{IE}} > 0$ de la fonction de coûts d'ajustement impliquent [8] $g_{ee} + kg_{ie} > 0$ et $kg_{ii} + g_{ie} > 0$. On conclut alors que $\frac{\partial j}{\partial q} > \frac{\partial e}{\partial q}$ et $\frac{\partial e}{\partial \lambda} > \frac{\partial j}{\partial \lambda}$. □

3.3. Taux d'investissement, taux d'embauche et capital par tête

Les dérivées des taux d'investissement et d'embauche par rapport au capital par tête s'écrivent [9] :

$$\frac{\partial j}{\partial k} = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{\Delta}\left(g_{ie}g_{ek} - g_{ee}g_{ik}\right) - j\right]$$

$$\frac{\partial e}{\partial k} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(g_{ie}g_{ik} - g_{ii}g_{ke}\right)\right].$$

Les signes de ces dérivées sont indéterminés compte tenu des hypothèses formulées, tous les cas étant *a priori* imaginables.

7. On remarque que ces propriétés sont automatiquement vérifiées si $\mathrm{G}_{\mathrm{IE}} < 0$.

8. Voir à l'annexe A pour le « passage » de la fonction G à la fonction g.

9. Voir à l'annexe B.

Toutefois, c'est le cas $\frac{\partial j}{\partial k} < 0$ et $\frac{\partial e}{\partial k} > 0$ qui reçoit l'interprétation économique la plus immédiate et apparaît comme la plus raisonnable. Le taux d'investissement est alors une fonction décroissante du capital par tête et le taux d'embauche une fonction croissante du capital par tête. L'effet de k sur le taux d'investissement et le taux d'embauche peut alors s'interpréter comme un effet stabilisateur. Les décisions d'investissement et d'embauche sont guidées par la valeur du capital et du travail – *i. e.* q (t) et λ (t) –. Mais il est également tenu compte du capital par tête; la firme ne maintiendra pas un fort taux d'investissement si le capital par tête est important; de même, la firme ne maintiendra pas un fort taux d'embauche si le nombre de travailleurs par unité de capital est important.

Le cas symétrique avec $\frac{\partial j}{\partial k} > 0$ et $\frac{\partial e}{\partial k} < 0$ apparaît plus difficile à interpréter et implique des coûts d'ajustement croisés très particuliers. Si les coûts croisés sont tels qu'un stock de capital élevé rend excessivement coûteux l'embauche, alors l'emploi se trouvera bloqué si la firme est abondamment dotée en capital.

La proposition suivante établit les conditions sous lesquelles le taux d'investissement décroît avec le capital par tête et le taux d'embauche croît avec le capital par tête.

PROPOSITION 3 : Si la fonction de coûts d'ajustement vérifie :

$$\mathrm{G_{IE}G_{IK} - G_{II}G_{KE}} > 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G_{IE}G_{EL} - G_{EE}G_{LI}} > 0,$$

alors

$$\frac{\partial j}{\partial k} < 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial e}{\partial k} > 0.$$

Démonstration : Si G vérifie $\mathrm{G_{IE}G_{IK} - G_{II}G_{KE}} > 0$, il est immédiat que $g_{ie}g_{ik} - g_{ii}g_{ek} > 0$.

$\mathrm{G_{IL}}$ et $\mathrm{G_{EL}}$ s'expriment en fonction des dérivées de g de la manière suivante [10] :

$$\mathrm{G_{IL}} = -\frac{1}{\mathrm{L}}\,[ig_{ii} + eg_{ie} + kg_{ik}]$$
$$\mathrm{G_{EL}} = -\frac{1}{\mathrm{L}}\,[ig_{ie} + eg_{ee} + kg_{ke}].$$

On calcule alors que :

$$\mathrm{G_{IE}G_{EL} - G_{EE}G_{LI}} = -\frac{1}{\mathrm{L}^2}\,[ig_{ie}^2 + kg_{ke}g_{ie} - ig_{ii}g_{ee} - kg_{ik}g_{ee}] > 0.$$

10. Voir à l'annexe A.

En réarrangeant les termes et sachant que $g_{ii}g_{ee} - g_{ie}^2 > 0$, on obtient finalement :

$$\frac{g_{ke}g_{ie} - g_{ik}g_{ee}}{g_{ii}g_{ee} - g_{ie}^2} - j < 0.$$

On déduit sans difficulté que : $\frac{\partial j}{\partial k} < 0$ et $\frac{\partial e}{\partial k} > 0$. □

4 Propriété de point selle

Dans cette section, nous démontrons qu'au voisinage de l'état stationnaire, le capital par tête converge vers sa valeur stationnaire et qu'ainsi, dans le long terme, capital et travail doivent croître à un même taux constant. La démonstration se fait en linéarisant les équations (10), (11) et (12) au voisinage de l'état stationnaire. On obtient alors un système dynamique linéaire d'ordre 3 possédant deux valeurs propres positives et une valeur propre négative, ce qui assure l'existence d'un point selle.

Nous avons à étudier le système :

$$\dot{q} = rq - f'(k) + g_k + \delta q \tag{16}$$

$$\dot{\lambda} = r\lambda - f(k) + kf'(k) + w + g - kg_k - qi + \lambda(e - s) \tag{17}$$

$$\dot{k} = i - (\delta + e - s)\, k. \tag{18}$$

L'état stationnaire sera représenté par le triplet (q^*, λ^*, k^*) tel que $\dot{q} = 0$, $\dot{\lambda} = 0$ et $\dot{k} = 0$, et il vérifiera le système suivant :

$$(r + \delta)\, q - f'(k) + g_k = 0 \tag{19}$$

$$(r + s - e)\lambda - qi - f(k) + kf'(k) + w + g - kg_k = 0 \tag{20}$$

$$i - (\delta + e - s)\, k = 0. \tag{21}$$

Nous supposons maintenant que w et r sont invariants dans le temps. Pour étudier la dynamique à proximité de l'état stationnaire, nous allons linéariser au voisinage de (q^*, λ^*, k^*). En dérivant (16), (17) et (18), on a [11] :

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = \omega_{11} = r + \delta + \frac{\partial i}{\partial q} g_{ki} + \frac{\partial e}{\partial q} g_{ke}$$
$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial \lambda} = \omega_{12} = \frac{\partial i}{\partial \lambda} g_{ki} + \frac{\partial e}{\partial \lambda} g_{ke}$$

11. Voir à l'annexe B pour une expression complète des ω_{ij} en fonction des dérivées secondes de g.

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial k} = \omega_{13} = -f''(k) + \frac{\partial i}{\partial k} g_{ki} + \frac{\partial e}{\partial k} g_{ke} + g_{kk}$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial q} = \omega_{21} = -i - k \left[\frac{\partial_i}{\partial q} g_{ki} + \frac{\partial e}{\partial q} g_{ke} \right]$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} = \omega_{22} = r + s - e - k \left[\frac{\partial i}{\partial \lambda} g_{ki} + \frac{\partial e}{\partial \lambda} g_{ke} \right]$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial k} = \omega_{23} = kf''(k) - k \left[\frac{\partial i}{\partial k} g_{ki} + \frac{\partial e}{\partial k} g_{ke} + g_{kk} \right]$$

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial q} = \omega_{31} = \frac{\partial i}{\partial q} - k \frac{\partial e}{\partial q}$$

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial \lambda} = \omega_{32} = \frac{\partial i}{\partial \lambda} - k \frac{\partial e}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial k} = \omega_{33} = \frac{\partial i}{\partial k} - k \frac{\partial e}{\partial k} - (\delta + e - s),$$

et

$$\Delta = g_{ii} g_{ee} - g_{ie}^2.$$

Nous supposons que G vérifie les hypothèses suivantes :

$$G_{IE} G_{IK} - G_{II} G_{EK} \geq 0$$

et

$$G_{IE} G_{EL} - G_{EE} G_{LI} \geq 0$$

ainsi que :

$$G_{EE} + \frac{K}{L} G_{IE} > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{K}{L} G_{II} + G_{IE} > 0.$$

Il nous est alors possible de déterminer le signe des ω_{ij}. Tout d'abord, montrons que $\delta + e - s > 0$ et $r + s - e > 0$. De l'équation (21) on déduit que : $j = \frac{i}{k} = \delta + e - s$. Il est clair qu'à l'état stationnaire, seul $i = \frac{I}{L} > 0$ est économiquement acceptable : on ne peut en effet admettre une décroissance continue de l'investissement, et de plus on a $k > 0$. On conclut alors que : $\delta + e - s > 0$.

Il reste à démontrer que $r + s - e > 0$. L'équation (19) donne

$$r + \delta = \frac{f'(k) - g_k}{q}.$$

Sachant que $\delta + e - s = \frac{i}{k}$, on obtient alors :

$$qk(r + s - e) = kf'(k) - kg_k - iq,$$

et l'équation (20) conduit à :

$$(r + s - e)\lambda = f(k) - kf'(k) - w + kg_k + iq.$$

On déduit alors des deux formules précédentes que :

$$(r + s - e)(\lambda + qk) = f(k) - w - g$$

Comme $\lambda + kq > 0$, et que nécessairement $f(k) - w - g > 0$, le profit doit être positif, on déduit que $r + s - e > 0$. Compte tenu des hypothèses faites sur la fonction de coûts d'ajustement, il suit que [12] : $\omega_{11} > 0$, $\omega_{12} \leq 0$, $\omega_{13} > 0$, $\omega_{21} \leq 0$, $\omega_{22} > 0$, $\omega_{23} < 0$, $\omega_{31} > 0$, $\omega_{32} < 0$, et $\omega_{33} \leq 0$.

On appelle H la matrice des ω_{ij}. L'objet du lemme qui suit est de préciser les signes des valeurs propres de H.

LEMME 4 : Supposons que la fonction de coûts d'ajustement vérifie :

$$\begin{cases} G_{IE}G_{IK} - G_{II}G_{EK} \geq 0 \quad \text{et} \quad G_{IE}G_{EL} - G_{EE}G_{LI} \geq 0 \\ G_{EE} + \dfrac{K}{L} G_{IE} > 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{K}{L} G_{II} + G_{IE} > 0, \end{cases}$$

alors, $r + s - e$ est valeur propre de H et les deux autres valeurs propres sont de la forme λ et $r + s - e - \lambda$.
En outre, le déterminant de H est négatif, ce qui assure l'existence d'une valeur propre réelle négative, les deux autres étant réelles positives.

Démonstration : Voir à l'annexe C

Nous avons deux valeurs propres positives et une valeur propre négative. Deux variables sont « forward », q et λ, et une variable, k, est « backward ». Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant assurant l'existence d'un point selle.

PROPOSITION 5 : Considérons le problème de maximisation intertemporelle du profit de la firme (2). La fonction de production et la fonction de coûts d'ajustement sont supposées homogènes de degré 1. Supposons que la fonction de coûts d'ajustement vérifie également :

$$\begin{cases} G_{IE}G_{IK} - G_{II}G_{EK} \geq 0 \quad \text{et} \quad G_{IE}G_{EL} - G_{EE}G_{LI} \geq 0 \\ G_{EE} + \dfrac{K}{L} G_{IE} > 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{K}{L} G_{II} + G_{IE} > 0. \end{cases}$$

L'état stationnaire (q^*, λ^*, k^*), vérifiant les équations (19) à (21) est alors un point selle (localement). En prévisions parfaites, il existe localement une trajectoire unique conduisant en (q^*, λ^*, k^*), pour un k_0 donné, les conditions de tranversalité étant vérifiées.

12. Voir à l'annexe B.

En horizon infini, K et L vont croître au même taux constant et le capital par tête sera constant.

Commentaire : On remarque que si les coûts d'ajustement sont séparables, les restrictions imposées à la fonction de coûts d'ajustement croisés sont vérifiées et la propriété de point selle tient automatiquement. On est alors amené à penser que si les coûts croisés sont faibles par rapport aux coûts d'ajustement propres à chacun des facteurs, la propriété de point selle sera, « par continuité », encore vérifiée. Les conditions imposées à la fonction de coûts d'ajustement croisés correspondent à cette intuition, elles signifient qu'on limite la taille des effets croisés relativement aux effets « directs ».

5 Conclusion

Intuitivement, les décisions d'investissement et d'embauche d'une firme sont étroitement liées. Une firme ne prendra pas la décision d'acheter un nouvel équipement sans se soucier des créations de postes qu'entraînera cette acquisition. L'introduction d'une fonction de coûts d'ajustement croisés permet de dériver des demandes de capital et de travail qui sont interdépendantes. Ceci n'est pas permis par un modèle dont la fonction de coûts d'ajustement est du type : $C=G_1$ (I, K)+G_2 (E, L). En, particulier, le taux d'investissement ne dépendra alors que de la valeur implicite du capital et le taux d'embauche de la valeur implicite du travail. Dans ce cas, le lien entre les comportements d'investissement et d'embauche n'apparaît plus. Nous avons fait apparaître que le lien entre l'investissement et l'embauche dépend essentiellement du signe de G_{IE}.

Le taux d'investissement est à la fois fonction de la valeur du capital, de la valeur du travail et du capital par tête. Il s'en suit également que le *q* moyen n'est plus égal au *q* marginal. Finalement, la connaissance du *q* moyen n'est plus suffisante pour déterminer le taux d'investissement.

L'effet d'une hausse de la valeur du travail λ sur le taux d'investissement dépend du signe de g_{ie} : dans le cas où $g_{ie} < 0$, la firme a intérêt à investir et embaucher en même temps, et la hausse de λ entraîne simultanément un accroissement du taux d'investissement et du taux d'embauche. Par contre, si $g_{ie} > 0$, la hausse de λ induira bien sûr une hausse du taux d'embauche, mais le taux d'investissement diminuera.

Nous avons établi qu'asymptotiquement, le capital par tête converge vers une valeur constante. Ainsi, le capital et le travail doivent croître à un taux constant. Le taux d'investissement et le taux d'embauche sont alors eux mêmes constants dans le temps.

Propriétés de $f(k)$ et $g(i, e, k)$

Nous avons F (K, L) = L$f(k)$ et les dérivées de F se réécrivent alors :

$$\begin{aligned} F_L(K, L) &= f'(k) \\ F_L(K, L) &= f(k) - kf'(k) \\ LF_{KK}(K, L) &= f''(k). \end{aligned}$$

Nous avons G (I, K, E, L) = L$g(i, e, k)$. En dérivant, on a :

$$\begin{aligned} G_I &= g_i \\ G_K &= g_e \\ G_E &= g_e \\ G_L &= g - ig_i - eg_e - kg_k. \end{aligned}$$

En dérivant une seconde fois, on a :

$$G_{II} = \frac{1}{L} g_{ii}$$

$$G_{IK} = \frac{1}{L} g_{ik}$$

$$G_{IE} = \frac{1}{L} g_{ie}$$

$$G_{IL} = -\frac{1}{L} [ig_{ii} + eg_{ie} + kg_{ik}]$$

$$G_{KK} = \frac{1}{L} g_{kk}$$

$$G_{KE} = \frac{1}{L} g_{ek}$$

$$G_{KL} = -\frac{1}{L} [ig_{ki} + eg_{ke} + kg_{kk}]$$

$$G_{EE} = \frac{1}{L} g_{ee}$$

$$G_{EL} = -\frac{1}{L}\left[i g_{ie} + e g_{ee} + k g_{ke}\right]$$

$$G_{LL} = \frac{1}{L}\left[i^2\, g_{ii} + e^2\, g_{ee} + k g_{kk} + 2ik g_{ik} + 2ek g_{ek}\right].$$

Il découle des propriétés de G que g vérifie : $g_i > 0$ et $g_e > 0$.
G étant convexe, g l'est aussi, donc :

$$g_{ii} > 0, \qquad g_{ee} > 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_{ii} & g_{ie} \\ g_{ie} & g_{ee} \end{vmatrix} > 0 \qquad \text{et} \qquad D = \begin{vmatrix} g_{ii} & g_{ie} & g_{ik} \\ g_{ei} & g_{ee} & g_{ek} \\ g_{ki} & g_{ke} & g_{kk} \end{vmatrix} > 0.$$

Calcul des dérivées de *i* et *e* par rapport à q, λ et k

Nous avons :

$$q = g_i\,(i,\ e,\ k)$$
$$\lambda = g_e\,(i,\ e,\ k)$$

On obtient, en dérivant par rapport à q :

$$1 = \frac{\partial i}{\partial q}\, g_{ii} + \frac{\partial e}{\partial q}\, g_{ie}$$
$$0 = \frac{\partial i}{\partial q}\, g_{ei} + \frac{\partial e}{\partial q}\, g_{ee}.$$

On déduit que :

$$\frac{\partial i}{\partial q} = \frac{1}{\Delta}\, g_{ee} > 0$$
$$\frac{\partial e}{\partial q} = -\frac{1}{\Delta}\, g_{ie},$$

car $\Delta = g_{ii}g_{ee} - g_{ie}^2 > 0$.

De même, en dérivant par rapport à λ, il vient :

$$0 = \frac{\partial i}{\partial \lambda}\, g_{ii} + \frac{\partial e}{\partial \lambda}\, g_{ie}$$
$$1 = \frac{\partial i}{\partial \lambda}\, g_{ei} + \frac{\partial e}{\partial \lambda}\, g_{ee},$$

d'où

$$\frac{\partial i}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\Delta}\, g_{ie}$$
$$\frac{\partial e}{\partial \lambda} = \frac{1}{\Delta}\, g_{ii} > 0.$$

On calcule de la même façon que :

$$\frac{\partial i}{\partial k} = \frac{1}{\Delta}\,[-g_{ee}g_{ik} + g_{ie}g_{ek}]$$
$$\frac{\partial e}{\partial k} = \frac{1}{\Delta}\,[g_{ie}g_{ik} - g_{ii}g_{ke}].$$

Nous déduisons que :

$$\omega_{11} = r + \delta + \frac{1}{\Delta}\,[g_{ee}g_{ik} - g_{ie}g_{ek}]$$

$$\omega_{12} = \frac{1}{\Delta}\,[g_{ii}g_{ke} - g_{ie}g_{ik}]$$

$$\omega_{13} = -f''\,(k) + \frac{1}{\Delta}\,[-g_{ii}g_{ek}^2 + 2g_{ie}g_{ek}g_{ik} - g_{ee}g_{ik}^2 + g_{ii}g_{ee}g_{kk} - g_{kk}g_{ie}^2]$$

$$\omega_{21} = -i - \frac{k}{\Delta}\left[g_{ee}g_{ik} - g_{ie}g_{ek}\right]$$

$$\omega_{22} = r + s - e - \frac{k}{\Delta}\left[g_{ii}g_{ke} - g_{ie}g_{ik}\right]$$

$$\omega_{23} = kf''(k) - \frac{k}{\Delta}\left[-g_{ee}g_{ik}^2 + 2g_{ie}g_{ek}g_{ki} - g_{ii}g_{ek}^2 + g_{ii}g_{ee}g_{kk} - g_{kk}g_{ie}^2\right]$$

$$\omega_{31} = \frac{1}{\Delta}\left[g_{ee} + kg_{ie}\right]$$

$$\omega_{32} = -\frac{1}{\Delta}\left[g_{ie} + kg_{ii}\right]$$

$$\omega_{33} = -(\delta + e - s) + \frac{1}{\Delta}\left[-g_{ee}g_{ik} + g_{ie}g_{ek} - k\left(g_{ie}g_{ik} - g_{ii}g_{ek}\right)\right].$$

Les signes des ω_{ij} ne posent aucune difficulté. On rappelle que :

$$\begin{cases} \mathrm{G_{IE}G_{IK}} - \mathrm{G_{II}G_{EK}} \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{G_{IE}G_{EL}} - \mathrm{G_{EE}G_{LI}} \geq 0 \\ \mathrm{G_{EE}} + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}\mathrm{G_{IE}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}\mathrm{G_{II}} + \mathrm{G_{IE}} > 0, \end{cases}$$

et g vérifie alors :

$$\begin{cases} g_{ie}g_{ik} - g_{ii}g_{ek} \geq 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{g_{ke}g_{ie} - g_{ik}g_{ee}}{g_{ii}g_{ee} - g_{ie}^2} - j \leq 0 \\ g_{ee} + kg_{ie} > 0 \quad \text{et} \quad kg_{ii} + g_{ie} > 0. \end{cases}$$

En outre, $r + s - e > 0$, $\delta + e - s > 0$ et $f''(k) < 0$. De plus,

$$\mathrm{D} = -g_{ee}g_{ik}^2 + 2g_{ie}g_{ek}g_{ki} - g_{ii}g_{ek}^2 + g_{ii}g_{ee}g_{kk} - g_{kk}g_{ie}^2$$

est égal au déterminant de g qui est positif par hypothèse. On déduit alors sans difficulté que : $\omega_{11} > 0$, $\omega_{12} \leq 0$, $\omega_{13} > 0$, $\omega_{21} \leq 0$, $\omega_{22} > 0$, $\omega_{23} < 0$, $\omega_{31} > 0$, $\omega_{32} < 0$ et $\omega_{33} \leq 0$.

Démonstration du lemme

Les valeurs propres de H sont solutions de l'équation :

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} - \lambda & \omega_{12} & \omega_{13} \\ k\,[r+\delta-j] - k\omega_{11} & r+s-e-k\omega_{12}-\lambda & -k\omega_{13} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33-\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Il est aisé de vérifier que $r + s - e$ est valeur propre. En effet, en remplaçant λ par $r + s - e$ dans le déterminant ci-dessus et en se rappelant qu'à l'état stationnaire : $r + s - e = r + \delta - j$, on a :

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} - r - \delta + j & \omega_{12} & \omega_{13} \\ k\,[r+\delta-j] - k\omega_{11} & -k\omega_{12} & -k\omega_{13} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} - r - s + e \end{vmatrix} = 0.$$

La première ligne étant égale à $-k$ fois la seconde, ce déterminant est nul. Donc, $\lambda_1 = r + s - e$ est valeur propre de H. Le calcul de la trace donne : $\mathrm{tr}\, H = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2\,[r + s - e]$. On déduit que : $\lambda_2 = r + s - e - \lambda_3$; donc, si λ est valeur propre, $r + s - e - \lambda$ l'est également.

Nous n'avons plus qu'à calculer le déterminant de H et à montrer qu'il est négatif. Le déterminant de H s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ k\,[r+\delta-j] - k\omega_{11} & r+s-e-k\omega_{12} & -k\omega_{13} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix}.$$

En multipliant la première ligne par k et en l'additionnant à la seconde, on obtient :

$$\frac{1}{k}\begin{vmatrix} k\omega_{11} & k\omega_{12} & k\omega_{13} \\ k\,[r+\delta-j] & r+s-e & 0 \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix}.$$

Finalement, le déterminant de H prend la forme suivante dont on déduit aisément le signe connaissant ceux des ω_{ij} :

$$\det H = -k(r+\delta-j)(\omega_{12}\omega_{33}-\omega_{13}\omega_{32})+(r+s-e)(\omega_{11}\omega_{33}-\omega_{13}\omega_{31}) < 0.$$

On conclut alors que H a deux valeurs propres réelles positives et une valeur propre réelle négative. Ce résultat s'établit par l'absurde. En effet, $r + s - e$ étant une valeur propre réelle positive, si les deux autres valeurs propres étaient complexes, elles seraient alors nécessairement conjuguées. Le déterminant de H, égal au produit des valeurs propres serait alors positif, car $r + s - e$ est positif et le produit des deux valeurs propres conjuguées le serait également. Ceci est en contradiction avec le fait que : $\det H < 0$, et les valeurs propres de H sont donc nécessairement réelles, l'une étant négative et les deux autres positives. □

• Références bibliographiques

D'AUTUME, A., MICHEL, P. (1985). – "Future Investment Constraints Reduce Present Investment", *Econometrica,* 53 (), pp. 203-206.

EISNER, R., STROTZ, R. H. (1963). – "Determinants of Business Investments", in Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall, éditeur. *Impacts of Monetary Policy,* Commision on Money and Credit.

GALEOTTI, M., SCHIANTARELLI, F. (1991). – "Generalized Q Models for Investment", *The Review of Economics and Statistics,* LXXIII (3), pp. 383-392.

GEORGOUTSOS, D., SCHIANTARELLI, F. (1990). –"Monopolistic Competition and the Q Theory of Investment", *The European Economic Review,* 34(), pp. 1061-1078.

GOULD, J. P. (1968). – "Adjustment Costs in the Theory of Investment of the Firm", *Review of Economic Studies,* pp. 47-55.

HAYASHI, F. (1982). – "Tobin's Marginal *q* and Avarage *q*: A Neoclassical Interpretation", *Econometrica,* 50, pp. 213-224.

KODDE, D. A., PALM, F. C., PFANN, G. A., (1990). – "Asymptotic Least-Squares Estimation Efficiency Considerations and Applications", *Journal of Applied Econometrics,* 5(), pp. 229-243.

LICANDRO, O. (1992). – "Investment Dynamics and Capacity Utilization under Monopolistic Competition", *Annales d'Economie et de Statistique,* 27, pp. 91-113.

LICANDRO, O. (1992). – "Investment Models, Factor Complementarity and Monopolistic Competition", *Recherches Economiques de Louvain,* 58(1), pp. 51-73.

LUCAS, R. E. (1967). – "Adjustment Costs and the Theory of Supply", *Journal of Political Economy,* 75, pp. 321-334.

LUCAS, R. E. (1967). – "Optimal Investment Policy and the Flexible Accelerator", *International Economic Review,* 8, pp. 78-85.

MORTENSEN, D. T. (1973). – "Generalized Costs of Adjustment and the Dynamic Factor Demand Theory", *Econometrica,* 41, pp. 657-665.

NADIRI, I., ROSEN, S. (1969). – "Interrelated Factor Demand Functions", *American Economic Review,* pp. 457-471.

NICKELL, S. J. (1986). – "Dynamic Models of Labour Demand", in Ashenfelter O. et Layard R., éditeurs, *Labour Supply,* Elsevier Sciences Publishers BV.

SHAPIRO, M. D. (1986). – "The Dynamics Demand for Capital and Labor". *The Quarterly Journal of Economics,* 101(), pp. 513-542.

TREADWAY, A. B. (1971). – "The Rational Multivariate Flexible Accelerator", *Econometrica,* 39, pp. 845-855.